ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ
Кафедра «Прикладная математика»

Конспект лекций

по математическим методам анализа и синтеза систем

Автор

Братищев А.В.

Ростов-на-Дону, 2016

Аннотация

Конспект лекций для студентов направления 01.03.02 – прикладная математика и информатика. Лекции читаются в мультимедийном режиме, поэтому конспект не содержит доказательств, рисунков и примеров. Предполагается, что студент имеет распечатку этого курса, а во время лекции вносит в соответствующие места распечатки (на обратной стороне листа) доказательства, рисунки, примеры, а также выделяет ключевые слова определений.

Лекции читаются в двух спецкурсах 7 и 8 семестров: “Стандартные пакеты прикладной математики” и собственно “Математические методы анализа и синтеза систем”. Первая и вторая главы читаются в первом спецкурсе. В свою очередь на практических занятиях обоих семестров осваивается стандартный пакет MATLAB+ SIMULINK с целью проектирования S-моделей различных классов управляемых динамических систем и последующих вычислительных экспериментов на этих моделях.

Спецкурс существенно опирается на курс математики автора для первого-третьего семестров, конспект которого также выложен на сайте кафедры.

Представлен список вопросов и теорем к зачету и экзамену и список лабораторных работ.

Автор:

доктор физ.-мат. наук,

профессор кафедры "Прикладная математика"

Братищев А.В.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1

УПРАВЛЯЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Опр. Управляемой динамической системой (УДС) называется восьмерка объектов $\Sigma := \{T, U, U(\cdot), X, Y, Y(\cdot), \delta, \lambda\}$, где

T - область определения рассматриваемых в системе функций (упорядоченное множество, часто - множество моментов времени);

U - множество значений функций входа системы (входной алфавит);

$U(\cdot) = \{u : T \to U\}$ - множество допустимых функций входа (входов, входных воздействий) системы;

Y - множество значений функций выхода системы;

$Y(\cdot) := \{y : T \to Y\}$ - множество допустимых функций выхода (выходов) системы;

X - множество состояний системы;

$\delta : (T \times T)^+ \times X \times U \to Y$ - функция перехода (переходная функция) состояний, которая определяет по заданной функции входа $u(\cdot) \in U(\cdot)$ и начальному состоянию системы $x = x(\tau) \in X$ состояние для $\forall t \geq \tau,\ t \in T,$ по правилу $x(t) := \delta(t; \tau, x, u(\cdot))$ здесь $(T \times T)^+ := \{(t, t_0) : t \geq t_0\}$ есть правая полуплоскость t, t_0- плоскости, определяемая биссектрисой первой и третьей четвертей. $\lambda : T \times X \to Y$ - выходное отображение системы, определяющее функцию выхода $y(t) := \lambda(t, \delta(t; \tau, x, u(\cdot)))$.

Определение Сужения функции входа $u_{[t_1,t_2]} := u(\cdot)\big|_{[t_1,t_2]}$, (выхода $y_{[t_1,t_2]} := y(\cdot)\big|_{[t_1,t_2]}$) называются отрезком функции входа (отрезком функции выхода).

ЗАМЕЧАНИЕ Функция перехода должна удовлетворять условиям:

1) (согласованность) $\forall u(\cdot) \in U(\cdot)\ \forall x \in X\ \forall t \in T\ \ \delta(t, t, x, u(\cdot)) = x;$

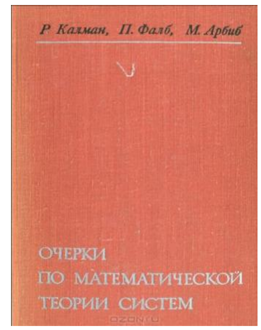
2) (полугрупповое свойство)

$$\forall t_1 < t_2 < t \ \forall u(\cdot) \in U(\cdot) \ \forall x \in X \ \ \delta(t, t_1, x, u(\cdot)) \equiv \delta\big(t, t_2, \delta\big(t_2, t_1, x, u(\cdot)\big), u(\cdot)\big);$$

3) (причинность) Если $u'(\cdot), u''(\cdot) \in U(\cdot)$ и $u'_{(t_0,t]} = u''_{(t_0,t]}$, то

$$\delta(t; t_0, x, u'(\cdot)) = \delta(t; t_0, x, u''(\cdot)).$$

Рудольф Калман (1930) – американский инженер, исследователь в области теории управления. 1957-58 - инженер в Исследовательской лаборатории компании IBM. Участвовал в работке дискретных систем управления, а также в приложениях теории Ляпунова к разработке систем управления. 1958-1964 - Институт перспективных исследований в Принстоне. В этот период пионерские работы в области теории управления: вопросы наблюдаемости и управляемости систем управления, теория оптимальных систем управления. 1959 г. -разработка фильтра Калмана: основываясь на предшествующих работах Винера, Колмогорова, Шеннона и др., К. разработал технику оценки вектора состояния системы управления с использованием неполных и неточных (зашумленных) измерений (используется в частности, в системах навигации). С **1964** г. - отделение «Электротехника, механика и исследование операций» Стэнфордского университет. В этот период занимался теорией реализаций и теорией алгебраических систем.



Опр. Свободная динамическая система (СДС) это частный случай УДС, когда множество допустимых входных воздействий $U(\cdot)$ содержит один элемент.

ЗАМЕЧАНИЕ Это формальное определение. Менее формально свободная динамическая система это математический объект, соответствующий реальным физическим, химическим, биологическим и другим системам, эволюция которых на бесконечном интервале времени однозначно определяется начальным состоянием. Свободные динамические системы – образы соответствующих реальных систем. Они также изменяют свое состояние с течением времени.

Джордж Дэ́вид Би́ркгоф (1884-1944) – американский математик. Положил основание общей теории динамических систем, выделив в них особенно интересные классы движений - центральные и рекуррентные движения. Известен работами по статистической механике и эргодической теории. Доказал последнюю теорему Пуанкаре. Положил начало теории гиперциклических операторов. Президент AMS (1925-1926). Известные ученики: М. Морс, Х. Уитни. Сын - математик Гаррет Биркгоф. Предложил математическую теорию эстетики в работе «Эстетическая мера» (1933).

Опр. УДС Σ называется обратимой, если функция перехода определена при всех t и τ.

Опр. Пара (t, x), где $t \in T$, $x \in X$ называется событием (фазой, состоянием) системы Σ, а пара (T,X) - пространством событий (фазовым пространством) этой системы.

Опр. Функция перехода $x(t):=\delta(t;\tau,x,u(\cdot))$ называется траекторией (движением, орбитой, потоком, решением). Говорят, что управление u переносит (переводит, изменяет, преобразует) состояние x системы в состояние $x(t)\left(=\delta(t;\tau,x,u(\cdot))\right)$.

ПРИМЕР Пусть для автономной системы (АС) $\begin{cases} x_1' = f_1(x_1,...,x_n) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \\ x_n' = f_n(x_1,...,x_n) \end{cases}$ $x:=(x_1,...,x_n)\in G\subset \tilde{\mathrm{R}}^n$

выполнена теорема единственности в области G для $t\in(-\infty,\infty)=:T$. Сопоставим ей абстрактную СДС по следующему правилу. Положим множество состояний $X:=G$. Обозначим $x(t;\tau,x)$ решение задачи Коши АС с начальным условием $x(t;\tau,x)=x$, и определим функцию перехода по правилу $\delta(t;\tau,x):=x(t;\tau,x)$ В силу теоремы единственности решения задачи Коши выполняются все 3 требования к этой функции, и полученная СДС является обратимой динамической системой.

Опр. УДС Σ называется стационарной, если:

1) T есть аддитивная группа (определена операция сложения);
2) множество допустимых функций входа $U(\cdot)$ замкнуто относительно операции сдвига аргумента: если $u(\cdot)\in U(\cdot)$, то $\forall\tau\in T$ $u(\cdot+\tau)\in U(\cdot)$;
3) $\forall s\in T$ $\delta(t+s;\tau+s,x,u(\cdot+s))\equiv\delta(t;\tau,x,u(\cdot))$;
4) $\forall t\in T$ $\lambda(t,\cdot)\equiv\lambda(\cdot):X\to Y$.

Опр. УДС называется системой с непрерывным временем, если $T=\mathrm{R}$, и системой с дискретным временем, если $T=\mathrm{Z}$.

Опр. УДС называется конечным автоматом (Мура), если она дискретная по времени и $card(U)<\infty$, $card(X)<\infty$, $card(Y)<\infty$, то есть множества имеют конечное число элементов.

Опр. УДС называется конечномерной, если U, X, Y есть конечномерные векторные пространства:

$$m:=\dim(U)<\infty,\ n:=\dim(X)<\infty,\ l:=\dim(Y)<\infty.$$

Опр. УДС называется линейной, если:

1) множества $U, U(\cdot), X, Y, Y(\cdot)$ являются векторными пространствами;
2) отображения $\delta(t;\tau,\cdot,\cdot):X\times U(\cdot)\to X$, $\eta(t,\cdot):X\to Y(\cdot)$ являются линейными.

Из определения вытекает

СЛЕДСТВИЕ Функции перехода и выхода линейной УДС имеют вид

$$\begin{cases} x(t)=\delta(t;\tau,x,u(\cdot))=\tilde{\Phi}(t,t_0)x+\tilde{\Theta}(t,t_0)u(\cdot) \\ y(t)=\lambda(t,x)=\tilde{C}(t)x \end{cases},$$

где $\tilde{\Phi}(t,t_0):X\to X$, $\tilde{\Theta}(t,t_0):U(\cdot)\to X$, $\tilde{C}(t):X\to Y$ - линейные операторы; $\tilde{\Phi}(t,t_0)x:=\delta(t;\tau,x,0)$, $\tilde{\Theta}(t,t_0)u(\cdot):=\delta(t;\tau,0,u(\cdot))$.

Опр. Конечномерная УДС Σ называется гладкой, если:

1) $T = \mathrm{R}$;

2) $T, X, U, U(\cdot)$ топологические пространства;

3) $\forall \tau, x \quad x(t) = \delta(t;\tau,x,u(\cdot))$ гладкая функция каждый раз, когда $u(\cdot)$ есть функция непрерывная.

ЗАМЕЧАНИЕ В случае гладкой системы существует такое отображение $F: T \times X \times U \to X$, что переходное отображение δ представляет собой общее решение НСОДУ

$$\frac{dx}{dt} = F\left(t, x, u\right).$$

Пусть УДС Σ линейная, конечномерная и гладкая. В выделенном в X базисе операто ры $\tilde{\Phi}(t,t_0),\ \tilde{C}(t)$ могут быть заданы в виде операторов умножения на соответствующие матрицы $\Phi(t,t_0),\ C(t)$. Можно показать, что определенный на пространстве входных процессов $U(\cdot)$ оператор $\tilde{\Theta}(t,t_0)$ представим в виде интегрального оператора

$$\left[\Theta(t,t_0)\right]u(\cdot) = \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

где $K(t,\tau)$ - функциональная матрица размера $n \times m$ (ядро оператора). Тогда предыдущая система перепишется в виде

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t,t_0)x + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ y(t) = C(t)x \end{cases}.$$

С помощью дифференцирования по t первого из уравнений и полугруппового свойства функции перехода устанавливается равенство $\forall \tau \le t \ \ K(t,\tau) = \Phi(t,\tau)K(\tau,\tau) =: \Phi(t,\tau)B(\tau)$, а также равенство

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

где $A(t) := \left.\frac{\partial \Phi(v,t)}{\partial v}\right|_{v=t}$.

ВЫВОД Для линейной конечномерной гладкой системы существуют такие функциональные матрицы $A(t),\ B(t),\ C(t)$ размеров соответственно $n \times n,\ n \times m,\ l \times n$, что ее функцию перехода и функцию выхода можно описать такими уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases}.$$

Первое уравнение называется уравнением состояния (уравнением перехода, эволюционным уравнением), а второе - уравнением выхода

Опр. Линейная УДС, описываемая предыдущей системой называется собственной (строго реализуемой). УДС называется несобственной если, она описывается системой вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ Линейная конечномерная гладкая УДС стационарна тогда и только тогда, когда матрицы $A(t),\ B(t),\ C(t)$ не зависят от t:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}.$$

В этом случае фундаментальная матрица (переходная матрица состояний системы) имеет такой явный вид $\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)},\ \Phi(t) := e^{At}$.

СЛЕДСТВИЕ Теоретико-управленческий смысл формулы Коши состоит в том, что она дает в явном виде формулу вычисления состояния линейной стационарной УДС в произвольный момент времени t по известному начальному состоянию $x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \dots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ и известному входу системы $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{pmatrix}$:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau.$$

При этом выход системы вычисляется, очевидно, по формуле

$$x(t) = Ce^{(t-t_0)A}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau.$$

Опр. Состояние $x \in X$ линейной системы называется управляемым, если

$$\exists u(\cdot) \in U(\cdot)\ \exists t > 0\ \ \delta(t;0,x,u(\cdot)) = 0$$

Опр. Состояние $x \in X$ системы называется достижимым (из начала координат), если

$$\exists u(\cdot) \in U(\cdot)\ \exists t > 0\ \ \delta(t;0,0,u(\cdot)) = x$$

Опр. УДС Σ полностью управляемая (полностью достижимая), если все ее состояния управляемы (достижимы).

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Для непрерывной стационарной линейной системы полностью управляемая система является полностью достижимой и наоборот. Такую систему можно перевести из любого состояния в любое другое состояние с помощью подходящего управления за конечное время.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Для непрерывной стационарной линейной системы множество управля емых состояний является подпространством в X (управляемое подпространство).

Опр. Состояние $x \in X$, $x \neq 0$ линейной системы Σ называется ненаблюдаемым, если для нулевого входного сигнала $u(\cdot) = 0$ выходной сигнал будет нулевым:

$$\forall t \geq 0 \;\; \lambda\left(t; \delta(t; 0, x, 0)\right) = 0.$$

Опр. Два состояния $x_1 \neq x_2$ линейной системы Σ принадлежат одному классу наблюдаемых состояний, если $\forall t \geq 0 \;\; \forall u(\cdot) \in U(\cdot) \;\; \lambda\left(t; \delta(t; 0, x_1, u(\cdot))\right) = \lambda\left(t; \delta(t; 0, x_2, u(\cdot))\right)$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Состояния $x_1 \neq x_2$ принадлежат одному классу наблюдаемых состояний $\Leftrightarrow$ состояние $x_1 - x_2$ ненаблюдаемое.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Множество ненаблюдаемых состояний линейной системы Σ образует подпространство в X (ненаблюдаемое подпространство).

Опр. Линейная УДС Σ называется полностью наблюдаемой, если все ее ненулевые состояния не являются ненаблюдаемыми ($\equiv$ являются наблюдаемыми).

Следующий критерий полной наблюдаемости системы доказывается методом от противного.

ЗАМЕЧАНИЕ Линейная УДС Σ полностью наблюдаемая $\Leftrightarrow$ по известным входу и вы ходу $u(\cdot)$, $y(\cdot)$ всегда однозначно определяется начальное состояние системы $x_0 = x(0)$.

Опр. Линейная УДС Σ называется идентифицируемой (восстанавливаемой, определяемой), если существует $t_0 \in T$ такое, что по $u_{(-\infty, t_0]}$, $y_{(-\infty, t_0]}$ всегда однозначно определяется конечное состояние системы $x(t_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ Для непрерывной стационарной линейной системы полностью наблюдаемая система является идентифицируемой и наоборот.

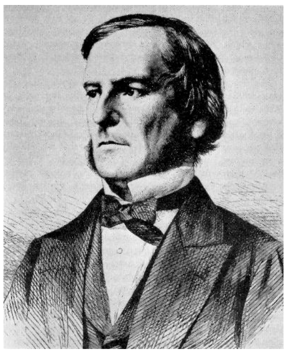
ГЛАВА 2 ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СИНТЕЗА АВТОМАТОВ

§ 2.1 Булевы функции. Синтез логических схем.

Теории автоматов предшествует теория функциональных преобразователей и комбинационных схем.

Опр. Обозначим множество $A := \{0,1\}$. Отображение $F: A^n \to A^m$ называется функциональным преобразователем.

Опр. Отображение $f: A^n \to A$ называется двоичной (булевой) функцией от n двоичных переменных.



Джордж Буль (1815-1864) - английский математик и логик. Один из основателей математической логики. Идеи применения символическо го метода к логике впервые высказаны им в статье «Математический анализ логики» (1847). В «Исследование законов мышления» (1854) , изложен общий символический метод логического вывода. Показал, как из любого числа высказываний, включающих любое число терми нов, вывести любое заключение, следующее из этих высказываний, путём чисто символических манипуляций.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Функциональный преобразователь $F: A^n \to A^m$ является отображением

$F=(f_1,...,f_m)$, координатные функции которого есть булевы функции от n переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Существует $16=2^{2^2}$ булевых функций от двух двоичных переменных (бинарные операции): $p\vee q$ - дизъюнкция; $p\wedge q=pq$ - конъюнкция; $p\Rightarrow q$ - импликация; $p\oplus q$ - сложение по модулю два; $p\Leftrightarrow q$ - эквиваленция; $p\,|\,q=\neg(pq)$ - штрих Шеффера; $p\downarrow q=\neg(p\vee q)$ - стрелка Пирса; и так далее.

p	q	0	1	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\Rightarrow q$	$p\oplus q$	$p\Leftrightarrow q$	$p\,|\,q$	$p\downarrow q$	…
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	.
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	…
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	…
1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	

Опр. Булева функция задаваемая в виде упорядоченной системы унарных и бинарных операций над входящими в неё двоичными переменными и постоянными 0, 1, называется логической формулой (переключательной функцией).

ЗАМЕЧАНИЕ Булевы функции могут задаваться аналитически, графически, таблично, в векторной форме и в виде логических схем.

ПРИМЕР Логическая формула $f(p,q,r)=\neg p\vee q\oplus rq(p\vee r)$ имеет такое табличное задание:

p	q	r	$\neg p$	$\neg p\vee q$	$r\wedge q$	$p\vee q$	$rq(p\vee r)$	$(\neg p\vee q)\oplus rq(p\vee r)$
0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0

Опр. Логическая формула называется тавтологией (тождественно -ложной), если порождаемая ею булева функция тождественно равна единице (нулю).

Опр. Логические формулы называются равносильными, если соответствующие им булевы функции совпадают.

Обозначение. Равносильность формул обозначается знаком =.

ПРИМЕР Докажем равносильность формул $1\oplus p$ и $\bar{p}$.

p	$1\oplus p$	$\bar{p}$
0	1	1
1	0	0

Определение Суперпозицией (композицией) функций называется сложная функция, составленная из этих функций.

ТЕОРЕМА 2.1 (*Шеннона*) Любая булева функция может быть представлена как суперпозиция трёх операций $(\neg,\ \vee,\ \wedge)$ над двоичными переменными

$$f(x_1,..,x_n)=\bigvee_{f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_n^{\sigma_n}$$ (- формула Шеннона),

где $x_i^{\sigma_j} := \begin{cases} x_i, & \sigma_j = 1 \\ \bar{x}_i, & \sigma_j = 0 \end{cases}.$

Опр. Конъюнктом называется любая конъюнкция двоичных переменных или их отрицаний.

ПРИМЕР $x_1\bar{x}_2x_3x_2$.

Опр. Булева функция вида $f(x_1,...,x_n) = k_1 \vee ... \vee k_s$, где k_i - конъюнкты, называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

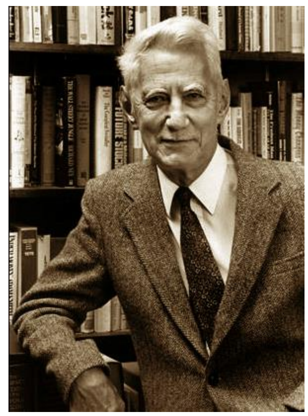
Опр. Если каждый конъюнкт содержит все переменные (причём только саму переменную или её отрицание), то ДНФ называется совершенной (СДНФ).

СЛЕДСТВИЕ Из формулы Шеннона следует, что любая булева функция представима в виде СДНФ (причём это представление единственно, с точностью до перестановки конъюнктов).

АЛГОРИТМ приведения к СДНФ с помощью таблицы истинности:

1) заполнить таблицу истинности для функции f;

2) по строкам, в которых функция равна 1, выписать формулу Шеннона.



Клод Э́лвуд Ше́ннон (1916-2001) -американский инженер и математик, его работы являются синтезом математических идей с конкретным анализом чрезвычайно сложных проблем их технической реализации. Является основателем теории информации, нашедшей применение в современных высокотехнологических системах связи. Внес огромный вклад в теорию вероятностных схем, теорию автоматов и теорию систем управления — области наук, входящие в понятие «кибернетика». В статье «Математическая теория связи», 1948 г., предложил использовать слово «бит» для обозначения наименьшей единицы информации.

ПРИМЕР Представим формулу $\bar{p} \vee q \oplus rq(p \vee q)$ в виде СДНФ.

Руководствуясь теоремой Шеннона, выписываем дизъюнкцию тех конъюнктов, на которых формула принимает значение 1. Последние берем из таблицы истинности. Тогда

$$\bar{p} \vee q \oplus rq(p \vee q) = (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}).$$

ПРИМЕР Ранее мы составили таблицу истинности для формулы $f(p,q,r) = \neg p \vee q \oplus rq(p \vee r)$. Поэтому в соответствии с алгоритмом имеем такую ее СКНФ $\neg p \vee q \oplus rq(p \vee r) = (p \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee q \vee r) \wedge (\bar{p} \vee q \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r})$

Опр. Замыканием подмножества М булевых функций называется множество $[M]$ булевых функций, которые получаются из M с помощью операции суперпозиции (составления сложных функций).

ПРИМЕР Для $M = \{\wedge\}$ имеем $[M] = \{x_1 \wedge x_1 = x_1,\ x_2,\ x_1 \wedge x_2,\ x_3,\ x_1 \wedge x_3,\ x_1 \wedge x_2 \wedge x_3, ...\}$

Определение Подмножество M булевых функций называется функционально полным (базисом), если $[M]$ совпадает со всем множеством булевых функций.

ПРИМЕР В силу теоремы Шеннона подмножество $M=\{\neg,\vee,\wedge\}$, называемое базисом Буля, функционально полное.
ЗАМЕЧАНИЕ Известен критерий Поста функциональной полноты произвольного множества M .

Опр. Функционально полное множество M называется базисом (минимальным базисом), если удаление хотя бы одной функции из M делает оставшееся множество не функционально полным.
ТЕОРЕМА 2.2 Следующие подмножества операций являются базисами:
1) $M=\{\neg,\vee\}$;   2) $M=\{\neg,\wedge\}$;   3) $M=\{|\}$;   4) $M=\{1,\wedge,\oplus\}$.

Опр. Класс электронных схем, реализующих одну и ту же основную логическую функцию, называется логическим элементом (ЛЭ).
ЗАМЕЧАНИЕ Штрих Шеффера имеет реализации в так называемых ТТЛ, ДТЛ, МОП-логике и ряд других (курсы электроники и схемотехники).
Обозначение. Логические элементы называются "и", "или", "не", "и-не", "или-не" и обозначаются ярлыками.

Опр. Логической схемой (ЛС) называется схема, составленная из логических элементов (ЛЭ), путем соединения выходов одних ЛЭ со входами других по следующим правилам:

1) выход ЛЭ можно присоединить ко входам нескольких ЛЭ;
2) на вход ЛЭ можно подавать сигналы двух типов (0 или 1);
3) выходы ЛЭ нельзя соединять вместе;
4) выходы ЛЭ нельзя подключать к собственным входам.

Опр. Логическая схема с n входами $x_1,...,x_n$ и m выходами $z_1,...,z_m$, описываемая функциональным преобразователем

$$\begin{cases} z_1=f_1(x_1,..,x_n) \\ \text{..........................} \\ z_m=f_m(x_1,..,x_n) \end{cases} : A^n \to A^m$$

называется комбинационной схемой (КС) или (n,m) – полюсником.
ЗАМЕЧАНИЕ В комбинационной схеме могут присутствовать и контуры (обратные связи). Согласно определению ЛС контур содержит не менее двух ЛЭ.

Опр. Две КС называются эквивалентными, если их функциональные преобразователи совпадают.

Опр. Задачей анализа КС называется задача нахождения ее функционального преобразователя. Последний формируется пошагово, двигаясь по логическим элементам схемы от ее выходов ко входам.
ПРИМЕР Произведем анализ КС

$$z=\overline{y_1y_2}=\overline{(\overline{x_1x_2})(x_1\vee x_2)}=x_1x_2\vee\overline{(x_1\vee x_2)}=x_1x_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_2=\overline{x_1\oplus x_2}$$

Опр. Задачей синтеза КС называется процесс ее построения, включающий три этапа:

1) нахождение функционального преобразователя по словесному описанию;

2) минимизация функционального преобразователя;

3) построение КС в данном элементном базисе.

ПРИМЕР Синтезировать в элементном базисе "и-не" КС принятия решений судьями в боксерском поединке. Перед каждым из трех судей по одной кнопке. Очко засчитывает ся, если после удара боксера нажатыми оказались на менее двух из трех кнопок.

1) Принятие решения засчитать удар будем обозначать 1, а не засчитать - 0. Решения трех судей отождествим с булевы ми переменными соответственно x_1, x_2, x_3, причем $x_i = 1$ озна чает, что i - ый судья принял решение засчитать удар, а $x_i = 0$ - не засчитать удар. Тогда таблица истинности функци онального преобразователя искомой КС должна иметь вид:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2) Применим метод минимизирующих карт (исходная карта будет той же, что и в примере). В результате получаем равносильную логическую формулу

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3 .$$

3) Используя полученную выше реализацию операций $\vee, |$ в элементном базисе "и-не", образуем в два шага комбинационную схему нашей функции.

§ 2.2 Автомат Мили. Синтез цифрового автомата.

Опр. Конечным автоматом Мили называется множество из пяти объектов $\mathrm{A} = (S, A, B, \delta, \lambda)$, в котором:

S - конечное непустое множество (пространство) состояний,

A - конечное непустое множество входных сигналов (входной алфавит),

B - конечное непустое множество выходных сигналов (выходной алфавит),

$\delta : S \times A \to S$ - функция переходов,

$\lambda : S \times A \to B$ - функция выходов.

ЗАМЕЧАНИЕ Автоматы могут задаваться:

1) в виде взвешенного орграфа (диаграмма состояний автомата) или в виде блок-схемы программы, реализующей поведение автомата,

2) таблично (функции переходов и выходов задаются в виде таблиц или совмещенной таблицы состояний).

Джордж Х. Мили (1927 –2010) - американский ученый. Работал в лабораториях Белла. Позже преподавал в Гарварде. Изобрёл одно-именный автомат Мили - тип преобразователя конечного состояния. Был также пионером модульного программирования - один из веду-щих дизайнеров языка программирования IPL-V и давний сторон-ник макропроцессоров в программирование на языке ассемблера.

Пример (автомат "мудрый отец") Пусть входной алфавит обознача ет оценки, приносимые из школы сыном

$$A = \{a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4,\ a_4 = 5\};$$

выходной алфавит – внешнюю реакцию отца

$$B = \{b_1 = \text{наказать},\ b_2 = \text{поругать},\ b_3 = \text{успокоить},$$
$$b_4 = \text{выразить надежду},\ b_5 = \text{порадоваться},\ b_6 = \text{похвалить}\}$$

пространство состояний – возможные психические состояния отца

$$S = \{q_1 = \text{крайнее раздражение}, q_2 = \text{напряженность},$$
$$q_3 = \text{миролюбие}, q_4 = \text{удовлетворение}\}.$$

Кроме того, психологами составлены таблицы функций переходов и выходов δ:

δ:

$a \setminus q$	q_1	q_2	q_3	q_4
a_1	q_1	q_1	q_2	q_2
a_2	q_2	q_2	q_3	q_3
a_3	q_2	q_3	q_3	q_4
a_4	q_3	q_3	q_4	q_4

λ:

$a \setminus q$	q_1	q_2	q_3	q_4
a_1	b_1	b_2	b_3	b_3
a_2	b_2	b_3	b_3	b_4
a_3	b_3	b_4	b_5	b_5
a_4	b_4	b_5	b_5	b_6

ЗАМЕЧАНИЕ При графическом изображении автомата состояния обозначают вершинами, а переходы - дугами с направлениями, определяемыми функцией переходов. При этом над дугой указываются соответствующие значения входа и выхода (взвешенная дуга)

―――

Рассмотрим специальный класс автоматов.

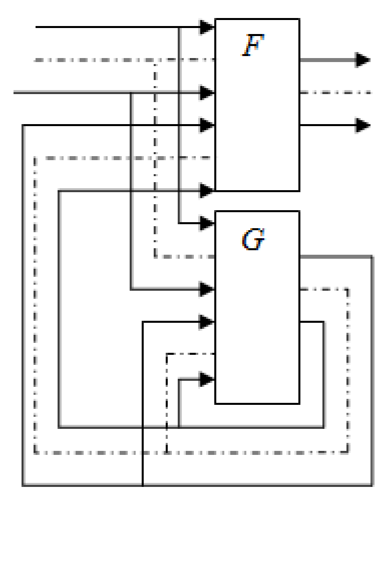
Опр. Пусть $A = \{0,1\}^n$, $B = \{0,1\}^m$, $S = \{0,1\}^p$. Тогда функции перехода и выхода

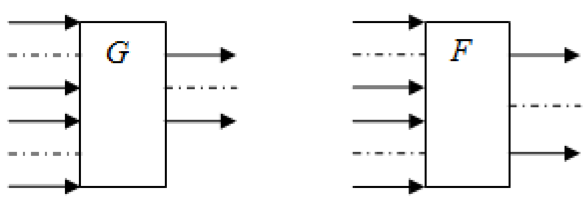
$$\delta : \{0,1\}^p \times \{0,1\}^n = \{0,1\}^{p+n} \to \{0,1\}^p, \quad \lambda : \{0,1\}^p \times \{0,1\}^n = \{0,1\}^{p+n} \to \{0,1\}^m$$

являются функциональными преобразователями. Обозначим ихсоответственно

$$G(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n) = \left(g_1(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n),...,g_p(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n)\right) : \{0,1\}^{p+n} \to \{0,1\}^p,$$
$$F(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n) = \left(f_1(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n),...,f_m(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n)\right) : \{0,1\}^{p+n} \to \{0,1\}^m,$$

и реализуем в виде логических схем (ЛС) с $p+n$ входами и соответственно p, m выходами. Составим из них ЛС, соединив выходы левого блока с соответствующими входами правого и левого блоков. n входов сделаем общими для обоих блоков. Получен ная ЛС всегда находится в определенном состоянии, пока на нее не действуют входные сигналы. Ввиду того, что один и тот же сигнал может вызвать разные выходные сигналы, эта ЛС не будет комбинационной. Она называется последовательностной схемой или цифровым автоматом.





ЗАМЕЧАНИЕ 1 Цифровой автомат задается еще и:

3) аналитически (G, F задаются в виде функциональных преобразователей),
4) в виде логической схемы.
ЗАМЕЧАНИЕ 2 Произвольный автомат можно реализовать как составную часть цифрового автомата.

Для построения последнего нам понадобятся некоторые понятия.

Опр. Пусть A - конечное множество и $2^n \geq card\, A$. Тогда инъективное отображение $K: A \to \{0,1\}^n$ называется кодировщиком множества A, а сюръективное $D: \{0,1\}^n \to A$ - декодировщиком множества A.

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть $\Phi: A \to B$ - отображение конечного множества A в конечное множество B и $2^n \geq card\, A,\ 2^m \geq card\, B$. Тогда это отображение можно представить в виде композиции $\Phi = D \circ F \circ K$, где $K: A \to \{0,1\}^n$ - кодировщик, $F: \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ - функциональный преобразователь и $D: \{0,1\}^m \to B$ - декодировщик. Область определения и область значений функционального преобразователя по числу элементов, вообще говоря, больше соответственно областей A, B для отображения Φ.

ПРИМЕР Образуем по автомату "мудрый отец" соответствующий цифровой автомат, который назовем "цифровой отец". Для этого составим, например, такие таблицы кодировщиков и декодировщиков.

Для $K_A: A \to \{0,1\}^2$

A	a_1	a_2	a_3	a_4
$X = \{0,1\}^2$	00	01	10	11

Для $K_S: S \to \{0,1\}^2$

S	q_1	q_2	q_3	q_4
$Z = \{0,1\}^2$	00	01	10	11

Для $D_S: \{0,1\}^2 \to S$

$Z = \{0,1\}^2$	00	01	10	11
S	q_1	q_2	q_3	q_4

Для $D_B: \{0,1\}^3 \to B$

$Y = \{0,1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
E	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	-	-

Z	X	$Z \times X$	$G:$	$F:$
x_1x_2	x_3x_4	$x_1x_2x_3x_4$	$x_1^+x_2^+$	$y_1y_2y_3$
00	00	0000	00	000
00	01	0001	01	001
00	10	0010	01	010
00	11	0011	10	011
01	00	0100	00	001
01	01	0101	01	010
01	10	0110	10	011
01	11	0111	10	100
10	00	1000	01	010
10	01	1001	10	010
10	10	1010	10	100
10	11	1011	11	100
11	00	1100	01	010
11	01	1101	10	011
11	10	1110	11	100
11	11	1111	11	101

Обозначим x_1x_2 код состояния, x_1x_2 - код входа, $x_1^+x_2^+$ - значение функции переходов, $y_1y_2y_3$ - значение функции выходов. По этим таблицам строим функцию переходов

$$G: \{0,1\}^2 \times \{0,1\}^2 = \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^2, \quad (x_1^+, x_2^+) := G(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

и функцию выходов

$$F: \{0,1\}^2 \times \{0,1\}^2 = \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^3, \quad (y_1, y_2, y_3) := F(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

цифрового автомата "цифровой отец":

Задаваясь элементным базисом, можно построить ЛС автомата "цифровой отец".

Опр. Автомат Мили $A=(S,A,B,\delta,\lambda)$, у которого функция выходов задается в виде $\lambda(q,a)=h(\delta(q,a))$, где $h:S\to B$ - отображение (называемое определяющим), называется автоматом Мура. То есть функция выходов автомата Мура определяется только состоянием автомата, но не q, как у автомата Мили, а состоянием $\delta(q,a)$, в которое он переходит при подаче буквы a.
Обозначение. $A=(S,A,B,\delta,h)$.

Э́двард Фо́рест Мур (1925-2003) - американский математик и информа тики. Работал в Bell Labs в течение 10 лет. Профессор университета Висконсин-Мадисон. Был первым, кто использовал наиболее распро странённый в наши дни тип конечного автомата - автомат Мура. Совместно с Клодом Шенноном Мур проделал плодотворную работу по теории вычислимости и построении надёжных схем с использова нием менее надёжных реле.

Опр. Реакцией состояния q автомата Мура называется отображение $h_q:A^*\to B^*$, определяемое по правилу

$$\forall a_1...a_n\in A^*\ \ h_q(a_1...a_n):=h(\delta(q,a_1))h(\delta(\delta(q,a_1),a_2))...h(\delta(\delta^*(q,a_1...a_{n-1}),a_n))$$

ЗАМЕЧАНИЕ Каждый автомат Мили порождает эквивалентный ему автомат Мура с числом состояний $\le card\,S\cdot card\,B$ по правилу: каждое состояние исходного автомата заменяется на несколько состояний в количестве, равном числу различных значений функции выходов при переходе автомат в это состояние.

Опр. Синтезом автомата называется построение автомата по заданному его поведению «вход-выход». На этапе абстрактного синтеза строятся таблицы переходов и выходов или граф автомата. Минимизируется число состояний. На этапе структурного синтеза строится схема, реализующая автомат из логических элементов заданного вида. На этапе надежностного синтеза преобразовывают построенные схемы с целью обеспечения надежности их функционирования. Если автомат строится из физических элементов, то на этапе технического синтеза отыскивают и устраняют искажения сигналов, возникающие вследствие неидеальности применяемых элементов.

Опр. Автомат Мура A обладает полной системой переходов, если

$$\forall q_1,q_2\in S\ \ \exists a\in A\ \ \delta(q_1,a)=q_2.$$

Опр. Автомат Мура A обладает полной системой выходов, если каждому состоянию автомата соответствует свой собственный выходной сигнал, отличный от выходных сигналов, соответствующих любому другому состоянию автомата.
ЗАМЕЧАНИЕ В предположении, что область значений функции выхода совпадает с выходным алфавитом, определяющая функция $h:S\to B$ автомата с полной системой выходов является биекцией.

Опр. Триггер - класс электронных устройств, обладающих способностью длительно находиться в одном из двух устойчивых состояний и чередовать их под воздействием внешних сигналов.

ПРИМЕР 1 Автомат Мура с двумя состояниями и отмеченной таблицей называется D-триггером (элементом задержки). В соответствии с определениями он обладает полными системами переходов и выходов.

	q_1	q_2
	0	1
a	q_1	q_1
b	q_2	q_2

После кодировки входного алфавита и пространства состояний получаем такую таблицу:

A	a	b
$\{0,1\}$	0	1

S	q_1	q_2
$\{0,1\}$	0	1

Здесь в момент времени t под воздействием входного сигнала $a(t)$ автомат переходит из состояния $q(t)$ в состояние $q(t+1)$.

$a(t)$	$q(t)$	$q(t+1)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

ПРИМЕР 2 Автомат Мура с двумя состояниями и отмеченной таблицей называется Т-триггером (триггером со счетным входом). Он также обладает полными системами переходов и выходов.

	q_1	q_2
	0	1
a	q_1	q_2
b	q_2	q_1

При аналогичной кодировке получаем вторую таблицу.

$a(t)$	$q(t)$	$q(t+1)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Опр. Набор из автоматов и логических элементов называется структурно полным, если из элементов этого набора можно построить любой конечный автомат.

ТЕОРЕМА 2.3 (*Глушкова о структурной полноте*) Для того чтобы набор был структурно полным, необходимо и достаточно, чтобы он содержал: 1) хотя бы один автомат с двумя состояниями, обладающий полными системами переходов и выходов, и 2) его логические элементы образовывали функционально полную систему для синтеза логических схем.

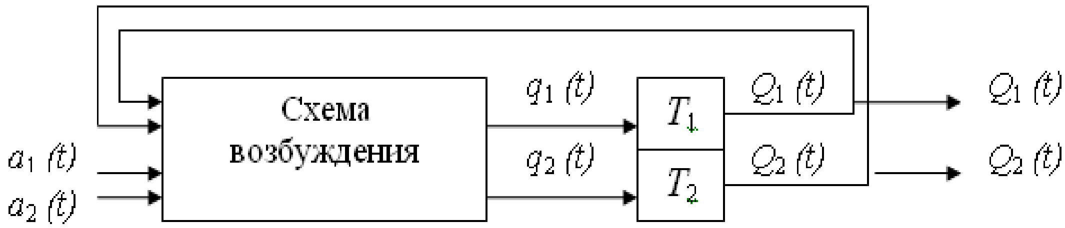
Ви́ктор Миха́йлович Глушко́в (1923-1982) - советский математик, кибернетик. Родился в Ростове-на-Дону. Окончил РГУ. Академик АН СССР (1964), депутат Верховного Совета СССР (1969). Автор трудов по алгебре, кибернетике и вычислительной технике, монографий «Синтез цифровых автоматов» 1962, «Введение в кибернетику», 1964, «Основы безбумажной информатики», 1982, «Логическое проектиро вание дискретных устройств», 1987, статьи «Кибернетика» в Британ ской энциклопедии. Создатель теории цифровых автоматов.
Под его руководством в 1966 году разработана первая в СССР персональная ЭВМ «МИР-1» (машина для инженерных расчётов).

Опр. Количество триггеров структурной схемы совпадает с числом разрядов простран ства состояний ассоциированного цифрового автомата. Функции, определяющие работу этих триггеров, называются функциями возбуждения автомата.

Опр. Каноническим методом синтеза автомата называется структурный синтез, который проводится в следующей последовательности:

1) Кодирование входных, выходных сигналов и состояний автомата.
2) Выбор элементов памяти и базиса логических элементов.
3) Запись уравнений функций выходов и функций возбуждения автомата.
4) Построение структурной схемы автомата.

ПРИМЕР В случае автомата «цифровой отец» и Т-триггеров регистр памяти имеет вид



По таблице переходов Т-триггеров образуем таблицу переходов их параллельного соединения

$a(t)$	$q(t)$	$q(t+1)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$(q_1(t),q_2(t))\backslash(Q_1(t),Q_2(t))$	00	01	10	11
00	00	01	10	11
01	01	00	11	10
10	10	11	00	01
11	11	10	01	00

$(Q_1(t+1),Q_2(t+1))$:

Таблица функций возбуждения заполняется так, чтобы функции переходов регистра памяти и автомата «цифровой отец» совпадали: $\delta=(Q_1(t+1),Q_2(t+1))$ (смотри функциональный преобразователь G автомата «цифровой отец»).

$(a_1(t),a_2(t))\backslash(Q_1(t),Q_2(t))$	00	01	10	11
00	00	00	01	01
01	01	01	10	10
10	01	10	10	11
11	10	10	11	11

В результате получаем такую таблицу $(q_1(t),q_2(t))$:

$(a_1(t),a_2(t))\backslash(Q_1(t),Q_2(t))$	00	01	10	11
00	00	01	11	10
01	01	00	00	01
10	01	11	00	00
11	10	11	01	00

ГЛАВА 3 ЭЛЕМЕНТЫ БИФУРКАЦИОННОГО АНАЛИЗА

§ 3.1. Основные понятия качественной теории автономных систем.

Предполагается, что правые части автономной системы (АС)

$$\begin{cases} x'_t = f_1(x,y) \\ y'_t = f_2(x,y) \end{cases}. \qquad (3.1)$$

являются аналитическими функциями в некоторой области G.

Опр. Множество $A \subseteq G$ называется инвариантным множеством соответствующей ДС, если A вместе с каждой точкой содержит траекторию, проходящую через эту точку.

ПРИМЕР 1 Пусть $O(x_0, y_0)$ есть положение равновесия (иногда говорят особая точка (3.1)) системы, то есть является постоянным решением системы (3.1). Оно является инвариантным множеством.

ПРИМЕР 2 Периодическое решение АС изображается в фазовой плоскости замкнутой кривой, которая называется циклом. Цикл является инвариантным множеством.

Опр. Если в любой сколь угодно малой окрестности положения равновесия O лежит замкнутая траектория, то все траектории, проходящие через точки некоторой достаточно малой окрестности будут замкнуты. Такое положение равновесия называется центром.

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть в любой сколь угодно малой окрестности положения равновесия O нет замкнутых траекторий. Можно показать, что всякая целиком лежащая внутри некоторой окрестности полутраектория будет стремиться к O.

Опр. Пусть для любой точки из некоторой окрестности положения равновесия $O(x_0, y_0)$ АС (3.1) соответствующие решения задачи Коши $\big(x(t), y(t)\big)$ обладают свойством $\exists \theta_0 \in (-\infty, +\infty)$ $\theta(t) := \arg\left(\dfrac{y(t)-y_0}{x(t)-x_0}\right) \to \theta_0$ и $\lim\big(x(t), y(t)\big) = (x_0, y_0)$ при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$). То есть радиус-вектор $\{x(t)-x_0, y(t)-y_0\}$ изображающей точки (ИТ) $\big(x(t), y(t)\big)$ приближается к фиксированному направлению. Тогда положение равновесия (x_0, y_0) называется узлом.

Опр. Если $\lim \theta(t) = \infty$, то положение равновесия называется фокусом.

Выделим в правых частях системы (3.1) линейные слагаемые

$$\begin{cases} x'_t = a_{11}(x-x_0) + a_{12}(y-y_0) + r_1(x,y) \\ y'_t = a_{21}(x-x_0) + a_{22}(y-y_0) + r_2(x,y) \end{cases},$$

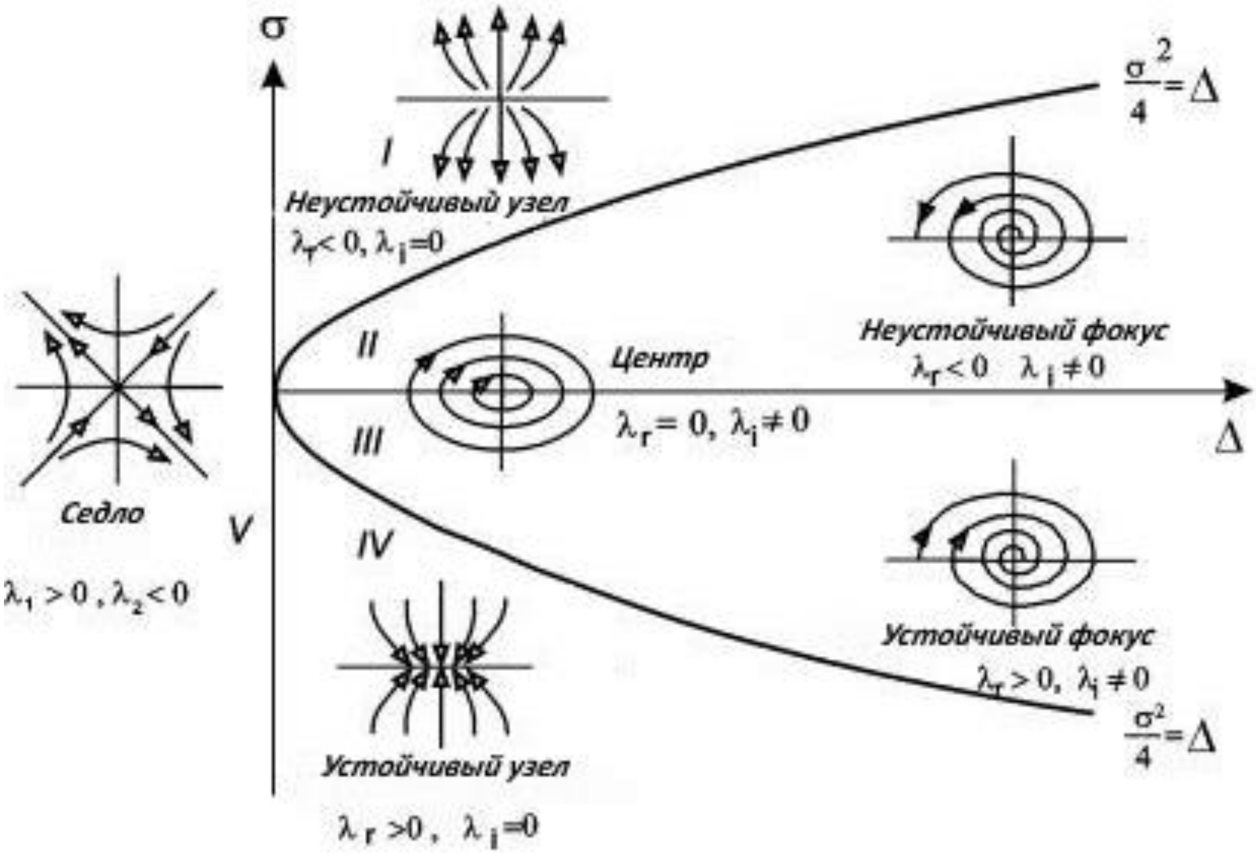
Обозначим $\lambda_1,\ \lambda_2$ собственные числа матрицы $A = (a_{ij})$, являющиеся решениями характе ристического уравнения

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =: \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta.$$

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \alpha\beta \neq 0$. Если $\alpha < 0$, то все траектории, проходящие вблизи точки O, наматываются на нее как спирали при $t \to +\infty$. Имеем устойчивый фокус. Если $\alpha > 0$, то все траектории, проходящие вблизи точки O, наматываются на нее как спирали при $t \to -\infty$. Имеем неустойчивый фокус.

Опр. Положение равновесия, обладающее свойством, что только конечное число траекторий стремятся к нему при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), называется седлом.

ЗАМЕЧАНИЕ Плоскость параметров Δ, σ можно разбить координатными осями и параболой $\Delta = \frac{\sigma^2}{4}$ на области параметров с одинаковым характером положения равновесия. На рисунке собственные числа обозначены $\lambda = \lambda_r \pm \lambda_i i$. Разбиение (без учета границ!) годится для АС (3.1).



Пункаре, Жан Анри (1854-1912) - французский математик, физик, аст рономом. Фундаментальные открытия П., касающиеся поведения интегра льных кривых дифференциальных уравнений связаны с решением про блем небесной механики, в частности, проблемы трех тел. Научно-по пулярные работы «Ценность науки» (1905), «Наука и Метод» (1908).

Леоте (1985) впервые использовал фазовый портрет системы для изу чения характера возможных в системе движений и еще до П. показал типичную картину фазового портрета, содержащего предельный цикл.

ТЕОРЕМА 3.1 Пусть $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, l_+ - прямая, проходящая через точку O в направлении собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_1, а l_- - прямая, проходящая через ту же точку в направлении собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_2. Тогда существуют ровно две траектории l_1^+, l_2^+ системы (3.1), которые при $t \to +\infty$ стремятся к точке O. Кривая $l_1^+ x_0 l_2^+$ непрерывно дифференцируема и касается прямой l_+ в точке O. Аналогично, существуют ровно две траектории l_1^-, l_2^- системы (3.1), которые при $t \to -\infty$ стремятся к точке O. Кривая $l_1^- x_0 l_2^-$ непрерывно дифференцируема и касается прямой l_- в точке O.

Опр. Траектории $l_1^+, l_2^+, l_1^-, l_2^-$ называются сепаратрисами, причем l_1^+, l_2^+ - устойчивыми усами, а l_1^-, l_2^- - неустойчивым усами.

ЗАМЕЧАНИЕ Сепаратрисы связывают седло с узлами, фокусами или предельными циклами, образуя вместе с ними каркас фазового портрета, который определяет поведение всех остальных траекторий системы. Области, границами которых являются точки каркаса, называются элементарными ячейками. Траектории, расположенные внутри ячейки, ведут себя одинаковым образом: они либо все являются циклами, либо стягиваются к одному и тому же множеству на границе ячейки.

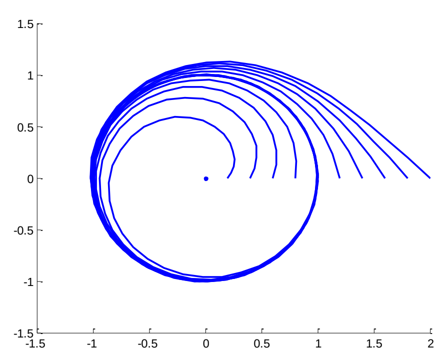
Опр. Пусть существует ограниченная траектория l, которая стремится к O как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$. Область, ограниченная $l \bigcap O$, называется эллиптической (замкнутой узловой областью).

Опр. Пусть две полутраектории l_1, l_2 стремятся к положению равновесия O, и вместе с частью окружности $S(O,\varepsilon_0)$ ограничивают криволинейную треугольную область. Эта область называется седловым (гиперболическим) сектором, если через все ее точки проходят траектории, как при $t \to +\infty$ так и при $t \to -\infty$ выходящие из нее. Область G называется открытым узловым сектором, если через все точки из некоторой ε-окрестности $D(O,\varepsilon)$, $\varepsilon \le \varepsilon_0$, проходят траектории, которые при $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$ стремятся к O, не выходя из G, а при $t \to -\infty$ $(t \to +\infty)$ выходят из G.

ТЕОРЕМА 3.2 Всякая достаточно малая окрестность положения равновесия O АС (3.1), не являющаяся центром, узлом или фокусом, состоит из конечного числа эллиптических, параболических и гиперболических областей, из траекторий, отделяющих эти области одну от другой, и из точки O.

Опр. Цикл ДС называется предельным, если во множестве траекторий, проходящих через точки, достаточно близкие к этому циклу, нет замкнутых траекторий.

Опр. Цикл называется устойчивым (притягивающим), если он является асимптотой для всех траекторий, проходящих через достаточно близкие к этому циклу точки, при $t \to +\infty$. Цикл называется неустойчивым (отталкивающим), если он является асимптотой для всех близких траекторий при $t \to -\infty$.



Пр. Построим фазовый портрет АС

$$\begin{cases} x_t' = x(1-\sqrt{x^2+y^2}) - y \\ y_t' = y(1-\sqrt{x^2+y^2}) + x \end{cases}.$$

§ 3.2. Основные понятия теории устойчивости.

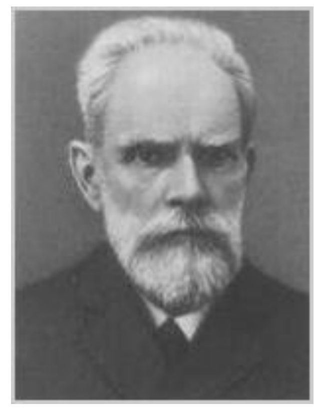
Обозначим $x(x_0,t),\ t \geq 0,$ решение задачи Коши с начальным условием $x(x_0,0)=x_0$ (-положительная полутраектория в фазовой плоскости).

Опр. Замкнутое в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ инвариантное множество $K \subset G$ называется устойчивым по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_0 \in G,\ \rho(x_0,K) < \delta,\quad \Rightarrow \quad \forall t \geq 0\ \rho(x(x_0,t),K) < \varepsilon.$$

Если кроме того $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(x(x_0,t),K) = 0$, то множество K называется асимптотически устойчивым.

Опр. Если замкнутое инвариантное множество K асимптотически устойчиво, то множество $A = A(K)$ всех точек $x_0 \in G,\ x_0 \notin K,$ для которых $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(x(x_0,t),K) = 0,$ называется областью асимптотической устойчивости инвариантного множества K.



Ляпунов Александр Михайлович (1857 - 1918), русский математик, механик, ученик П.Л.Чебышёва. Создал современную строгую теорию устойчивости равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров. Построен общий метод решения задач об устойчивости. Основной труд – докторская диссертация «Общая задача об устойчивости движения» (1892). Циклы исследований по фигурам равновесия вращающихся жидкостей, по математической физике. В теории вероятностей - метод характеристических функций; доказана центральная предельная теорема при весьма общих условиях

Опр. Инвариантное множество называется асимптотически устойчивым в целом, если его область асимптотической устойчивости совпадает со всей фазовой плоскостью $\mathbb{R}^2$.

Опр. Замкнутое инвариантное множество K называется аттрактором, если существует такое открытое множество $U \supset K$, что $\forall x_0 \in U\ \ \forall t \geq 0\ x(x_0,t) \in U$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(x(x_0,t),K) = 0.$

Понятия аттрактора и асимптотически устойчивого множества равносильны.

ТЕОРЕМА 3.3 (*Ляпунова*) Пусть $O(x_0,y_0)$ есть положение равновесия системы (3.1) . Тогда: а) если все собственные числа матрицы Якоби $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ системы имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия $O(x_0,y_0)$ асимптотически устойчиво;

б) если же хотя бы одно собственное число имеет положительную вещественную часть, то это положение равновесия неустойчиво.

§ 3.3. Грубые системы. Бифуркация.

Будем рассматривать ДС, задаваемые автономной системой второго порядка

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \alpha_1, ..., \alpha_s) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, \alpha_1, ..., \alpha_s) \end{cases}$$

или в матричном виде $X_t' = F(x, \alpha),\ \alpha =: (\alpha_1, ..., \alpha_s)$, правые части которой являются аналитическими функциями как от переменных x_1, x_2, так и от параметров.

Опр. Два фазовых портрета ДС (для двух различных наборов параметров) называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм, отображающий один портрет на другой с сохранением направления движения по траекториям.

ЗАМЕЧАНИЕ Гомеоморфизм переводит циклы и положения равновесия соответственно в циклы и положения равновесия с сохранением характера их устойчивости.

Опр. Пространство параметров разбивается на области с качественно различными типами динамического поведения системы. Результатом является параметрический портрет системы: разбиение пространства параметров. Вместе с фазовым портретом он содержит информацию о возможных динамических режимах в системе и их качествен ных перестройках.

Опр. Пусть $x_0 = x_0(\alpha) = \left(x_1^0(\alpha), x_2^0(\alpha)\right)$ есть положение равновесия АС. Выделим в правых частях линейные слагаемые

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}\left(x_1 - x_1^0(\alpha)\right) + a_{12}\left(x_2 - x_2^0(\alpha)\right) + r_1(x_1, x_2, \alpha) \\ x_2' = a_{21}\left(x_1 - x_1^0(\alpha)\right) + a_{22}\left(x_2 - x_2^0(\alpha)\right) + r_2(x_1, x_2, \alpha) \end{cases},$$

и найдем собственные числа $\lambda_1 = \lambda_1(\alpha),\ \lambda_2 = \lambda_2(\alpha)$ матрицы Якоби

$$A = (a_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(x_1^0(\alpha), x_2^0(\alpha), \alpha\right) \right)$$

правой части. Положение равновесия называется грубым, когда оба числа $\neq 0$, если они вещественны и $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$, если они комплексные.

ЗАМЕЧАНИЕ Грубость равносильна тому, что в характеристическом уравнении

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =: \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta$$

будет либо $\Delta > 0,\ \sigma \neq 0$, либо $\Delta < 0$.

Опр. Динамическая система называется грубой (структурно устойчивой), если при малых возмущениях параметров топологическая структура фазового портрета не меняется.

ТЕОРЕМА 3.4 (*свойства грубых систем*) 1) (*критерий грубости системы*) ДС является грубой в замкнутой ограниченной области тогда и только тогда, когда

а) в области могут быть только грубые положения равновесия;

б) в области могут быть только простые предельные циклы, то есть циклы C с периодом p, в которых мультипликатор цикла

$$\mu(\alpha) := \exp\left\{\int_0^p \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t)) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1(t), x_2(t))dt\right\} \neq 1;$$

при $\mu < 1$ цикл устойчив, а при $\mu > 1$ неустойчив;

в) в области нет сепаратрис, идущих из седла в седло.

2) Грубые системы заполняет область в пространстве параметров.
3) У грубой в замкнутой области системы может существовать только конечное число предельных циклов.
4) Грубые системы образуют всюду плотное множество в пространстве всех ДС.

При исследовании моделей ДС, задаваемых автономной системой, содержащей параметры, возникают вопросы двух типов.

1) Поведение системы при фиксированных значениях параметров: качественное понимание характера режимов, установившихся в системе по прошествии достаточно большого времени. Ответ на вопросы первого типа можно получить из фазового портрета системы.
2) Вопросы второго типа касаются событий, происходящих в системе при изменении значений параметров.

Опр. Качественная перестройка фазового портрета называется бифуркацией.

Вопросы второго типа подразумевают:

а) определение бифуркационных значений параметров,

б) описание перестроек фазового портрета, происходящих при переходе через эти критические значения.

Опр. Значение параметра α системы $X_t' = F(x, \alpha)$ называется бифуркационным (критическим), если сколь угодно малое его возмущение может изменить тип положений равновесия: новое не будет эквивалентно старому. Это значение α, рассматриваемое как точка в пространстве параметров, называется также точкой бифуркации ДС.

Опр. Теория, изучающая зависимость качественной картины разбиения на траектории фазового портрета ДС от параметра, называется теорией бифуркаций динамических систем.

Опр. Разбиение окрестности бифуркационной точки из пространства параметров на множества, отвечающие различным типам фазовых портретов системы, называется бифуркационной диаграммой точки.

Опр. Бифуркационная диаграмма с указанием фазового портрета для каждого из множеств этого разбиения называется описанием бифуркации.

Опр. Две бифуркационные диаграммы называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм параметрических окрестностей бифуркационных точек, переводящий одну диаграмму в другую так, что фазовые портреты соответствующих параметрических точек топологически эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ Описание бифуркации проводится с точностью до топологически эквивалентных диаграмм.

Опр. Система общего положения – система, на которую не наложены никакие специальные ограничения типа условий равенства, групп симметрии, консервативности и другие.

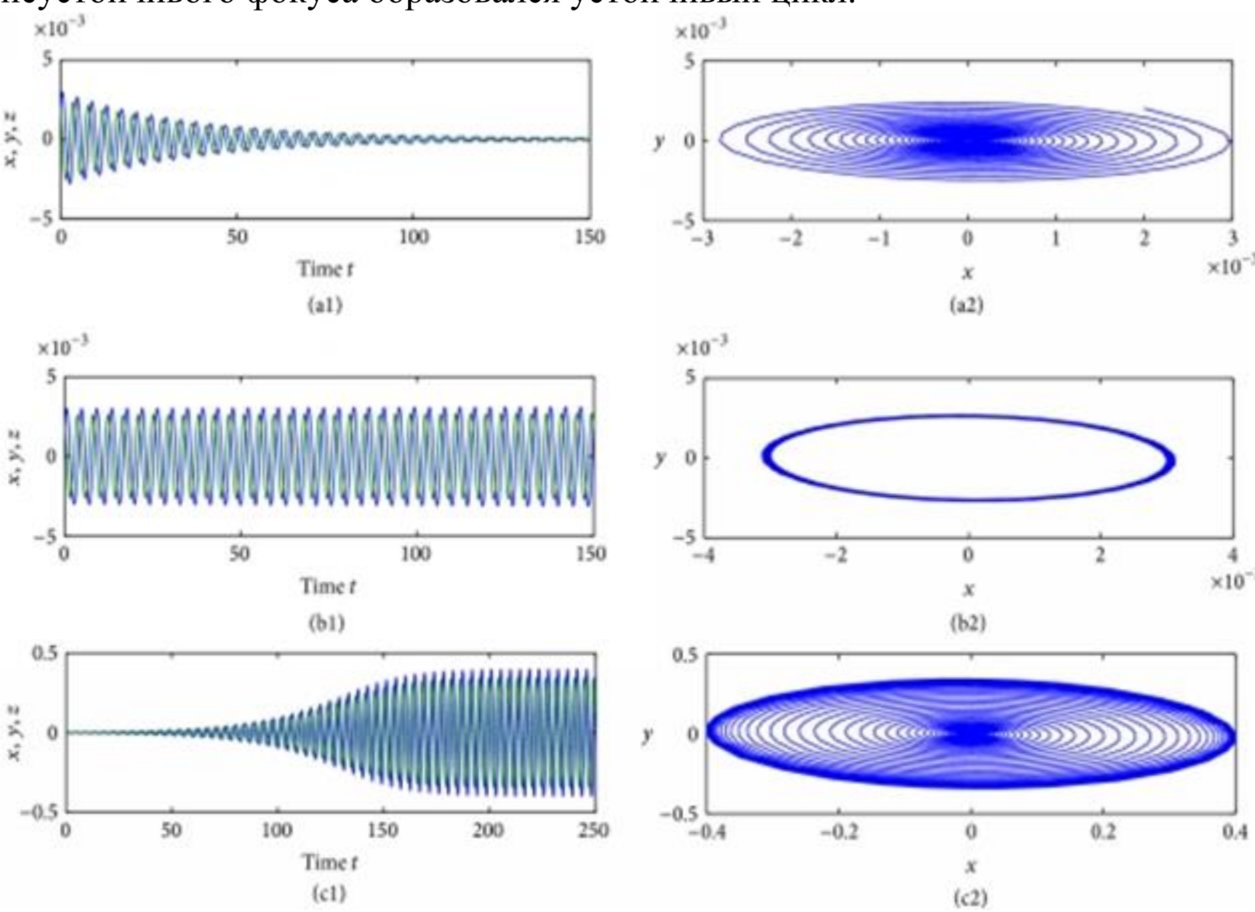
Опр. Бифуркационной диаграмме отвечает бифуркация коразмерности k, если в ней выполняется k бифуркационных условий (- условия типа равенства) и некоторый набор условий невырожденности (- условия типа неравенства).

Опр. Бифуркация называется локальной, если она происходит в сколь угодно малой, но фиксированной окрестности положения равновесия. В противном случае бифуркация называется нелокальной.

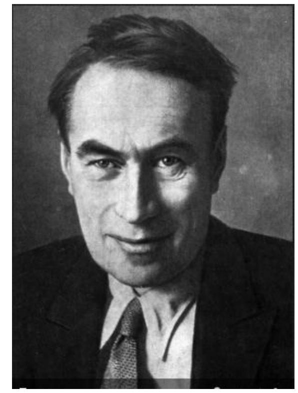
ПРИМЕР Рассмотрим АС

$$\begin{cases} x_1' = 2\beta x_1 - \omega x_2 + 2l x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2' = \omega x_1 + 2\beta x_2 + 2l x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases},$$

где $l, \omega \neq 0$, β - бифуркационный параметр. Бифуркация рождения из фокуса (0,0) малого предельного цикла (бифуркация Андронова-Хопфа), когда β проходит через ноль, является локальной. Левые рисунки показывают поведение фазовых координат ИТ во временной области, а правые - соответствующие им траектории в фазовом пространстве. До бифуркации (рисунки a1, a2) был устойчивый фокус. В точке бифуркации (рисунки b1, b2) сформировался центр. После бифуркации (рис. c1, c2) в окрестности неустойчивого фокуса образовался устойчивый цикл.



Бифуркация Андронова-Хопфа имеет коразмерность 1 и задается одним бифуркацион ным условием: собственные числа ее матрицы линеаризации должны быть чисто мнимыми: $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$.



Андронов Александр Александрович (1901-1952) - советский физик, механик и математик, академик АН СССР. Специалист в области эле ктротехники, радиофизики и прикладной механики, создатель нового направления в теории колебаний и динамике систем. В1928 г. первым указал эффективный математический аппарат для рассмотрения задач теории нелинейных колебаний и его помощью создал основы строгой теории автоколебаний. Ввел понятие автоколебания - колебания систе мы, период которых определяется параметрами самой системы. Распространил развитые им методы теории нелинейных колебаний на проблемы автоматического регулирования, решил ряд важных нели нейных задач 1) теоретической радиотехники, в области 2) регулирования и 3) общей динамики машин. В 1937 г. Опубликовал классическую монографию «Теория колеба ний» (совместно с А. А. Вит том и С. Э. Хайкиным). Создал школу специалистов в обла сти нелинейных колебаний и смежных проблем. Историк науки.

§ 3.4. Кратные и нейтральные положения равновесия.

В системах второго порядка возможны две локальных бифуркации коразмерности 1.

Опр. Положение равновесия называется кратным, если $\Delta = \det(A) = 0$, $\sigma = a_{11} + a_{22} \neq 0$ и нейтральным, если наоборот, $\sigma = a_{11} + a_{22} = 0,\ \Delta = \det(A) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) Кратные положения соответствуют σ-оси (Δ, σ)-плоскости, а нейтральные положения – Δ-оси этой плоскости.

2) Нейтральное положение равновесия может быть как седлом ($\lambda_2 = -\lambda_1 \neq 0$), так и центром ($\lambda_{1,2} = \pm\beta i$). В первом случае имеем грубое положение равновесия.

ПРИМЕР Рассмотрим случай бифуркаций коразмерности 1 с двумя условиями невырожденности. а) Простейшая система в случае кратного положения равновесия, например, при $\lambda_1 = 0$ имеет вид $\begin{cases} u_1' = \tilde{\alpha} + a u_1^2 \\ u_2' = \lambda_2 u_2 \end{cases}$, где $\tilde{\alpha} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ - параметр. При этом выпол нено одно бифуркационное условие $\Delta = \det(A) = 0$ и два условия невырожденности: $\lambda_2 = \lambda_2(\alpha) \neq 0,\ a = a(\alpha) \neq 0$.

б) В случае нейтрального положения равновесия и бифуркации рождения цикла ($\lambda_{1,2} = \pm\beta i$) простейшая система имеет вид

$$\begin{cases} u_1' = \tilde{\alpha} u_1 - \beta u_2 + \alpha_3 u_1 (u_1^2 + u_2^2) \\ u_2' = \beta u_1 + \tilde{\alpha} u_2 + \alpha_3 u_2 (u_1^2 + u_2^2) \end{cases},$$

где $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$, $\tilde{\alpha} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ - параметр. При этом выполнено одно бифуркационное условие $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2}(\alpha) = 0$ и два условия невырожденности: $\beta = \mathrm{Im}\,\lambda_{1,2}(\alpha) \neq 0,\ \alpha_3 = \alpha_3(\alpha) \neq 0$. Здесь α_3 - первая ляпуновская величина (смотри ниже).

Перейдем к классификации кратных и нейтральных положений равновесия. Напомним виды жордановой нормальной формой (ЖНФ) для квадратной матрицы размера 2×2.

ЗАМЕЧАНИЕ Для каждой матрицы $A=(a_{ij})\neq 0$ существует невырожденная матрица S (матрица перехода) со свойством $S^{-1}AS=J$ и :

1) $J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ в случае $\lambda_1,\lambda_2\in\mathrm{R},\ \lambda_1\neq\lambda_2$,

2) $J=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ или $J=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ в случае $\lambda_1=\lambda_2=:\lambda$,

3) $J=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ в случае $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i,\ \beta\neq 0$.

Здесь J есть ЖНФ матрицы A.

Рассмотрим АС

$$\begin{cases}x_1'=f_1(x_1,x_2)\\ x_2'=f_2(x_1,x_2)\end{cases}\qquad(3.2)$$

с положением равновесия (x_0,y_0) и условием невырожденности

$$\left|\frac{df_1}{dx}(x_0,y_0)\right|+\left|\frac{df_1}{dy}(x_0,y_0)\right|+\left|\frac{df_2}{dx}(x_0,y_0)\right|+\left|\frac{df_2}{dy}(x_0,y_0)\right|\neq 0.$$

Для матрицы

$$A:=\begin{pmatrix}\frac{df_1}{dx}(x_0,y_0) & \frac{df_1}{dy}(x_0,y_0)\\ \frac{df_2}{dx}(x_0,y_0) & \frac{df_2}{dy}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$$

это условие в силу $S^{-1}AS=J$ равносильно неравенству $J\neq 0$ для соответствующей ЖНФ

Опр. Сделаем в АС (3.2) замену переменных по формуле $X=SY+X_0$. Тогда новая АС с выделенной линейной правой частью примет вид

$$Y_t'=J\cdot Y+G_2(y_1,y_2,\alpha).\qquad(3.3)$$

Последняя называется каноническим видом АС. По построению эта АС имеет положение равновесия $(0,0)$.

В случае кратного положения равновесия АС (3.2) имеет такой канонический вид

$$\begin{cases}y_1'=g_1(y_1,y_2)\\ y_2'=\lambda y_2+g_2(y_1,y_2)\end{cases},\ \lambda\neq 0,$$

где $g_1(y_1,y_2),\ g_2(y_1,y_2)$ и их частные производные первого порядка равны нулю в точке (0,0). Решение $y_2=\varphi(y_1)$ уравнения $\lambda y_2+g_2(y_1,y_2)=0$ подставим в функцию $g_2(y_1,y_2)$, и обозначим $\psi(y_1):=g_1(y_1,\varphi(y_1))$. Тогда

$$\psi(y_1)=g_1(y_1,\varphi(y_1))=\Delta_m y_1^m+\dots,\ \Delta_m\neq 0.$$

ТЕОРЕМА 3.5 Кратное положение равновесия имеет следующий качественный характер:

1) (сложное седло) характер седла, если m нечетное и $\Delta_m>0$;

2) (сложный узел) характер узла, если m нечетное и $\Delta_m<0$ ($\lambda<0$ - устойчивый узел, $\lambda>0$ - неустойчивый узел);

3) (седло-узел) один узловой сектор и два седловых при m четном; если $\lambda\Delta_m<0$, то узловой сектор расположен слева от оси OY, а при $\lambda\Delta_m>0$ - справа от оси. Если $\lambda>0$ - узловой сектор неустойчивый, и устойчивый, если $\lambda<0$.

Опр. Седло-узел называется простейшим двукратным седло-узлом, если $m=2$, и сложным седло-узлом, если $m>2$.

В случае положения равновесия с собственными числами $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ ДС (3.2) имеет такой канонический вид

$$\begin{cases} y_1'=\alpha y_1-\beta y_2+g_1(y_1,y_2)\\ y_2'=\beta y_1+\alpha y_2+g_2(y_1,y_2)\end{cases}.$$

Делая здесь замену переменных $x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$, получим

$$\begin{cases} r_t'=\alpha r+r^2\left(\mathrm{g}_1(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta+g_2(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta\right)+\dots\\ \theta_t'=\beta-r\left(\mathrm{g}_1(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta-g_2(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta\right)+\dots\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dr}{d\theta}=\frac{\alpha+rg_3(r,\cos\theta,\sin\theta)}{\beta+rg_4(r,\cos\theta,\sin\theta)}r=R(r,\theta).$$

Обозначим $r=g(\theta,\theta_0,r_0)$ решение задачи Коши с начальным условием $r(\theta_0)=r_0$, и разложим $r=g(2\pi,0,r_0):=\alpha_1 r_0+\alpha_2 r_0^2+\dots$ в ряд по степеням r_0.

Опр. Функция $r=g(2\pi,0,r_0)=\alpha_1 r_0+\alpha_2 r_0^2+\dots$ называется функцией последования.

ЗАМЕЧАНИЕ Несложно проверить, что $\alpha_1=\exp\left\{2\pi\dfrac{\alpha}{\beta}\right\}$.

ТЕОРЕМА 3.6 (*Ляпунова*) Первый не равный нулю коэффициент ряда $(\alpha_1-1)r_0+\alpha_2 r_0^2+\dots$ имеет нечетный индекс.

Опр. Если $\alpha_1=1,\ \alpha_3\neq 0$, то α_3 называется первой ляпуновской величиной. Если $\alpha_1=1,\ \alpha_3=0,\ \alpha_5\neq 0$, то α_5 называется второй ляпуновской величиной. И так далее.

ТЕОРЕМА 3.7 1) Считаем $\alpha=\operatorname{Re}\lambda_i\neq 0$ ($\alpha_1\neq 1$), либо $\alpha=\operatorname{Re}\lambda_i=0$ ($\alpha_1=1$) и хотя бы одна ляпуновская величина α_{2k+1} не равна нулю. В первом случае положение равновесия является грубым фокусом, а во втором – сложным фокусом кратности k (k-кратным сложным фокусом). При этом:

а) фокус устойчив, если соответственно $\dfrac{\alpha}{\beta}<0$ или $\alpha=0,\ \alpha_{2k+1}<0$;

б) фокус неустойчив, если соответственно $\dfrac{\alpha}{\beta} > 0$ или $\alpha = 0,\ \alpha_{2k+1} > 0$.

2) $\alpha = \alpha_3 = \alpha_5 = \ldots = 0$. Тогда все траектории из достаточно малой окрестности замкнуты, и положение равновесия имеет характер центра.

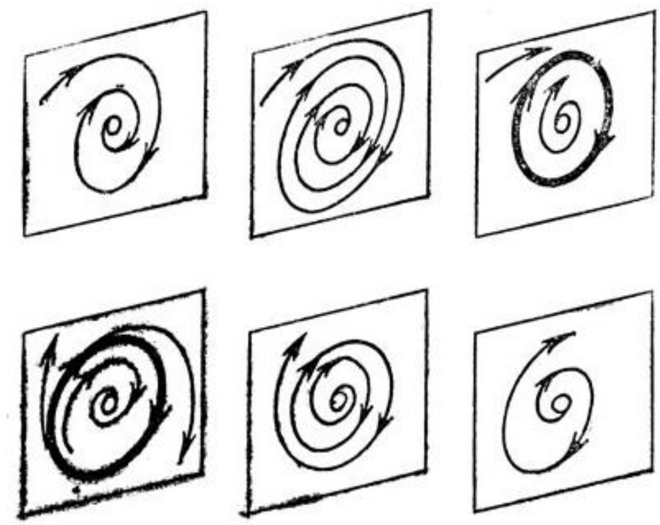
3) (*Ляпунов*) Чисто мнимое положение равновесия является центром тогда и только тогда, когда каноническая система имеет в окрестности этого положения интеграл вида $x_1^2 + x_2^2 + F_3(x_1, x_2) + F_4(x_1, x_2) + \ldots = C$, где $F_k(x_1, x_2)$ - однородный многочлен k-ой степени.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Рассмотрим АС $\begin{cases} u_1' = \tilde{\alpha} u_1 - \beta u_2 + \alpha_3 u_1 (u_1^2 + u_2^2) \\ u_2' = \beta u_1 + \tilde{\alpha} u_2 + \alpha_3 u_2 (u_1^2 + u_2^2) \end{cases}$, $\beta > 0,\ \alpha_3 \neq 0$.

При $\tilde{\alpha} = 0$ положение равновесия (0,0) является нейтральным. При переходе параметра $\tilde{\alpha}$ слева направо через нейтральную точку бифуркации $\tilde{\alpha} = 0$ положение равновесия теряет устойчивость, превращаясь из устойчивого фокуса в неустойчивый. Точнее:

1) в случае $\alpha_3 < 0$ устойчивый равновесный режим сменяется устойчивыми автоколебаниями малой амплитуды (мягкая потеря устойчивости; верхний ряд рисунков);

2) в случае $\alpha_3 > 0$ потеря устойчивости сопровождается гибелью в нем неустойчивого предельного цикла. При этом новый неустойчивый режим сильно отличается от прежнего. Говорят, что происходит жесткая потеря устойчивости (нижний ряд рисунков)



ГЛАВА 4 ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СИНЕРГЕТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Колесников Анатолий Аркадьевич (1935) – профессор кафедры синергетики и процессов управления Таганрогского технологического института Южного федерального университета. Ученый в области теории и систем управления, нелинейного системного синтеза, нелинейной динамики и синергетики. Является руководителем известной российской научной школы в области нелинейного системного синтеза – системной физики.

Пусть динамическая система задается автономной системой

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n' = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \qquad (4.1)$$

Метод аналитического конструирования нелинейных регуляторов (*АКАР*) базируется на положении, что в фазовом пространстве ДС могут существовать устойчивые в целом инвариантные многообразия, к которым притягиваются фазовые траектории синтезируемого регулятора. Требуемое многообразие (аттрактор) проектируемого регулятора задается как множество точек L, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \psi_1(x_1,...,x_n)=0 \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ ., \qquad 1\le p<n, \\ \psi_p(x_1,...,x_n)=0 \end{cases} \qquad (4.2)$$

с условием $rang\left(\psi'_{ix_j}(x,y)\right)=p$. Управление осуществляется скоростями изменения каких-либо *p* фазовых переменных и представляет собой слагаемые правых частей соответствующих уравнений (аддитивное управление).

Опр. Функции $\psi_i=\psi_i(x_1,...,x_n)$ называются агрегированными переменными. Траектории регулятора обязаны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} T_1\psi_1'(t)+\psi_1(t)=0 \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ , \quad 1\le p<n. \\ T_p\psi_p'(t)+\psi_p(t)=0 \end{cases} \qquad (4.3)$$

Интегрирую эту систему на траекториях проектируемого регулятора, получим

$$\begin{cases} \psi_1(x_1(t),...,x_n(t))=C_1e^{-t/T_1} \to 0 \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ , \quad t\to+\infty \\ \psi_p(x_1(t),...,x_n(t))=C_pe^{-t/T_p} \to 0 \end{cases}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 В этом смысле изображающая (ИТ) точка любой траектории приближается к множеству L. В этом смысле понимается и устойчивость в целом множества L.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Если в какой-то момент t_0 точка $\left(x_1(t_0),...,x_n(t_0)\right)\in\mathrm{L}$, то из последнего равенства следует $C_1=...=C_p=0$. Таким образом, L состоит из траекторий регулятора, то есть является инвариантным множеством по определению.

Дифференцируя (4.3) на траекториях регулятора, получаем такую систему

$$\begin{cases} \psi'_{1x_1}x_1'(t)+...+\psi'_{1x_n}x_n'(t)=-\dfrac{1}{T_1}\psi_1 \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ , \quad 1\le p<n \\ \psi'_{px_1}x_1'(t)+...+\psi'_{px_n}x_n'(t)=-\dfrac{1}{T_p}\psi_p \end{cases}.$$

По теореме о неявном отображении система локально разрешима относительно каких-то *p* производных. Добавляя к этим *p* уравнениям *n-p* уравнений автономной системы (4.1), которые содержат остальные производные, получаем систему из *n* уравнений синергетического регулятора.

ЗАМЕЧАНИЕ Уравнение $T\psi_t'(t)+\psi(t)=0$ равносильно уравнению Эйлера вариацион ной задачи вида

$$\Phi(x_1,...,x_n)=\int_0^{\infty}\psi^2\left(x_1(t),...,x_n(t)\right)+T^2\psi_t'^2\left(x_1(t),...,x_n(t)\right)dt \to \min, \quad \lim_{t\to+\infty}\psi\left(x_1(t),...,x_n(t)\right)=0$$

при условии $\forall t \ \sum_{k=1}^{n}\psi_k'^2(t)\neq 0$.

Действительно, составим уравнения Эйлера для этого функционала

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x_i'}=2\psi\psi_{x_i}'+2T^2\psi_t'\sum_{k=1}^{n}\psi_{x_kx_i}''x_k'-\frac{d}{dt}\left(2T^2\psi_t'\psi_{x_i}'\right)=2\psi_{x_i}'\left(\psi-T^2\psi_t''\right)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\psi-T^2\psi_t''\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \psi(t)=C_1e^{-\frac{t}{T}}+C_2e^{\frac{t}{T}} \quad \Leftrightarrow \quad \psi(t)=C_1e^{-\frac{t}{T}} \quad \Leftrightarrow \quad T\psi_t'(t)+\psi(t)=0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ Интересно, что постановка вариационной задачи не зависит от исходной динамической системы.

Далее рассмотрим автономную систему второго порядка

$$\begin{cases} x_t' = f_1(x,y) \\ y_t' = f_2(x,y) \end{cases}$$

с одной агрегированной переменной $\psi(x,y)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению $T\psi'(t)+\psi(t)=0$ на траекториях синтезируемого уравнения, или подробнее,

$$\psi_x'x_t'+\psi_y'y_t'=-\frac{1}{T}\psi.$$

В предположении $\psi_y'(x,y)\neq 0$ синергетический регулятор имеет вид

$$\begin{cases} x_t' = f_1(x,y) \\ y_t' = -\dfrac{\psi_x'}{\psi_y'}f_1-\dfrac{1}{T\psi_y'}\psi \end{cases}, \qquad (4.4)$$

то есть осуществляется аддитивное управление скоростью второй фазовой переменной. Если же $\psi_x'(x,y)\neq 0$, то регулятор принимает вид

$$\begin{cases} x_t' = -\dfrac{\psi_y'}{\psi_x'}f_2-\dfrac{1}{T\psi_x'}\psi \\ y_t' = f_2(x,y) \end{cases} \qquad (4.5).$$

В этом случае происходит аддитивное управление скорость первой фазовой переменной. В случаях (4.4), (4.5) положения равновесия регулятора являются, очевидно, решениями систем уравнений соответственно

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ \psi(x,y)=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \psi(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}.$$

Имеет место такой критерий устойчивости положений равновесии регулятора.

ТЕОРЕМА 4.1 1) Пусть (x_c, y_c): $f_1(x_c, y_c) = 0$, есть положение равновесия синергетиче ского регулятора (4.4). Оно асимптотически устойчиво, если

$$f'_{1x}(x_c, y_c) - \frac{\psi'_x(x_c, y_c)}{\psi'_y(x_c, y_c)} f'_{1y}(x_c, y_c) < 0, \qquad (4.6)$$

и неустойчиво, если $f'_{1x}(x_c, y_c) - \dfrac{\psi'_x(x_c, y_c)}{\psi'_y(x_c, y_c)} f'_{1y}(x_c, y_c) > 0$.

2) Пусть (x_c, y_c): $f_2(x_c, y_c) = 0$, есть положение равновесия синергетического регулятора (4.4). Оно асимптотически устойчиво, если

$$f'_{2y}(x_c, y_c) - \frac{\psi'_y(x_c, y_c)}{\psi'_x(x_c, y_c)} f'_{2x}(x_c, y_c) < 0, \qquad (4.7)$$

и неустойчиво, если $f'_{2y}(x_c, y_c) - \dfrac{\psi'_y(x_c, y_c)}{\psi'_x(x_c, y_c)} f'_{2x}(x_c, y_c) > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ Особый интерес представляет синтез синергетического регулятора, стягивающего все траектории к одной наперед заданному состоянию. В соответствии с выше сказанным соответствующая точка необходимо лежит на множестве $f_1(x, y) = 0$ или на множестве $f_2(x, y) = 0$. Кроме того, эта точка должны быть асимптотически устойчивым в целом положением равновесия соответствующего регулятора. Поэтому задача синтеза состоит из трех этапов решения:

1) найти такую агрегированную переменную $\psi_i(x, y) = 0$, чтобы соответствующая функциональная система имела ровно одно решение;
2) с помощью теоремы проверить его на асимптотическую устойчивость;
3) доказать, что область притяжения полученного положения равновесия совпадает со все фазовой плоскостью.

ПРИМЕР Динамическая система «хищник-жертва» задается автономной системой

$$\begin{cases} x'_t = a_1 x - a_2 xy - a_3 x^2 \\ y'_t = -b_1 y + a_2 xy \end{cases}$$

где $x(t)$ - количество жертв, $y(t)$ - количество хищников. Требуется построить синергетический регулятор количества хищников

$$\begin{cases} x'_t = a_1 x - a_2 xy - a_3 x^2 \\ y'_t = -b_1 y + a_2 xy + u_2 \end{cases},$$

который обеспечивает стремление всех траекторий к произвольному наперед заданному допустимому положению равновесия. Последние должны лежать в первой четверти и на вырожденной кривой второго порядка $a_1 x - a_2 xy - a_3 x^2 = 0$, то есть на $l_1 := \{(x, y):\ x = 0\}$ или на $l_2 := \{(x, y):\ a_3 x + a_2 x - a_1 = 0\}$.

1) Выберем в качестве агрегированной переменной функцию $\psi = a_3 x + a_2 y - \alpha$ с параметром $\alpha \neq a_1$. Уравнение регулятора принимает вид

$$\begin{cases} x_t' = a_1x - a_2xy - a_3x^2 \\ y_t' = -\dfrac{a_3}{a_2}\left(a_1x - a_2xy - a_3x^2\right) - \dfrac{1}{Ta_2}\left(a_3x + a_2y - \alpha\right) \end{cases},$$

и, очевидно, не зависит от правой части второго уравнения исходной ДС. Для каждой такой агрегированной переменой соответствующая функциональная система

$$\begin{cases} a_1x - a_2xy - a_3x^2 = 0 \\ a_3x + a_2y - \alpha = 0 \end{cases}$$

имеет одно положение равновесия $s = (0, \alpha/a_2) \in l_1$. Проверим условие устойчивости из теоремы 4.1 этого положения равновесия.

$$f_{1x}'(x_c, y_c) - \frac{\psi_{2x}'(x_c, y_c)}{\psi_{2y}'(x_c, y_c)} f_{1y}'(x_c, y_c) = (a_1 - a_2y - 2a_3x) - \frac{a_3}{a_2}(-a_2x)\Bigg|_s = a_1 - \alpha < 0.$$

Итак, если $\alpha > a_1$, то единственное положение равновесия регулятора является устойчивым, а если $\alpha < a_1$, то неустойчивым.

2) Выберем теперь в качестве агрегированной переменной функцию

$$\psi_2 = a_3x^2 + a_2xy - \alpha x + 1,\ \ \alpha \neq a_1.$$

Уравнение скалярного регулятора принимает вид

$$\begin{cases} x_t' = a_1x - a_2xy - a_3x^2 \\ y_t' = -\dfrac{2a_3x + a_2y - \alpha}{a_2x}\left(a_1x - a_2xy - a_3x^2\right) - \dfrac{1}{Ta_2x}\left(a_3x^2 + a_2xy - \alpha x + 1\right) \end{cases}.$$

Для каждой такой агрегированной переменой соответствующая функциональная система

$$\begin{cases} a_1x - a_2xy - a_3x^2 = 0 \\ a_3x^2 + a_2xy - \alpha x + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет одно решение $s = \left(\dfrac{1}{\alpha - a_1}, \dfrac{1}{a_2}\left(a_1 - \dfrac{a_3}{\alpha - a_1}\right)\right)$.

Проверим условие устойчивости из теоремы в этом положении равновесия.

$$f_{1x}'(x_c, y_c) - \frac{\psi_{2x}'(x_c, y_c)}{\psi_{2y}'(x_c, y_c)} f_{1y}'(x_c, y_c) = (a_1 - a_2y - 2a_3x) - \frac{2a_3x + a_2y - \alpha}{a_2x}(-a_2x)\Bigg|_s = a_1 - \alpha < 0.$$

Итак, если $\alpha > a_1$, то единственное положение равновесия регулятора является устойчивым, а если $\alpha < a_1$, то неустойчивым. По физическому смыслу задачи при $\alpha \geq a_1 + \dfrac{a_3}{a_1}$ любая общая точка прямой l_2 и первой четверти является единственным положением равновесия соответствующего регулятора при подходящем выборе параметра α (причем устойчивым узлом).

В обоих случаях остается проверить эти положения равновесия на устойчивость в целом.

ГЛАВА 5

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ К АНАЛИЗУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ

Опр. Графом называется пара $G := (V, E)$, состоящая из конечного множества V точек (от *англ*. vertex - вершина) и подмножества E упорядоченных пар вершин (дуги графа) или неупорядоченных пар вершин (от *англ*. edge - ребро).
ЗАМЕЧАНИЕ Ребро, соединяющее вершины v_1, v_2, будем обозначать $\{v_1, v_2\}$, а дугу, соединяющую эти вершины, (v_1, v_2).
Пр.

Опр. Граф называется орграфом (ориентированным графом), если E состоит только из дуг и неориентированным, если E состоит только из ребер.
Пр.

Опр. Ребро (дуга) с началом и концом в одной и той же вершине, называется петлёй.
Опр. Два ребра с общим началом и общим концом или две, дуги с общим началом и общим концом, называются кратными.
Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Иногда графом называется граф без петель и кратных дуг. В этом случае граф, допускающий кратные ребра, иногда называются мультиграфом, а граф, допускаю щий кратные рёбра и петли, называется псевдографом.

Леона́рд Э́йлер (1707, Швейцария - 1783, Россия) - швейцарский, немецкий и российский математик, внёсший выдающийся вклад в развитие математики, механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук. Автор более чем 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближён ным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др.
Почти полжизни провёл в России, где внёс существенный вклад в становление российской науки. Первые русские академики-математики (С. К. Котельников) и астрономы (С. Я. Румовский) были учениками Эйлера.

Опр. Вершины с общим ребром (дугой), а так же рёбра (дуги), имеющие общую вершину, называются смежными.
Опр. Если v есть вершина ребра e, то v и e называются инцидентными.
Обозначение. Если $V = \{v_1, ..., v_n\}$, $E = \{e_1, ..., e_m\}$, то $n(G) := n$, $m(G) := m$.
Пр.

Опр. Матрицей смежности графа (орграфа) G, называется матрица $A(G) = (a_{ij})$ размера $n(G) \times n(G)$, у которой a_{ij} равно числу рёбер, соединяющих вершины v_i, v_j (числу дуг с началом в вершине v_i и концом в v_j).

ЗАМЕЧАНИЕ Матрица смежности графа симметрична, а матрица смежности орграфа нет, вообще говоря.

Пр.

Опр. Матрицей инцидентности орграфа G называется матрица $B(G)=(b_{ij})$ размера $n(G)\times m(G)$, у которой

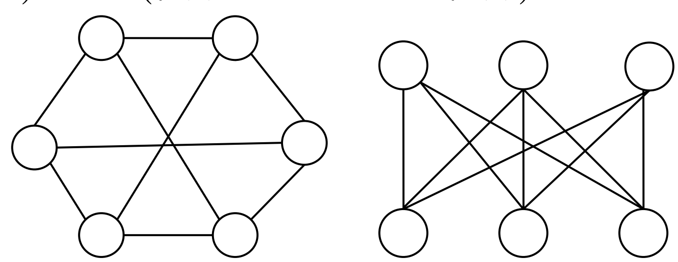
$$b_{ij}=\begin{cases}-1,\ \textit{если } v_i - \textit{начало дуги},\ v_j - \textit{конец дуги } (v_i,v_j)\\ \ \ 0,\ \textit{если } v_i,v_j - \textit{несмежные вершины}\\ \ \ 1,\ \textit{если } v_i - \textit{конец дуги},\ v_j - \textit{начало дуги } (v_i,v_j)\end{cases}.$$

Пр.

Опр. Графы $G_1=(V_1,E_1),\ G_2(V_2,E_2)$ называются изоморфными, если существуют биек тивные отображения $\varphi:V_1\to V_2$, $\psi:E_1\to E_2$, сохраняющее отношение инцидентности:

$$\forall\, v\in V_1\ \ \forall\, e\in E_1\big(v\ \textit{инцидентна}\ e\big)\ \Rightarrow\ \big(\varphi(v)\ \textit{инцидентна}\ \psi(e)\big).$$

ПРИМЕР Следующие графы изоморфны.



Опр. Орграфы $G_1=(V_1,E_1),\ G_2(V_2,E_2)$ называются изоморфными, если эти биекции сохраняют ориентацию: $\forall\, e=(v_1,v_2)\in E_1\ \ \psi(e)=(\varphi(v_1),\varphi(v_2))\in E_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ Если графы G_1,G_2 изоморфны, то $m(G_1)=m(G_2)$ и $n(G_1)=n(G_2)$.

Пр.

Опр. Последовательность ребер графа $\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\ldots\ \{v_{k-1},v_k\}$ (дуг орграфа $(v_1,v_2),(v_2,v_3),\ldots,(v_{k-1},v_k)$) называется маршрутом длины $k-1$ (путем длины $k-1$). Маршрут (путь) называется замкнутым, если $v_1=v_k$.

Пр.

Опр. Композицией маршрутов $\mu_1:=\{v_1,v_2\},\ldots,\{v_{k-1},v_k\}$, $\mu_2:=\{v_k,v_{k+1}\},\ldots,\{v_{l-1},v_l\}$ называется маршрут $\mu_1\circ\mu_2:=\{v_1,v_2\},\ldots,\{v_{k-1},v_k\},\{v_k,v_{k+1}\},\ldots,\{v_{l-1},v_l\}$.

Опр. Маршрут $\mu^{-1}:=\{v_k,v_{k-1}\},\ldots,\{v_2,v_1\}$ называется обратным к маршруту

$$\mu:=\{v_1,v_2\},\ldots,\{v_{k-1},v_k\}.$$

Опр. Незамкнутый маршрут (путь), в котором все ребра (дуги) попарно различны, называется цепью. Цепь называется простой, если в ней все вершины попарно различны.

Пр.

Опр. Замкнутый маршрут (путь), в котором все ребра (дуги) попарно различны, называется циклом (контуром). Цикл (контур) называется простым, если все его вершины попарно различны.

ЗАМЕЧАНИЕ Во всяком замкнутом маршруте (замкнутом пути) можно выделить простой цикл (простой контур).

Пр.

Опр. Подграфом графа (V, E) называется граф (V_1, E_1), со свойством $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$

Опр. Граф называется связным, если любые две его вершины связаны маршрутом. Всякий максимальный связанный подграф называется компонентой связности графа G.

Обозначение $p(G)$ - число компонент связности графа G.

Пр.

Опр. Число рёбер $d(v)$, инцидентных вершине v, называется степенью вершины. Если $d(v) = 0$, то v называется изолированной вершиной. Если $d(v) = 1$, то v называется висячей (концевой).

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) Для связного графа G $m(G) \geq n(G) - 1$.

2) Изолированная вершина является компонентой связности.

3) Все вершины замкнутого маршрута, как следует из определения, не являются висячими, то есть $\forall v$ $d(v) \geq 2$.

Опр. Деревом называется связный граф, не имеющий циклов.

ТЕОРЕМА 5.1 (*свойства дерева*)

1) Дерево необходимо имеет висячую вершину.
2) Следующие утверждения равносильны: а) G - дерево; б) G - связный граф и $n(G) = m(G) + 1$; в) любые две вершины графа G можно соединить единственной простой цепью.
3) Дерево G не содержит циклов, но соединяя какие-либо его вершины ребром, получаем граф, в котором ровно один простой цикл и этот цикл содержит добавленное ребро.

Пр.

Опр. Цикломатическим числом графа G называется величина

$$\nu(G)) := m(G) - n(G) + p(G).$$

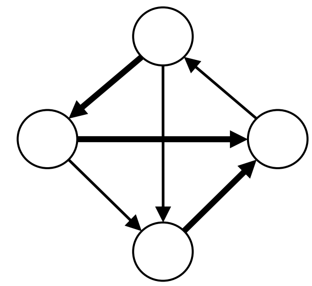
ЗАМЕЧАНИЕ 1) $\nu(G) \geq 0$.

2) Связанный граф является деревом тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 0$.

Опр. Остовным деревом связного графа G называют любой подграф G_0, содержащий все вершины G и являющийся деревом.

ЗАМЕЧАНИЕ Так как у остовного дерева связного графа G должно быть $n(G)-1$ ребер, то оно не должно содержать $m(G)-\left(n(G)-1\right)=\nu(G)$ ребер графа G

ПРИМЕР Рассмотрим граф на рисунке.



У него $n(G)=4,\ m(G)=6,\ p(G)=1$. $\nu(G)=6-4+1=3$. Выберем, например, $G_1=(\{v_4\},\varnothing)$. Так как $1<n(G)=4$, то процесс построения остовного дерева продолжим.

$$G_2:=\left(\{v_4,v_1\},\{(v_4,v_1)\}\right).\quad n(G_2)=2<4\quad\Rightarrow$$

$$G_3=\left(\{v_4,v_1,v_3\},\{(v_4,v_1),(v_1,v_3)\}\right).\quad n(G_3)=3<4\quad\Rightarrow$$

$$G_4=\left(\{v_4,v_1,v_3,v_2\},\{(v_4,v_1)(v_1,v_3),(v_3,v_2)\}\right).\quad n(G_4)=4.$$

Остовное дерево построено. Оно не содержит $\nu(G)=3$ ребра графа.

ЗАМЕЧАНИЕ Всюду ниже $G=(V,E)$ есть граф без петель (мультиграф). $m:=m(G)$. На ребрах задана произвольная ориентация, так что G есть орграф. Под циклом понимается любой замкнутый маршрут.

Опр. Сопоставим каждому циклу μ n-ку целых чисел

$$C(\mu)=\{C_1^+(\mu)-C_1^-(\mu),...,C_m^+(\mu)-C_m^-(\mu)\},$$

где $C_k^+(\mu)$ есть число проходов k-го ребра при обходе цикла μ, совпадающих с ориентацией ребра, $C_k^-(\mu)$- число проходов k-го ребра с ориентацией, противоположной заданной ориентации ребра. Вектор $C(\mu)\in\mathbf{Z}^m$ называется вектор-циклом, соответствующим циклу μ.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) $C(\mu)=0$ тогда и только тогда, когда при обходе цикла каждое ребро или вообще не проходится или число проходов каждого ребра в прямом и противопо ложном направлениях совпадают.

2) Для любого цикла μ на дереве $C(\mu)=0$.

3) $C(\mu_1\circ\mu_2)=C(\mu_1)+C(\mu_2)$.

4) $C(\mu^{-1})=-C(\mu)$.

5) $C(\mu_1\circ\mu_2^{-1})=0\quad\Leftrightarrow\quad C(\mu_1)=C(\mu_2)$.

Опр. Цикл μ называется линейной комбинацией циклов $\mu_1,...,\mu_s$, если

$$\exists\alpha_1,...,\alpha_s\in\mathbf{Z}\quad C(\mu)=\alpha_1C(\mu_1)+...+\alpha_sC(\mu_s).$$

Опр. Последовательность циклов $\mu_1,...,\mu_5$ называется линейно независимой, если линейно независимы вектор-циклы $C(\mu_1),...,C(\mu_s)$ над полем Q.

Опр. Последовательность циклов $\mu_1,...,\mu_5$ называется цикловым базисом графа G, если эти циклы линейно независимы, и каждый цикл из $\mathbf{Z}^m(G)$ является их линейной

Пр.

Опр. Матрица $C(G)$, строками которой являются координаты вектор-циклов какого-либо циклового базиса, называется цикломатической матрицей графа G.

ТЕОРЕМА 5.2 (*свойства циклового базиса связного мультиграфа*)

1) Если при некоторой ориентации ребер выполняется равенство

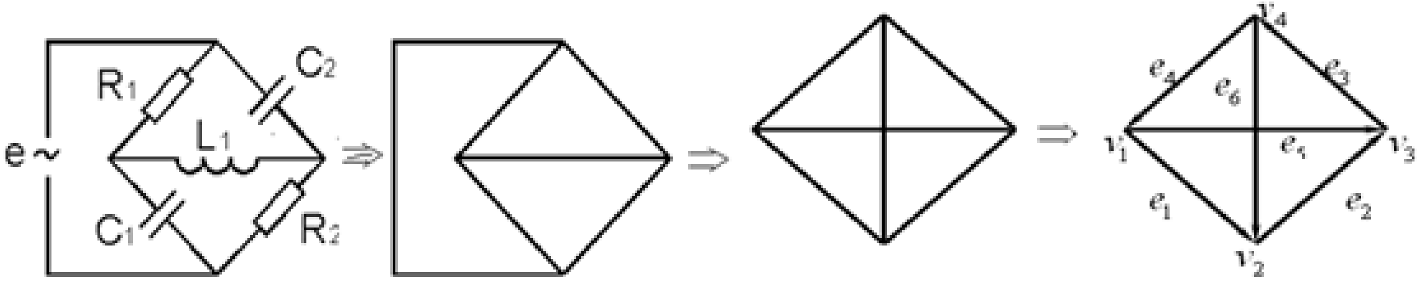
$$\exists \alpha_1,...,\alpha_s \in \mathrm{Q} \quad C(\mu) = \alpha_1 C(\mu_1) + ... + \alpha_s C(\mu_s),$$

то оно сохраняется при любой другой его ориентации.

2) Цикловые базисы мультиграфа имеют одно и тоже количество элементов, которое травно $\nu(G)$, поэтому $C(G)$ имеет размер $\nu(G) \times m(G)$.

3) Если связный орграф не является деревом ($\nu(G) > 0$), то в нем существует цикловой базис, состоящий из простых циклов.

Пр.



ТЕОРЕМА 5.3 Пусть электрическая цепь образована двухполюсными элементами $e_1, e_2, ..., e_m$. По этой цепи образуем связный мультиграф, сопоставив каждому элементу ребро, а каждому $i-$му узлу соединений этих элементов или проводнику между этими элементами - вершины $v_1, ..., v_n$. Зададим на каждом ребре ориентацию, превратив граф в орграф. Обозначим через $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ ... \\ u_m \end{pmatrix}$ матрицу падений напряжений на соответствующих элементах цепи, а через $I = \begin{pmatrix} i_1 \\ ... \\ i_m \end{pmatrix}$ - матрицу токов, проходящих по соответствующим дугам. Тогда:

1) (*электротехнический смысл матрицы* $C(G)$) однородная СЛАУ $C(G) \cdot U = 0$ совпадает с уравнением Кирхгофа для напряжений цепи;

2) (*электротехнический смысл матрицы* $B(G)$)

а) $rang\ B(G) = n-1$;

б) если из СЛАУ $B(G) \cdot I = 0$ выбросить одно какое-либо уравнение, то получится уравнение Кирхгофа для токов.

3) Уравнения пунктов 1), 2) являются линейными интегро-дифференциальными. Преобразование Лапласа переводит и в СЛАУ. Остается решить СЛАУ и применить к

полученным решениям обратное преобразование Лапласа.
Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Родоначальник теории графов Леонард Эйлер. В 1736 году в одном из своих писем он формулирует и предлагает решение задачи о семи кёнигсбергских

мостах, ставшей впоследствии одной из классических задач теории графов. В ходе рас суждений Эйлер пришёл к следующим выводам: **1)**Число нечётных вершин (вершин, к которым ведёт нечётное число рёбер) графа должно быть чётно. Не может существовать граф, который имел бы нечётное число нечётных вершин. **2)** Если все вершины графа чётные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом можно начинать с любой вершины графа и завершить его в той же вершине. **3)** Если ровно две вершины графа нечётные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом можно начинать с любой из нечётных вершин и завершить его в другой нечет ной вершине. **4)** Граф с более чем двумя нечётны ми вершинами невозможно начертить одним росчерком.

Дальнейшая история мостов. В 1905 году был построен Императорский мост по приказу кайзера, который не смог решить задачу мостов Кёнигсберга и стал жертвой шутки, которую сыграли с ним учёные умы, присутствовавшие на светском приёме (если добавить восьмой мост, то задача становится разрешимой). Разрушен в ходе бомбарди ровки во время Второй мировой войны. На его опорах в 2005 году был построен Юбилей ный мост. На данный момент (2016 год) в Калининграде 8 мостов.

Игры на основе графов. Палочки. Точки.

ИСТОЧНИКИ

Опорный конспект лекций на сайте skif@donstu.ru $\Longrightarrow$ *библиотека электронных ресурсов ДГТУ* $\Longrightarrow$ *факультет ИВТ* $\Longrightarrow$ *кафедра прикладной математики*

Учебники и монографии:

Братищев А.В. Математическая теория управляемых динамических систем. Уч. пособие.
Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем.
Нефёдов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики.
Глушков В.М. Цифровые автоматы.
Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.
Базыкин А.Д., Кузнецов Ю.А., Хибник А.И. Портреты бифуркаций.
Зубов В.И. Устойчивость движения.
Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного анализа.
Милованов В.П. Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и само организация.
Лосев А.К. Теория линейных электрических цепей.

Учебники по MATLAB + SIMULINK:

Братищев А.В. Руководство к работе с пакетами MATLAB и SIMULINK. Элементы проектирования и анализа. Учеб. пособие.
Лазарев Ю. Моделирование процессов и систем в MATLAB.

Решебники:

Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах.

Взять на абонементе библиотеки или скачать на сайте *www. techlibrary*

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ И ЭКЗАМЕНУ

1) Опр. отображений входа и перехода УДС (+ 3 условия).
2) Опр. УДС управляемой динамической системы (УДС) (по Калману).
3) Опр. свободной и обратимой динамической системы. Пр.
4) Опр. дискретной, непрерывной по времени УДС, конечного автомата и конечной УДС.
5) Опр. стационарной и гладкой УДС. Замечание.
6) Опр. линейной, несобственной УДС. Вывод. Сдедствие.
7) Опр. управляемого, достижимого состояний, полностью управляемой и полностью достижимой УДС.
8) Опр. ненаблюдаемого состояния и ненаблюдаемого подпространства линейной УДС. Опр. полностью наблюдаемой линейной УДС.
9) Опр. идентифицируемой линейной УДС. Связь с полной наблюдаемостью. Критерий идентифицируемости линейной УДС.

10) Опр. функционального преобразователя, булевой функции и логической формулы.
11) Опр. замыкания множества булевых функций, функционально полной системы и базиса. Пр.
12) Опр. логического элемента, логической и комбинационной схем (КС).
13) Опр. эквивалентных КС, задач анализа и синтеза КС.
14) Опр. автомата Мили. Способы задания.
15) Опр. кодировщика, декодировщика и цифрового автомата.
16) Опр. автомата Мура. Этапы синтеза автомата.
17) Опр. полных систем переходов и выходов автомата. D- и T-триггеры.
18) Опр. структурно полного набора автоматов и логических элементов. Теорема Глушкова.
19) Опр. канонического метода синтеза автомат и функции возбуждения автомата.
20) Опр. инвариантного множества ДС. Пр. Опр. центра.
21) Опр. узла и фокуса.
22) Опр. сепаратрисы.
23) Опр. каркаса фазового портрета и элементарных ячеек. Замечание.
24) Опр. эллиптической области, седлового и узлового секторов.
25) Опр. устойчивости и асимптотической устойчивости инвариантного множества по Ляпунову.
26) Опр. области асимптотической устойчивости инвариантного множества и асимптотической устойчивости в целом.
27) Опр. аттрактора и Т.3.3 об устойчивости по первому приближению.
28) Опр. цикла, предельного цикла, притягивающего и отталкивающего циклов.
29) Опр. топологически эквивалентных фазовых портретов и топологически эквивалентных бифуркационных диаграмм.
30) Опр. бифуркации, локальной бифуркации. Критические значения параметров ДС и параметрический портрет ДС.
31) Опр. бифуркационной диаграммы точки бифуркации и описания бифуркации.
32) Опр. грубого положения равновесия и грубой (структурно устойчивой) ДС. Замечание.
33) Опр. системы общего положения. Опр. бифуркационных условий и условий невырожденности бифуркационной диаграммы.
34) Опр. кратного и нейтрального положений равновесия ДС. Замечание.
35) Виды жордановых нормальных форм. Опр. канонического вида ДС.
36) Опр. ляпуновских величин и теорема Ляпунова 3.6.
37) Опр. жесткой и мягкой потери устойчивости ДС.
38) Суть метода аналитического конструирования нелинейных регуляторов (***АКАР***). Агрегированные переменные.
39) Опр. графа и орграфа. Пр.
40) Опр. петель, смежных дуг и матрицы инцидентности. Пр.
41) Опр. инцидентных ребра и вершины и изо морфных графов. Пр.
42) Опр. пути и контура орграфа. Пр.
43) Опр. маршрута, цепи и простой цепи графа. Пр.

44) Опр. цикла и простого цикла графа. Пр.
45) Опр. под графа и связного графа. Пр.
46) Опр. компонент связности, степени вершины. Пр.
47) Опр. висячей, изолированной вершин и дерева. Пр.
48) Опр. дерева и Т.5.1 о свойствах дерева.
49) Опр. цикломатического числа и остовного дерева графа. Пр.
50) Опр. циклового базиса графа и Т.5.2 о его свойствах.

ТЕОРЕМЫ К ЭКЗАМЕНУ

1) Теорема 2.1 Шеннона и формула Шеннона представления логической формулы.
2) Т.3.2 о структуре окрестности положения равновесия ДС. Рисунки секторов.
3) Т.3.4 о свойствах грубой ДС.
4) Т.3.5 о качественном характере портрета в случае кратного положения равновесия. Рис.
5) Т.3.7 о качественном характере портрета в случае нейтрального положения равновесия. Рис.
6) Вывод и определение функции последования.
7) Вывод вариационного смысла условия на агрегированную переменную.
8) Вывод уравнения синергетического регулятора.
9) Т.4.1 об устойчивости положения равновесия синергетического регулятора.
10) Т.5.3 об электротехническом смысле матрицы инцидентности и цикломатической матрицы графа.

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

1) Вычислительные возможности MATLAB.
2) Проектирование логических и дискретных систем в SIMULINK.
3) Проектирование непрерывных систем в SIMULINK.