ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Методические указания к выполнению лабораторной работы

по дисциплине

«Численные методы для инженеров»

«Численное решение систем алгебраических уравнений»

Авторы

Азимова Н. Н.

Калякин Г. Д.

Отраднов К. В.

Харахашьян А. М.

Цымбалов Д. С.

Ростов-на-Дону, 2023

Аннотация

Методические указания предназначены для студентов всех форм обучения специальностей 01.03.04, 02.03.03, УГН 09.00.00.

Авторы:

Азимова Н. Н.- доц., мат. модели в науке и технике
Харахашьян А. М.- доц., мат. модели в науке и технике
Цымбалов Д. С.- ст. преподаватель, мат. модели в науке и технике
Калякин Г. Д.- студент
Отраднов К. В.- студент

Оглавление

Введение 4
Локализация корней 6
Метод регулярного перебора 9
Метод случайного перебора 12
метод Бокса 14
Генетический алгоритм 16
Метод простой итерации 19
Метод Ньютона 22
Задачи для самостоятельного решения 23
Перечень использованных информационных источников 25

ВВЕДЕНИЕ

Цель расчётно-графической работы — ознакомиться с известными методами решения систем алгебраических уравнений и оценить их эффективность в решении конкретных задач.

Ниже представлен общий вид системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Найти решение системы уравнений (1) — значит указать такой набор значений $x_i,\ i = 1..m$, называемый корнем, что выражения $F_j(x_1, x_2, \dots, x_m),\ j = 1..n$ обращаются в нуль. Численное решение предполагает, что выражения $F_j(x_1, x_2, \dots, x_m),\ j = 1..n$ обратятся в нуль с некоторой погрешностью ε.

В результате решения системы можно получить как конечное число корней, в том числе один корень, так и бесконечное. Корней может и не быть вовсе. Чаще всего конечное число решений имеют системы, для которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, то есть $m = n$.

Все методы численного решения систем уравнений требуют предварительно локализовать корни, то есть для каждого корня указать такую область конечного размера, внутри которой находится этот самый корень. Соответственно, задача отыскания корней разбивается на два этапа:

1. *Классифицирующий*

   Этот этап подразумевает анализ системы на количество корней и области их локализации. Зачастую перед численным решением требуется аналитическое исследование системы.

2. *Уточняющий*

   Когда все корни локализованы, задача сводится к их уточнению, то есть последовательному приближению к точному решению. Численные методы решения систем предполагают работу только с каким-либо одним корнем. Поэтому, если необходимо найти несколько корней, тот для каждого из них выбранные методы применяются отдельно. Необходимо также учитывать, что в области локализации должен находиться только один корень.

Эффективность методов численного решения систем оценивается по следующим признакам:

1. *Число операций*

   Объём машинных вычислений, необходимых для достижения заданной точности.

2. *Трудоёмкость программирования*

   Сложность программной реализации алгоритма человеком.

3. *Робастность*

   Применимость метода к уравнениям и системам разных типов.

Все методы численного решения систем нелинейных уравнений будем реализовывать в Excel.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОРНЕЙ

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x \operatorname{th} y + y \operatorname{th} x = 13 \\ \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \dfrac{666}{x} \end{cases} \tag{2}$$

Как было сказано выше, сперва необходимо выяснить, сколько решений имеет система, и локализовать корни.

Упростим систему (2), применив ко второму её уравнению формулу гиперболического косинуса разности:

$$\begin{cases} x \operatorname{th} y + y \operatorname{th} x = 13 \\ \operatorname{ch}(x - y) = \dfrac{666}{x} \end{cases}$$

Поскольку гиперболический косинус не принимает отрицательных значений, то из второго уравнения можно заключить, что для всех корней выполняется условие $x > 0$. Тогда из первого уравнения следует, что $y > 0$. Кроме того, из второго уравнения можно также получить условие $x < 666$, поскольку гиперболический косинус не может быть меньше единицы.

Построим на промежутке $x \epsilon [0; 666]$ графики неявно заданных функций, соответствующих уравнениям системы (рисунок 1). Точки пересечения графиков будут являться искомыми корнями.

На рисунке 1 сплошной линией изображён график, соответствующий первому уравнению, пунктирной линией — второму. Слишком большой масштаб в данном случае затрудняет анализ графиков, однако можно заметить, что у графиков есть точки пересечения вблизи начала координат.

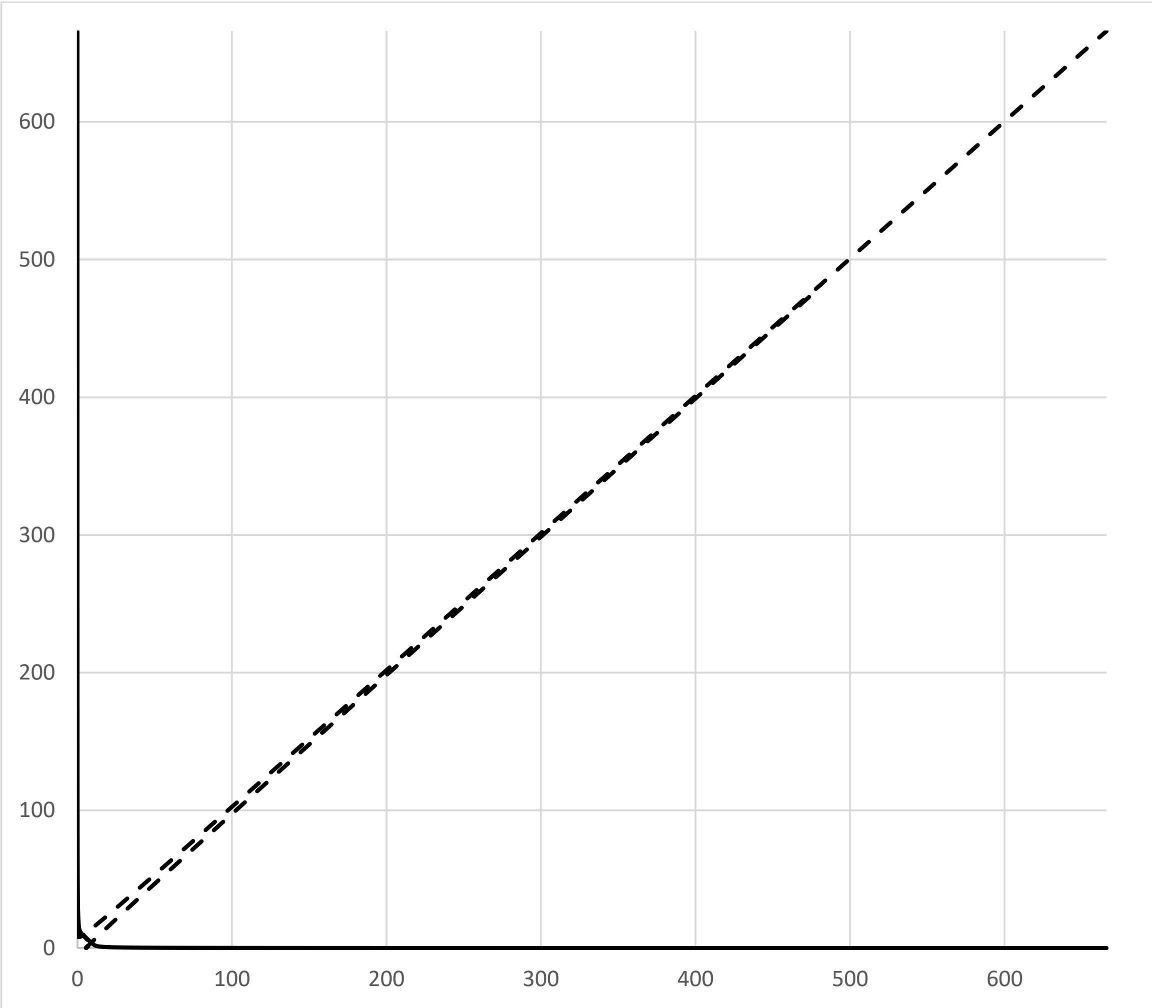

Рисунок 1. Графическая интерпретация системы.

Построим графики в меньшем масштабе, чтобы построение было более информативным (рисунок 2).

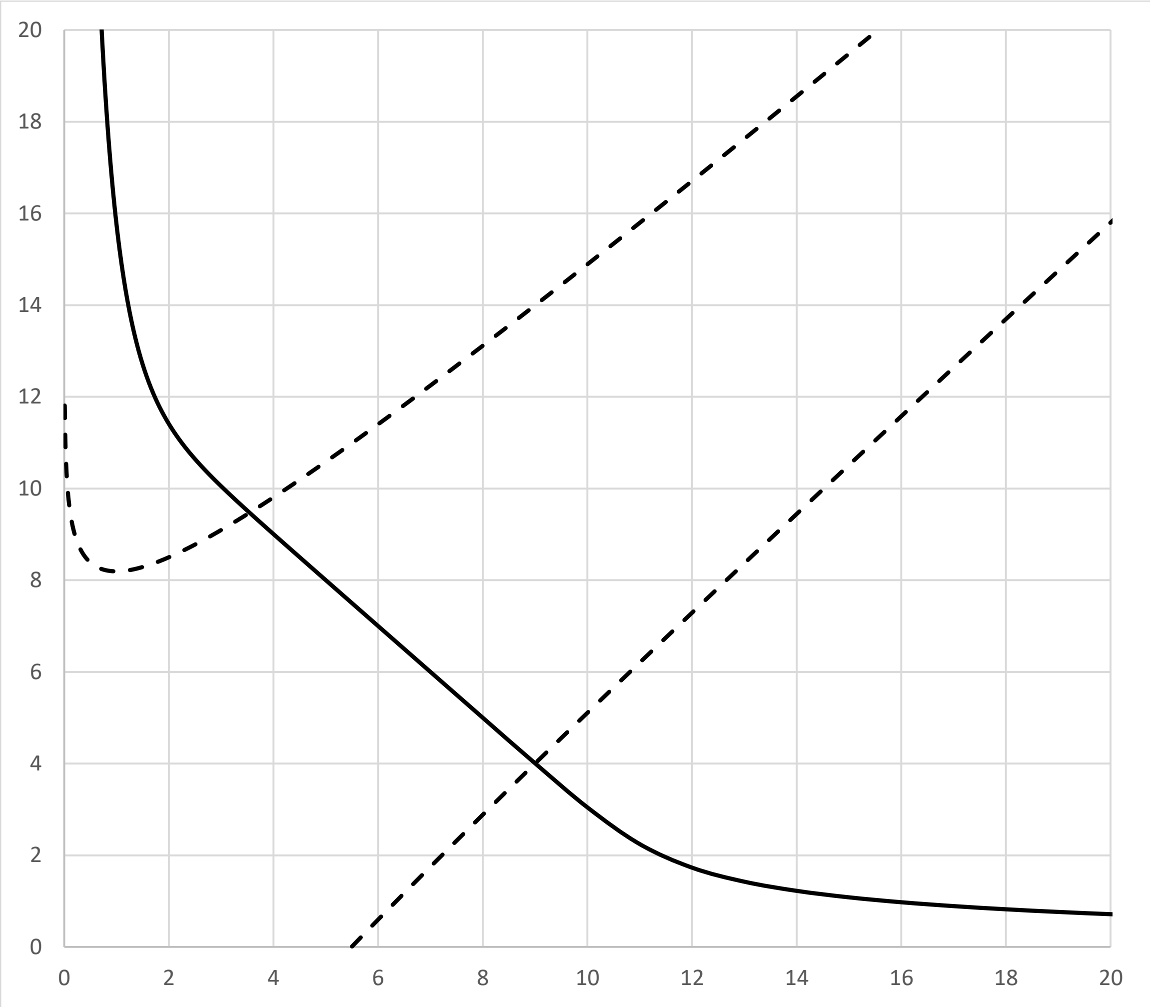

Рисунок 2. Графики в более мелком масштабе.

Из рисунка 2 очевидно, что у системы есть как минимум два решения. Одно из них заключено в области $2 < x < 4,\ 8 < y < 10$, другое — в области $8 < x < 10,\ 3 < y < 5$.

Таким образом, два корня уже локализованы. Однако на данный момент ещё нельзя сказать, что других решений нет. Поскольку оба графика при $x \to 0$ стремятся к бесконечности, нельзя утверждать, что они никогда не пересекутся и у них не будет несколько или даже бесконечно много общих точек. В самом деле, других корней, кроме двух обозначенных, у данной системы нет, но доказательство этого факта здесь мы не приводим.

МЕТОД РЕГУЛЯРНОГО ПЕРЕБОРА

Как было сказано выше, численные методы предполагают работу только с одним корнем. Возьмём для примера корень, локализованный в области $8 < x < 10,\ 3 < y < 5$.

Все описанные далее методы предполагают сведение поиска решений системы (1) к поиску минимума следующей функции:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{n} \left(F_i(x_1, x_2, \dots, x_m)\right)^2 \tag{3}$$

Очевидно, все значения функции (3) являются неотрицательными, причём они равны нулю в точках, соответствующих решению системы (1).

Суть метода регулярного перебора состоит в дискретизации области допустимых значений переменных с последующем вычислением значений функции (3) в каждой из точек дискретизованной области. Решением задачи считается та точка, в которой значение функции (3) минимально.

Введём формулу $=\text{ЧАСТНОЕ}(\text{СТРОКА}() - 2; 101)/50 + 8$ в ячейку $A2$ и формулу $=\text{ОСТАТ}(\text{СТРОКА}() - 2; 101)/50 + 3$ в ячейку $B2$. Распространив формулы до строки 10202, получим дискретизацию области локализации с шагом $0{,}02$. Затем введём в ячейку $C2$ формулу для функции (3) и заполним столбец C значениями функции в соответствующих точках.

Поскольку число точек дискретизованной области велико, найдём положение решения в таблице следующим образом. Введём в ячейку $D2$ формулу $=\text{ЕСЛИ}(C2 = \text{МИН}(\$C\$2{:}\,\$C\$10202);\ \text{"мин"};)$ и распространим её на весь диапазон $D2{:}\,D10202$. Результат представлен на рисунке 3.

	A	B	C	D
1	x	y	F	
2	8	3	85,8823465	0
3	8	3,02	114,519288	0
4	8	3,04	146,778958	0
5	8	3,06	182,425297	0
6	8	3,08	221,233361	0
7	8	3,1	262,988851	0
8	8	3,12	307,48766	0
9	8	3,14	354,535438	0
10	8	3,16	403,947173	0
11	8	3,18	455,546792	0
12	8	3,2	509,166777	0
13	8	3,22	564,647799	0
14	8	3,24	621,838359	0
15	8	3,26	680,594456	0
16	8	3,28	740,779258	0
17	8	3,3	802,262793	0
18	8	3,32	864,92165	0

Рисунок 3. Реализация метода регулярного перебора в Excel.

Теперь единственная ячейка, имеющая значение «мин», расположена рядом с искомым решением. Осуществив поиск по таблице, получим решение задачи (рисунок 4).

4994	8,98	3,86	90,3896282	0
4995	8,98	3,88	61,6316069	0
4996	8,98	3,9	38,7709186	0
4997	8,98	3,92	21,4819001	0
4998	8,98	3,94	9,4535273	0
4999	8,98	3,96	2,38880456	0
5000	8,98	3,98	0,00417822	мин
5001	8,98	4	2,02897394	0
5002	8,98	4,02	8,20485681	0
5003	8,98	4,04	18,2853134	0
5004	8,98	4,06	32,0351545	0
	8,98	4,08	49,2300386	0

Рисунок 4. Решение, найденное методом регулярного перебора.

Согласно рисунку 4, решением исходной задачи является точка $\binom{8{,}98}{3{,}98}$. При этом значение функции (3) близко к нулю, что подтверждает правильность решения.

МЕТОД СЛУЧАЙНОГО ПЕРЕБОРА

Случайный перебор предполагает выбор случайных точек из области локализации с последующим вычислением значений функции (3) в этих точках. Аналогично случаю регулярного перебора, решением задачи считается та точка, в которой значение функции (3) минимально.

Введём формулу $= 8 + 2 * \text{СЛЧИС}()$ во все ячейки диапазона $A1{:}\,A10001$ и формулу $= 3 + 2 * \text{СЛЧИС}()$ во все ячейки диапазона $B1{:}\,B10001$. В ячейках $C1{:}\,C10001$ вычислены значения функции (3) в соответствующих точках.

Поскольку число точек дискретизованной области снова велико, найдём положение решения в таблице таким же способом, как было сделано в предыдущей главе. Результат представлен на рисунке 5.

	A	B	C	D
1	x	y	F	
2	8,36209981	3,19937359	61,0979341	0
3	8,1674079	3,03824457	11,7492908	0
4	8,73886466	4,79593134	2542,13364	0
5	8,32621146	3,40585918	132,969262	0
6	9,71081912	3,97632162	7413,16638	0
7	9,57234845	4,55036189	40,7454511	0
8	8,63240588	3,76678548	150,96398	0
9	9,45248035	3,06870529	50905,8326	0
10	8,3729719	3,49604526	195,205032	0
11	8,25920747	4,2988427	2958,41756	0
12	9,40777017	4,57028463	60,4385098	0
13	8,06582345	4,18679593	3407,82022	0
14	8,12087016	4,02900137	2712,71866	0
	8,78037695	3,01670414	6958,54908	0

Рисунок 5. Реализация метода случайного перебора в Excel.

Выполним поиск ячейки со значением «мин», получим искомое решение системы рисунок (6).

1122	9,85387106	4,22724112	5081,49136	0
1123	9,24684037	3,51162103	6850,51674	0
1124	8,2100844	3,80896068	1628,487	0
1125	9,77962526	3,60748865	29414,0091	0
1126	8,99974731	4,00157017	0,005312	мин
1127	9,84415734	3,74416979	24110,003	0
1128	9,24882807	3,99408694	563,142555	0
1129	8,53683227	3,72889137	281,827651	0

Рисунок 6. Решение, найденное методом случайного перебора.

Согласно рисунку 6, решением исходной задачи является точка $\begin{pmatrix} 8,9998 \\ 4,0016 \end{pmatrix}$. Значение функции (3) в полученной точке снова близко к нулю.

МЕТОД БОКСА

Данный метод отслеживает минимум функции и последовательно уточняет локализацию решения. Для отслеживания область предполагаемого минимума функции (3) помещают в n-мерный параллелепипед, где n — число независимых переменных функции (3). Значение функции вычисляется во всех 2^n вершинах параллелепипеда и в его геометрическом центре. Если среди всех $2^n + 1$ точек значение функции в геометрическом центре минимально, размеры параллелепипеда уменьшаются вдвое, сохраняя положение его центра. Если минимум функции достигается в одной из вершин, центр параллелепипеда перемещается в эту вершину, размер сохраняется. Так осуществляется поиск минимума, пока размеры параллелепипеда не станут достаточно малы.

Поскольку задача (2) двумерна, область предполагаемого минимума представляет собой прямоугольник. Значения функции (3) на каждом шаге требуется вычислить в пяти точках. Реализуем алгоритм следующим образом.

Запишем в ячейку $A2$ оценку нижней границы значений переменной x, в ячейку $B2$ — оценку верхней границы, в ячейке $C2$ найдём их среднее арифметическое, что будет соответствовать одной из координат центра прямоугольника. Диапазон $D2{:}F2$ заполним аналогичным образом для переменной y.

Найдём в ячейках $H2{:}L2$ значения функции (3) в каждой из пяти точек, а в ячейку $M2$ введём формулу $= \text{МИН}(H2{:}L2)$ для нахождения минимума.

Введём в ячейку $O2$ следующую формулу:

$$= \text{ЕСЛИ}(H2 = M2;\ 0;\ \text{ЕСЛИ}(\text{ИЛИ}(I2 = M2;\ J2 = M2);\ -(B2 - A2)/2;\ (B2 - A2)/2))$$

Она показывает смещение прямоугольника вдоль оси Ox, если минимум достигается в одной из вершин, и равна нулю в обратном случае.

В ячейку $P2$ введём аналогичную формулу для смещения вдоль оси Oy. Она имеет следующий вид:

$$= \text{ЕСЛИ}(H2 = M2;\ 0;\ \text{ЕСЛИ}(\text{ИЛИ}(I2 = M2;\ K2 = M2);\ -(E2 - D2)/2;\ (E2 - D2)/2))$$

Найдём оценку нижней границы значений переменной x на следующем шаге, введя формулу $= \text{ЕСЛИ}(H2 = M2;\ (A2 + C2)/2;\ A2 + O2)$ в ячейку $A3$. Аналогично находится оценка верхней границы значений переменной x, а также границы для переменной y в ячейках $B3$, $D3$ и $E3$ соответственно. Распространим все формулы на несколько строк вниз. Результат представлен на рисунке 7.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	ax	bx	cx	ay	by	cy		F(cx,cy)	F(ax,ay)	F(ax,by)	F(bx,ay)	F(bx,by)	min F		dx	dy
2	8	10	9	3	5	4		0,04411482	85,8823465	5355,6546	232051,304	61,9076855	0,04411482		0	0
3	8,5	9,5	9	3,5	4,5	4		0,04411482	18,1956043	2605,56225	17321,2906	17,8437584	0,04411482		0	0
4	8,75	9,25	9	3,75	4,25	4		0,04411482	3,88626753	967,220311	2534,92217	5,13012317	0,04411482		0	0
5	8,875	9,125	9	3,875	4,125	4		0,04411482	0,75911129	297,417136	497,265827	1,55745167	0,04411482		0	0
6	8,9375	9,0625	9	3,9375	4,0625	4		0,04411482	0,11194638	81,4793255	112,368289	0,53313521	0,04411482		0	0
7	8,96875	9,03125	9	3,96875	4,03125	4		0,04411482	0,00704123	20,6445445	27,5805307	0,22038694	0,00704123		-0,03125	-0,03125
8	8,9375	9	8,96875	3,9375	4	3,96875		0,00704123	0,11194638	23,0760566	24,9614029	0,04411482	0,00704123		0	0

Рисунок 7. Реализация метода бокса в Excel.

В данном случае формулы были распространены до строки 101 (рисунок 8). Решением можно считать последние значения координат центра прямоугольника.

97	8,98431396	8,98443604	8,984375	3,9854126	3,98553467	3,98547363		0,00132173	0,00133115	0,00141718	0,00140874	0,00131284	0,00131284		6,1035E-05	6,1035E-05
98	8,984375	8,98449707	8,98443604	3,98547363	3,9855957	3,98553467		0,00131284	0,00132173	0,00139868	0,00140948	0,0013045	0,0013045		6,1035E-05	6,1035E-05
99	8,98443604	8,98455811	8,98449707	3,98553467	3,98565674	3,9855957		0,0013045	0,00131284	0,00138071	0,00141075	0,00129669	0,00129669		6,1035E-05	6,1035E-05
100	8,98449707	8,98461914	8,98455811	3,9855957	3,98571777	3,98565674		0,00129669	0,0013045	0,00136328	0,00141256	0,00128941	0,00128941		6,1035E-05	6,1035E-05
101	8,98455811	8,98468018	8,98461914	3,98565674	3,98577881	3,98571777		0,00128941	0,00129669	0,00134639	0,00141491	0,00128268	0,00128268		6,1035E-05	6,1035E-05
102																

Рисунок 8. Решение, найденное методом бокса.

Методом бокса в качестве решения была найдена точка $\binom{8{,}9846}{3{,}9857}$. Значение функции (3) также близко к нулю.

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ

Генетические алгоритмы сочетают в себе черты детерминированных и случайных методов. Они опираются на основные понятия эволюции — скрещивание, мутацию и отбор. Для решения поставленной задачи используем следующий генетический алгоритм.

Назовём точку $\binom{x}{y}$ особью, а значения координат x и y — её генами. Пусть в начале случайным образом выбрано две точки из области локализации — две родительских особи.

Скрещивание происходит так, что дочерняя особь в качестве первого гена с равной вероятностью получает первый ген любой из родительских особей. Аналогично, выбирается второй ген дочерней особи.

После этого дочерняя особь подвергается мутации — случайному изменению значений своих генов. Пусть задана некоторая постоянная мутации $k_0 \geq 0$. Выбираются два случайных числа k_x и k_y, такие что $|k_x| \leq k_0$ и $|k_y| \leq k_0$. Тогда, если в ходе скрещивания были выбраны родительские гены x_0 и y_0, то дочерняя особь будет иметь гены $(1+k_x)x_0$ и $(1+k_y)y_0$.

После скрещивания и мутации имеется три особи, то есть три точки. В ходе отбора вычисляется значение функции (3) в каждой из трёх точек, после чего та особь, которая соответствует максимальному значению функции, удаляется. Оставшиеся две особи становятся новыми родительскими особями.

Реализуем алгоритм следующим образом. Запишем в ячейки $A2$ и $E2$ формулу $= 8 + 2 * \text{СЛЧИС}()$, а в ячейки $B2$ и $F2$ — $= 3 + 2 * \text{СЛЧИС}()$. В ячейки $C2$ и $G2$ введём формулы для вычисления функции (3) в соответствующих точках. Заполненные ячейки соответствуют родительским особям.

Введём формулу $=$ ЦЕЛОЕ$(4*$СЛЧИС$())$ в ячейку $I2$ для выбора сценария скрещивания. В ячейку $J2$ и $K2$ введём соответственно формулы $=$ ЕСЛИ(ИЛИ$(I2 = 0; I2 = 1); A2; E2)$ и $=$ ЕСЛИ(ИЛИ$(I2 = 0; I2 = 2); B2; F2)$.

Выберем постоянную мутации и введём её значение в ячейку $T2$. Введём в ячейки $L2$ и $M2$ формулу $= 1 + (2*$СЛЧИС$() - 1)*\$T\$2$. Затем введём в ячейки $O2$ и $P2$ формулы $= L2*J2$ и $= M2*K2$ соответственно. Эти ячейки содержат итоговое значение генов дочерней особи. В ячейке $Q2$ вычислим значение функции (3) для дочерней особи.

Для реализации отбора ведём в ячейку $S2$ формулу $=$ МАКС$(Q2; G2; C2)$. В ячейки $A3$ и $B3$ введём соответственно формулы $=$ ЕСЛИ$(C2 = S2; O2; A2)$ и $=$ ЕСЛИ$(C2 = S2; P2; B2)$, определяющие новые гены первой родительской особи. Аналогично найдём новые гены второй родительской особи, введя формулы $=$ ЕСЛИ$(G2 = S2; O2; E2)$ и $=$ ЕСЛИ$(G2 = S2; P2; F2)$ в ячейки $E3$ и $F3$ соотвественно. Результат представлен на рисунке 9.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	x_f	y_f	F_f		x_m	y_m	F_m		n	x_ch 0	y_ch 0	kx	ky		x_ch	y_ch	F_ch		max F	k0
2	8,86403581	3,89652522	10,9324107		9,30869111	3,23227958	21370,8698		2	9,30869111	3,89652522	0,95523767	0,96957875		8,89201236	3,77798807	68,5663672		21370,8698	0,1
3	8,86403581	3,89652522	10,9324107		8,89201236	3,77798807	68,5663672		2	8,89201236	3,89652522	1,0588584	0,9396236		9,41538197	3,66126707	7570,63356		7570,63356	
4	8,86403581	3,89652522	10,9324107		8,89201236	3,77798807	68,5663672		2	8,89201236	3,89652522	1,00872837	0,93661437		8,96962512	3,64954151	781,48757		781,48757	
5	8,86403581	3,89652522	10,9324107		8,89201236	3,77798807	68,5663672		3	8,89201236	3,77798807	1,07980543	1,05293448		9,60164322	3,9779739	4773,82044		4773,82044	
6	8,86403581	3,89652522	10,9324107		8,89201236	3,77798807	68,5663672		0	8,86403581	3,89652522	1,094888	0,9574508		9,70512643	3,73073118	16382,352		16382,352	
7	8,86403581	3,89652522	10,9324107		8,89201236	3,77798807	68,5663672		3	8,89201236	3,77798807	0,98677182	1,08535098		8,77438726	4,10044306	499,019362		499,019362	
8	8,86403581	3,89652522	10,9324107		8,89201236	3,77798807	68,5663672		0	8,86403581	3,89652522	1,05026477	0,99687383		9,30958456	3,88434403	1763,69901		1763,69901	
9	8,86403581	3,89652522	10,9324107		8,89201236	3,77798807	68,5663672		3	8,89201236	3,77798807	0,97901233	1,08134779		8,70538971	4,08531906	663,046674		663,046674	

Рисунок 9. Реализация генетического алгоритма в Excel.

Распространим введённые формулы до строки 200, а формулы столбцов A, B, C, E, F и G до строчки 201 (рисунок 10). Ячейки $A201{:}C201$ и $E201{:}G201$ соответствуют двум последним родительским особям.

196	8,75174701	3,71746281	0,78136643		9,15970027	4,17826674	0,12960251		1	8,75174701	4,17826674	1,07883965	0,90300336		9,44173165	3,77298889	5520,36519		5520,36519
197	8,75174701	3,71746281	0,78136643		9,15970027	4,17826674	0,12960251		3	9,15970027	4,17826674	0,96356877	1,04518726		8,82600114	4,36707118	1040,45782		1040,45782
198	8,75174701	3,71746281	0,78136643		9,15970027	4,17826674	0,12960251		2	9,15970027	3,71746281	0,98668104	1,04780731		9,03770261	3,89518473	141,251741		141,251741
199	8,75174701	3,71746281	0,78136643		9,15970027	4,17826674	0,12960251		0	8,75174701	3,71746281	1,09650883	0,91067701		9,59636791	3,38540792	32288,2751		32288,2751
200	8,75174701	3,71746281	0,78136643		9,15970027	4,17826674	0,12960251		3	9,15970027	4,17826674	1,04512196	0,94730813		9,57300393	3,95810606	4580,02543		4580,02543
201	8,75174701	3,71746281	0,78136643		9,15970027	4,17826674	0,12960251												
202																			
203																			

Рисунок 10. Решение, найденное с использованием генетического алгоритма.

За решение исходной задачи можно принять гены любой из двух полученных особей. Возьмём вторую особь, поскольку ей соответствует меньшее значение функции (3). Таким образом, решением является точка $\binom{9,1597}{4,1783}$.

МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Пусть имеется система уравнений, для которой число неизвестных равно числу уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Метод простой итерации предполагает замену исходной системы равносильной, то есть имеющей точно такие же решения, системой следующего вида:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Такую систему можно получить путём выражения переменных из уравнений исходной системы. Тогда для поиска решения строится следующий итерационный процесс:

$$x_i^{k+1} = \varphi_i\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)$$

где x_i^k — значение переменной x_i на k-ом шаге решения.

Процесс сходится к решению, если в окрестности корня выполняется следующее условие:

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \leq 1, \qquad i = 1, \dots, n$$

Путём перебора различных вариантов несложно убедиться, что задача (2) необходимому условию удовлетворять не может. Поэтому рассмотрим работу метода простой итерации на примере другой системы:

$$\begin{cases} 8 + \cos(xy) = \dfrac{9}{x^2} \\ x + \operatorname{th} x = y^3 \end{cases}$$

Эта система имеет два корня, один из которых локализован в области $0{,}5 < x < 1{,}5,\ \ 0{,}5 < y < 1{,}5$. Его и будем искать.

Построим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{8 + \cos(xy)}} \\ y = \sqrt[3]{x + \operatorname{th} x} \end{cases}$$

Будем считать, что в окрестности корня $x \approx 1$ и $y \approx 1$

Убедимся, что итерационный процесс будет сходиться.

$$\frac{\partial \varphi_1(x,y)}{\partial x} = \frac{3\sqrt{2}\, y \sin(xy)}{\sqrt{(16 + 2\cos(xy))^3}}$$

$$\frac{\partial \varphi_1(x,y)}{\partial y} = \frac{3\sqrt{2}\, x \sin(xy)}{\sqrt{(16 + 2\cos(xy))^3}}$$

$$\frac{\partial \varphi_2(x,y)}{\partial x} = \frac{(1 + \operatorname{ch}^2 x)\sqrt[3]{x + \operatorname{th} x}}{3\operatorname{ch}^2 x\,(x + \operatorname{th} x)}$$

$$\frac{\partial \varphi_2(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$\left.\left|\frac{\partial \varphi_1(x,y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2(x,y)}{\partial x}\right|\right|_{\substack{x=1\\y=1}} \approx 0{,}375 < 1$$

$$\left.\left|\frac{\partial \varphi_1(x,y)}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2(x,y)}{\partial y}\right|\right|_{\substack{x=1\\y=1}} \approx 0{,}051 < 1$$

Необходимое условие выполнено — процесс сойдётся.

Введём в ячейки $A2$ и $B2$ начальные приближения для x и y, а в ячейку $C2$ — значение функции (3) для новой системы. Затем введём в ячейку $A3$ формулу $= 3/\text{КОРЕНЬ}(8 + \text{COS}(A2 * B2))$ для вычисления значений x на последующих шагах алгоритма. Аналогично, введём в ячейку $B3$ формулу для вычисления значений y — $= (A2 + \text{TANH}(A2))\text{^}(1/3)$.

Распространим все формулы на нижние строки, пока значение функции (3) не станет достаточно маленьким (рисунок 11).

	A	B	C	D
1	x	y	F	
2	1	1	0,79134763	
3	1,0265607	1,20772657	0,04776888	
4	1,03975167	1,21623446	0,00089426	
5	1,04122417	1,22037918	3,8183E-05	
6	1,04158985	1,22083862	1,0406E-06	
7	1,04164533	1,22095262	3,7734E-08	
8	1,04165652	1,22096991	1,1594E-09	
9	1,04165842	1,2209734	3,9382E-11	
10	1,04165878	1,22097399	1,2609E-12	
11	1,04165884	1,2209741	4,1825E-14	
12	1,04165885	1,22097412	1,3585E-15	
13	1,04165885	1,22097413	4,4683E-17	
14	1,04165885	1,22097413	1,4588E-18	
15	1,04165885	1,22097413	4,7835E-20	
16	1,04165885	1,22097413	1,5645E-21	
17	1,04165885	1,22097413	5,1267E-23	
18	1,04165885	1,22097413	1,6762E-24	
19	1,04165885	1,22097413	5,5871E-26	
20	1,04165885	1,22097413	1,6184E-27	
21	1,04165885	1,22097413	5,8819E-29	

Рисунок 11. Реализация метода простой итерации в Excel.

Как можно заметить, даже небольшого числа итераций достаточно для очень высокой точности решения, если процесс всё же будет сходиться. Решением в данном случае стала точка $\begin{pmatrix}1{,}0417\\1{,}2210\end{pmatrix}$.

МЕТОД НЬЮТОНА

Метод Ньютона является модификацией метода простой итерации. Здесь в качестве эквивалентной системы выступает система следующего вида:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - W^{-1} \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

где W — матрица Якоби для функции (3):

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Для рассматриваемой задачи

$$W = \begin{pmatrix} \frac{18}{x^2} - y\sin(xy) & -x\sin(xy) \\ 1 + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} & -3y^2 \end{pmatrix}$$

$$W^{-1} = \frac{1}{\det W} \begin{pmatrix} -3y^2 & -1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\ x\sin(xy) & \frac{18}{x^2} - y\sin(xy) \end{pmatrix}$$

Введём в ячейки $A2$ и $B2$ начальные приближения для x и y, а в ячейку $C2$ — значение функции (3) для системы. В ячейки $E2$ и $F2$ введём значения функций $F1(x, y)$ и $F2(x, y)$ в соответствующих точках, а в ячейки $G2{:}J2$ —

значения $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ и $\frac{\partial F_2}{\partial y}$. Чтобы посчитать определитель матрицы W, введём в ячейку $K2$ формулу $= G2 * J2 - H2 * I2$.

Введём формулу $= A2 - (E2 * J2 - F2 * H2)/K2$ в ячейку $A3$ и формулу $= B2 - (F2 * G2 - E2 * I2)/K2$ в ячейку $B3$. Так мы получим значения x и y на последующих шагах алгоритма. Распространим все формулы на нижние строки, пока значение функции (3) не станет достаточно маленьким (рисунок 12).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	x	y	F		f1(x,y)	f2(x,y)	df1/dx	df2/dx	df1/dy	df2/dy	det
2	1	1	0,79134763		-0,4596977	0,76159416	17,158529	1,41997434	-0,841471	-3	-50,28072
3	1,00591974	1,25220429	0,38341865		-0,5882019	-0,193487	16,4920167	1,4161984	-0,9576086	-4,7040467	-76,223054
4	1,04581509	1,20295072	0,01349106		0,07893164	0,08521065	14,5918839	1,3913285	-0,9950894	-4,3412713	-61,96283
5	1,0383716	1,22428492	0,00308684		-0,0520502	-0,0194325	14,9075639	1,39589144	-0,9921373	-4,4966207	-65,648745
6	1,04234998	1,21908555	0,00023398		0,01207025	0,00939647	14,729342	1,3934482	-0,9957695	-4,4585087	-64,283347
7	1,04130914	1,22142555	3,7797E-05		-0,0056135	-0,0025072	14,7743939	1,39408643	-0,995134	-4,4756411	-64,737582
8	1,04175121	1,22076708	3,574E-06		0,00156903	0,00105457	14,7547893	1,39381527	-0,9955117	-4,4708168	-64,5784
9	1,04161983	1,22103221	5,0049E-07		-0,0006339	-0,0003142	14,7605198	1,39389584	-0,9954216	-4,472759	-64,632734
10	1,04167047	1,2209507	5,2546E-08		0,00019471	0,00012097	14,7582832	1,39386479	-0,9954629	-4,4721618	-64,61389
11	1,04165438	1,22098133	6,8346E-09		-7,319E-05	-3,844E-05	14,7589873	1,39387465	-0,9954513	-4,4723862	-64,620357
12	1,04166028	1,22097142	7,5861E-10		2,367E-05	1,4084E-05	14,7587276	1,39387104	-0,995456	-4,4723136	-64,618121
13	1,04165833	1,220975	9,4758E-11		-8,557E-06	-4,64E-06	14,7588127	1,39387223	-0,9954546	-4,4723399	-64,61889
14	1,04165903	1,22097381	1,0843E-11		2,8472E-06	1,6542E-06	14,7587822	1,3938718	-0,9954551	-4,4723311	-64,618624
15	1,04165879	1,22097423	1,3244E-12		-1,008E-06	-5,561E-07	14,7587925	1,39387194	-0,9954549	-4,4723342	-64,618716
16	1,04165888	1,22097409	1,5411E-13		3,4056E-07	1,9528E-07	14,7587889	1,39387189	-0,995455	-4,4723332	-64,618684
17	1,04165885	1,22097414	1,8592E-14		-1,191E-07	-6,638E-08	14,7587901	1,39387191	-0,995455	-4,4723335	-64,618695
18	1,04165886	1,22097412	2,1835E-15		4,0609E-08	2,3117E-08	14,7587897	1,39387191	-0,995455	-4,4723334	-64,618691
19	1,04165885	1,22097413	2,6161E-16		-1,411E-08	-7,907E-09	14,7587898	1,39387191	-0,995455	-4,4723335	-64,618693
20	1,04165885	1,22097413	3,0883E-17								

Рисунок 12. Реализация метода простой итерации в Excel.

Снова небольшого числа итераций хватило для достижения очень высокой точности решения. В результате была получена точка $\binom{1{,}0417}{1{,}2210}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) $\begin{cases} x * th(y) + \sqrt{y} * arctg(x) = 15 \\ \sqrt{x} * e^{y} + y * \ln(x) = 25 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + ch(y) * \ln(x+1) - 40 = 0 \\ y + 3 * th(x * y) - 20 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} sh(6x - 7y) = 67 \\ y + th(x) = 13 \end{cases}$

4) $\begin{cases} e^{x} = 4\sqrt{y} \\ y^{2} = arcctg(x^{3}) \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + e^{y} + 2\ln z = 666 \\ y + e^{z} + 2\ln x = 666 \\ z + e^{x} + 2\ln y = 666 \end{cases}$

Перечень использованных информационных источников

Дьяченко В.Ф., Основные понятия вычислительной математики.

Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А., Численное моделирование процессов тепло- и массообмена.

Федотов А.А., Храпов П.В, МГТУ им. Баумана, Численные методы.

Калиткин Н.Н., Численные методы. Под редакцией Самарского А.А.

Поршнев С.В., Вычислительная математика.