ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине

Высшая математика: «Ряды»

Авторы
Ермилова О.В.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

«Учебное пособие» содержит теоретические и методические рекомендации по базовому уровню изучения дисциплины «Высшая математика» по теме «Ряды». Составлено для проведения теоретических и практических работ по дисциплине «Высшая математика», содержит большое количество типовых задач с подробным решением по данному разделу. Студентам это пособие поможет подготовиться к практическим, рейтинговым занятиям по данному разделу, а преподавателю сэкономит время на подготовку практических и домашних заданий.

Автор

ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Ермилова О.В.

Оглавление

ГЛАВА1.ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Ряды широко используются в теоретических исследованиях математического анализа, имеют разнообразные практические применения в прикладных науках.

1.1. Числовой ряд. Основные понятия.

Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n$ называется **числовым рядом**, то есть выражение вида

$$\boldsymbol{u_1 + u_2 + \dots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n} \quad \textbf{(1.1)},$$

где $u_1, u_2, \dots, u_n$ – действительные или комплексные числа, называемые членами ряда, а u_n – общий член ряда.

Сумма конечного числа n первых членов ряда называется **n-ой частичной суммой ряда.**

Обозначение: S_n .

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $s_1, s_2, \dots, s_n$,где

$s_1 = u_1$ – первая частичная сумма ряда;

$s_2 = u_1 + u_2$ – вторая;

....

$$\boldsymbol{S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n} \quad \textbf{(1.2)-}$$

n- ая частичная сумма ряда.

Ряд (1.1) называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности его частных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$,при этом число S называется **суммой ряда**.

Если последовательность частных сумм ряда расходится, то есть не имеет предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \nexists$ или имеет бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

Алгоритм нахождения суммы ряда

В данной теме нас будет интересовать вопрос нахождения сумм числовых рядов по определению. Определение суммы ряда опирается на значение $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, поэтому для нахождения суммы нам нужно выполнить два шага:

1) Составить n-ю частичную сумму S_n;

Например, для нахождения суммы ряда, общий член которого имеет вид рациональной дроби $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, вполне подходит такой алгоритм:

а) Разложить дробь $\frac{P(n)}{Q(n)}$ на элементарные дроби;

б) Записать выражение для частичной суммы S_n, используя результаты предыдущего пункта;

в) Перегруппировать слагаемые в выражении для S_n, приведя их к удобному для сокращения виду;

2) Найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, если конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует, то его значение и будет суммой рассматриваемого ряда, а сам ряд будет называться сходящимся. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \nexists$ (не существует), то ряд будет расходиться.

Пример 1.1. Для данного ряда написать формулу частичной суммы ряда и найти его сумму:

а) $1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 1$;

б) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$;

в) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

г) $\frac{3}{1\cdot 4} + \frac{3}{4\cdot 7} + \frac{3}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{3}{(3n-2)\cdot(3n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}$;

д) $\frac{5}{8} + \frac{5}{24} + \frac{5}{48} + \cdots + \frac{5}{4n^2+4n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4n^2+4n}$.

Решение.

а) Найдем формулу n-ой частичной суммы ряда, для этого просуммируем первые n членов заданного числового ряда:

$$s_1 = u_1 = 1;$$

$$s_2 = u_1 + u_2 = 1 + 1;$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n_{\text{шт.}}} = 1 \cdot n = n.$$

Итак, $S_n = n$ – формула n –ой частичной суммы ряда.

Найдем сумму ряда:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, следовательно ряд расходится и суммы не имеет.

б) Составим n-ю частичную сумму ряда, то есть просуммируем первые n членов заданного числового ряда:

$$s_1 = u_1 = 1;$$

$$s_2 = u_1 + u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4};$$

....

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots + \frac{1}{2^n};$$

Заметив, что члены ряда представляют собой геометрическую прогрессию (каждый член последовательности начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на определенное число, в нашем случае на $q = \frac{1}{2}$), как известно, формула n-ой суммы геометрической прогрессии имеет вид:

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$;

Таким образом, формула частичной суммы ряда имеет вид:

$$S_n = \frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

Найдем сумму ряда:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 2.$$

Итак, данный ряд сходится и сумма его $S = 2$.

в) если мы просто запишем:
$S_n = \frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$, то эта запись, совершенно верная по форме, ничего нам не даст по сути.
Поскольку общий член ряда имеет вид рациональной дроби $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{1}{n(n+1)}$, для нахождения формулы частичной суммы ряда и упрощения решения необходимо разложить дробь $\frac{1}{n(n+1)}$ на элементарные дроби:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1};$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)};$$

$$A(n+1)+Bn = 1.$$

Чтобы найти значения A и B есть два пути. Можно раскрыть скобки и перегруппировать слагаемые и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях, а можно просто подставить вместо n некие подходящие значения (обращающие знаменатель в ноль), в этом примере пойдём первым путём, а в следующем, для разнообразия и расширения кругозора – будем подставлять частные значения n. Раскрывая скобки и перегруппировывая слагаемые, получим:

$$An + A + Bn = 1;$$

$$(A+B)n + A = 1;$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях n:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases};$$

Решая эту систему, имеем: $A = 1, B = -1$.

Подставляя полученные значения в разложение общего члена ряда на простейшие дроби, имеем:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

Этот способ упрощения формулы для частичной суммы имеет простую суть: разложить общий член ряда на элементарные дроби, а потом сократить слагаемые.

Чтобы найти частичную сумму ряда и этот результат был более наглядным, распишем несколько первых членов ряда по формуле $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$:

$$u_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2};$$

$$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3};$$

$$u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4};$$

…………………………………………………….

$$u_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Распишем n-ю частичную сумму, учитывая полученное разложение:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

Как видите, все слагаемые этой суммы сокращаются, кроме первого и последнего:

Итак, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Найдем сумму ряда, для этого вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Итак, данный ряд сходится и сумма его $S = 1$.

г) Поскольку общий член ряда имеет вид рациональной дроби $u_n = \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}$, то для нахождения формулы частичной суммы ряда разложим дробь $\frac{3}{(3n-2)(3n+1)}$ на элементарные дроби:

$$\frac{3}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1};$$

$$\frac{3}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A(3n+1) + B(3n-2)}{(3n-2)(3n+1)};$$

$$A(3n+1) + B(3n-2) = 3;$$

$$(3A+3B)n + (A-2B)n^0 = 0 \cdot n^1 + 3n^0;$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях n, получим систему:

$$\begin{cases} 3A + 3B = 0 \mid : 3 \\ A - 2B = 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} A = -B \\ A - 2B = 3 \end{cases},$$ откуда получим $A = 1$, $B = -1$.

Таким образом,

$$u_n = \frac{3}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}:$$

$$u_1 = 1 - \frac{1}{4};$$

$$u_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{7};$$

$$u_3 = \frac{1}{7} - \frac{1}{10};$$

……………………………………………………….

$$u_{n-1} = \frac{1}{3(n-1)-2} - \frac{1}{3(n-1)+1} = \frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2}.$$

Напишем формулу частичной суммы ряда:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2} +$$

$$+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}=1-\frac{1}{3n+1};$$

Итак, $S_n = 1-\frac{1}{3n+1}$.

Найдем сумму ряда:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=1.$$

Итак, данный ряд сходится и сумма его $S=1$.

д) Поскольку общий член ряда имеет вид $u_n = \frac{5}{4n^2+4n}$, то для нахождения формулы частичной суммы ряда разложим знаменатель данной дроби $4n^2+4n$ на множители, для этого найдем корни уравнения $4n^2+4n=4n(n+1)$;

Разложение на элементарные дроби общего члена ряда будет иметь вид:

$$\frac{5}{4n^2+4n}=\frac{5}{4n(n+1)}=\frac{A}{4n}+\frac{B}{n+1};$$

$$\frac{5}{4n^2+4n-3}=\frac{A(n+1)+4Bn}{4n(n+1)};$$

$$A(n+1)+4Bn=5;$$

$$(A+4B)n^1+An^0=0\cdot n^1+5\cdot n^0;$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях n,получим систему:

$$\begin{cases} A+4B=0 \\ A=5 \end{cases};$$

$\begin{cases} A=-4B \\ A=5 \end{cases}$,откуда получим $A=5,\ B=-\frac{5}{4}$.

Таким образом,

$$u_n = \frac{5}{4n^2+4n-3}=\frac{5}{4n}-\frac{\frac{5}{4}}{n+1}=\frac{5}{4n}-\frac{5}{4n+4}:$$

$$u_1 = \frac{5}{4}-\frac{5}{8};\ u_2 = \frac{5}{8}-\frac{5}{12};\ u_3 = \frac{5}{12}-\frac{5}{16};$$

....

$$u_{n-1}=\frac{5}{4(n-1)}-\frac{5}{4(n-1)+4}=\frac{5}{4n-4}-\frac{5}{4n}.$$

Напишем формулу n-й частичной суммы ряда:

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_{n-1}+u_n=$$

$$=\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{5}{8}-\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{5}{12}-\frac{5}{16}\right)+\dots+\frac{5}{4n-4}-\frac{5}{4n}+$$

$$+\frac{5}{4n}-\frac{5}{4n+4}=\frac{5}{4}-\frac{5}{4n+4}.$$

Итак, $S_n=\frac{5}{4}-\frac{5}{4n+4}$.

Найдем сумму ряда:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{4n+4}\right)=\frac{5}{4}.$$

Итак, данный ряд сходится и сумма его $S=\frac{5}{4}$.

Задания для самостоятельного решения.

1.Для данного ряда написать формулу n-й частичной суммы и найти его сумму:

1.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
2.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-3n-2}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$
4.	$\sum_{n=1}^{\infty}n$
5.	$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}$
6.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$

7.	$\sum_{n=1}^{\infty}(3n+1)$
8.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$
9.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$
10.	$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)$

Ответы:

1.1. $S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}$, $S=\frac{1}{2}$.**1.2.** $S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$, $S=\frac{1}{3}$.

1.3. $S_n=1-\frac{1}{n+1}$, $S=1$. **1.4.** $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$ – ряд расходится. **1.5.** $S_n=2^n-1$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$ – ряд расходится.

1.6. $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$, $S=\frac{5}{6}$.**1.7.** $S_n=\frac{n(3n+5)}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$ – ряд расходится.**1.8.** $S_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$, $S=\frac{11}{18}$.

1.9. $S_n=1-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $S=1$. **1.10.** $S_n=n^2$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$ – ряд расходится.

1.2. Основные свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости.

Рассмотрим основные свойства числовых рядов, для лучшего понимания темы.

Свойства числовых рядов.

Пусть дан числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. Сформулируем его основные свойства.

1) Если сходится ряд, полученный из данного ряда отбрасыванием или присоединением конечного числа членов, то сходится и данный ряд, и наоборот. Иными словами, отбрасывание или присоединение конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда.

Доказательство.

Пусть S_n – n-я частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, S_k – сумма k отброшенных членов и S_{n-k} – сумма членов ряда, входящих в сумму S_n и не входящих в сумму S_k . При достаточно большом n все отброшенные члены будут содержаться в суммеS_n , то есть выполняется равенство $S_n = S_k + S_{n-k}$.Тогда, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-k}$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_k + S_{n-k})$,то есть исходный ряд$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. И наоборот, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$,то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-k}$,то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится ряд.

Аналогично доказывается сходимость при добавлении к ряду$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ конечного числа членов.

2)Если сходится ряд$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и его сумма равна S ,то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ ($C = const$ – константа) также сходится, причём его сумма равна CS .

Доказательство.

Пусть S_n – частичная сумма ряда$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ и $\overline{S_n} = Cu_1 + Cu_2 + \dots + Cu_n =$

$= C(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = CS_n$ – частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$.

Отсюда, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$(ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится), то

существует $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} CS_n = CS$,то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ тоже сходится и его сумма равна CS.

3) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и их суммы равны S_1 и S_2соответственно, то их можно почленно складывать (или вычитать), причём ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ также сходятся и сумма каждого равна соответственно

$S = S_1 \pm S_2$.

Доказательство.

Пусть S_{n1}, S_{n2}, S_n – частичные суммы рядов$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ соответственно, тогда

$$S_n = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \dots + (u_n \pm v_n) =$$
$$= (u_1 + u_2 + \dots + u_n) \pm (v_1 + u_2 + \dots + u_n) = S_{n1} \pm S_{n2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_{n1} \pm S_{n2}) = \lim_{n\to\infty} S_{n1} \pm \lim_{n\to\infty} S_{n2} = S_1 \pm S_2.$$

Необходимый признак сходимости.

Нахождение n -й частичной суммы S_n и ее предела для произвольного ряда во многих случаях является непростой задачей. Поэтому для выяснения сходимости ряда устанавливают специальные признаки сходимости. Одним из них, как правило, является необходимый признак сходимости.

Теорема 1.1(Необходимое условие сходимости ряда).

Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ был сходящимся необходимо, чтобы общий член ряда u_n стремился к нулю, то есть $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и его сумма равна S, то для его частичных сумм $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$, $S_{n-1} = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$ имеет место равенство $u_n = S_n - S_{n-1}$,переходя к пределу при $n \to \infty$ в полученном равенстве имеем:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

Замечание: условие сходимости, сформулированное в теореме 1.1, является необходимым, но не достаточным, то есть при выполнении условия $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ряд может расходиться.

Следствие 1.1(достаточное условие расходимости ряда).

Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

Доказательство.

Действительно, если бы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходился, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ (по необходимому условию сходимости ряда), но это противоречит условию, следовательно, ряд расходится.

Таким образом, если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ (общий член не стремится нулю), то ряд точно расходится.

Пример 1.2. Записать формулу общего члена ряда $\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{5}{15} + \frac{7}{10} + \cdots$ и показать, что ряд расходится, применяя необходимый признак сходимости ряда.

Решение.

Рассмотрим числители членов исходного ряда- $1,3,5,7,\ldots$и заметим, что каждый следующий больше предыдущего на одно и тоже число 2, то есть они образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 2$.

Как известно формула общего члена арифметической прогрессии имеет вид:

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 1 + 2(n-1) = 2n - 1.$$

Аналогично поступая со знаменателями членов данного ряда, имеем:

$$5,10,15,20,\ldots,\ a_1 = 5, d = 5,$$

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 5 + 5(n-1) = 5n.$$

Таким образом, общий член ряда выражается формулой:

$$u_n = \frac{2n-1}{5n}.$$

Покажем, что ряд расходится. Для этого найдем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{5n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{5n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{5} = \frac{2}{5} \neq 0$- выполняется достаточное условие расходимости ряда- ряд расходится.

Пример 1.3. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда: **а)**$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{2n+1}$; **б)**$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{ln(n+1)}$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{n^2+1}{n+3}$;**г)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{(n+2)^3}$.

Решение.

а) Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$:

$$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+4}{2n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{4}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{4}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$- необходимый признак сходимости не выполняется, ряд расходится.

б) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{ln(n+1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)'}{(ln(n+1))'} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n+1}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty \neq 0$- - необходимый признак сходимости не выполняется, ряд расходится.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} arctg\frac{n^2+1}{n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} arctg\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} =$

$= arctg\frac{1}{0} = arctg(\infty) = \frac{\pi}{2} \neq 0$ - необходимый признак сходимости не выполняется, ряд расходится.

г) Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{(n+2)^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}\right)}{\left(n\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{2}{n}\right)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3} = \frac{0}{1} = 0.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, вывод о сходимости ряда делать рано (это лишь необходимое условие сходимости ряда, но не достаточное-ряд может как сходиться, так и расходиться). Для исследования ряда на сходимость необходимо применить один из достаточных признаков сходимости, которые мы рассмотрим в следующей главе (см. главу 1.3).

Задания для самостоятельного решения.

2.Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда:

1.	

	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n+5}$
2.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{9}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$
4.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}$
5.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n^2+3}$
6.	$\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2-2n}\right)$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{4n+3}$
8.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{lnn}{n}$
9.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n-1}{5n^2+1}$
10.	$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\frac{7}{3^n}$

Ответы:

2.1. не выполняется, ряд расходится.**2.2.** не выполняется, ряд расходится.**2.3.** не выполняется, ряд расходится.**2.4.** выполняется.**2.5.** выполняется.**2.6.** не выполняется, ряд расходится.

2.7. не выполняется, ряд расходится. **2.8.** выполняется.

2.9. не выполняется, ряд расходится. **2.10.** ряд расходится.

1.3. Эталонные ряды. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов.

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда часто устанавливается путем сравнения его с **эталонным рядом**- ряд, о котором заведомо известно сходится он или расходится.

К эталонным рядам относятся:

1)$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ **−геометрический ряд**- ряд, представляющий собой сумму членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = a$ и знаменателем q. Этот ряд сходится, если $|q| < 1$, и расходится, если $|q| \geq 1$.
Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

Заметив, что члены ряда$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ представляют собой геометрическую прогрессию (каждый член последовательности начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на определенное число, в нашем случае на q), как известно, формула n-ой суммы геометрической прогрессии имеет вид:

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $b_1 = a$,поэтому, в нашем случае имеем:

$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$;

Найдем предел этой суммы:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a-aq^n}{1-q} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n;$$

Рассмотрим возможные случаи в зависимости от величины q:

а) Если$|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$,
поэтому $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ −ряд расходится;

б) Если$|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$,поэтому $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$ − ряд сходится, его сумма равна $S = \frac{a}{1-q}$;

в) Если $|q| = 1$, то при $q = 1$, ряд принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} a = a + a + a + \cdots + a + \cdots$,
$S_n = na$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$ – ряд расходится;
при $q = -1$, ряд принимает вид:
$\sum_{n=0}^{\infty} a(-1)^n = a - a + a - a + \cdots$, $S_n = 0$, при $n = 2k$ и $S_n = a$ при $n = 2k - 1$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, ряд расходится.

Таким образом, **геометрический ряд** $\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{aq^n}: \begin{cases} \text{сходится, при } |\boldsymbol{q}| < \mathbf{1} \\ \text{расходится, при } |\boldsymbol{q}| \geq \mathbf{1} \end{cases}$.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n}{5^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ попадает под вид ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{aq^n}$ – этот ряд сходится, так как $q = \left|\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5} < 1$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n^{\alpha}}}$ – **обобщенный гармонический ряд**,

можно показать (займитесь этим самостоятельно), что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ – сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leq 1$.

Таким образом, **обобщенный гармонический ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n^{\alpha}}}: \begin{cases} \text{сходится, при } \boldsymbol{\alpha} > \mathbf{1} \\ \text{расходится, при } \boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{1} \end{cases}$.

При $\alpha = 1$, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ -**гармоническим ряд**, гармонический ряд расходится.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ является обобщенным гармоническим рядом. Этот ряд расходится, так как $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Достаточные признаки сходимости для знакоположительных рядов.

Необходимый признак сходимости не дает возможность судить о том, сходится ли данный ряд или нет. Сходимость и расходимость ряда проверяется с помощью достаточных признаков сходимости.

При изучении достаточных признаков сходимости знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, так как при простом умножении на –1 (что, как известно, не влияет на сходимость ряда) из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

К достаточным признакам сходимости знакоположительных рядов относятся: признак сравнения рядов, признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши. Рассмотрим, как работает каждый признак в отдельности.

Признаки сравнения рядов.

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ устанавливается путем сравнения его с эталонным рядом$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. В основе такого сравнения лежат следующие теоремы.

Теорема 1.2(Первый признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $u_n \le v_n$.Если $u_n \le v_n$ при любом n, то из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость ряда$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$,а из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Доказательство.

Упрощённо говоря, если ряд с меньшими членами не имеет суммы (расходится), то и ряд с большими членами тоже будет расходиться. И это логично, так как, если исходная сумма была бесконечно большой, то после увеличения слагаемых она такой и останется, то есть из расходимости меньшего ряда, следует расходимость большего.

Аналогично размышляя, получим, что из сходимости «большего ряда», следует сходимость «меньшего ряда».

Признак сравнения можно сформулировать также и в иной форме: в форме предела. Обычно говорят, что это второй признак сравнения (или вторая теорема сравнения). Иногда его называют предельным признаком сравнения или признаком сравнения в предельной форме.

Теорема 1.3(Второй признак сравнения- предельный признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k(0 < k < \infty)$, то ряды$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости (сходятся или расходятся одновременно).

Доказательство.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, то по определению предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что при $n > N$выполняется неравенство:

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - k\right| < \varepsilon, ,$$

$$-\varepsilon < \frac{u_n}{v_n} - k < \varepsilon \,| + k,$$

$$k - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < k + \varepsilon | \cdot v_n \ ,$$

$$(k-\varepsilon)v_n \ < u_n \ < (k+\varepsilon)v_n \ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(k-\varepsilon)v_n \ < \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ < \sum_{n=1}^{\infty}(k+\varepsilon)v_n \ \ (*)$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ -сходится, то из левого неравенства (*) и первого признака сравнения ряд$\sum_{n=1}^{\infty}(k-\varepsilon)v_n$ -сходится (из сходимости «большего ряда», следует сходимость «меньшего ряда»). Тогда, согласно второму свойству числовых рядов, ряд$\sum_{i=1}^{n} v_n$ –сходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ -расходится, то из правого неравенства (*) первого признака сравнения и второго свойства числовых рядов, следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ –расходится.

Аналогично, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится (расходится), то сходящимся (расходящимся) будет ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Замечание:

1) чаще всего в стандартных примерах признаки сравнения применяются, если общий член ряда представлен дробью, в числителе и знаменателе которой стоят многочлены. Например, $u_n = \frac{n+5}{n^2+1}$;

2) при выборе рядов для сравнения полезно помнить следующие специальные пределы:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1, \text{то есть } \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \text{при } n \to \infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{tg\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1, \text{то есть } tg\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \text{при } n \to \infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1, \text{то есть } \arcsin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \text{при } n \to \infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{arctg\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1, \text{то есть } \arcsin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \text{при } n \to \infty.$$

В некоторых случаях, удобно также использовать неравенства: $|\sin n| \le 1; |\cos n| \le 1; \ln n < n, n \in N$.

Пример 1.4. Исследовать сходимость ряда с помощью признаков сравнения: **а)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^2+1}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+n}{5^n}$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{n+7}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+\ln n}$; **д)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos \alpha n|}{3^n}$; **е)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{3}+2}{\sqrt{n^4+2}}$; **ё)** $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{5^n}$.

Решение.

а) При $n > 0$ имеем $n + 5 > 0$ и $n^2 + 1 > 0$, то $u_n > 0$. Следовательно, наш ряд является положительным. Для положительного ряда достаточно выполнения условия $u_n \geq 0$. Однако в общем случае не будем исключать возможности: $u_n > 0$.

Для начала неплохо бы проверить выполнение необходимого условия сходимости, то есть найти $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$,вдруг получится так, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$,тогда ряд будет расходиться, и решение на этом закончится.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{n^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$(ряд может как сходиться, так и расходиться), то вывод о сходимости нашего ряда делать рано. Ряд может как сходиться, так и расходиться. Для дальнейшего исследования ряда на сходимость применяем признаки сравнения, для этого сравним исходный ряд$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n+5}{n^2+1}}_{u_n}$ с эталонным рядом, в данном случае подбираем самый близкий к данному$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^2+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$, то есть с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{v_n}$ – гармоническим ряд, $\alpha = 1$, который является расходящимся.

<u>1 способ (первый признак сравнения)</u>

Нам нужно показать, что из расходимости меньшего ряда, следует расходимость большего ряда, то есть показать, что если ряд - расходится и при этом $u_n \geq v_n$, тогда и заданный нам ряд будет расходиться.

Очевидно, что при достаточно большом n члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{n+5}{n^2+1}}^{u_n}$ меньше членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{1}{n}}^{v_n}$, то есть неравенство $u_n \geq v_n$ не выполняется, следовательно первый признак сравнения не работает.

2 способ (второй признак сравнения)

Второй признак сравнения работает с пределом $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k, 0 < k < \infty$.

Нам известен общий член исходного ряда $u_n = \frac{n+5}{n^2+1}$ и общий член ряда, с которым мы сравниваем: $v_n = \frac{1}{n}$.

Заметим, что совершенно не важно, какой общий член располагать в числителе, а какой – в знаменателе. Главное, чтобы выражение в знаменателе не равнялось нулю.

Например, так как $v_n \neq 0$, то этот общий член вполне можно расположить в знаменателе:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+5}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+5)}{n^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 1 = k,$$

так как $0 < k < \infty$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^2+1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ сходятся либо расходятся одновременно. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (гармонический ряд $\alpha = 1$), то одновременно с ним будет расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^2+1}$.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^2+1}$-расходится.

б) Проверим необходимое условие:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(4^n+n)'}{(5^n)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n ln4 + 1}{5^n ln5} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(\frac{4}{5}\right)^n}_{\to 0}\cdot\frac{ln4}{ln5}+\underbrace{\frac{1}{5^n ln5}}_{\to 0}\right)=0$- необходимое условие выполняется.

Сравним наш ряд$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+n}{\underbrace{5^n}_{u_n}}$; с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{4}{5}\right)^n}_{v_n}$,$|q|=\frac{4}{5}<1-$ сходится.

<u>1 способ (первый признак сравнения)</u>

Нам нужно показать, что из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего ряда, то есть выполняется неравенство$u_n \le v_n$,но $u_n = \frac{4^n+n}{5^n} \ge \frac{4^n}{5^n} = v_n$,тогда данный признак не работает (из сходимости большего ряда, следует сходимость меньшего ряда, а у нас получилась обратная ситуация).

<u>2 способ (второй признак сравнения)</u>

Находим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4^n+n)5^n}{5^n\cdot 4^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+n}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4^n+n)'}{(4^n)'}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n ln4+1}{4^n ln4}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4^n ln4}\right)=1\ne 0,\infty$, следовательно, исходный ряд сходится.

в) Проверим необходимое условие сходимости, найдем $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n+7}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}}=\infty\ne 0-$ необходимое условие не выполняется - ряд расходится, исследование окончено.

г) Необходимое условие сходимости выполняется, так как

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+lnn}=0.$$

Сравним наш ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ –сходится, так как $\alpha = 3 > 1$.

1 способ (первый признак сравнения).

Нам нужно показать, что из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего ряда, то есть выполняется неравенство $u_n \le v_n$.Очевидно, что $\overbrace{\frac{1}{n^3+lnn}}^{u_n} \le \overbrace{\frac{1}{n^3}}^{v_n}$,поскольку $n^3 < n^3 + lnn$,

следовательно, по первому признаку сравнения исходный ряд сходится.

2 способ (второй признак сравнения)

Находим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+lnn} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^3)'}{(n^3+lnn)'} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{3n^2+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3}{3n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3}{n^3\left(3+\frac{1}{n^3}\right)} = 1 \ne 0,\infty$$

, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+lnn}$ сходится.

д) Необходимое условие выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|cos\alpha n|}{3^n} = 0$,так как $|cos\alpha n| \le 1$, а произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть функция бесконечно малая.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|cos\alpha n|}{3^n}$ –знакоположительный ряд, сравним его с рядом$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $q = \frac{1}{3} < 1$ –сходится.

1 способ (первый признак сравнения)

Поскольку $|cos\alpha n| \le 1$ выполняется неравенство$\overbrace{\frac{|cos\alpha n|}{3^n}}^{u_n} \le \overbrace{\frac{1}{3^n}}^{v_n}$,то есть из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего ряда, следовательно, по первому признаку сравнения исходный ряд сходится.

2 способ (второй признак сравнения)

Находим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|cos\alpha n|3^n}{3^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}|cos\alpha n|\nexists$ – второй признак сравнения не работает.

е) Проверим необходимое условие сходимости ряда:

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{sin\frac{\pi n}{3}+2}{\sqrt{n^4+2}}=0$,так как $sin\frac{\pi n}{3}$ограниченная функция $\left(\left|sin\frac{\pi n}{3}\right|\le\frac{\sqrt{3}}{2}\right.$, то есть $\left.-\frac{\sqrt{3}}{2}\le sin\frac{\pi n}{3}\le\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть функция бесконечно малая. Необходимое условие выполняется;

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\frac{\pi n}{3}+2}{\sqrt{n^2+2}}$ –знакоположительный ряд, сравним его с рядом$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\alpha=1$, ряд расходится.

1 способ (первый признак сравнения)

$\overbrace{\frac{sin\frac{\pi n}{3}+2}{\sqrt{n^3+2}}}^{u_n}\ge\overbrace{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}^{v_n}$, так как $\left|sin\frac{\pi n}{3}\right|\le\frac{\sqrt{3}}{2}$.Из расходимости меньшего ряда следует расходимость большего, следовательно, первый признак сходимости выполняется, ряд расходится.

2 способ (второй признак сравнения)

Находим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(sin\frac{\pi n}{3}+2\right)\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(sin\frac{\pi n}{3}+2\right)\nexists$, так как $sin\frac{\pi n}{3}$ при $n\to\infty$ не имеет предела, второй признак не работает.

ё) Найдем предел общего члена ряда:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{1}{5^n} = \left| \begin{matrix} \sin\frac{1}{5^n} \sim \frac{1}{5^n} \\ \text{при } n \to \infty \end{matrix} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{5^n} = 0$- необходимое условие сходимости выполняется (ряд может как сходиться, так и расходиться).

Поскольку первый признак не работает$(u_n \geq v_n)$используем второй(предельный) признак сравнения, находим предел$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot \sin\frac{1}{5^n} \cdot 5^n}{2^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5^n} \cdot 5^n = 1 \neq 0, \infty$, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{5^n}$сходится.

Признак Даламбера.

Если в признаках сравнения необходимо сравнить ряд с наиболее близким к нему эталонным рядом и сделать вывод о сходимости (расходимости) ряда, то признак Даламбера предполагает найти предел отношения u_{n+1} члена ряда к общему члену рядаu_n и сравнить полученное значение с единицей.

Теорема 1.4(Признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует конечный и бесконечный предел$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, то при $k < 1$ ряд сходится, а при $k > 1$ – ряд расходится.

Доказательство.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, то по определению предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что при $n > N$выполняется неравенство:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - k\right| < \varepsilon,$$

$$-\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} - k < \varepsilon| + k,$$

$k-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<k+\varepsilon$.

1)Рассмотрим случай, если $k<1$:

Тогда можно подобрать ε так, что число $k+\varepsilon<1$. Обозначим $k+\varepsilon=t$, $t<1$. Тогда из правой части неравенства $k-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<k+\varepsilon$,то есть из неравенства$\frac{u_{n+1}}{u_n}<k+\varepsilon$ получаем$\frac{u_{n+1}}{u_n}<t$ или $u_{n+1}<u_n t$, $n>N$. В силу третьего свойства числовых рядов (конечное число членов ряда можно отбросить(прибавить) и это не повлияет на сходимость) можно считать, что $u_{n+1}<u_n t$ для всех $n\epsilon N$. Давая номеру n значения 1,2,3..., получим серию неравенств:

$u_2<tu_1$,

$u_3<tu_2<t^2u_1$,

$u_4<tu_3<t^3u_1$,

....

$u_n<tu_n<t^{n-1}u_1$,....,то есть члены ряда$u_2+u_3+u_4+\cdots+u_n+\cdots$ меньше соответствующих членов ряда $tu_1+t^2u_1+t^3u_1+\cdots+t^{n-1}u_1+\ldots$, который сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $0<t<1$. Но тогда, на основании признака сравнения (из сходимости «большего ряда», следует сходимость «меньшего ряда»), сходится ряд $u_2+u_3+u_4+\cdots+u_n+\cdots$, следовательно, сходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

2)Пусть $k>1$,тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=k>1$. Отсюда следует, что, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ или $u_{n+1}>u_n$, то есть члены ряда возрастают с увеличением номера n. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$. На основании достаточного условие расходимости ряда, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится.

Замечания:

1) Если $k=1$, то на вопрос о сходимости ряда остается открытым (признак Даламбера не работает), необходимо применить какой-либо другой достаточный признак сходимости;

2)Чаще всего признак Даламбера применяют в примерах, где фигурируют факториалы.

Пример 1.5. Исследовать сходимость ряда: **а)**$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)0{,}8^n$;**в)**$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^n+2}$;**г)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;**д)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{4^{n+2}}$.

Решение.

а) Для исследования ряда на сходимость воспользуемся признаком Даламбера, учитывая, что $u_n=\frac{2^n}{n^2}$, $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{2^n}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=2=k>1,$$ исходный ряд расходится.

б) Воспользуемся признаком Даламбера, учитывая, что $u_n=(n+1)0{,}8^n$,$u_{n+1}=(n+2)0{,}8^{n+1}$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)0{,}8^{n+1}}{(n+1)0{,}8^n}=0{,}8\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=$$

$$=0{,}8\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0{,}8\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=0{,}8\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=0{,}8<1,$$ исходный ряд сходится.

в) Так как в примере фигурируют факториалы, воспользуемся признаком Даламбера, в нашем случае $u_n=\frac{(n+1)!}{3^n+2}$, $u_{n+1}=\frac{(n+2)!}{3^{n+1}+2}$, учитывая, что$(n+2)!=(n+1)!\,(n+2)$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,(n+2)}{3^n\cdot 3+2}\cdot\frac{3^n+2}{(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n+2)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2}{3^n\cdot 3+2}=\infty\cdot\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\infty\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(1+\frac{2}{3^n}\right)}{3^n\left(3+\frac{2}{3^n}\right)}=\infty=\ k>1,$$ исходный ряд расходится.

г) $u_n\ =\frac{(n!)^2}{(2n)!}, u_{n+1}\ =\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2(n+1))!}=\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!}$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\cdot\frac{(2n)!}{(2n+2)!};$$

Так как $(n+1)!=n!\,(n+1)$,

$(2n+2)!=(2n)!\,(2n+1)(2n+2)$.

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!(n+1)}{n!}\right)^2\cdot\frac{(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{1}{4}<1,$$ то исходный ряд сходится.

д) $u_n\ =\frac{(2n-1)!}{4^{n+2}}=\frac{(2n-1)!}{4^n\cdot 4^2}$,

$u_{n+1}\ =\frac{(2(n+1)-1)!}{4^{n+3}}=\frac{(2n+1)!}{4^n\cdot 4^3}$, учитывая, что

$(2n+1)!=(2n-1)!\cdot 2n\cdot(2n+1)$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!\cdot 2n\cdot(2n+1)}{4^n\cdot 4^3}\cdot\frac{4^n\cdot 4^2}{(2n-1)!}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}2n\cdot(2n+1)=\infty=\ k>1,$$ исходный ряд расходится.

Радикальный признак Коши.

Когда общий член ряда стоит в степени n для исследования сходимости знакоположительного ряда удобно пользоваться радикальным признаком Коши.Этот признак очень похож с признаком Даламбера, о чем говорит его формулировка и доказательство.

Теорема 1.6 (радикальный признак Коши). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$, то при $k < 1$ ряд сходится, а при $k > 1$ ряд $\sum_{i=1}^{n} u_n$ расходится.

Доказательство теоремы аналогично доказательству признака Даламбера. Поэтому не будем его рассматривать.

Замечания: как и для признака Даламбера, если $k = 1$, то на вопрос о сходимости ряда ответить нельзя, необходимо применить какой-либо другой признак сходимости.

Пример 1.6. Исследовать сходимость ряда применяя признак Коши: **а)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arcsin\frac{1}{n}\right)^n$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{2n-1}\right)^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$;**г)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(2n)^n}$; **д)** $\sum_{n=1}^{\infty} nsin^n\frac{\pi}{2n}$.

Решение.

а) Воспользуемся радикальным признаком Коши, учитывая, что $u_n = \left(arcsin\frac{1}{n}\right)^n$, $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(arcsin\frac{1}{n}\right)^n} = arcsin\frac{1}{n}$ имеем:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} arcsin\frac{1}{n} = arcsin0 = 0 < 1$ –исходный ряд сходится.

б) Учитывая, что

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{3n+5}{2n-1}\right)^n} = \frac{3n+5}{2n-1} \text{ имеем:}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{2n-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{5}{n}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)} = \frac{3}{2} = k > 1 \text{ –исходный ряд расходится.}$$

в) Так как, $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}}=\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n\left(3-\frac{1}{n}\right)}\right)^{2-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3-\frac{1}{n}}\right)^{2-\frac{1}{n}}=$$

$=\frac{1}{9}=k<1$ –исходный ряд сходится.

г) $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{3^{n+1}}{(2n)^n}}=\left(\frac{3^{n+1}}{(2n)^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{3^{1+\frac{1}{n}}}{2n}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{1+\frac{1}{n}}}{2n}=\frac{3}{\infty}=0=k<1$ –исходный ряд сходится.

д) $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{n\sin^n\frac{\pi}{2n}}=n^{\frac{1}{n}}\sin\frac{\pi}{2n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}\sin\frac{\pi}{2n}=(\infty^0)\cdot 0;$$

Так как, $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=(\infty^0)=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln n^{\frac{1}{n}}}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln n^{\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{n}}=e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{(n)'}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=e^0=1$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2n}=1\cdot 0=0=$$

$=k<1$ –исходный ряд сходится.

Интегральный признак Коши.

Интегральный признак Коши позволяет свести вопрос сходимости ряда к выяснению сходимости интеграла от удачно подобранной соответствующей функции, что легко выполняется, применяя методы интегрального исчисления.

Теорема 1.7(интегральный признак Коши). Если члены знакоположительного ряда$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1;+\infty)$функции$f(x)$так, что $u_1 = f(1), u_2 = f(2), \dots, u_n = f(n), \dots$,то:

1)если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$-сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

2)если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$-расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Доказательство.

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, основанием которой служит отрезок оси Ox от $x = 1$ до $x = n$ (см. рис.1).Построим входящие и выходящие прямоугольники, основаниями которых служат отрезки [1; 2], [2; 3], ... Учитывая геометрический смысл определенного интеграла, имеем:

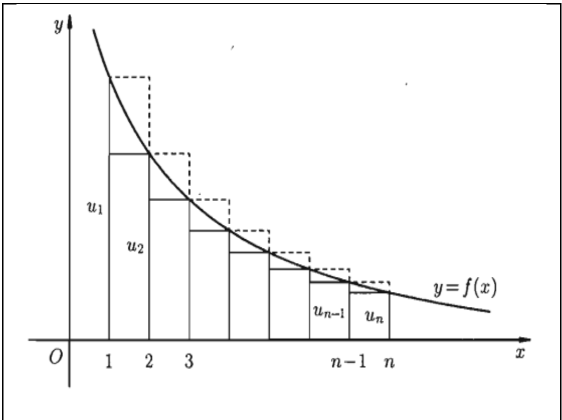


Рис.1

$$f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \dots + f(n)\cdot 1 < \int_1^n f(x)dx < f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \dots + f(n-1)\cdot 1,$$

Или$u_2 + u_3 + \dots + u_n < \int_1^n f(x)dx < u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$,

или $S_n - u_1 < \int_1^n f(x)dx < S_n - u_n$.

<u>1 случай</u>. Несобственный интеграл$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то есть$\int_1^{+\infty} f(x)dx = A$.Так как$\int_1^n f(x)dx < \int_1^{+\infty} f(x)dx = A$,то с учетом неравенства

$$S_n - u_1 < \int_1^n f(x)dx < S_n - u_n \text{ имеем:}$$

$$S_n - u_1 < A,$$

$$S_n < u_1 + A.$$

Так как последовательность частичных сумм монотонно возрастает и ограниченна сверху ($S_n < u_1 + A$),следовательно имеет предел.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

2 случай. Несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, тогда $\int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ и интегралы $\int_1^n f(x)dx$ неограниченно возрастают при $n \to \infty$.

С учетом неравенства $S_n - u_1 < \int_1^n f(x)dx < S_n - u_n$ имеем:

$$\int_1^n f(x)dx < S_n - u_n,$$

$S_n > \int_1^n f(x)dx + u_n$, следовательно последовательность S_n возрастает, то есть при $n \to \infty, S_n \to \infty$. Следовательно, исходный ряд расходится.

Замечания: так как отбрасывание k первых членов ряда не влияет на сходимость (расходимость) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, теорема остаётся верной и тогда, когда её условия выполняются не для всех членов ряда, а лишь начиная с k -го $(n \geq k)$), в таком случае рассматривается интеграл $\int_k^{+\infty} f(x)dx, k \epsilon N$.

Пример 1.7. Исследовать сходимость ряда применяя интегральный признак сходимости: **а)**$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nlnn}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+9}$; **г)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctgn}{n^2+1}$;**д)**$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$.

Решение.

а) Функция $u_n = f(n) = \frac{1}{nlnn}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.7, то есть ряд знакоположительный, члены ряда монотонно убывают, составляем и вычисляем несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} f(x)dx$:

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{dx}{xlnx} = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{d(lnx)}{lnx} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} ln|lnx|\Big|_2^b = \lim_{b\to+\infty}(ln|lnb| - ln|ln2|) = +\infty.$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{xlnx}dx$ -расходится, следовательно расходится и ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nlnn}$.

б) Условия теоремы 1.7 выполнены $u_n = f(n) = ne^{-n} = \frac{n}{e^n}$.

Найдем $\int_1^{+\infty} f(x)dx$:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-x}dx, & v = -e^{-x}\end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}x|_1^b + \int_1^b e^{-x}dx\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{x}{e^x}\Big|_1^b - e^{-x}|_1^b\right) =$$

$$= -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\Big|_1^b + \frac{1}{e^x}\Big|_1^b\right) = -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b}{e^b} - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^b} - \frac{1}{e}\right) =$$

$$= -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b}{e^b} - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^b}\right);$$

Учитывая, что $\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{b\to+\infty}\frac{(b)'}{(e^b)'} =$

$= \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b} = 0$ имеем:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b}{e^b} - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^b}\right) = \frac{2}{e}.$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{xlnx}dx$ -сходится, следовательно, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$;

в) Функция $u_n = f(n) = \frac{n}{n^2+9}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.7. Находим $\int_1^{+\infty} f(x)dx$:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+9} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{xdx}{x^2+9} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} ln(x^2+9)|_2^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} (ln(b^2+9) - ln13) = +\infty.$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+9}$-расходится, следовательно расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+9}$.

г) $u_n = f(n) = \frac{arctgn}{n^2+1}$ -условия теоремы 1.7 выполнены.

Находим $\int_1^{+\infty} f(x)dx$:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{arctgxdx}{x^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b arctgxd(arctgx) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} arctg^2x|_1^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} (arctg^2b - arctg^2 1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{3\pi^2}{32}.$$

Таким образом, несобственный интеграл сходится, следовательно сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctgn}{n^2+1}$.

д) Условия теоремы 1.7 выполнены$u_n = f(n) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$.

Найдем $\int_1^{+\infty} f(x)dx$:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \int_1^b (2x-1)^{\frac{1}{2}} d(2x-1) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\lim_{b\to+\infty} (2x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^b = \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty} \sqrt{2x-1}(2x-1)\Big|_1^b =$$

$= \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty} \left((2b-1)\sqrt{2b-1} - 1\right) = \infty$,исходный ряд расходится.

На следующем примере повторим все признаки сходимости.

Пример 1.8. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7n^2+2}$;**б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^{n+1}}$;**в)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; **г)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)ln^2(n+2)}$.

Решение.

а) Проверим необходимое условие сходимости, найдем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{7n^2+2} = 0$, необходимое условие выполняется.

Для дальнейшего исследования на сходимость применяем один из достаточных признаков сходимости, в данном случае, удобно применить первый признак сравнения. Сравним наш ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходится, так как $\alpha = 2 > 1$.

Нам нужно показать, что из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего ряда, то есть выполняется неравенство $u_n \le v_n$,тогда заданный нам ряд будет сходиться.

Очевидно, что члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\overbrace{\frac{1}{n^2}}^{v_n}$ больше членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\overbrace{\frac{1}{7n^2+2}}^{u_n}$, то есть $u_n = \frac{1}{7n^2+2} \le v_n = \frac{1}{n^2}$.

Действительно, уже начиная с первого номера, то есть при $n = 1$ имеем:

$u_1 = \frac{1}{9} \le v_1 = 1.$

Согласно первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7n^2+2}$ сходится.

б) Поскольку необходимое условие сходимости ряда выполняется, действительно,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{5^{n+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2)'}{(5^{n+1})'} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{5^{n+1}ln5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{ln5}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)'}{(5^{n+1})'} =$$

$$=\frac{1}{ln5}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{5^{n+1}ln5}=0;$$

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$u_n=\frac{n^2}{5^{n+1}},\ u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{5^{n+2}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{5^{n+2}}}{\frac{n^2}{5^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{5^{n+1}}{5^{n+2}}=$$

$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{5}<1$,исходный ряд сходится.

в) Воспользуемся радикальным признаком Коши,

учитывая, что $u_n=\frac{7^n}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{7^n}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\frac{7}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=(1^\infty)=e$, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{7}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty=\frac{7}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n=$$

$=\frac{7}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{7}{2e}=k>1$ –исходный ряд расходится;

г) Воспользуемся интегральным признаком Коши.

Функция $u_n=f(n)=\frac{1}{(n+2)ln^2(n+2)}$- удовлетворяет условиям интегральной теоремы Коши, находим $\int_1^{+\infty}f(x)dx$:

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{(x+2)ln^2(x+2)}=\left|\begin{matrix}t=ln(x+2)\\ dt=\dfrac{dx}{x+2}\\ t(1)=ln3,\\ t(b)=ln(b+2)\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_{ln3}^{ln(b+2)}\frac{dt}{t^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_{ln3}^{ln(b+2)}t^{-2}dt=-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{t}\Big|_{ln3}^{ln(b+2)}=$$

$= -\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{ln(b+2)}-\frac{1}{ln3}\right)=\frac{1}{ln3}$ –несобственный интеграл сходится, следовательно исходный ряд сходится.

Задания для самостоятельного решения.

3.Исследовать ряд на сходимость применяя признак сравнения:

1.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3}{5^n+2}$
2.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn+1}{n^2}$
3.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$
4.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{2^n}$
5.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$
6.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+5n+3}}$
7.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}ln\frac{n+1}{n}$
8.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^6+2n-2}}$
9.	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{lnn}$
10.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}}$

Ответы:

3.1. ряд сходится.**3.2.** ряд сходится. .**3.3**. ряд расходится.**3.4.** ряд расходится. **3.5.** ряд сходится.**3.6.** ряд расходится.**3.7.** ряд сходится. **3.8.** ряд сходится.**3.9.** ряд расходится. **3.10.** ряд расходится.

4. Исследовать ряд на сходимость применяя признак Даламбера:

1.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$
2.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1{,}1)^n}{n}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-3}}{3n(2n)!}$
4.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$
5.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3}}{(2n+1)!}$
6.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}(n^2-1)}{\left((n+1)!\right)^2}$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{7^{2n}}$
8.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11^n n^3}{(n+5)!}$
9.	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4n-2}{\sqrt{n3^n}}$
10.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^n}$

Ответы:

4.1. $k=\frac{9}{8}>1-$ ряд расходится.**4.2.** $k=1{,}1>1-$ряд расходится.

4.3. $k=0<1-$ряд сходится. **4.4.** $k=\infty>1-$ряд расходится.

4.5. $k=0<1-$ряд сходится.**4.6.** $k=0<1-$ряд сходится.

4.7. $k=\frac{1}{49}<1$- ряд сходится.**4.8.** $k=0<1-$ряд сходится.

4.9. $k=\frac{1}{\sqrt{3}}<1$- ряд сходится. **4.10.** $k=\frac{1}{3}<1$- ряд сходится.

5. Исследовать ряд на сходимость применяя радикальный признак Коши:

1.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{2^{n}}$
2.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^{n}}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$
4.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{2}}$
5.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln^{n}(n+1)}$
6.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n^{2}}$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{n}$
8.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^{2}+5n-1}{4n^{2}+1}\right)^{3n-1}$
9.	$\sum_{n=1}^{\infty}tg^{2n}\frac{1}{\sqrt{6n+5}}$

10.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+3}\right)^n$

Ответы:

5.1. $k=\frac{1}{2}<1$ – ряд сходится.**5.2.** $k=0<1$ –ряд сходится.

5.3. $k=\sqrt{\frac{2}{3}}<1$ –ряд сходится. **5.4.** $k=\frac{e}{5}<1$ –ряд сходится.

5.5. $k=0<1$ –ряд сходится.**5.6.** $k=e^2>1$ –ряд расходится.

5.7. $k=3>1$- ряд расходится.**5.8.** $k=\left(\frac{5}{4}\right)^3>1$ –ряд расходится.

5.9. $k=0<1$ -ряд сходится. **5.10.** $k=\frac{2}{3}<1$- ряд сходится.

6. Исследовать ряд на сходимость применяя интегральный признак Коши:

1.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)ln(n+1)}$
2.	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{lnn}}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)ln^3(n+1)}$
4.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+5}$
5.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{(3+7n)^{10}}}$
6.	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nln^5n}$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}$
8.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$

9.	$\sum_{n=1}^{n} \frac{arctg^2 n}{n^2+1}$
10.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln^2(3n+2)}{3n+2}$

Ответы:

6.1. ряд расходится. **6.2.** ряд расходится.

6.3. ряд сходится. **6.4.** ряд расходится.

6.5. ряд сходится. **6.6.** ряд сходится.

6.7. ряд расходится. **6.8.** ряд расходится.

6.9. ряд сходится. **6.10.** ряд расходится.

7. Исследовать ряд на сходимость:

1.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$
2.	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n+2}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$
4.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+3}$
5.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,2^n}$
6.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+cosn}{n^2+3}$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
8.	$\sum_{n=2}^{\infty} ln\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right)$

9.	$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^n}$
10.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$

Ответы:

7.1. ряд расходится.**7.2.** ряд расходится.

7.3. ряд сходится. **7.4.** ряд сходится.

7.5. ряд расходится.**7.6.** ряд сходится.

7.7. ряд сходится.**7.8.** ряд сходится.

7.9. ряд сходится. **7.10.** ряд расходится.

ГЛАВА2.ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ И ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Рассмотрим важный класс рядов, называемых знакочередующимися, которые широко используются в теоретических исследованиях.

2.1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Ряд называется **знакочередующимся**, если любые два соседних его члена имеют разные знаки, то есть ряды вида

$$\boldsymbol{u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1} u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n}$$

или $\boldsymbol{-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + \cdots + (-1)^n u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n}$,

где u_n —положительные действительные числа $(u_n > 0, n \epsilon N)$.

Таким образом, положительные и отрицательные члены знакочередующегося ряда следуют друг за другом поочередно.

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости -признак Лейбница.

Теорема 2.1 (признак Лейбница). Знакочередующейся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$сходится, если:

1) абсолютные величины членов ряда монотонно убывают, то есть $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_n > \cdots$;

2)общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} u_n \ = 0.$$

При этом сумма S ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ удовлетворяет неравенству $0 < S < u_1$.

Доказательство.

1)Рассмотрим сначала частичную сумму четного числа $(2k)$ членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$,где

$S_{2k}=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+u_{2k-1}-u_{2k}=$

$=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2k-1}-u_{2k})$.

Очевидно, что $S_{2k}>0$ и возрастает с возрастанием номера$2k$,

так как выражение в каждой скобке, согласно первому условию данной теоремы, положительно.

С другой стороны, S_{2k}можно переписать так:

$$S_{2k}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-$$

$-(u_{2k-2}-u_{2k-1})-u_{2k}$.

Легко заметить, что $S_{2k}<u_1$. Таким образом, последовательность $S_2, S_4, S_6, \dots, S_{2k}, \dots$ возрастает и ограничена сверху. Следовательно, последовательность S_{2k} имеет предел

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2k}=S$, причем $0<S<u_1$.

2)Рассмотрим теперь частичные суммы нечетного числа $(2k+1)$ членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$. Очевидно, что $S_{2k+1}-S_{2k}=u_{2k+1}$ или

$S_{2k+1}=S_{2k}+u_{2k+1}$. Отсюда следует, что

$\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}(S_{2k}+u_{2k+1})=\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k}+\lim\limits_{k\to\infty} u_{2k+1}=$

$=\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k}+0=S$,так как $\lim\limits_{k\to\infty} u_{2k+1}=0$ в силу второго условия теоремы.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$,как при четном $n = 2k$, так и при нечетном $n = 2k + 1$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$сходится, причем $0 < S < u_1$.

Замечание: исследование знакочередующегося ряда вида $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$ (с отрицательным первым членом) сводится к исследованию ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$путем умножения всех его членов на (-1).

Числовой ряд , содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется **знакопеременным.**

Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Замечание: знакопеременный ряд сходится, если сходится ряд составленный из модулей членов данного ряда.

Пример 2.1. Исследовать знакочередующейся ряд на сходимость: **а)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2+1}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{(-5)^n}$;**в)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n-1}{\sqrt{n^3+2n^2-1}}$.

Решение.

а) Сходимость знакочередующегося ряда исследуем при помощи признака Лейбница:

1) члены ряда, взятые по абсолютной величине, монотонно убывают, то есть

$$u_1 = \frac{1}{2} > u_2 = \frac{2}{5} > u_3 = \frac{3}{10} > \cdots;$$

2) общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$,то есть

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 0.$$

Оба условия выполняются, следовательно исходный ряд сходится.

б) Для начала преобразуем данный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{(-5)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n-1}{5^n};$$

Проверим выполняются ли условия признака Лейбница:

1) члены ряда, взятые по абсолютной величине, монотонно убывают:

$$\frac{2}{5} > \frac{5}{25} > \frac{8}{125} > \cdots$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)'}{(5^n)'} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{5^n ln5} = 0.$

Условия признака Лейбница выполняются, следовательно исходный ряд сходится.

в) Ряд расходится, так как условия признака Лейбница не выполняются (члены ряда, взятые по абсолютной величине, монотонно возрастают, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$).

г) Проверим выполняются ли условия признака Лейбница:

1) члены ряда, взятые по абсолютной величине, монотонно убывают:

$$u_n \geq u_{n+1};$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^3+2n^2-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}}} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{n^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{n\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Условия признака Лейбница выполняются, следовательно исходный ряд сходится.

2.2. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов.

Все сходящиеся знакочередующиеся ряды делятся на сходящиеся условно и абсолютно сходящиеся.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то есть ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}u_n|$.

Если же ряд, составленный из абсолютных величин, расходится, то данный знакопеременный ряд называется **условно сходящимся рядом.**

Пример 2.2. Исследовать сходимость знакочередующихся рядов, выяснить характер сходимости (условная, абсолютная):

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+3}{\sqrt{n^5}}$;

в)$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{ln^2 n}{n}$;**г)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n\sqrt{n+1}}$;**е)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n+n}{3^n}$;**ё)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Решение.

а) Сходимость знакочередующегося ряда исследуем при помощи признака Лейбница:

1) члены ряда, взятые по абсолютной величине, монотонно убывают: $1 > \frac{1}{2!} > \frac{1}{3!} > \cdots > \frac{1}{n!} > \cdots$;

2) общий член ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0.$$

Оба условия признака Лейбница выполнены, знакочередующийся ряд сходится.

Итак, мы установили, что исходный ряд сходится, исследуем его на абсолютную и условную сходимость, для этого рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, то есть ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Получили знакоположительный ряд, поскольку в примере фигурируют факториалы исследуем сходимость ряда с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 - \text{ряд сходится.}$$

Значит, заданный знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

б) Проверяем знакочередующийся ряд на сходимость, применяя признак Лейбница:

1) $4 > \frac{7}{4\sqrt{2}} > \frac{11}{9\sqrt{3}} > \cdots$;

2) $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{\sqrt{n^5}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 0.$$

Оба условия выполняются, следовательно данный ряд сходится.

Исследуем ряд на абсолютную и условную сходимость, для этого составляем ряд из абсолютных величин и исследуем его на сходимость:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{n^2+3}{\sqrt{n^5}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{\sqrt{n^5}}$, для исследования применяем предельный признак сравнения, сравним данный ряд с рядом$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}, \alpha = \frac{1}{2} < 1$ −ряд расходится.

Находим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+3}{\sqrt{n^5}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}(n^2+3)}{n^{\frac{5}{2}}} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2}\right) = 1 \neq 0; \infty$, подтвердили, что ряд$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{\sqrt{n^5}}$ -расходится, следовательно исходный ряд сходится условно.

в) Проверяем знакочередующийся ряд$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{ln^2n}{n}$ на сходимость, применяя признак Лейбница:

1) $u_2 = \frac{ln2}{2} > u_3 = \frac{ln3}{3} > \cdots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{ln^2n}{n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(ln^2n)'}{(n)'} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2lnn}{n} =$

Оба условия выполняются, следовательно данный ряд сходится.

Исследуем ряд на абсолютную и условную сходимость:

$\sum_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{ln^2n}{n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{ln^2n}{n}$, для исследования применяем первый признак сравнения, сравним данный ряд с рядом$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд расходится.

Очевидно, что $u_n = \frac{ln^2n}{n} \geq v_n = \frac{1}{n}$, так как$ln^2n \geq 1$, тогда из расходимости меньшего ряда, следует расходимость большего, то есть ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ln^2n}{n}$-расходится (по первому признаку сравнения), следовательно исходный ряд сходится условно.

г) Исследуем ряд$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ на сходимость, по теореме Лейбница имеем:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} =$$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = e^{-1} \neq 0$ –второе условие признака Лейбница не выполняется, ряд расходится, исследование окончено.

д) Исследуем ряд$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n\sqrt{n+1}}$ на сходимость, проверяем условия признака Лейбница:

$$1) u_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}} > u_2 = \frac{1}{25\sqrt{3}} > u_3 = \frac{1}{250} > \cdots;$$

$$2) \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5^n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Условия признака Лейбница выполняются- ряд сходится.

Исследуем ряд на абсолютную и условную сходимость:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n \sqrt{n+1}}$ - ряд, составленный из абсолютных величин.

Исследуем сходимость этого ряда с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n \sqrt{n+1}}{5^{n+1} \sqrt{n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n \cdot 5} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}} = \frac{1}{5} < 1$$ -ряд сходится,

значит исходный ряд сходится абсолютно.

е) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n+n}{3^n}$ -знакочередующийся ряд, для исследования на сходимость применяем признак Лейбница:

1) члены ряда, взятые по абсолютной величине, монотонно возрастают (первое условие не выполняется):

$$2 < 3 < 4 < \cdots;$$

2) $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n+n}{3^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(5^n+n)'}{(3^n)'} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5^n ln5 + 1}{3^n ln3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(5^n ln5 + 1)'}{(3^n ln3)'} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5^n ln^2 5}{3^n ln^2 3} = \frac{ln^2 5}{ln^2 3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = \infty \neq 0.$$

Условия признака Лейбница не выполняются- ряд расходится.

ё) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ – знакочередующийся ряд, для исследования на сходимость применяем признак Лейбница:

1) члены ряда, взятые по абсолютной величине, монотонно убывают:

$$u_1 = \frac{1}{2} > u_2 = \frac{1}{5} > \cdots;$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0.$

Условия признака Лейбница выполняются- ряд сходится.

Исследуем на сходимость ряд, составленный из абсолютных величин:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ -знакоположительный ряд.

Исследуем сходимость этого ряда с помощью второго признака сравнения, сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2+1}}_{u_n}$ с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{v_n}$ –сходится.

Находим предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 1 = k$, так как $0 < k < \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ -сходится, следовательно исходный ряд сходится абсолютно.

Задания для самостоятельного решения.

8. Исследовать сходимость знакочередующихся рядов, выяснить характер сходимости (условная, абсолютная):

1.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$
2.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$
4.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
5.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(5n+2)}{n^3+2n^2+1}$
6.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n+2}$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n}{3}}{n^2+1}$
8.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$
9.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{8^n}$
10.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+2)}{4^n}$

Ответы:

8.1. сходится условно.**8.2.** сходится условно.

8.3. сходится абсолютно. **8.4.** сходится абсолютно.

8.5. сходится абсолютно.**8.6.** расходится.

8.7. сходится условно.**8.8.** сходится условно.

8.9. сходится абсолютно. **8.10.** ряд расходится.

ГЛАВАЗ.СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Степенные ряды ввиду их простоты часто используются в физике, математике, а также других науках. С помощью них приближенно вычисляются: значения функций, определенные интегралы, дифференциальные уравнения.

3.1. Функциональные ряды. Основные понятия.

Рассмотрим последовательность функций, заданных на некотором промежутке $[a;b]$: $f_1\ (x), f_2\ (x), f_3\ (x), \dots, f_n\ (x), \dots$

Приняв эти функции в качестве членов ряда, образуем ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{f_n\ (x) = f_1\ (x) + f_2\ (x) + f_3\ (x) + \cdots + f_n\ (x) + \cdots},$$

который называется **функциональным рядом**.

Таким образом, ряд членами которого являются функции называется функциональным**.**

Например, функциональным рядом является ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} cos(nx) = 1 + cos(x) + cos(2x) + \cdots + cos(nx) + \cdots$$

Наиболее простые и часто применяемые из функциональных рядов являются степенные ряды.

Степенным рядом называется выражение вида(3.1):

$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2 + \cdots + a_n\ x^n + \cdots\ (3.1)}$, где

$a_0, a_1\ , a_2\ \ \dots, a_n$ -постоянные числа, называемые **коэффициентами степенного ряда.**

Степенной ряд может быть записан и в более общей форме(3.2):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1\ (x-x_0)+a_2\ (x-x_0)^2+\cdots}$$

$\boldsymbol{\ldots+a_n\ (x-x_0)^n+\cdots(3.2)}$, где$x_0$ – некоторое постоянное число.

В частности, при $x_0=0$,получим степенной ряд (3.1),с другой стороны, каждый ряд вида(3.2) с помощью замены переменной $t=x-x_0$ сводится к ряду (3.1).

При всяком фиксированном числовом значении x степенной ряд превращается в числовой, который либо сходится, либо расходится. Основная задача исследования степенного ряда – нахождение его области сходимости. Совокупность всех значений x (или всех точек x числовой прямой), при которых функциональный ряд сходится, называется его **областью сходимости.**

Сходимость степенных рядов.

Об области сходимости степенного ряда (3.1) можно судить, исходя из теоремы Абеля.

Теорема 3.1 (Теорема Абеля):

1) Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при

$x=x_0(x_0\neq 0)$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x|<|x_0|$;

2)Если же степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится при $x=x_1(x_1\neq 0)$, то он будет расходиться и при всех x , удовлетворяющих неравенству$|x|>|x_1|$. .

Доказательство.

1) Так как по условию ряд$\sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$ сходится, то по необходимому признаку сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a^n x_0^n = 0$. Поэтому величина $a_n {x_0}^n$ ограничена, то есть найдется такое число $M > 0$, что для всех n выполняется неравенство $\left|a_n {x_0}^n\right| \leq M$, $n\epsilon N$,для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$, величина $k = \frac{|x|}{|x_0|} < 1$ и, следовательно,

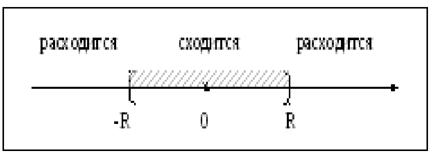
$|a_n x^n| = |a_n {x_0}^n| \cdot \left|\frac{x^n}{{x_0}^n}\right| \leq Mk^n$, то есть модуль каждого члена ряда$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ не превосходит соответствующего члена сходящегося $(k < 1)$ ряда геометрической прогрессии. Поэтому по признаку сравнения при $|x| < |x_0|$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно сходящийся.

2)Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.

Это легко показать методом доказательства от противного. Если допустить сходимость ряда в точке x_2, для которой $|x_2| > |x_1|$, то по теореме Абеля ряд сходится при всех x , удовлетворяющих неравенству$|x| < |x_2|$, и, в частности, в точке x_1 , что невозможно.

Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Радиусом сходимости степенного ряда (3.1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется число R такое, что для всех x,удовлетворяющих условию$|x| < R$,степенной ряд сходится, а при$|x| > R$ расходится.



Поскольку неравенство $|x| <$ Рис.2
R равносильно неравенству$-R < x < R$,то интервал

$(-\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R})$ называется интервалом сходимости степенного ряда$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$(см.рис.2).

Для степенного ряда (3.2) **интервала сходимости** имеет вид $|x - x_0| < R$, $-R < x - x_0 < R$или $x_0 - R < x < x_0 + R$, то есть интервал $(\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{R}; \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{R})$с центром в точке x_0, внутри которого степенной ряд абсолютно сходится и вне которого он расходится.

На концах интервала сходимости, то есть в точках $x = \pm R(x = x_0 \pm R)$ различные степенные ряды ведут себя по-разному: ряд может сходиться в обеих точках, или только в одной из них, или ни в одной из них. При этом ряд в этих точках может сходиться в этих точках как абсолютно, так и условно, поэтому в этих точках требуются дополнительные исследования на сходимость для каждого конкретного ряда.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (3.1) можно поступить следующим образом. Составим ряд из модулей членов данного степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1\ x| + |a_2\ x^2| + \cdots + |a_n\ x^n| + \cdots$$

и применим к нему признак Даламбера. Допустим, что существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}\ x^{n+1}}{a_n\ x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}\ x^n x}{a_n\ x^n}\right| =$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k;$$

По признаку Даламбера ряд (3.1) сходится при $k < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = k$, имеем: $|x|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ или

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Следовательно, радиус абсолютной сходимости для ряда (3.1) можно найти по формуле: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.Аналогично, воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$при условии, что этот предел существует.

Таким образом, для нахождения радиуса сходимости степенного ряда можно пользоваться одну из следующих формул:

$$\boldsymbol{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} \text{ или } \boldsymbol{R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}.$$

Во всех случаях, в частности, если степенной ряд содержит не все степени x , то есть задан неполный степенной ряд, интервал сходимости можно находить, применяя непосредственно признак Даламбера или признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов исследуемого ряда, так как данные признаки применимы к рядам только с положительными членами, то есть применяя формулы:

1)Признак Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = k$, при $k < 1$ ряд сходится;

2)Признак Коши $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = k$, при $k < 1$ ряд сходится;

Замечание:

1)если $R = 0$, то степенной ряд сходится лишь в одной точке $x = 0(\ x = x_0)$;

2)если $R=\infty$, то ряд сходится на всей числовой оси.

Свойства степенных рядов.

Свойства степенных рядов широко используются в теоретических исследованиях и в приближенных вычислениях. Сформулируем без доказательства основные свойства степенных рядов.

1) Сумма $S(x)$ степенного ряда (3.1) является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R;R)$.

2) Степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2, можно почленно складывать, вычитать и умножать.

3) Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать.

4) Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости.

Пример 3.1. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n\sqrt{n+1}} = \frac{x}{5\sqrt{2}} + \frac{x^2}{5^2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{x^n}{5^n\sqrt{n+1}} + \cdots;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!} = \frac{x-3}{1!} + \frac{(x-3)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-3)^n}{n!} + \cdots;$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot n! = x\cdot 1! + x^2 \cdot 2! + \cdots + x^n \cdot n! + \cdots;$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-2)^{2n}}{n+1} = \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{2(x-2)^4}{3} + \cdots + \frac{n(x-2)^{2n}}{n+1} + \cdots;$

д)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{4^n(n^2+1)} = \frac{x+4}{4\cdot 2} + \frac{(x+4)^2}{4^2\cdot 5} + \cdots + \frac{(x+4)^n}{4^n(n^2+1)} + \cdots;$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{2n+1} = \frac{(-3)^1 x}{3} + \frac{(-3)^2 x^2}{5} + \cdots + \frac{(-3)^n x^n}{2n+1} + \cdots.$

Решение.

а) 1 способ:(по признаку Даламбера)

Для нахождения области сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n\sqrt{n+1}}$применим признак Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = k$,для сходимости необходимо, чтобы $k < 1$.

Очевидно, что $u_n = \frac{x^n}{5^n\sqrt{n+1}}$,тогда $u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}\sqrt{n+2}}$.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}\sqrt{n+2}}:\frac{x^n}{5^n\sqrt{n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n\cdot x}{5^n\cdot 5\sqrt{n+2}}\cdot\frac{5^n\sqrt{n+1}}{x^n}\right| = \frac{|x|}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} =$$

$$= \frac{|x|}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = \frac{|x|}{5} < 1\ .$$

Таким образом ряд сходится, если $\frac{|x|}{5} < 1$, откуда$|x| < 5$ или $-5 < x < 5$.

Получим интервал сходимости данного степенного ряда: $(-5; 5)$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала $(-5; 5)$, то есть при $x = \pm 5$:

если $x = 5$, то получим знакоположительный ряд$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Для исследования ряда на сходимость применяем второй признак сравнения, для чего сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$,который является расходящимся$\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Находим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$,следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ –расходится.

Таким образом, в точке $x = 5$ ряд расходится.

$x = -5, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{5^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$-получили знакочередующийся ряд, исследуем его на сходимость по признаку Лейбница:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \ldots$ –члены ряда, взятые по абсолютной величине, монотонно убывают;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$.

Оба условия признака Лейбница выполнены, следовательно, ряд в точке $x = -5$ сходится.

Таким образом, область сходимости исходного ряда $[-5; 5)$.

2 способ:(по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$)

Для данного ряда имеем: $a_n = \frac{1}{5^n\sqrt{n+1}}, a_{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}\sqrt{n+2}}$;

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{5^n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{5^{n+1}\sqrt{n+2}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\sqrt{n+2}}{5^n\sqrt{n+1}} =$$

$$= 5\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} = 5\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 5,$$

следовательно, $R = 5$.

Интервал сходимости ряда: $-5 < x < 5$.

Далее, как и в первом способе решения, надо исследовать ряд в граничных точках, то есть при $x = \pm 5$.

б) Для нахождения области сходимости данного ряда применим признак Даламбера, для сходимости по признаку Даламбера необходимо, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = k < 1$.

В нашем случае $u_n = \frac{(x-3)^n}{n!}$,$u_{n+1} = \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)!}$,учитывая, что

$n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$, $(n+1)! = n!\,(n+1)$,имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}n!}{(n+1)!\,(x-3)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)n!}{n!\,(n+1)(x-3)^n}\right| = |x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} =$$

$= |x-3|\cdot 0 = 0 < 1$,ряд сходится на всей числовой прямой, то есть при $x \epsilon R$.

в) Применим признак Даламбера:

В нашем случае $u_n = x^n\cdot n!$,$u_{n+1} = x^{n+1}\cdot(n+1)!$,тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot(n+1)!}{x^n\cdot n!}\right| =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^n\cdot x\cdot n!(n+1)}{x^n\cdot n!}\right| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \begin{cases}+\infty, \text{при } x\neq 0\\ 0, \text{при } x = 0\end{cases}$,следовательно, ряд сходится в единственной точке $x = 0$.

г) Поскольку $u_n = \frac{n(x-2)^{2n}}{n+1}$ к нему удобно применить признак Коши, для чего вычисляем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n(x-2)^{2n}}{n+1}\right|} = (x-2)^2\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\frac{n+1}{n}}} =$$

$= (x-2)^2\frac{1}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}} = (x-2)^2 < 1$,следовательно,

$|x-2| < 1, -1 < x-2 < 1$ или $1 < x < 3$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала (1;3),то есть при $x = 1, x = 3$:

$x = 1,$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1-2)^{2n}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1};$$

Получим положительный ряд, который расходится по необходимому признаку сходимости, действительно,

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ —необходимое условие не выполняется (ряд расходится);

$x = 3,$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(3-2)^{2n}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^{2n}n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$, получили аналогичный ряд, который расходится по необходимому признаку.

Таким образом, область сходимости исходного ряда является интервал (1;3).

д) Применим признак Даламбера:

$$u_n=\frac{(x+4)^n}{4^n(n^2+1)},u_{n+1}=\frac{(x+4)^{n+1}}{4^{n+1}((n+1)^2+1)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+4)^{n+1}4^n(n^2+1)}{4^{n+1}((n+1)^2+1)(x+4)^n}\right|=$$

$$=\frac{|x+4|}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{|x+4|}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{|x+4|}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{|x+4|}{4}<1.$$

Таким образом, ряд сходится, если $\frac{|x+4|}{4}<1$, откуда$|x+4|<4$,

$-4<x+4<4,$

$-8<x<0.$

Исследуем сходимость ряда на концах интервала (-8;0):

$x=-8,$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-8+4)^n}{4^n(n^2+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{4^n(n^2+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$-знакочередующийся ряд, исследуем его на сходимость по признаку Лейбница:

1) $\frac{1}{2} > \frac{1}{5} > \ldots$-члены ряда, взятые по абсолютной величине, монотонно убывают;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$,оба условия признака Лейбница выполнены, следовательно, ряд в точке $x = -8$ сходится.

$x = 0$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0+4)^n}{4^n(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ -знакоположительный ряд, для исследования ряда на сходимость применяем признак сравнения, для чего сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится, $\alpha = 2 > 1$.

Находим предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$,следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ –сходится.

Таким образом, областью сходимости исходного ряда является отрезок $-8 \le x \le 0$.

е) Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{(-3)^n x^n}{2n+1};\ u_{n+1} = \frac{(-3)^{n+1} x^{n+1}}{2(n+1)+1} = \frac{(-3)\cdot(-3)^n \cdot x^n \cdot x}{2n+3};$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-3)\cdot(-3)^n \cdot x^n \cdot x(2n+1)}{(2n+3)(-3)^n x^n}\right| =$$

$$= 3|x| \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 3|x| \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} = 3|x| < 1,$$

Таким образом ряд сходится, если $|x| < \frac{1}{3}$, откуда $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{2n+1}$ на концах интервала:

$$x = -\frac{1}{3},$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ -получим знакочередующийся ряд, исследуем его на сходимость по признаку Лейбница:

1) $\frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \ldots -$ члены ряда, взятые по абсолютной величине, монотонно убывают.

2) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$,оба условия признака Лейбница выполнены, следовательно, ряд в точке $x = -\frac{1}{3}$ сходится.

$x = \frac{1}{3}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ -аналогичная ситуация, ряд сходится.

Таким образом, областью сходимости исходного ряда является отрезок $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$.

Задания для самостоятельного решения.

9. Найти интервал сходимости степенного ряда:

1.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2n^2+1}$
2.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(3n-1)^2 3^n}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{2n-1}$
4.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-2)^{2n}}{n+1}$
5.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}}$
6.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{2n+1}$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(3n+2)3^n}$
8.	$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$
9.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3 x^n}{n!}$
10.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-2)^n}{(2n+1)4^n}$

Ответы:

9.1. $-4 \le x \le -2$.**9.2.** .$-2 \le x \le -4$. **9.3.** $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$.

9.4. $1 < x < 3$. **9.5.** $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.**9.6.** $-\frac{1}{3} \le x < \frac{1}{3}$.

9.7. $-2 \le x < 4$. .**9.8.** сходится в точке $x = 0$.

9.9. сходится на всей числовой прямой. **9.10.** $-\frac{2}{3} \le x < 2$.

3.2. Разложение функций в степенные ряды.

Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ раскладывать в степенной ряд.

Ряд Тейлора и Маклорена.

Всякая функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0 и имеющей в ней производные $(n+1)$ –го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$\boldsymbol{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +}$$

$$\boldsymbol{+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)(3.3),}$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, c\epsilon(x_0; x)$ –остаточный член формулы Тейлора (или остаток ряда), отвечает за погрешность вычисления.

Если функция $f(x)$имеет производные любых порядков (то есть бесконечно дифференцируема) в окрестности точки x_0 и остаточный член стремится к нулю при

$n \to \infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0$), то из формулы Тейлора (3.3) получается разложение функции по степеням $(x - x_0)$, называемое **рядом Тейлора** (3.4):

$$\boldsymbol{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +}$$

$$\boldsymbol{+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ (3.4).}$$

Если в ряде Тейлора (3.4) положить $x_0 = 0$, то получим разложение функции по степеням x в так называемый **ряд Маклорена** (3.5):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \ (3.5)$$

Если в некотором интервале, содержащем точку x_0, при любом x выполняется неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$, где M — положительная постоянная, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ и функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора.

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена.

Приведем разложения в ряд Маклорена (степенные ряды) элементарных функций с указанием области сходимости следующих функций:

$$1)e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x\epsilon(-\infty; +\infty);$$

$$2)sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad x\epsilon(-\infty; +\infty);$$

$$3)\ cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad x\epsilon(-\infty;+\infty);$$

4) $ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\qquad x\epsilon(-1;1];$$

5) $arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\qquad x\epsilon[-1;1];$$

6) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,,x\epsilon(-1;1);$

7) $(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots+$

$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{(2n)!}x^n+\cdots$;при $m\geq 0$, если $x\epsilon[-1;1]$;

при $-1<m<0$, если $x\epsilon(-1;1]$;при $m\leq -1$, если $x\epsilon(-1;1)$.

Замечание: график бесконечного многочлена совпадает с графиком представленной в разложении функции только в области сходимости ряда.

<u>Алгоритм разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена:</u>

1) найти производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$;

2) вычислить значение функции и её производных в точке$x_0 = 0$,то есть найти

$f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(n)}(0), \dots;$

3) написать степенной ряд для заданной функции (см. формулу 3.5) и найти его интервал сходимости;

4) найти интервал$(-R; R)$, в котором остаточный член ряда Маклорена $R_n(x) \to 0$,при $n \to \infty$**.** Если такой интервал существует, то в нем функция $f(x)$ и сумма ряда Маклорена совпадают

Докажем, например, формулу 2) $sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad x\epsilon(-\infty; +\infty);$$

Находим производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$:

$$f'(x) = cosx = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$f''(x) = -sinx = sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$

………………………………………………

$$f^{(n)}(x) = sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Вычисляем значение функции $f(x) = sinx$ и её производных в точке$x_0 = 0$:

$$f(0) = sin0 = 0; f'(0) = 1;\ f''(0) = 0; \dots, f^n(0) = sin\frac{\pi n}{2}.$$

Воспользовавшись рядом Маклорена (3.5), напишем степенной ряд для функции $f(x) = sinx$ и найдем его интервал сходимости:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots =$$

$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $x\epsilon(-\infty; +\infty)$,очевидно,что любая производная функции $f(x) = sinx$ по модулю не превосходит единицы,следовательно

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \le 1.$$

Таким образом, имеет место разложение $sinx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

Пример 3.2. Разложить в ряд Маклорена функцию:

а) $f(x) = 2^x$;**б)** $f(x) = cos^2x$;**в)** $f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой разложения функции в ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n;$$

Найдем значение функции и её производных при $x = 0$:

$$f'(x) = 2^x ln2, f''(x) = 2^x ln^2 2, \dots, f^{(n)}(x) = 2^x ln^n 2;$$

$f(0) = 2^0 = 1; f'(0) = 2^0 ln2 = ln2; f''(0) = 2^0 ln^2 2 = ln^2 2;$

$\ldots ; f^n(0) = 2^0 ln^n 2 = ln^n 2\,.$

Разложение функции $f(x) = 2^x$в ряд Маклорена имеет вид:

$$2^x = 1 + \frac{ln2}{1!}x + \frac{ln^2 2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{ln^n 2}{n!}x^n + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ln^n 2}{n!}x^n\,, x\epsilon(-\infty; +\infty)$$

Это разложение можно получить и иначе:

для этого учитывая, что $2^x = e^{ln2^x} = e^{xln2}$достаточно в разложении

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x\epsilon(-\infty; +\infty)$$

заменить x на $xln2$:

$$2^x = e^{xln2} = 1 + \frac{xln2}{1!} + \frac{(xln2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(xln2)^n}{n!} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{ln2}{1!}x + \frac{ln^2 2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{ln^n 2}{n!}x^n + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ln^n 2}{n!}x^n\,, x\epsilon(-\infty; +\infty).$$

б) Учитывая, что $cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x$, заменим в равенстве

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \epsilon (-\infty; +\infty),$$

x на $2x$:

$$cos2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \frac{2^6x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \epsilon (-\infty; +\infty),$$

$$\frac{1}{2} cos2x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3x^4}{4!} - \frac{2^5x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \cdots;$$

$$cos^2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3x^4}{4!} - \frac{2^5x^6}{6!} + \cdots +$$

$$+ \cdots = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3x^4}{4!} - \frac{2^5x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \cdots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}, x \epsilon (-\infty; +\infty).$$

в) Для разложения функции $f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$в ряд Маклорена представим дробь$\frac{3}{(1-x)(1+2x)}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+2x};$$

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)}=\frac{A(1+2x)+B(1-x)}{(1-x)(1+2x)};$$

$A(1+2x)+B(1-x)=3;$

$(2A-B)x^1+(A+B)x^0=0\cdot x^1+3x^0;$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x,получим систему:

$\begin{cases}2A-B=0\\ A+B=3\end{cases};$

$\begin{cases}B=2A\\ A+B=3\end{cases}$,откуда получим $A=1,\ B=2$.

Таким образом,

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)}=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+2x};$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,x\epsilon(-1;1);$$

Имеем:

$$\frac{2}{1+2x}=2\cdot\left(\frac{1}{1-(-2x)}\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n=$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^{n+1}x^n=2-2^2x+$$

$+2^3x^2-2^4x^3+\cdots+(-1)^n2^{n+1}x^n+\cdots,-2x\epsilon(-1;1)$,то есть

$-1<-2x<1|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$,

$\frac{1}{2}>x>-\frac{1}{2}$ или$-\frac{1}{2}\ <x<\frac{1}{2}\ \left(x\epsilon\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\right)$.

Таким образом, разложения функции $f(x)=\frac{3}{(1-x)(1+2x)}$в ряд Маклорена имеет вид:

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)}=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^{2n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n2^{2n+1})x^n.$$

Областью сходимости полученного ряда является пересечение областей сходимости рядов$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^{2n+1}x^n$ соответственно, то есть $x\in(-1;1)\cap\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ или $x\epsilon\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Пример 3.3. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$:**а)**$f(x)=lnx, x_0=1$;**б)** $f(x)=e^x$,$x_0=-4$;

в) $f(x)=\frac{1}{x}, x_0=2$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой разложения функции в ряд Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

Найдем значение функции и её производных при $x_0=1$:

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2},\ f'''(x)=\frac{2}{x^3},\ldots,$$

$$f^n(x)=\frac{(-1)^{n+1}n!}{x^n};$$

$f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$, $f'''(1) = 2, \ldots,$

$\ldots, f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}\, n!$,следовательно,

$$ln\big(1 + (x-1)\big) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} -$$
$$- \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Область сходимости полученного ряда удовлетворяет неравенству:

$$-1 < x - 1 \leq 1, 0 < x \leq 2.$$

Это разложение можно было получить иначе:

воспользовавшись разложением $ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots =$

$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, $x\epsilon(-1; 1]$ и учитывая, что $lnx = ln\big(1 + (x-1)\big)$,заменив x на

$x - 1$ в записанном выше разложении имеем:

$$ln\big(1 + (x-1)\big) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} -$$
$$- \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

б) $f(x) = e^x$, $x_0 = -4.$

Учитывая, что $e^x = e^{x+4-4} = e^{-4} \cdot e^{x+4}$, заменяя x на $x + 4$ в разложении

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x\epsilon(-\infty; +\infty)$
имеем:

$$e^{-4} \cdot e^{x+4} = e^{-4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n!\, e^4}, x\epsilon(-\infty; +\infty).$$

в) Воспользуемся разложением:

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x\epsilon(-1; 1),$

учитывая, что $\frac{1}{x} = \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{(x-2)}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{(x-2)}{2}\right)},$

заменив x на $-\frac{(x-2)}{2}$ в записанном выше разложении, получим:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{(x-2)}{2}\right)} = \frac{1}{2}(1 - \frac{(x-2)}{2} + \left(-\frac{(x-2)}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{(x-2)}{2}\right)^n + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x-2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{2}(-1)^n \left(\frac{x-2}{2}\right)^n + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot (x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{2^{n+1}}(-1)^n (x-2)^n + \dots;$$

Так как $-\frac{(x-2)}{2} \epsilon(-1; 1)$ или $-1 < -\frac{(x-2)}{2} < 1 | \cdot (-2),$

$2 > x-2 > -2 | +2,$ то есть $\quad 0 < x < 4.$

Таким образом,

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+\cdots,$$

$0<x<4.$

Задания для самостоятельного решения.

10. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$:

1.	$f(x)=2^x, x_0=0$
2.	$f(x)=ln(1-2x), x_0=0$
3.	$f(x)=sin^2x, x_0=0$
4.	$f(x)=e^{-x^2}, x_0=0$
5.	$f(x)=sin^2xcos^2x, x_0=0$
6.	$f(x)=xcos2x, x_0=0$
7.	$f(x)=\frac{1}{x+3}, x_0=-1$
8.	$f(x)=x^3+4x^2-3x+2, x_0=1$
9.	$f(x)=xln\left(1+x^2\right), x_0=0$
10.	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}, x_0=0$

Ответы:

10.1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{ln^n 3}{n!}x^n, x\epsilon(-\infty;+\infty).$

10.2. $.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{2^n x^n}{n!}, -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}.$

10.3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\ x\epsilon(-\infty;+\infty).$

10.4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, x\epsilon(-\infty;+\infty).$

10.5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,2^{4n}x^{2n}}{n!}, x\epsilon(-\infty;+\infty).$

10.6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n}x^{2n+1}}{(2n)!}, x\epsilon(-\infty;+\infty).$

10.7. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^{n+1}}, -3<x<1.$

10.8. $4+8(x-1)+7(x-1)^2+(x-1)^3, x\epsilon(-\infty;+\infty).$

10.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n},\ x\epsilon[-1;1].$

10.10. $\frac{1}{2}++\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!2^{3n+1}}x^{2n},\ x\epsilon[-2;2].$

3.3. Приближенное вычисления значений функции с помощью степенные ряды.

Степенные ряды имеют самые разнообразные приложения. С их помощью вычисляют с заданной степенью точности значения функций, пределов функций, определенных интегралов, находят приближенные решения дифференциальных уравнений. Известно, что степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку строго внутреннему к его промежутку сходимости и почленно дифференцировать в любой внутренней точке его промежутка сходимости любое число раз.

Алгоритм вычисления приближенного значения функции.

1) данную функцию разложить в степенной ряд, указав область сходимости;

2) оставить необходимое для обеспечения заданной точности число слагаемых в полученном степенном ряде: в разложении функции $f(x)$ в степенной ряд сохраняют первые n , а остальные члены$(<\varepsilon)$ отбрасывают;

3)найти сумму оставшихся слагаемых с заданной точностью.

Пример 3.4. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью до $\varepsilon=10^{-4}$.

Решение.

Используя разложение

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x\epsilon(-\infty; +\infty)$, заменяя $x = \frac{1}{2}$ имеем:

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{6!} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{15360} + \cdots = 1 + 0{,}5 + 0{,}125 +$$

$$+0{,}02083 + 0{,}0026 + \underbrace{0{,}000065}_{<\varepsilon} + \cdots;$$

Определим число слагаемых так, чтобы погрешность приближенного равенства не превышала $\varepsilon = 10^{-4} = 0{,}0001$,так как пятый член полученного ряда меньше $0{,}0001$, то для вычисления искомого приближения возьмем сумму четырех первых членов ряда.

Таким образом,

$$\sqrt{e} \approx 1{,}00000 + 0{,}50000 + 0{,}12500 + 0{,}02083 +$$

$$+0{,}00260 \approx 1{,}6484.$$

Заметим, что каждое слагаемое мы вычислили с точностью до $0{,}00001$, чтобы при суммировании не получить погрешности, превышающей $0{,}0001$.

Итак, $\sqrt{e} \approx 1{,}6484$.

Пример 3.5. Вычислить $cos18^0$с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение.

Учитывая, что $18^0 = \frac{\pi}{10}$ и используя разложение

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots =$$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x\epsilon(-\infty; +\infty)$ имеем:

$$cos18^0 = cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^6}{6!} + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^6}{6!} + \cdots = 1 - \frac{0{,}0987}{2} + \frac{0{,}0097}{\underbrace{24}_{<\varepsilon}} - \cdots;$$

Получили числовой знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница. Так как абсолютная величина третьего члена ряда меньше заданной точности $\varepsilon = 0{,}001$, значит, членами ряда, начиная с третьего, можно пренебречь. Таким образом, заданная точность обеспечивается первыми двумя членами ряда, то есть $cos18^0 \approx 1 - 0{,}0494 \approx 0{,}951$.

Пример 3.6. Вычислить $\sqrt{105}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение.

Учитывая, что $\sqrt{105} = \sqrt{100 + 5} = \sqrt{100\left(1 + \frac{5}{100}\right)} =$ $10(1 + 0{,}05)^{\frac{1}{2}}$ и используя разложение при $\boldsymbol{m \geq 0}$,

$$\boldsymbol{(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots +}$$

$$+\frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{m}-\mathbf{1})(\boldsymbol{m}-\mathbf{2})\ldots(m-n+2)}{(\mathbf{2}\boldsymbol{n})!}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}+\cdots;\ \boldsymbol{x}\boldsymbol{\epsilon}[-\mathbf{1};\mathbf{1}]\ ;$$

При $m=\frac{1}{2}, x=0{,}05$ имеем:

$$\sqrt{105}=10(1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}\cdot 0{,}05+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\cdot 0{,}05^2+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\cdot 0{,}05^3+\cdots\quad)=10(1+0{,}025-$$

$$-\underbrace{0{,}0003125}_{<\varepsilon}+\cdots)\approx 10\cdot 1{,}025\approx 10{,}25.$$

Многие определенные интегралы, получающиеся при решение практических задач, не могут быть вычислены с помощью формулы Ньютона-Лейбница, поскольку применение этой формулы связано с нахождением первообразной, которая не всегда выражается в элементарных функциях. Если подынтегральная функция раскладывается в степенной ряд, а отрезок интегрирования входит в область сходимости этого ряда, то возможно приближенное вычисление интеграла с любой заданной точностью.

Алгоритм приближенного вычисление определенного интеграла (с заданной точностью):

1)подынтегральную функцию разложить в степенной ряд, указав область сходимости;

2) проинтегрировать обе части этого равенства, убедившись, что отрезок интегрирования $(a;b)$ входит в область сходимости ряда;

3)в правой части равенства оставить необходимое для обеспечения заданной точности число слагаемых.

Пример 3.7. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1 \frac{sinx}{x}dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение.

Данный интеграл относится к неберущимся интегралам. Однако подынтегральная функция разлагается в степенной ряд. Используем известное разложение в ряд Маклорена:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad x\epsilon(-\infty; +\infty),$$

$$\int_0^1 \frac{sinx}{x}dx = \int_0^1 \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}{x}dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right)dx;$$

Так как отрезок интегрирования [0;1] входит в область сходимости, то в этих пределах можно проинтегрировать обе части последнего равенства (ряд интегрируем почленно):

$$\int_0^1 \frac{sinx}{x}dx = \left(x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \cdots = 1 - \frac{1}{18} + \underbrace{\frac{1}{600}}_{<\varepsilon} - \cdots;$$

Получили числовой знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница. Так как модуль третьего члена ряда меньше заданной точности $\varepsilon = 0{,}01$, значит, членами ряда, начиная с третьего, можно пренебречь. Таким образом, заданная точность обеспечивается первыми двумя членами ряда, то есть

$$\int_0^1 \frac{sinx}{x}dx \approx 1 - \frac{1}{18} \approx 0{,}94.$$

Пример 3.8. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение.

Учитывая, что $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}} = (1+x^5)^{-\frac{1}{3}}$и используя разложение

$$(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{m}} = \mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{m}}{\mathbf{1}!}\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{m}-\mathbf{1})}{\mathbf{2}!}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{m}-\mathbf{1})(\boldsymbol{m}-\mathbf{2})}{\mathbf{3}!}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} + \cdots +$$

$+\frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{m}-\mathbf{1})(\boldsymbol{m}-\mathbf{2})\dots(m-n+2)}{(\mathbf{2}\boldsymbol{n})!}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} + \cdots$;при $\boldsymbol{m} \geq \mathbf{0}$, при $-1 < \boldsymbol{m} < \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}\boldsymbol{\epsilon}(-\mathbf{1};\mathbf{1}]$;

при $m = -\frac{1}{3}, x = x^5$ $(x \in (-1;1))$имеем:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}} = 1 + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{1!}\cdot x^5 + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot (x^5)^2 +$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\cdot (x^5)^3 + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{2}{9}x^{10} - \cdots;$$

Так как отрезок интегрирования $[0; \frac{2}{3}]$ входит в область сходимости, то обе части последнего равенства можно проинтегрировать (правую часть почленно) по заданному отрезку, в результате получим

$$\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}} = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{2}{9}x^{10} - \cdots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^6}{3\cdot 6} + \frac{2x^{11}}{9\cdot 11} - \cdots\right)\Bigg|_0^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{3\cdot 6} + \underbrace{\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}{9\cdot 11}}_{<\varepsilon} - \cdots;$$

Итак, $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}} \approx 0{,}6666 - 0{,}0048 \approx 0{,}6618 \approx 0{,}662.$

Пример 3.9. Вычислить $\int_1^{1,5} \frac{1}{x} arctg\frac{x}{4} dx$ с заданной точностью $\varepsilon = 0{,}001.$

Разложим $arctg\frac{x}{4}$ используя известное разложение в ряд Маклорена:

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots,$$

$x\epsilon[-1; 1];$

$$arctg\frac{x}{4} = \frac{x}{4} - \frac{\left(\frac{x}{4}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{x}{4}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{x}{4}\right)^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n-1}}{2n-1} + \cdots =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{x^3}{4^3\cdot 3} + \frac{x^5}{4^5\cdot 5} - \frac{x^7}{4^7\cdot 7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{4^{2n-1}\cdot(2n-1)} + \cdots,$$

$\frac{x}{4}\epsilon[-1;1]$ или$-1 \ \le \frac{x}{4} \le 1|\cdot 4, -4 \ \le x \le 4,$

$$\frac{1}{x}arctg\frac{x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4^3\cdot 3} + \frac{x^4}{4^5\cdot 5} - \frac{x^6}{4^7\cdot 7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{4^{2n-1}\cdot(2n-1)} + \cdots;$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{4^{2n-1}\cdot(2n-1)} + \cdots;$$

$$\int_1^{1,5}\frac{1}{x}arctg\frac{x}{4}dx = \int_0^{1,5}\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{4^3\cdot 3} + \frac{x^4}{4^5\cdot 5} - \frac{x^6}{4^7\cdot 7} + \cdots\right)dx = = \left(\frac{x}{4} - \frac{x^3}{4^3\cdot 3^2} + \frac{x^5}{4^5\cdot 5^2} - \frac{x^7}{4^7\cdot 7^2} + \cdots\right)\Bigg|_1^{1,5} =$$

$$= \frac{1,5-1}{4} - \frac{1,5^3-1}{4^3\cdot 3^2} + \underbrace{\frac{1,5^5-1}{4^5\cdot 5^2}}_{<\varepsilon} - \frac{1,5^7-1}{4^7\cdot 7^2} + \cdots;$$

Таким образом,$\int_1^{1,5}\frac{1}{x}arctg\frac{x}{4}dx \approx 0,125 - 0,0041 \approx 0,121.$

Задания для самостоятельного решения.

11.Вычислить приближенно, с заданной точностьюε.

1.	$\int_0^1 e^{-x^2}dx, \varepsilon = 0,1$
2.	$\int_0^{0,25}\sqrt[4]{1+x^3}\,dx, \varepsilon = 0,0001$
3.	$\sqrt[3]{10}, \varepsilon = 0,001$
4.	$\int_0^{0,5}\frac{sinx^2}{x^2}dx, \varepsilon = 0,001$

5.	$\sqrt[5]{1{,}1}, \varepsilon = 0{,}0001$
6.	$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \varepsilon = 0{,}0001$
7.	$\int_0^1 cos\sqrt{x}\, dx, \varepsilon = 0{,}0001$
8.	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-cosx}{x^2} dx, \varepsilon = 0{,}0001$
9.	$sin20^0, \varepsilon = 10^{-4}.$
10.	$\frac{1}{\sqrt[5]{e^3}}, \varepsilon = 0{,}001$

Ответы:

11.1. 0,8.**11.2.** 0,2502. **11.3.**2,153.**11.4.** 0,499.

11.5. 1,0192. **11.6.** 0,4969.**11.7.** 0,7635. **11.8.** 0,2483.

11.9. 0,3491. **11.10.** 0,549.

ГЛАВА 4. РЯДЫ ФУРЬЕ

Многие процессы, происходящие в природе и технике, обладают свойством повторяться через определенные промежутки времени. Такие процессы называются периодическими и математически описываются периодическими функциями. Простейшие периодические процессы – гармонические колебания – описываются периодическими функциями $sin(nx)$и $cos(nx)$. Более сложные периодические процессы описываются функциями, составными либо из конечного, либо из бесконечного числа слагаемых вида $sin(nx)$и $cos(nx)$.

4.1. Тригонометрический ряд. Теорема Дирихле.

Рассмотрим функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots +$$

$$+ a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ (4.1),$$

ряд (4.1) называется **тригонометрическим рядом,**
числа $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \ldots, a_n, b_n \ldots$ называются **коэффициентами** тригонометрического ряда.

Если тригонометрический ряд (4.1) сходится, то его сумма представляет собой периодическую функцию с периодом 2π, так как функции $sin(nx)$ и $cos(nx)$ являются периодическими функциями с периодом 2π.

Пусть $f(x)$ произвольная интегрируемая и периодическая функция с периодом 2π.Предположим, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд, то есть является суммой ряда (4.1), то есть представима в виде (4.2):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ (4.2),$$

так как функция $f(x)$ (и сумма ряда) имеет период 2π, то ее можно рассматривать в любом промежутке длины 2π. В качестве основного промежутка возьмем отрезок $[-\pi; \pi]$(иногда удобно взять отрезок $[0; 2\pi]$).

Вычислим коэффициенты a_n и b_n, $n \in Z \geq 0$.Для этого проинтегрируем обе части равенства (4.2) на отрезке $[-\pi; \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} cosnxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} sinnxdx\right),$$

так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx = \frac{a_0}{2}(x)|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0}{2}\left(\pi - (-\pi)\right) = a_0\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinnxdx = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} sinnxd(nx) = -\frac{1}{n}cosnx|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{n}(cos\pi n - cos\pi n) = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosnxdx = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} cosnxd(nx) = \frac{1}{n}sinnx|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{n}(sin\pi n + sin\pi n) = 0\ (n \neq 0).$$

Таким образом,

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0\pi$,отсюда $\boldsymbol{a_0} = \boldsymbol{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}$.

Умножив обе части равенства (4.2) на $cosmx(m \in Z \geq 0)$

и проинтегрировав полученный ряд в пределах от $-\pi$ до π получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cosmx\ dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, cosmxdx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} cosmxcosnxdx +$$

$$+b_n \int_{-\pi}^{\pi} sinnxcosmxdx),$$

так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosmxdx = \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} cosmxd(mx) = \frac{1}{m} sinmx|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{n}(sin\pi m + sin\pi m) = 0(m \neq 0);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosmxcosnxdx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (cos(m+n)x + cos(m-n)x)dx =$$

$$= \begin{cases} \pi, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases};$$

Действительно, при $m = n$ имеем:

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (cos(m+n)x + cos(m-n)x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (cos2nx + cos0)dx =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}\int_{-\pi}^{\pi} cos2nxd(2nx)+\int_{-\pi}^{\pi} dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}sin2nx+x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{2}(\pi-(-\pi))=\pi;$$

При $m \neq n$ (пусть $m=1, n=2$) получим:

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(cos(m+n)x+cos(m-n)x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(cos3x+cosx)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi} cos3xd(3x)+\int_{-\pi}^{\pi} cosxdx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}sin3x+sinx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinnxcosmxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(sin(n+m)x+sin(n-m)x)dx$$

$$=0,$$

следовательно, при $m=n$,имеем$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cosnx\ \ dx=a_n\ \pi$, откуда

$$\boldsymbol{a_n\ =\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx};$$

Умножив обе части равенства (4.2) на $sinmx$

и проинтегрировав в пределах от $-\pi$ до π) получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ sinmx\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\ sinmxdx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int_{-\pi}^{\pi} sinmxcosnxdx +$$

$$+b_n \int_{-\pi}^{\pi} sinnx\ sinmxdx);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinmxcosnxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (sin(m+n)x + sin(m-n)x)dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinnxsinmxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (cos(m-n)x - cos(m+n)x)dx = \begin{cases}\pi, m = n\\ 0, m \neq n,\end{cases}$$

следовательно, при $m = n$,имеем$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ sinnx\ dx = b_n\ \pi,$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinnxdx};$$

Итак, коэффициенты ряда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\ cosnx + b_n\ sinnx)$

можно определить по формулам (4.3):

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx\ (4.3)}$$

Коэффициенты (4.3) называются **коэффициентами Фурье** для функции $f(x)$.

Рядом Фурье для функции $f(x)$называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье. Если ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье и его сумму обозначим через $S(x)$.

Теорема Дирихле. Условие сходимости ряда Фурье.

В ряд Фурье можно разложить функцию, удовлетворяющую определенным условиям, которые называются условиями Дирихле.

Следующая теорема дает достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье.

Теорема 4.1(Теорема Дирихле). Пусть 2π −периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1) $f(x)$ кусочно-непрерывная, то есть имеет конечное число точек разрыва первого рода;
2) (x) кусочно-монотонная, то есть монотонна на всём отрезке, либо отрезок $[-\pi;\pi]$ можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$
2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна: $S(x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, то есть равна среднему арифметическому предельных значений функции $f(x)$ слева и справа.

3. На концах интервала, то есть в точках$x = -\pi$ и $x = \pi$ сумма ряда равна:

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}$$

Таким образом, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то на отрезке $[-\pi; \pi]$ имеет место разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \ cosnx + b_n \ sinnx)$$

Замечание: если функция 2π с периодом на отрезке $[0; 2\pi]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение
$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \ cosnx + b_n \ sinnx)$, где коэффициенты вычисляются по формулам (4.4):

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx; a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) cosnxdx, ;}$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) sinnxdx, n\epsilon N \ (4.4).}$$

Пример 4.1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = 2x - 1$, заданную на интервале $[-\pi; \pi]$.

Решение.

На рис.3 изображен график функции $f(x) = 2x - 1$.Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Так как

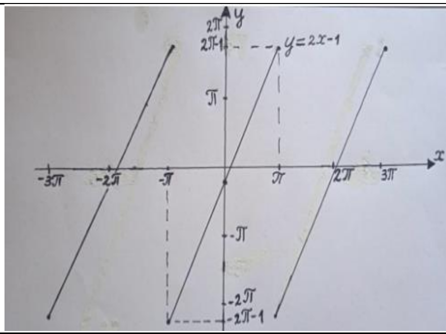


Рис.3

функции $f(x) = 2x - 1$ является функцией общего вида на интервале $[-\pi; \pi]$, действительно,

$f(-x) = -2x - 1 = -(2x + 1) \neq f(x) \neq -f(x)$, поэтому коэффициенты Фурье находим по формулам (4.3):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-1)dx = \frac{1}{\pi}(x^2 - x)|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 - \pi - \left(\pi^2 - (-\pi)\right)\right) = \frac{1}{\pi}(-2\pi) = -2;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-1)cosnxdx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = 2x - 1, & du = 2dx \\ dv = cosnxdx, v = \frac{1}{n}sinnx \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}(\frac{1}{n}(2x-1)sinnx|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} sinnxdx) = \frac{1}{\pi n}\left((2x-1)sinnx + \frac{2}{n}cosnx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left((2\pi-1)sin\pi n + \frac{2}{n}\,cos\pi n + (-2\pi-1)sin\pi n\right.$$

$$\left.-\frac{2}{n}cos\pi n\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\big((2\pi-1)sin\pi n + (-2\pi-1)sin\pi n\big);$$

Учитывая, что $sin\pi n = 0(\ n = 1, sin\pi = 0, n = 2, sin2\pi = 0, \dots)$имеем:

$$a_n \ = 0;$$

$$b_n \ = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-1)sinnxdx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = 2x-1, & du = 2dx \\ dv = sinnxdx, v = -\frac{1}{n}cosnx \end{matrix}\right| = \frac{1}{\pi}(-\frac{1}{n}(2x-1)cosnx|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} cosnxdx) = \frac{1}{\pi n}\left(\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} cosnxd(nx) - (2x-1)cosnx|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(\frac{2}{n}sinnx|_{-\pi}^{\pi} - \big((2\pi-1)cos\pi n - (-2\pi-1)cos\pi n\big)\right);$$

Учитывая, что $sinnx|_{-\pi}^{\pi} = 0$ и $cos\pi n = (-1)^n$

$(\ n = 1, cos\pi = -1, n = 2, cos2\pi = 1, \dots)$ имеем:

$$b_n \ = \frac{1}{\pi n}(-(2\pi-1)(-1)^n - (-2\pi-1)(-1)^n) =$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left((1-2\pi)(-1)^n+(1+2\pi)(-1)^n\right)==\frac{(-1)^n}{\pi n}(1-2\pi+1+2\pi)$$

$$=\frac{2\cdot(-1)^n}{\pi n}=\begin{cases}\frac{2}{\pi n}, n=2k\\ \frac{-2}{\pi n}, n=2k-1\end{cases};$$

Подставляя коэффициенты $a_0 = -2, a_n = 0,$

$b_n = \frac{2\cdot(-1)^n}{\pi n}$в ряд Фурье

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\ cosnx+b_n\ sinnx)$ получим:

$$f(x)=S(x)=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cdot(-1)^n}{\pi n}\right)sinnx=-1$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n sinnx}{n}=$$

$$=-1+\frac{2}{\pi}\left(-sinx+\frac{sin2x}{2}-\frac{sin3x}{3}+\frac{sin4x}{4}+\cdots\right).$$

Сумма ряда $S(x)$ на концах интервала равна:

$$S(\pm\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{-2\pi-1+2\pi-1}{2}=-1.$$

4.2. Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций.

Если разлагаемая на отрезке $[-\pi;\pi]$ в ряд Фурье функция $f(x)$является четной или нечетной, то это отражается на формулах коэффициентов Фурье, ряд становится неполным.

1)Если функция $f(x)$ – **четная**, то её ряд Фурье имеет вид:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, cosnx \, (4.5),}$$

где $\boldsymbol{a_0 \; = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx}$, $\boldsymbol{a_n \; = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cosnxdx}$.

Действительно, учитывая свойства четных и нечетных функций на симметричном отрезке интегрирования $[-a; a]$,

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{если } f(x) - \text{чётная} \\ 0, & \text{если } \; f(x) - \text{нечётная} \end{cases}$, коэффициенты Фурье для чётной функции имеют вид:

$$a_0 \; = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx\,;$$

$a_n \; = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cosnxdx$, так как, если $f(x)$ —четная функция, то $f(x)cosnx$ —чётная функция, то есть $f(-x)cos(-nx) = f(x)cosnx)$;

$b_n \; = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx = 0$, так как, если $f(x)$ —четная функция, то $f(x)sinnx$ —нечётная функция, то есть $f(-x)sin(-nx) = -f(x)sinnx)$.

Неполный тригонометрический ряд (4.5) называют **рядом косинусов** (разложением функции в ряд Фурье по косинусам).

2) Если функция $f(x)$ – нечетная, то ряд Фурье имеет вид (4.6):

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sinnx (4.6),}$$

где $\boldsymbol{b_n \; = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sinnxdx}$.

Действительно, для нечётной функции $f(x)$ коэффициенты Фурье имеют вид:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0;$$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx = 0$, так как, если $f(x)$ —нечётная функция, то $f(x)cosnx$ —нечётная функция, то есть $f(-x)cos(-nx) = -f(x)cosnx$;

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)sinnxdx$, так как, если $f(x)$ —нечётная функция, то $f(x)sinnx$ —чётная функция, то есть $f(-x)sin(-nx) = f(x)sinnx$.

Ряд (4.6) называется **рядом синусов** (разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам).

Пример 4.2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$:**а)** $f(x)=2x$;**б)** $f(x)=|x|$;

в) $f(x)=\begin{cases}\pi+x, -\pi\le x<0\\ \pi-x, 0\le x\le\pi\end{cases}$.

Решение.

а) На рис.4

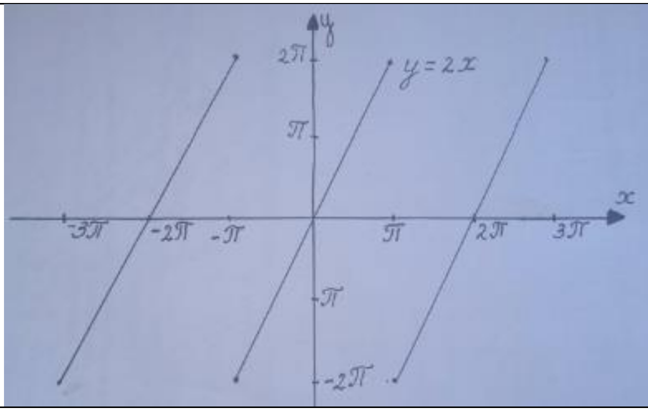


Рис.4

изображен график заданной функции. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Данная функция является нечетной $f(-x)=-2x=-f(x)$, поэтому раскладывается в ряд Фурье по синусам ($a_n=0$), коэффициенты Фурье находим по формулам:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinnxdx=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xsinnxdx=$$

$$=\begin{vmatrix}u=x, & du=dx\\ dv=sinnxdx, v=-\frac{1}{n}cosnx\end{vmatrix}=\frac{2}{\pi}(-\frac{1}{n}xcosnx|_{-\pi}^{\pi}+$$

$$+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}cosnxdx)=\frac{2}{\pi n}\left(-xcosnx|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}cosnxd(nx)\right)=$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(\frac{1}{n} sinnx - xcosnx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi n}(\frac{1}{n} sin\pi n - \pi cos\pi n -$$

$$-\left(-\frac{1}{n} sin\pi n + \pi cos\pi n\right)) = -\frac{2}{\pi n} \cdot 2\pi cos\pi n =$$

$$= -\tfrac{4}{n}(-1)^n = \tfrac{4}{n}(-1)^{n+1}.$$

Таким образом, ряд Фурье для функции $f(x) = 2x$ имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n}(-1)^{n+1} sinnx = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} sinnx}{n} =$$

$$= 4\left(\frac{sinx}{1} - \frac{sin2x}{2} + \frac{sin3x}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} sinnx}{n} + \cdots\right).$$

Сумма ряда $S(x)$ на концах интервала равна:

$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{-2\pi + 2\pi}{2} = 0.$$

б) Разложим в ряд Фурье функцию $f(x) = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0' \end{cases}$ $x\epsilon[-\pi;\pi]$,то есть

$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, -\pi \leq x < 0 \\ x, 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$. Условия Дирихле выполняются

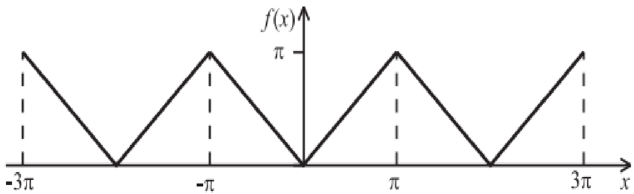


Рис.5

(см.рис.5), следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Функция является четной, так как $f(-x) = f(x)$, раскладывается в ряд Фурье по косинусам ($b_n = 0$).

Коэффициенты Фурье находим по формулам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, cosnx \,,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(x^2|_0^{\pi}) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \pi^2 = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cosnxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xcosnxdx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = cosnxdx, & v = \frac{1}{n} sinnx \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}(\frac{1}{n} xsinnx|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} sinnxdx) = \frac{2}{\pi n}\left(xsinnx|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} sinnxd(nx)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(\pi sin\pi n - \pi sin\pi n + \frac{1}{n} cosnx|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi n^2} cosnx|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}(cos\pi n - cos\pi n) = 0.$$

Таким образом, ряд Фурье для исходной функции имеет вид:

$f(x) = \frac{\pi}{2}$,при этом $S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0.$

в) Функция

$f(x) = \begin{cases} \pi + x, -\pi \le x < 0 \\ \pi - x, 0 \le x \le \pi \end{cases}$ удовлетворяет условиям Дирихле. Функция четная, так как её график симметричен относительно оси ординат (см.рис.6), следовательно, $b_n = 0$.

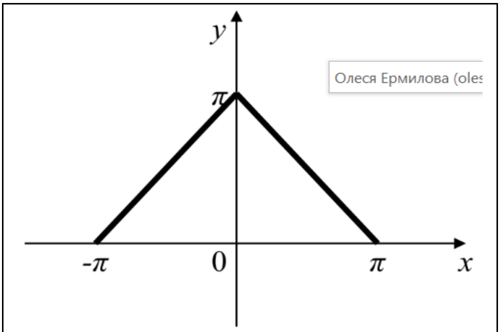


Рис.6

Коэффициенты Фурье находим по формулам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ cosnx\ ,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) cosnxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x) cosnxdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \pi - x, & du = -dx \\ dv = cosnxdx, v = \frac{1}{n} sinnx \end{matrix} \right| = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}(\pi - x) sinnx|_{-\pi}^{\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} sinnxdx\right) = \frac{2}{\pi n}\left((\pi - x) sinnx|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} sinnxd(nx)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left((\pi - \pi) sin\pi n + (\pi + \pi) sin\pi n - \frac{1}{n} cosnx|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2} cosnx|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2}{\pi n^2}(cos\pi n - cos\pi n) = 0.$$

Таким образом, ряд Фурье для исходной функции имеет вид:

$f(x) = \frac{\pi}{2}$,при этом $S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = 0.$

4.3. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода.

Раскладывать в ряд Фурье можно и периодические функции с периодом, отличным от 2π. Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[-l; l]$ имеет период $T = 2l$,то есть $f(x + 2l) = f(x), l \epsilon R > 0$ и удовлетворяет условиям теоремы Дирихле на интервале$(-l; l)$.

Тогда её разложение в ряд Фурье имеет следующий вид:

$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right)}$ **(4.7),** где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)cos\frac{\pi nx}{l}dx;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin\frac{\pi nx}{l}dx, n\in N.$$

Замечания: все теоремы, имеющие место для рядов Фурье 2π -периодических функций, остаются в силе и для рядов Фурье функций, период которых $T=2l$.

В частности, если $f(x)$на отрезке$[-l;l]$ **-четная**, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ cos\frac{\pi nx}{l}(4.8),$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx;\quad a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)cos\frac{\pi nx}{l}dx, n\in N.$$

Для $f(x)$ – **нечетной** функции ряд Фурье имеет вид:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\ sin\frac{\pi nx}{l}(4.9),$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)sin\frac{\pi nx}{l}dx, n\in N.$$

Пример 4.3. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на данном промежутке:

а) $f(x)=\begin{cases}0, -3\le x<0\\1, \quad 0\le x\le 3\end{cases}$;**б)** $f(x)=5-2x, x\in(-2;2)$;

в) $f(x) = \begin{cases} 3 - 3x, & -2 \le x < 0 \\ 3, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$

.

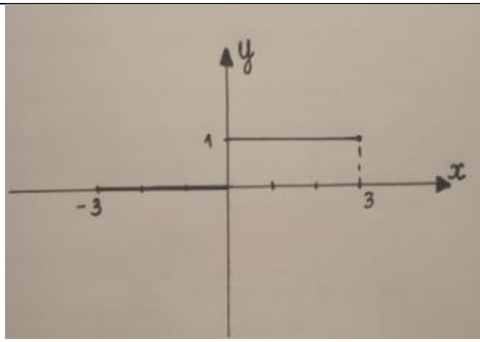


Рис.7

Решение.

а) Данная функция является функцией общего вида (см.рис.7), удовлетворяет условиям Дирихле, разложим её в Ряд Фурье используя формулу (4.7):

$f(x) = \frac{a_0}{2} +$
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l} \right)$**,** где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx; a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{\pi} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Учитывая, что $l = 3$ имеем:

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0} 0dx + \int_{0}^{3} dx\right) = \frac{1}{3}(x|_0^3) = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\cos\frac{\pi n x}{3}dx = \frac{1}{3}(\int_{-3}^{0} 0\cdot\cos\frac{\pi n x}{3}dx +$$

$$+\int_{0}^{3} 1\cdot\cos\frac{\pi n x}{3}dx) = \frac{3}{3\pi n}\int_{0}^{3} \cos\frac{\pi n x}{3}d\left(\frac{\pi n x}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3 = \frac{1}{\pi n}(\sin\pi n - \sin 0) = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x) sin\frac{\pi n x}{3}dx = \frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0} 0\cdot sin\frac{\pi n x}{3}dx + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{3} 1\cdot sin\frac{\pi n x}{3}dx\right) = \frac{3}{3\pi n}\int_{0}^{3} sin\frac{\pi n x}{3} d\left(\frac{\pi n x}{3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}cos\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3 = -\frac{1}{\pi n}(cos\pi n - cos0) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{2}{\pi n}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Таким образом, разложение функции исходной функции в ряд Фурье

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\ cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\ sin\frac{\pi n x}{l}\right)$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sin\dfrac{\pi(2k-1)x}{3}}{2k-1}.$$

б)

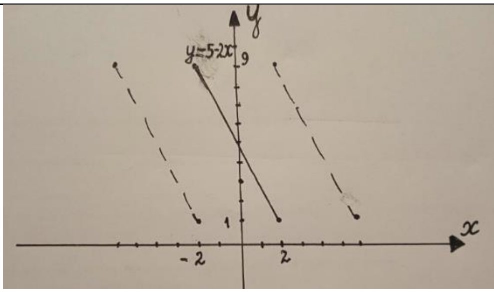


Рис.8

Так как $f(-x) = 5 - 2(-x) = 5 + 2x \neq f(x) \neq -f(x)$- функция является функцией общего вида (см.рис.8), условия Дирихле выполняются, применяя формулу

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\ cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\ sin\frac{\pi nx}{l}\right)$, где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)cos\frac{\pi nx}{l}dx;$$

$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)sin\frac{\pi nx}{l}dx$, при $l = 2$ имеем:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(5-2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}(5x - x^2)\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}(10 - 4 + 10 + 4) = 10;$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)cos\frac{\pi nx}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(5-2x)cos\frac{\pi nx}{2}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = 5 - 2x, & du = -2dx \\ dv = cos\frac{\pi nx}{2}dx, & v = \frac{2}{\pi n}sin\frac{\pi nx}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}(5-2x)sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\pi n}\int_{-2}^{2} sin\frac{\pi nx}{2}dx\right) = \left(\frac{2}{\pi n}\right)^2\int_{-2}^{2} sin\frac{\pi nx}{2}d\left(\frac{\pi nx}{2}\right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi^2 n^2}cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{2} = -\frac{4}{\pi^2 n^2}(cos\pi n - cos\pi n) = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(5-2x)sin\frac{\pi nx}{2}dx$$

$$= \begin{vmatrix} u = 5-2x, & du = -2dx \\ dv = sin\frac{\pi nx}{2}dx, v = -\frac{2}{\pi n}cos\frac{\pi nx}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(-\frac{2}{\pi n}(5-2x)cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{2} - \frac{4}{\pi n}\int_{-2}^{2}cos\frac{\pi nx}{2}dx) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}(cos\pi n - 9cos\pi n) - \frac{4}{\pi^2 n^2}sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{2} = \frac{8cos\pi n}{\pi n}$$

$$= \frac{8(-1)^n}{\pi n}.$$

Итак, $f(x) = 5 + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n sin\frac{\pi nx}{2}}{n}$.

в) Функция $f(x) = \begin{cases} 3-3x, -2 \le x < 0 \\ 3, \quad 0 \le x \le 2 \end{cases}$ является функцией общего вида (не является ни четной, ни нечётной-рисунок сделайте самостоятельно), удовлетворяет условиям Дирихле, разложим её в Ряд Фурье используя формулу (4.7):

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\ cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\ sin\frac{\pi nx}{l}\right)$, где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)cos\frac{\pi nx}{l}dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{\pi}f(x)sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Учитывая, что $l = 2$ имеем:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(3-3x)dx + 3\int_{0}^{2} dx\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\int_{-2}^{0}(1-x)dx + \int_{0}^{2} dx\right) = \frac{3}{2}\left(\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0} + x|_0^2\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(0 - \frac{0^2}{2} - \left(-2 - \frac{(-2)^2}{2}\right) + 2\right) = \frac{3}{2}\cdot 6 = 9;$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)cos\frac{\pi nx}{2}dx = \frac{1}{2}(\int_{-2}^{0}(3-3x)cos\frac{\pi nx}{2}dx +$$

$$+3\int_{0}^{2} cos\frac{\pi nx}{2}dx)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\int_{-2}^{0}(1-x)cos\frac{\pi nx}{2}dx + \int_{0}^{2} cos\frac{\pi nx}{2}dx\right)$$

$$=$$

$$= \begin{vmatrix} u = 1-x, & du = -dx \\ dv = cos\frac{\pi nx}{2}dx, & v = \frac{2}{\pi n}sin\frac{\pi nx}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\pi n}(1-x)sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0} +\right.$$

$$+\frac{2}{\pi n}\int_{-2}^{0} sin\frac{\pi nx}{2}dx + \frac{2}{\pi n}sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_{0}^{2})$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{\pi n}\right)^2 cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0} =$$

$$= \frac{6}{\pi^2 n^2}cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0} = \frac{6}{\pi^2 n^2}(cos0 - cos\pi n) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2 n^2}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{12}{\pi^2 n^2}, & n = 2k-1. \end{cases};$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x) sin\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{1}{2}(\int_{-2}^{0}(3-3x) sin\frac{\pi n x}{2}dx +$$

$$+3\int_{0}^{2} sin\frac{\pi n x}{2}dx) = \frac{3}{2}\left(\int_{-2}^{0}(1-x) sin\frac{\pi n x}{2}dx + \int_{0}^{2} sin\frac{\pi n x}{2}dx\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = 1-x, & du = -dx \\ dv = sin\frac{\pi n x}{2}dx, v = -\frac{2}{\pi n}cos\frac{\pi n x}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3}{2}(\frac{2}{\pi n}(x-1)cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-2}^{0} -$$

$$-\frac{2}{\pi n}\int_{-2}^{0} cos\frac{\pi n x}{2}dx - \frac{2}{\pi n}cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_{0}^{2})$$

$$= \frac{3}{\pi n}(-cos0 + 3cos\pi n) -$$

$$-\frac{6}{\pi^2 n^2} sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-2}^{0} - \frac{3}{\pi n}(cos\pi n - cos0) =$$

$$= \frac{3}{\pi n}(-1+3(-1)^n - (-1)^n + 1) = \frac{6(-1)^n}{\pi n}.$$

Итак, $f(x) = \frac{9}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{12cos\frac{\pi(2k-1)x}{2}}{\pi^2(2k-1)^2} + \frac{6(-1)^k sin\frac{\pi k x}{2}}{\pi k}\right)$.

Замечание: всё что было сказано о разложении в ряд Фурье функции $f(x)$на отрезке$[0; l]$, переносится практически без изменения на случай, когда функция задана на отрезке $[0; \pi]$; такую функцию можно разложить как в ряд косинусов- доопределив функцию на отрезке $[-l;0]$четным образом, так и в ряд синусов-доопределив функцию на отрезке $[-l;0]$нечётным образом.

Алгоритм разложения функции, заданной графически на интервале $(0;l)$, в неполный ряд Фурье:

1) задать аналитически на $(0;l)$;

2) доопределить функцию на $(-l;0)$четным или нечетным образом;

3) проверить выполнение условий Дирихле на$(-l;l)$;

4) определить коэффициенты ряда Фурье и записать ряд Фурье, если необходимо найти сумму ряда $S(x)$.

Пример 4.4. Функцию, заданную графически на рис., разложить в ряд Фурье: **а)** по косинусам; **б)** по синусам.

Решение.

Функцию, заданную графически на промежутке$(0;1)$(см.рис.9) зададим аналитически: $f(x)=\begin{cases}0{,}3, & x\in(0;0{,}5)\\ -0{,}3, & x\in(0{,}5;1)\end{cases};$

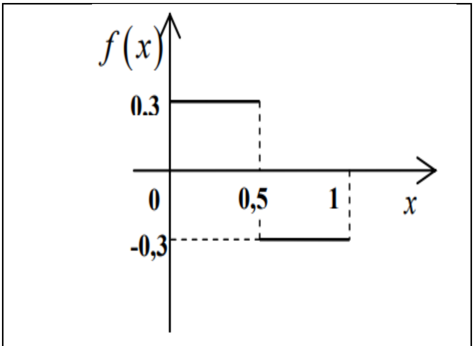


Рис.9

а) Доопределим функцию на промежутке (-1;0) четным образом (см.рис.10), чтобы получить разложение данной функции в ряд Фурье, содержащий только косинусы. Условия Дирихле на промежутке (-1;1) выполняются. Определяем коэффициенты ряда Фурье по формулам:

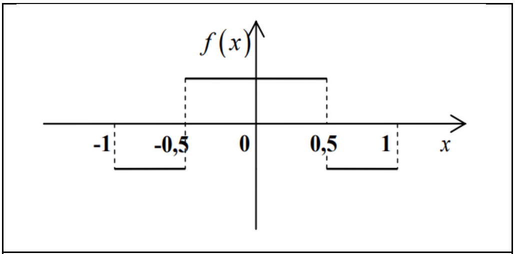


Рис.10

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Учитывая, что $l = 1$ в нашем случае имеем:

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)dx = 2\left(\int_0^{0,5} 0{,}3dx + \int_{0,5}^1 (-0{,}3)dx\right) =$$

$$= 0{,}6\left(\int_0^{0,5} dx - \int_{0,5}^1 dx\right) = 0{,}6\left(x|_0^{0,5} - x|_{0,5}^1\right) =$$

$$= 0{,}6\big(0{,}5 - (1 - 0{,}5)\big) = 0;$$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos\pi nx dx = 2(\int_0^{0,5} 0{,}3\cos\pi nx dx +$$

$$+\int_{0,5}^1 (-0{,}3)\cos\pi nx dx) = 0{,}6\left(\int_0^{0,5} \cos\pi nx dx - \int_{0,5}^1 \cos\pi nx dx\right) =$$

$$= \frac{0{,}6}{\pi n}\left(\int_0^{0,5} \cos\pi nx d(\pi nx) - \int_{0,5}^1 \cos\pi nx d(\pi nx)\right) =$$

$$=\frac{0{,}6}{\pi n}\left(sin\pi nx|_0^{0,5}-sin\pi nx|_{0,5}^{1}\right)=\frac{3}{5\pi n}(sin\frac{\pi n}{2}-sin0-$$

$$-sin\pi n+sin\frac{\pi n}{2})=\frac{6}{5\pi n}\cdot sin\frac{\pi n}{2}.$$

Таким образом, разложения в ряд Фурье по косинусам исходной функции имеет вид:

$$f(x)=\frac{6}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(\pi nx)}{\pi nx}sin\frac{\pi n}{2}.$$

б) Чтобы получить разложение данной функции в ряд Фурье, содержащий только синусы, продолжаем её на интервал (-1;0) нечетным образом (см. рис. 11).

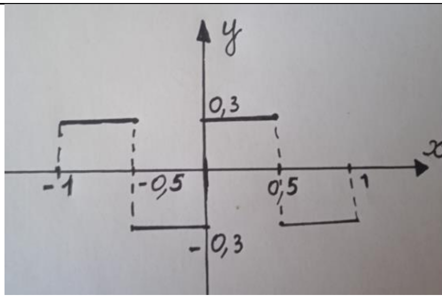


Рис.11

Разложение в ряд Фурье по синусам имеет вид:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,sin\frac{\pi nx}{l},$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Учитывая, что $l=1$ в нашем случае имеем:

$$b_n=2\int_0^1 f(x)sin\pi nxdx=2(\int_0^{0,5}0{,}3sin\pi nxdx+$$

$$+\int_{0,5}^{1}(-0,3)sin\pi nxdx) = 0,6\left(\int_{0}^{0,5} sin\pi nxdx - \int_{0,5}^{1} sin\pi nxdx\right) =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\int_{0}^{0,5} sin\pi nxdx - \int_{0,5}^{1} sin\pi nxdx\right)$$

$$= \frac{3}{5\pi n}(\int_{0}^{0,5} sin\pi nxd(\pi nx) -$$

$$-\int_{0,5}^{1} sin\pi nxd(\pi nx)) = \frac{3}{5\pi n}(-cos\pi nx|_{0}^{0,5} + cos\pi nx|_{0,5}^{1}) =$$

$$= \frac{3}{5\pi n}\left(-cos\frac{\pi n}{2} + cos0 + cos\pi n - cos\frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{5\pi n}\left(1 + (-1)^n - 2cos\frac{\pi n}{2}\right).$$

Таким образом, разложения в ряд Фурье по синусам имеет вид:

$$f(x) = \frac{3}{5\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1 + (-1)^n - 2cos\frac{\pi n}{2}\right) sin\pi nx}{n}.$$

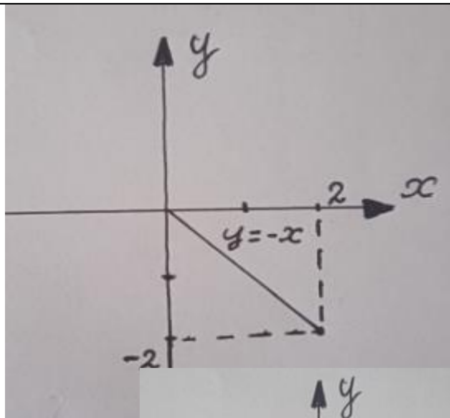
Пример 4.5. Разложить в ряд косинусов функцию:

а) $f(x) = -x, x \in [0; 2]$;**б)** $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ 2x, x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$;

в) $f(x) = \frac{x}{\pi} - 1, x\epsilon[0; \pi]$.

Решение.

а) Построим функцию $f(x) = -x$ на отрезке $[0; 2]$ (см.рис.12) и продолжим её на отрезке $[-2; 0]$ чётным образом(см.рис.13), функция чётная и её ряд содержит только косинусы $b_n = 0, l = 2$, то есть представим в виде



$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}$.

Найдем a_0, a_n по формулам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx;$$

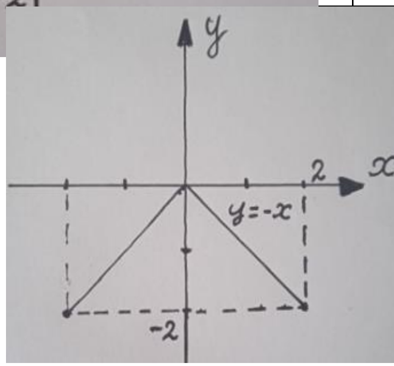


Рис.13

При $l = 2$ имеем:

$$a_0 = -\int_0^2 xdx = \left.\frac{-x^2}{2}\right|_0^2 = -2\ ;$$

$$a_n = -\int_0^2 x\cos\frac{\pi n x}{2}dx = \left|\begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \cos\frac{\pi n x}{2}dx, & v = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}x\sin\left.\frac{\pi n x}{2}\right|_0^2 + \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \sin\frac{\pi n x}{2}dx = -\frac{4}{\pi n}\sin\pi n +$$

$$+.\left(\frac{2}{\pi n}\right)^2\int_0^2 sin\frac{\pi nx}{2}d\left(\frac{\pi nx}{2}\right)=-\frac{4}{\pi^2n^2}cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2=$$

$$=-\frac{4}{\pi^2n^2}(cos\pi n-cos0)=\frac{4}{\pi^2n^2}(1-(-1)^n)=$$

$$=\begin{cases}\frac{8}{\pi^2n^2}, n=2k-1\\ 0, n=2k\end{cases}.$$

Итак, $f(x)=\frac{-2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(2k-1)^2}cos\frac{\pi(2k-1)x}{2}=$

$$=-1+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}cos\frac{\pi(2k-1)x}{2}.$$

б) Продолжим функцию $f(x)=\begin{cases}1, x\in\left[0;\frac{1}{2}\right)\\ 2x, x\in\left[\frac{1}{2};1\right]\end{cases}$ изображенную на рис. 14 на отрезок $[-1;0]$ чётным образом (см.рис.15), её ряд содержит только косинусы $b_n=0$,то есть представим в виде

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,cos\frac{\pi nx}{l}.$$

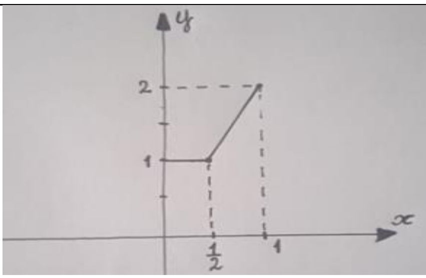


Рис.14

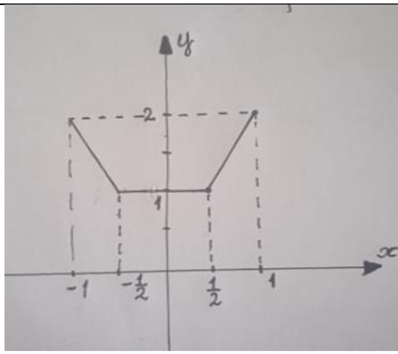


Рис.15

Найдем a_0, a_n по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx\,, a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)cos\frac{\pi nx}{l}dx;$$

При $l = 1$ имеем:

$$a_0 = 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} dx + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 xdx\right) = 2\left(x|_0^{\frac{1}{2}} + x^2|_{\frac{1}{2}}^1\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2}; a_n$$

$$= 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} cos\pi nxdx + \ 2\int_{\frac{1}{2}}^1 xcos\pi nxdx \qquad \right) =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = cos\pi nxdx, & v = \frac{1}{\pi n}sin\pi nx \end{matrix} \right| = 2(\frac{1}{\pi n}sin\pi nx|_0^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{2}{\pi n}xsin\pi nx\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{2}{\pi n}\int_{\frac{1}{2}}^1 sin\pi nxdx) = 2(\frac{1}{\pi n}\left(sin\frac{\pi n}{2} - sin0\right) +$$

$$+\frac{2}{\pi n}\left(sin\pi n - \frac{1}{2}sin\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{2}{\pi^2 n^2}cos\pi nx|_{\frac{1}{2}}^1) = \frac{2}{\pi n}sin\frac{\pi n}{2} -$$

$$-\frac{2}{\pi n}sin\frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\left(cos\pi n - cos\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - cos\frac{\pi n}{2}\right).$$

Итак, $f(x) = \frac{5}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n - cos\frac{\pi n}{2}\right)cos\pi nx}{n^2}$.

в) Продолжим функцию $f(x) = \frac{x}{\pi} - 1$ на отрезке $[-\pi; 0]$ чётным образом (см.рис.16), функция чётная и её ряд содержит только косинусы $(b_n = 0)$,то есть представима в виде

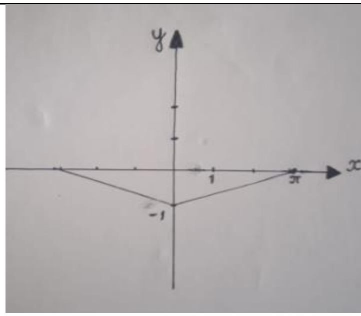


Рис.16

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx.$$

При $l = \pi$ имеем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)dx =$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2\pi} - \pi\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = -1;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{x}{\pi} - 1\right) cosnxdx = \left| \begin{matrix} u = \frac{x}{\pi} - 1, & du = \frac{dx}{\pi} \\ dv = cosnxdx, & v = \frac{1}{n}sinnx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{x}{\pi} - 1\right) sinnx\Big|_0^\pi - \frac{1}{\pi n}\int_0^\pi sinnxdx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\pi n^2} cosnx|_0^\pi\right) = \frac{2}{\pi^2 n^2}(co\pi n - cos0) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi^2 n^2}, n = 2k - 1 \\ 0, n = 2k \end{cases}.$$

Итак, $f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

Пример 4.6. Разложить в ряд синусов функцию:

а) $f(x) = 2$, $x \in [0; 1]$;**б)** $f(x) = cos2x$,$x \in [0; \pi]$;

в) $f(x) = -\frac{x^2}{2}, x\epsilon[0; 2]$.

Решение.

а) Продолжим функцию$f(x) = 2$ нечётным образом, на отрезке $[-1; 0]$(см.рис.17). Функция удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд синусов, тогда $a_0 = a_n = 0, l = 1$.

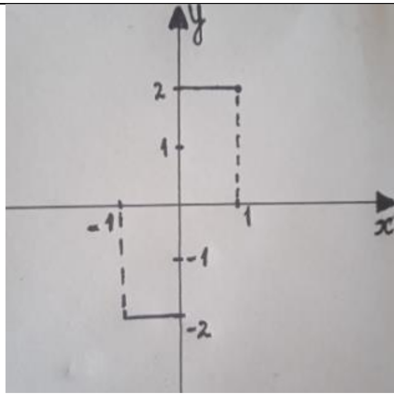


Рис.17

Для нечетной функции ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Найдемb_n ,учитывая, что $l = 1$:

$$b_n = 4\int_0^1 sin\pi nxdx = \frac{4}{\pi n}\int_0^1 sin\pi nxd(\pi nx) =$$

$$= \frac{4}{\pi n}cos\pi nx|_0^1 = \frac{4}{\pi n}(cos\pi n - cos0) =$$

$$=\frac{4}{\pi n}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & n=2k\\ -\dfrac{8}{\pi n}, & n=2k-1\end{cases}.$$

Таким образом,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-8)}{(2k-1)\pi}\sin\pi(2k-1)x=-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\pi(2k-1)x}{2k-1}.$$

б) Продолжим функцию $f(x)=\cos 2x,\ x\in[0;\pi]$ изображенную на рис.18 на отрезок $[-\pi;\ 0]$ нечётным образом, учитывая, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат (см. рис.19).

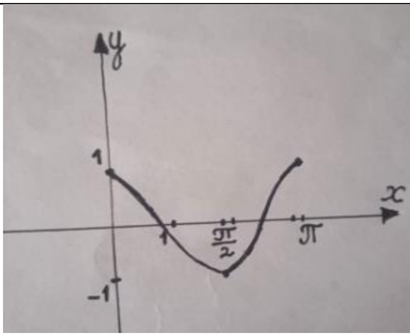


Рис.18

Функция удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Функцию доопределили нечетным образом, поэтому раскладывается в ряд Фурье по формулам:

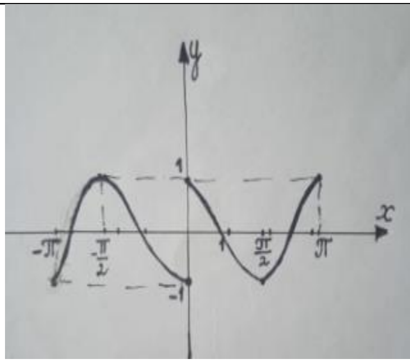


Рис.19

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sin\frac{\pi nx}{l}, b_n \ =\frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

При $l=\pi$ имеем:

$$b_n \ =\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)sinnxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi sinnxcos2xdx;$$

Учитывая, что $sin\alpha cos\beta=\frac{1}{2}(sin(\alpha+\beta)+s\,in(\alpha-\beta))$ имеем:

$$b_n \ =\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi (sin(nx+2x)+sin(nx-2x))dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (sin(n+2)\,x+sin(n-2)x)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}(\frac{1}{n+2}\int_0^\pi sin(n+2)xd\big((n+2)x\big)+$$

$$+\frac{1}{n-2}\int_0^\pi sin(n-2)xd\big((n-2)x\big)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n+2}cos(n+2)x-\frac{1}{n-2}cos(n-2)x\right)\Big|_0^\pi=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+2}cos(n+2)x+\frac{1}{n-2}cos(n-2)x\right)\Big|_0^\pi=$$

$$=-\frac{1}{\pi}(\frac{1}{n+2}cos(n+2)\pi+\frac{1}{n-2}cos(n-2)\pi-$$

$$-\frac{1}{n+2}cos0-\frac{1}{n-2}cos0)=\ -\frac{1}{\pi}(\frac{1}{n+2}cos(\pi n+2\pi)+$$

$$+\frac{1}{n-2}cos(\pi n-2\pi)-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n-2})=-\frac{1}{\pi}(\frac{1}{n+2}cos\pi n+$$

$$+\frac{1}{n-2}cos\pi n-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n-2})=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n+2}+\frac{1-(-1)^n}{n-2}\right)=$$

$$=\frac{(1-(-1)^n)(n-2)+(1-(-1)^n)(n+2)}{(n^2-4)\pi}=$$

$$\begin{cases} 0, n=2k \\ \frac{4n}{(n^2-4)\pi}, n=2k-1 \end{cases}.$$

Таким образом, разложение в ряд Фурье исходной функции имеет вид:

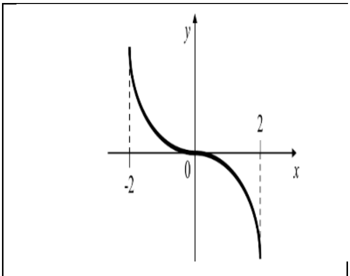


Рис.20

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(2k-1)}{((2k-1)^2-4)\pi}sin(2k-1)$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)sin(2k-1)}{((2k-1)^2-4)}.$$

в) Продолжим функцию нечётным образом, на $[-2;0]$(см.рис.20). Так как на интервале $[-2;2]$функция нечетная, то $a_0=a_n=0, l=2$.

Найдемb_n ,учитывая, что $l=2$:

$$b_n=-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2 sin\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x^2, & du=2xdx \\ dv=sin\frac{\pi nx}{2}dx, & v=-\frac{2}{\pi n}cos\frac{\pi nx}{2} \end{vmatrix}=$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}x^2cos\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^2 + \frac{4}{\pi n}\int_0^2 xcos\frac{\pi nx}{2}dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}\right)\left(x^2cos\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^1 - 2\int_0^2 xcos\frac{\pi nx}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(x^2cos\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^2 - 2\int_0^2 xcos\frac{\pi nx}{2}dx\right) =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = cos\frac{\pi nx}{2}dx, & v = \frac{2}{\pi n}sin\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right| = \frac{1}{\pi n}(4cos\pi n -$$

$$-2\left(\frac{2x}{\pi n}sin\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^2 - \frac{2}{\pi n}\int_0^2 sin\frac{\pi nx}{2}dx\right)) = \frac{1}{\pi n}(4(-1)^n -$$

$$-\frac{8}{\pi^2n^2}cos\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^2) = \frac{1}{\pi n}\left(4(-1)^n - \frac{8}{\pi^2n^2}(cos\pi n - cos0)\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi n}\left((-1)^n + \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi^2n^2}\right).$$

Таким образом, разложение исходной функции в ряд Фурье по синусам имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n}\left((-1)^n + \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi^2n^2}\right)sin\pi nx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n + \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi^2n^2}\right)\frac{sin\pi nx}{n}.$$

Пример 4.7. Продолжить $f(x) = \pi - 2x$, $x \in [0; \pi]$ на сегмент$[-\pi; 0]$:**а)** чётным образом; **б)** нечётным образом.

Решение.

а) Продолжим функцию

$f(x) = \pi - 2x$ на отрезке $[-\pi; 0]$ чётным образом (см.рис.21), функция чётная и её ряд содержит только косинусы $b_n = 0, l = \pi$, то есть представима в виде:

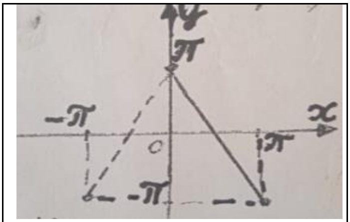


Рис.21

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, cosnx \ ,$$

$$a_0 \ = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, a_n \ = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cosnxdx.$$

Найдем a_0, a_n:

$$a_0 \ = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)dx = \frac{2}{\pi}(\pi x - x^2)|_0^{\pi} = \ 0;$$

$$a_n \ = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)cosnxdx = \begin{vmatrix} u = \pi - 2x, & du = -2dx \\ dv = cosnxdx, v = \frac{1}{n}sinnx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}(\pi - 2x)sinnx|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} sinnxdx\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{n^2}cosnx\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi n^2}(cos\pi n - cos0) = \frac{4}{\pi n^2}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{8}{\pi n^2}, n = 2k - 1 \end{cases}.$$

Таким образом, разложение по косинусам исходной функции имеет вид:

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

б) Продолжим функцию $f(x) = \pi - 2x$ на отрезке $[-\pi; 0]$ нечётным образом (см.рис.22), функция нечётная и её ряд содержит только синусы $a_0 = a_n = 0, l = \pi$.

Разложение функции в ряд Фурье имеет вид:

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \; sinnx, \; b_n \;\; = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sinnxdx.$

Найдем b_n:

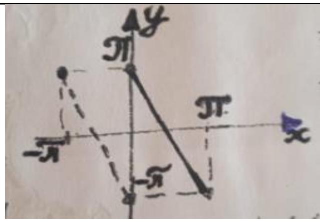


Рис.22

$$b_n \; = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sinnxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)sinnxdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \pi - 2x, & du = -2dx \\ dv = sinnxdx, v = -\frac{1}{n}cosnx \end{matrix} \right| = \frac{2}{\pi}(-\frac{1}{n}(\pi - 2x)cosnx|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{2}{n}\int_0^{\pi} cosnxdx)$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left((\pi - 2x)cosnx|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} cosnxd(nx)\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(-\pi cos\pi n - \pi cos0 + \frac{2}{n}sinnx|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi n}(-\pi(-1)^n - \pi) =$$

$$= \frac{2}{n}((-1)^n + 1) = \begin{cases} \frac{4}{n}, & n = 2k \\ 0, n = 2k - 1 \end{cases}.$$

Таким образом, ряд синусов исходной функции имеет вид:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2k} sin2kx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin2kx}{k}.$$

Задания для самостоятельного решения.

12. В задачах **1)-5)** заданные функции разложить в ряд Фурье на данном промежутке. В задачах **6)-10)** Заданные функции разложить в ряд Фурье в

промежутке по синусам или по косинусам.

1.	$f(x) = sin\frac{x}{3}, x \in (-\pi;\pi)$
2.	$f(x) = x - 1, x \in (-1;1)$
3.	$f(x) = \begin{cases} 0, -3 < x \le 0 \\ x, 0 < x \le 3 \end{cases}$
4.	$f(x) = \begin{cases} 2, -\pi < x \le 0 \\ -1, 0 < x \le \pi \end{cases}$
5.	$f(x) = x^2, x \in (-\pi;\pi)$
6.	$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, x \in (0;\pi)$ по косинусам
7.	$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0;1) \\ 0, & x \in (1;2) \end{cases}$ по косинусам
8.	$f(x) = 1, x \in (0;1)$ по синусам
9.	$f(x) = x, x \in (0;3)$ по синусам
10.	$f(x) = x(\pi - x), x \in (0;\pi)$ по синусам

Ответы:

12.1. $f(x) = \frac{27}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n(\sqrt{3})^n sinnx}{2^{n-1}}.$

12.2. $f(x) = -1 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} sinn\pi x}{n}.$

12.3. $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos\frac{\pi(2k-1)x}{3}}{(2k-1)^2} - \frac{3}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k sin\frac{\pi k x}{3}}{k}.$

12.4. $f(x) = -1 - \frac{12}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sin(2k-1)x}{(2k-1)x}$.

12.5. $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n cosnx}{n^2}$. **12.6.** $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

12.7. $\frac{1}{4} - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos\frac{\pi(2k-1)x}{2}}{(2k-1)^2}$. **12.8.** $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sin\pi(2k-1)x}{2k-1}$.

12.9. $f(x) = \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}sin\frac{n\pi x}{3}}{n}$. **12.10.** $4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.В.Соболь, Н. Т. Мишняков, В.М. Поркшеян, Практикум по высшей математике .3-е изд. Ростов н \ Д: Феникс, 2010.

2. Д.Т.Письменный, Конспект лекций по высшей математике (полный курс). 2-е изд. Москва: «Айрис-пресс», 2014.

3. Данко П.Е., Попов, А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах (1,2 том). — М.: Высш. шк., 2002.