ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплинам
«Численные методы», «Вычислительная математика»

«Алгоритмы и программная реализация формульного представления табулированных функций»

Азимова Н.Н.
Бедоидзе М. В.
Кулинич Д. И.
Харахашьян А.М.
Цымбалов Д.С.
Щеглова Е. М.

Ростов-на-Дону, 2023

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной, заочной форм обучения для специальностей 09.00.00 «Информатика и вычислительная техника», 01.03.04 «Прикладная математика», 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

Авторы

доцент кафедры «Прикладная математика»
Азимова Н.Н.

ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Бедоидзе М. В.

студент кафедры «Прикладная математика»
Кулинич Д. И.

ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Харахашьян А.М.

ст. преподаватель кафедры «Электротехника и электроника»
Цымбалов Д.С.

студент кафедры «Прикладная математика»
Щеглова Е. М.

Оглавление

Интерполяция 4
Кусочно-линейная интерполяция 5
Интерполяция многочленом Лагранжа 7
Spline-интерполяция 9
Аппроксимация 13
Линейная регрессия 16
Квадратичная регрессия 23
Кубическая регрессия 30
Степенная регрессия 37
Показательная регрессия 44
Логарифмическая регрессия 52
Гиперболическая регрессия 59
Экспоненциальная регрессия 66
Задачи для самостоятельного решения 72
Перечень использованных информационных источников 76

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Интерполяцией называется нахождение промежуточных значений некоторой функции по имеющемуся дискретному набору ее известных значений.

Основными методами интерполяции являются: кусочно-линейная интерполяция, интерполяция полиномом Лагранжа, интерполяция при помощи s-, p- и l-сплайнов.

Кусочно-линейная интерполяция заключается в том, что соседние точки соединяются прямыми, т.е. интерполируемая функция приближенно представляется в виде ломаной.

Интерполяцией полиномом Лагранжа называется поиск полинома Лагранжа степени на один ниже, чем количество заданных точек.

Сплайн-интерполяцией называется соединение нескольких точек гладкой (непрерывно дифференцируемой между каждой парой точек) линией, описываемой на соответствующих интервалах полиномами нечетной степени, с той или иной степенью гладкости «сшитыми» во всех узловых точках. Под гладкостью «сшивки» подразумевается равенство левых и правых производных первого, второго и т.д. порядков во всех (кроме крайних) узловых точках. Минимальной глобальной гладкости отвечают сплайны третьего порядка: в этом случае сплайн-представление данных гладко до первого порядка (непрерывно дифференцируемо). Если использовать сплайны пятого порядка, глобальная гладкость сплайна возрастает до C^2. Практически широко используется сплайны гладкости C^1, т.е. третьего порядка. Поскольку обычно не имеется априорных данных о левой производной левее левой крайней точки и о правой правее правой крайней точки, касательно этих характеристик интерполируемой функции используют различные гипотезы. В стандартных пакетах вычислительной математики встроенные функции сплайн-интерполяции используют модели p-, s- и l-кубических сплайнов. Идеологически, кусочно-линейная интерполяция представляет собой линейный сплайн, обеспечивая представлению функции гладкость C^0.

Ниже приведен пример практической реализации задачи интерполяции с использованием пакета Mathcad15.

Кусочно-линейная интерполяция

Создадим переменную $Xlin$. С помощью сочетания клавиш Shift+; присвоим ей данные по условию значения x. Для этого вставим матрицу при помощи вкладки «Вставка» или сочетанием клавиш Ctrl+M с 1 столбцом и количеством строк, равным количеству заданных точек. В нашем случае матрица-столбец будет иметь 9 строк.

Аналогичным образом создается матрица-столбец $Ylin$ для значений y.

Запишем функцию $f\_lin(x)$ для линейной интерполяции. Слева от оператора присваивания укажем ее название, а справа встроенную функцию $linterp$. В качестве параметров передадим переменные $Xlin$ и $Ylin$ и количество точек разбиения x.

Переменной x зададим точки разбиения оси OX с шагом 0,1. Для этого после оператора присваивания вставим начальное значение, равное 0. Следующее значение будет равно сумме начального значения и шага. Нажмем клавишу «;» и после появившегося знака многоточия впишем правую границу отрезка-100.

Пусть переменная i обозначает количество точек, заданных по условию (рис. 1).

$$Xlin := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 29 \\ 59 \\ 81 \end{pmatrix} \qquad Ylin := \begin{pmatrix} 81 \\ 59 \\ 29 \\ 9 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\_lin(x) := linterp(Xlin, Ylin, x)$$

$$x := 0, 0.1 .. 100$$

$$i := 1 .. 9$$

Рисунок 1. Задание табулированной функции в MathCAD

С помощью вкладки «Вставка» или сочетания клавиш Shift+2 вставим график $X - Y$. В верхнем и нижнем углах левой грани графика впишем пределы отображения оси OY. В левом и правом углах нижней грани графика впишем пределы отображения оси OX.

Слева от графика по середине впишем переменную $Ylin$. Для перехода на новую строку нажмем клавишу «<». На этой строке впишем используемую функцию f_lin. В качестве параметра передадим точки разбиения x.

Аналогичным образом снизу графика впишем переменную $Xlin$ и точки разбиения x.

График построен. Для наибольшей наглядности можно менять пределы отображения или, дважды щелкнув левой кнопкой мыши по графику, перейти к логарифмическим осям (одной или обеим), а также выбрать отображение линии красными точками, а не пунктиром.

Проверим результаты интерполяции, взяв любое число из отрезка X, и экстраполяции, взяв любое число, но принадлежащее отрезку X (рис. 2).

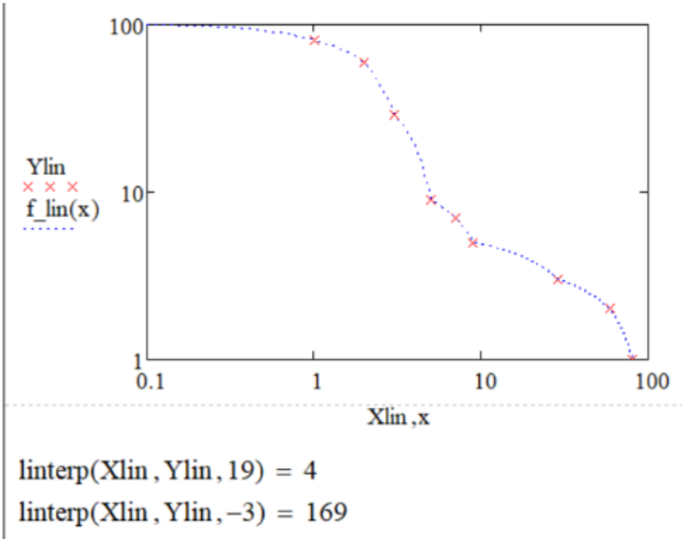


Рисунок 2. Графическое отображение кусочно-линейной интерполяции. Проверка результатов интер- и экстраполяции

Результаты вычисления показывают, что кусочно-линейная интерполяция позволяет надежно оценивать значения табулированной функции в промежутках между узловыми точками. Чем дальше от конченых расположена такая точка, тем надежней результат интерполяции (в предположении, что функция достаточно гладкая). Экстраполяция же дает неоднозначный результат.

Интерполяция многочленом Лагранжа

Создадим переменную xi. С помощью сочетания клавиш Shift+; присвоим ей данные по условию значения x. Для этого вставим матрицу при помощи вкладки «Вставка» или сочетанием клавиш Ctrl+M с 1 столбцом и количеством строк, равным количеству заданных точек. В нашем случае матрица-столбец будет иметь 9 строк.

Аналогичным образом создается матрица-столбец для значений $\boldsymbol{y}$.

Переменной $\boldsymbol{X}$ зададим точки разбиения оси $\boldsymbol{OX}$ с шагом 0,1. Для этого после оператора присваивания вставим начальное значение, равное 0. Следующее значение будет равное сумме начального значения и шага. Нажмем клавишу «;» и после появившегося знака многоточия впишем правую границу отрезка-100.

Переменной $\boldsymbol{n}$ зададим значение, равное длине вектора $\boldsymbol{xi}$, уменьшенное на один. Для этого запишем название переменной, а после оператора присваивания выражение length(xi)-1.

Создадим переменные $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, содержащие в себе столько значений, сколько было задано точек по условию и начинающиеся с нуля. Т.е, последним значением в этих переменных будет длина вектора $\boldsymbol{xi}$, уменьшенная на один.

Запишем функцию $L(X)$ для линейной интерполяции. Слева от оператора присваивания укажем ее название, а справа выражение, как показано на рисунке 3. В качестве параметра передадим переменную X.

$$xi := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 29 \\ 59 \\ 81 \end{pmatrix} \qquad yi := \begin{pmatrix} 81 \\ 59 \\ 29 \\ 9 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X := 0, 0.1 .. 100$$

$$n := \mathrm{length}(xi) - 1$$

$$i := 1 .. n$$

$$j := 1 .. n$$

$$L(X) := \sum_{i=0}^{n} yi_i \cdot \prod_{j=0}^{n} \mathrm{if}\left(i = j, 1, \frac{X - xi_j}{xi_i - xi_j}\right)$$

Рисунок 3. Задание табулированной функции в MathCAD

С помощью вкладки «Вставка» или сочетания клавиш Shift+2 вставим график $X - Y$. В верхнем и нижнем углах левой грани графика впишем пределы отображения оси OY. В левом и правом углах нижней грани графика впишем пределы отображения оси OX.

Слева от графика по середине впишем функцию $L(x)$. Для перехода на новую строку нажмем клавишу «<». На этой строке впишем i-тую координату вектора yi с помощью выражения yi_i.

Аналогичным образом снизу графика впишем переменную X и i-тую координату вектора xi с помощью выражения xi_i (рис. 4).

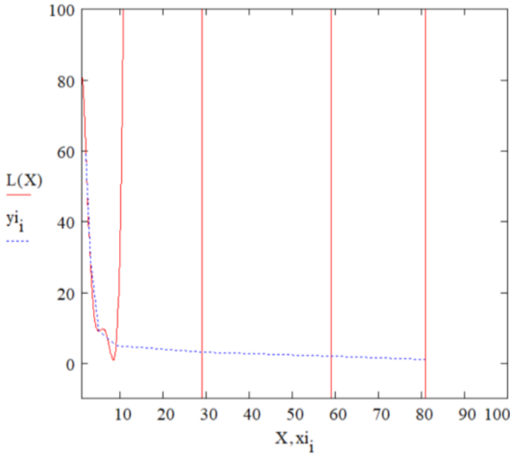


Рисунок 4. Графическое отображение кусочно-линейной интерполяции

График построен. Для наибольшей наглядности можно менять пределы отображения или, дважды щелкнув левой кнопкой мыши по графику, перейти к логарифмическим осям (одной или обеим), а также выбрать отображение линии красными точками, а не пунктиром.

Spline-интерполяция

Создадим переменную $\boldsymbol{x}$. С помощью сочетания клавиш Shift+; присвоим ей данные по условию значения $\boldsymbol{x}$. Для этого вставим матрицу при помощи вкладки «Вставка» или сочетанием клавиш Ctrl+M с одним столбцом и количеством строк, равным количеству заданных точек. В нашем случае матрица-столбец будет иметь 9 строк.

Аналогичным образом создается матрица-столбец для значений y (рис. 5).

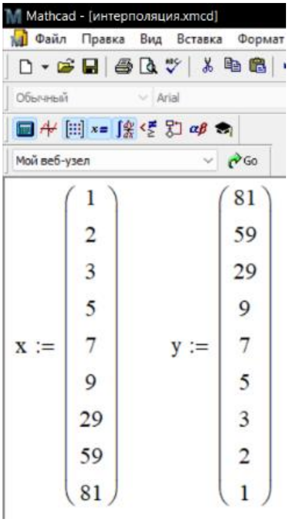


Рисунок 5. Задание табулированной функции в MathCAD.

Ниже зададим функции для трех видов сплайнов. Слева от оператора присваивания запишем название, а справа встроенную функцию в зависимости от того, какой вид spline-интерполяции используется. В качестве параметров передадим переменные x и y.

Переменной X зададим точки разбиения оси OX с шагом 0,1. Для этого после оператора присваивания вставим начальное значение, равное 0. Следующее значение будет равно сумме начального значения X и шага. Нажмем клавишу «;» и после появившегося знака многоточия впишем правую границу отрезка-.

Пусть переменная I обозначает количество заданных по условию точек (рис. 6).

```
Cspl_coeff := cspline(x , y)
Lspl_coeff := lspline(x , y)
Pspl_coeff := pspline(x , y)
X := 0 , 0.1 .. 100
  I := 1 .. 9
```

Рисунок 6. Создание переменных и функций в MathCAD.

С помощью вкладки «Вставка» или сочетания клавиш Shift+2 вставим график $X - Y$. В верхнем и нижнем углах левой грани графика впишем пределы отображения оси OY. В левом и правом углах нижней грани графки впишем пределы отображения оси OX.

Слева от графика по середине впишем переменную y. Нажмем на клавишу «[» и введем индекс I. Для перехода на новую строку нажмем клавишу «<». На этой строке впишем интерполяционную функцию $interp$. В качестве параметров передадим название используемой функции, переменную x, переменную y и точки разбиения X.

Аналогичным образом снизу графика впишем переменную x с индексом I и точки разбиения X.

График построен. Для наибольшей наглядности можно менять пределы отображения или, дважды щелкнув левой кнопкой мыши по графику, выбрать логарифмические оси (одну или обе), а также выбрать отображение линии красными точками, а не пунктиром (рис. 7).

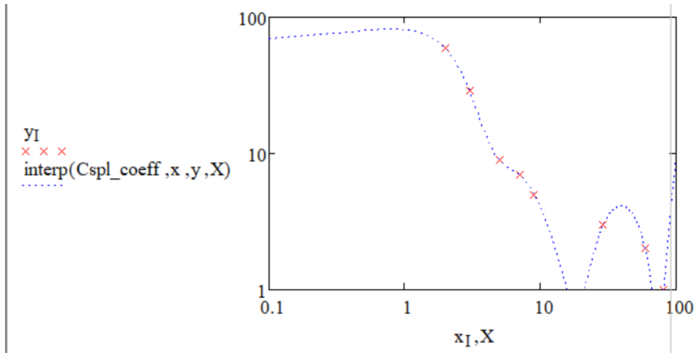


Рисунок 7. Графическое отображение интерполяции функции при помощи s-сплайна

Проверим правильность интерполяции, взяв любое число из отрезка ОХ и экстраполяцию, взяв любое число, но принадлежащее отрезку ОХ (рис. 8).

interp(Cspl_coeff ,x ,y ,19) = 0.793

interp(Cspl_coeff ,x ,y ,−3) = −486.534

Рисунок 8. Проверка результатов экстраполяции и интерполяции

Результаты вычисления показывают, что сплайн-интерполяция позволяет надежно оценивать значения табулированной функции в промежутках между узловыми точками. Чем дальше от конченых расположена такая точка, тем надежней результат сплайн-интерполяции (конечно, в предположении, что ф-я достаточно гладкая). При этом не важно, какие гипотезы касательно свойств функции в граничных точках использованы при конструировании сплайна. Экстраполяция же при помощи сплайнов дает неоднозначный результат, существенно зависящий от выбранного (s-, p- или l) типа. Следовательно, экстраполяция сплайнами справедлива исключительно при надежном знании свойств табулированной функции за пределами интервала известности.

Описанные выше действия проделаем с остальными видами spline-интерполяций. Результаты проделанной работы представлены на рисунках 9 и 10.

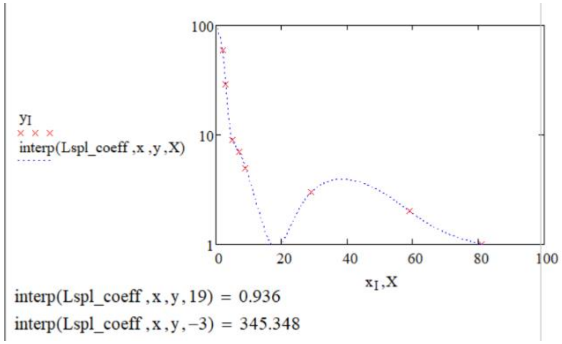


Рисунок 9. Графическое отображение интерполяции функции при помощи l-сплайна. Результаты интер- и экстраполяции

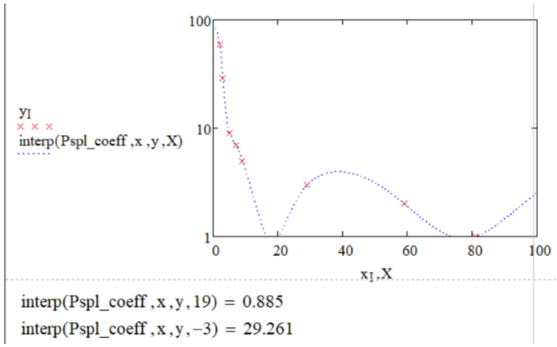


Рисунок 10. Графическое отображение интерполяции функции при помощи p-сплайна. Проверка результатов интер- и экстраполяции.

АППРОКСИМАЦИЯ

Аппроксимацией называется нахождение функции, которая была бы близка к заданной. Отличие аппроксимации от интерполяции заключается в том, что в последнем случае найденная функция должна строго проходить через узлы интерполяции. В случае же аппроксимации, это необязательно.

На практике широко распространены следующие виды аппроксимирующих функций:

1. линейная
2. квадратичная
3. кубическая

4. степенная
5. показательная
6. логарифмическая
7. гиперболическая
8. экспоненциальная

Рассмотрим применение каждой из них.

Ниже приведен пример решения задачи аппроксимации при помощи пакета Excel.

В ячейки $A3{:}A11$ запишем значения x из условия задачи, в ячейки $B3{:}B11$ — значения y (рис. 11).

	A	B
1		
2	**x**	**y**
3	1	81
4	2	59
5	3	29
6	5	9
7	7	7
8	9	5
9	29	3
10	59	2
11	81	1

Рисунок 11. Заполнение ячеек данными из условия задачи

Выделим диапазоны ячеек $A3{:}A11$ и $B3{:}B11$ и построим по этим значениям диаграмму. Для этого перейдем во вкладку «Вставка» и в разделе «Диаграмма» выберем точечный тип. Диаграмма для значений из условия задачи представлена на рисунке 12.

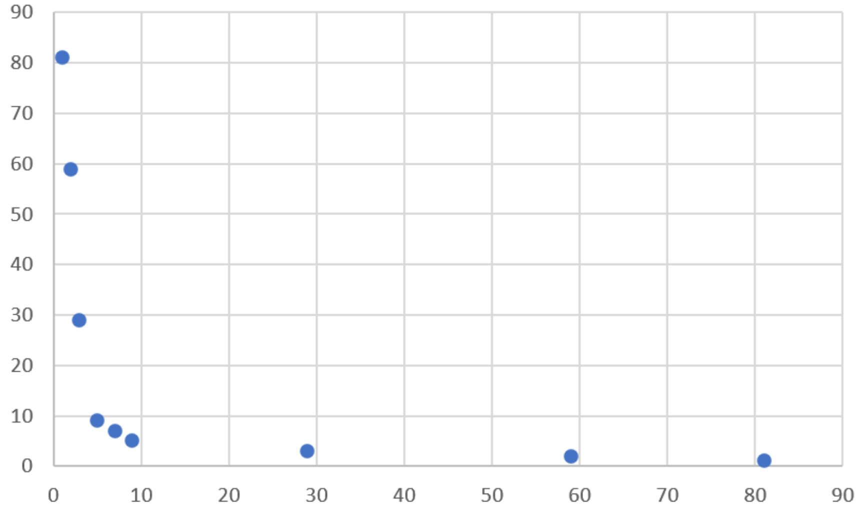


Рисунок 12. Диаграмма, построенная по значениям X и Y из условия задачи

Полученная диаграмма неинформативна. Чтобы увидеть характер зависимости величин x и y, поменяем форматы осей следующим образом: Формат области диаграммы >> Параметры диаграммы >> Формат оси (вертикальная/горизонтальная оси) >> Параметры оси >> Логарифмическая шкала. Результат проделанных действий представлен на рисунке 13.

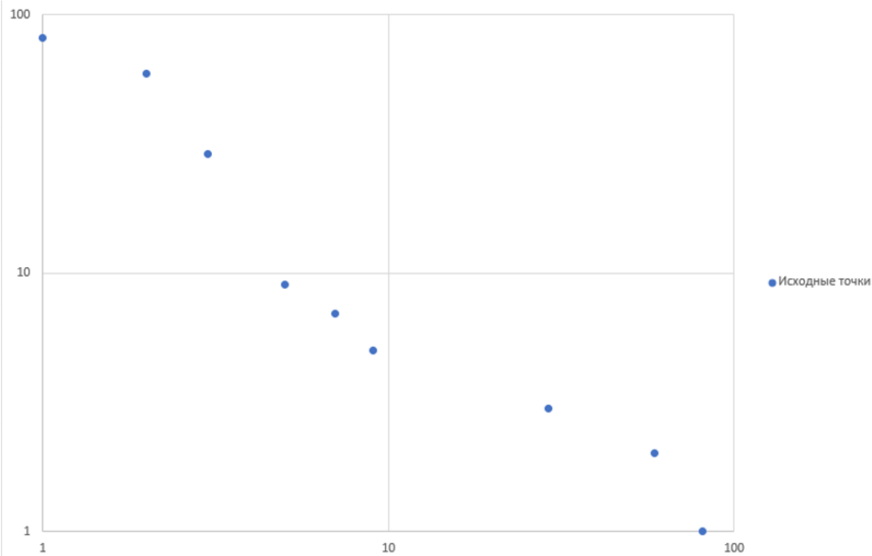


Рисунок 13. Преобразованная диаграмма

Далее выполняющему лабораторную работу предлагается перейти к теме, соответствующей виду аппроксимирующей функции, при помощи которой необходимо решить задачу аппроксимации.

Линейная регрессия

Уравнение регрессии для линейной функции имеет вид:

$$\hat{y} = ax + b \tag{1}$$

где значения коэффициентов a и b вычисляются следующим образом:

$$a = \frac{\sum x_i \sum y_i - n \sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2} \tag{2}$$

$$b = \frac{\sum x_i \sum x_i y_i - \sum x_i^2 \sum y_i}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2} \tag{3}$$

Для оценки точности апроксимации используются следующие величины:

Коэффициент линейной парной корреляции:

$$r_{xy} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)(n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2)}} \tag{4}$$

Средняя ошибка аппроксимации:

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right| \times 100\% \qquad (5)$$

В ячейки $C3{:}\,C11$ запишем квадраты соответствующих значений x. Для этого в ячейку $C3$ запишем формулу $= A3\hat{}2$. Далее наведем курсор на правый нижний угол ячейки $C3$ и выделим все ячейки до $C11$ включительно (рис. 14).

	A	B	C
1			
2	**x**	**y**	**x^2**
3	1	81	=A3^2
4	2	59	4
5	3	29	9
6	5	9	25
7	7	7	49
8	9	5	81
9	29	3	841
10	59	2	3481
11	81	1	6561

Рисунок 14. Правило заполнения ячеек C3:C11

В ячейки $D3{:}\,D11$ запишем квадраты соответствующих значений y. Для этого в ячейку $D3$ запишем формулу $= B3\hat{}2$ (рис. 15). Здесь и далее будем распространять все формулы в соответствующих диапазонах ячеек так, как описано выше.

	A	B	C	D
1				
2	**x**	**y**	**x^2**	**y^2**
3	1	81	1	=B3^2
4	2	59	4	3481
5	3	29	9	841
6	5	9	25	81
7	7	7	49	49
8	9	5	81	25
9	29	3	841	9
10	59	2	3481	4
11	81	1	6561	1

Рисунок 15. Правило заполнения ячеек D3:D11

В ячейки $E3{:}E11$ запишем произведения соответствующих значений x и y. Для этого в ячейку $E3$ запишем формулу $= A3 * B3$ и распространим её по всему диапазону $E3{:}E11$ (рис. 16).

	A	B	C	D	E
1					
2	**x**	**y**	**x^2**	**y^2**	**x*y**
3	1	81	1	6561	=A3*B3
4	2	59	4	3481	118
5	3	29	9	841	87
6	5	9	25	81	45
7	7	7	49	49	49
8	9	5	81	25	45
9	29	3	841	9	87
10	59	2	3481	4	118
11	81	1	6561	1	81

Рисунок 16. Правило заполнения ячеек E3:E11

В ячейки $F3$, $G3$, $H3$, $I3$, $J3$ запишем суммы значений x, y, xy, x^2 и y^2 соответственно. Для этого в названные ячейки запишем формулы (рис. 17):

$$F3 = \text{СУММ}\ (A3{:}A11)$$

$$G3 = \text{СУММ}\ (B3{:}\,A11)$$
$$H3 = \text{СУММ}\ (E3{:}\,E11)$$
$$I3 = \text{СУММ}\ (C3{:}\,C11)$$
$$J3 = \text{СУММ}\ (D3{:}\,D11)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1						Линейная регрессия				
2	x	y	x^2	y^2	x*y	Сумма X	Сумма Y	Сумма X*Y	Сумма X^2	Сумма Y^2
3	1	81	1	6561	81	196	196	711	11052	11052
4	2	59	4	3481	118					
5	3	29	9	841	87					
6	5	9	25	81	45					
7	7	7	49	49	49					
8	9	5	81	25	45					
9	29	3	841	9	87					
10	59	2	3481	4	118					
11	81	1	6561	1	81					

Рисунок 17. Вычисленные суммы значений $x,\ y,\ xy,\ x^2$ и y^2

В ячейки $F5$ и $G5$ запишем соответсвенно квадраты сумм значений x и y, полученных в ячейках $F3$ и $G3$ (рис. 18):

$$F5 = F3\text{^}2$$
$$G5 = G3\text{^}2$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1						Линейная регрессия				
2	x	y	x^2	y^2	x*y	Сумма X	Сумма Y	Сумма X*Y	Сумма X^2	Сумма Y^2
3	1	81	1	6561	81	196	196	711	11052	11052
4	2	59	4	3481	118	(Сумма X)^2	(Сумма Y)^2			
5	3	29	9	841	87	38416	38416			
6	5	9	25	81	45					
7	7	7	49	49	49					
8	9	5	81	25	45					
9	29	3	841	9	87					
10	59	2	3481	4	118					
11	81	1	6561	1	81					

Рисунок 18. Вычисленные квадраты сумм значений x и y

В ячейку $K3$ запишем формулу (2) для расчёта коэффициента a при $n = 9$ (значение n соответсвует количеству узлов аппроксимации) (рис. 19):

$$= (F3 * G3\ -\ 9 * H3)/(F5\ -\ 9 * I3)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1							Линейная регрессия				
2	x	y	x^2	y^2	x*y	Сумма X	Сумма Y	Сумма X*Y	Сумма X^2	Сумма Y^2	Коэффициент А
3	1	81	1	6561	81	196	196	711	11052	11052	=(F3*G3-9*H3)/(F5-9*I3)
4	2	59	4	3481	118	(Сумма X)^2	(Сумма Y)^2				
5	3	29	9	841	87	38416	38416				
6	5	9	25	81	45						
7	7	7	49	49	49						
8	9	5	81	25	45						
9	29	3	841	9	87						
10	59	2	3481	4	118						
11	81	1	6561	1	81						

Рисунок 19. Вычисление коэффициента а

В ячейку $L3$ запишем формулу (3) для расчёта коэффициента b при $n = 9$ (рис. 20):

$$= (F3 * H3 \ - \ I3 * G3)/(F5 \ - \ 9 * I3)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1							Линейная регрессия					
2	x	y	x^2	y^2	x*y	Сумма X	Сумма Y	Сумма X*Y	Сумма X^2	Сумма Y^2	Коэффициент A	Коэффициент B
3	1	81	1	6561	81	196	196	711	11052	11052	-0,524421804	=(F3*H3-I3*G3)/(F5-9*I3)
4	2	59	4	3481	118	(Сумма X)^2	(Сумма Y)^2					
5	3	29	9	841	87	38416	38416					
6	5	9	25	81	45							
7	7	7	49	49	49							
8	9	5	81	25	45							
9	29	3	841	9	87							
10	59	2	3481	4	118							
11	81	1	6561	1	81							

Рисунок 20. Вычисление коэффициента b

В ячейки $M3\colon M90$ запишем новые значения переменной x с шагом 1, начиная с единицы. Для этого в ячейке $M3$ напишем «1», в $M4$ — «2», после чего выделим обе ячейки, наведём курсор на правый нижний угол ячейки $M4$ и выделим все ячейки до $M90$ включительно.

В ячейки $N3\colon N90$ запишем новые значения переменной y, подставляя значения x в уравнение линейной регрессии (1) с учётом вычисленных ранее значений коэффициентов a и b. Результат проделанных действий представлен на рисунке 21.

K	L	M	N
Коэффициент A	Коэффициент B	X.лин	Y.лин
-0,524421804	33,1985193	0	`=$K$3*M3+$L$3`
		1	32,67409749
		2	32,14967569
		3	31,62525388
		4	31,10083208
		5	30,57641027
		6	30,05198847
		7	29,52756666
		8	29,00314486
		9	28,47872306
		10	27,95430125
		11	27,42987945
		12	26,90545764
		13	26,38103584
		14	25,85661403
		15	25,33219223
		16	24,80777043
		17	24,28334862
		18	23,75892682
		19	23,23450501
		20	22,71008321

Рисунок 21. Аппроксимированные значения y

Добавим новые значения на диаграмму следующим образом: Фильтры диаграммы >> Выбрать данные >> Добавить.

В качестве имени ряда введем название аппроксимирующей функции. В поле значений x введём диапазон ячеек $M3:M90$, в поле значений y — $N3:N90$.

Добавим на диаграмму линию тренда. Для этого нажмем правой кнопкой мыши по графику, отображающему узлы аппроксимации. В появившемся списке выберем пункт «Добавить линию тренда». В качестве типа выберем линейный. В низу меню выберем пункты «Показывать уравнение на диаграмме» и «Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)»

Получившийся график представлен на рисунке 22.

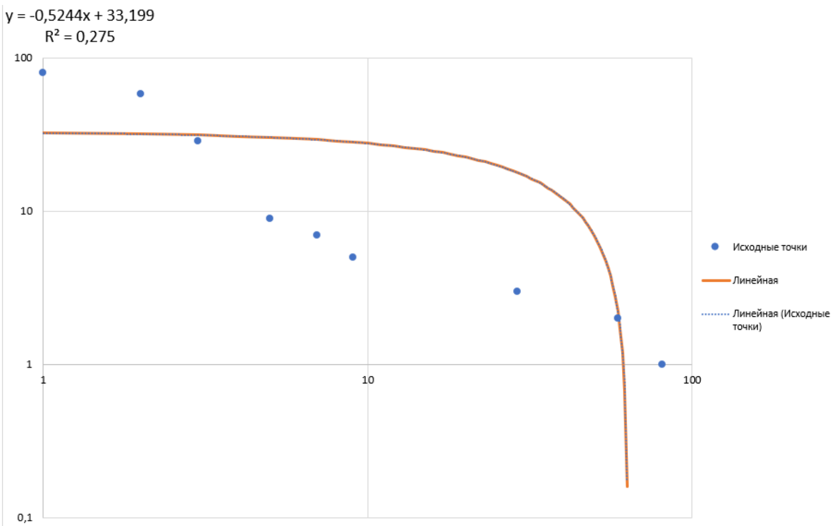


Рисунок 22. График аппроксимирующей функции, узлов аппроксимации и их линии тренда

Для нахождения коэффициента парной корреляции запишем формулу (4) в ячейку $P3$ (рис. 23):

$$= (9 * I3 - G3 * H3)/\text{КОРЕНЬ}\left((9 * J3 - G5) * (9 * K3 - H5)\right)$$

	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Линейная регрессия									
2	Сумма X	Сумма Y	Сумма X*Y	Сумма X^2	Сумма Y^2	Коэффициент A	Коэффициент B	X.лин	Y.лин	r.xy
3	196	196	711	11052	11052	-0,524421804	33,1985193	0	33,1985193	=(9*I3-G3*H3)/КОРЕНЬ((9*J3-G5)*(9*K3-H5))
4	(Сумма X)^2	(Сумма Y)^2						1	32,67409749	
5	38416	38416						2	32,14967569	

Рисунок 23. Вычисление коэффициента парной корреляции

Полученное значение коэффициента парной корреляции равно $-0{,}5244$.

Как можно видеть по рисунку 22 и полученному коэффициенту парной корреляции, использование уравнения линейной регрессии для аппроксимации данных по условию значений неправомочно.

Вставим новый столбик C. В него впишем значения y, вычисленные по формуле кубической регрессии только для тех значений x, которые были даны по условию.

В ячейки $Q3{:}\,Q11$ запишем модуль частного, в знаменателе которого будет находиться соответствующее значение y, а в числителе разность этого же значения y и соответствующее значение y из тех, что были только что рассчитаны. Для этого в ячейке $Q3$ запишем следующую формулу:

$$= ABS\left((B3\ -\ C3)/B3\right)$$

и распространим ее по всему указанному диапазону.

В ячейку $R3$ запишем формулу средней ошибки аппроксимации (5) при $n = 9$:

$$= 1/9 * \text{СУММ}\ (Q3{:}\,Q11)$$

Переведя ячейку $R3$ в процентный формат, получим среднюю ошибку аппроксимации для наших данных (рис. 24).

Q	R
ABS(y-y.лин)/y	Средняя ошибка
0,59661608	298,43%
0,455090243	
0,090525996	
2,397378919	
3,218223809	
4,695744611	
4,996762323	
0,128816419	
10,27964686	

Рисунок 24. Значение средней ошибки аппроксимации

Средняя ошибка аппроксимации равна 298,43%. Это означает, что аппроксимированные значения y сильно отличаются от фактических. Т.е., полученное значение среденей ошибки аппроксимации подтвердило вывод о том, что при данных условиях уравнение линейной регрессии не подходит для решения задачи аппроксимации.

Квадратичная регрессия

Уравнение регрессии для квадратичной функции имеет вид:

$$\hat{y} = ax^2 + bx + c \tag{6}$$

где значения для коэффициентов вычисляются следующим образом:

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i + nc = \sum y_i \\ a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i \end{cases} \tag{7}$$

Для оценки точности аппроксимации используются следующие величины:

Коэффициент корреляции:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}} \tag{8}$$

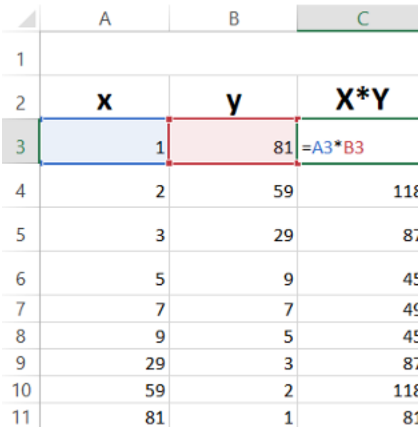
где

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i \tag{9}$$

Средняя ошибка аппроксимации:

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum \left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right| * 100\% \tag{10}$$

В ячейки $C3{:}C11$ запишем произведения соответствующих значений x и y. (рис. 25)



	A	B	C
1			
2	x	y	X*Y
3	1	81	=A3*B3
4	2	59	118
5	3	29	87
6	5	9	45
7	7	7	49
8	9	5	45
9	29	3	87
10	59	2	118
11	81	1	81

Рисунок 25. Правило заполнения ячеек C3:C11

Запишем в ячейки $D3{:}D11$, $E3{:}E11$, $F3{:}F11$, значения x^2, x^3 и x^4 соответственно (рис. 26). В ячейках $G3{:}G11$ запишем произведения соответствующих значений x^2 и y (рис. 27).

	A	B	C	D
1	Квадратичная			
2	x	y	X*Y	X^2
3	1	81	81	=A3^2
4	2	59	118	4
5	3	29	87	9
6	5	9	45	25
7	7	7	49	49
8	9	5	45	81
9	29	3	87	841
10	59	2	118	3481
11	81	1	81	6561

Рисунок 26. Правило заполнения ячеек D3:D11

	A	B	C	D	E	F	G
1	Квадратичная регрессия						
2	x	y	X*Y	X^2	X^3	X^4	X^2*Y
3	1	81	81	1	1	1	=D3*B3
4	2	59	118	4	8	16	236
5	3	29	87	9	27	81	261
6	5	9	45	25	125	625	225
7	7	7	49	49	343	2401	343
8	9	5	45	81	729	6561	405
9	29	3	87	841	24389	707281	2523
10	59	2	118	3481	205379	12117361	6962
11	81	1	81	6561	531441	43046721	6561

Рисунок 27. Правило заполнения ячеек G3:G11

В ячейках $H3{:}\,N3$ запишем соответственно суммы значений столбцов $A3{:}\,A11$, $B3{:}\,B11$, …, $G3{:}\,G11$ (рис. 28).

H	I	J	K	L	M	N
Сумма X	Сумма Y	Сумма X*Y	Сумма X^2	Сумма X^3	Сумма X^4	Сумма X^2*Y
196	196	711	11052	762442	55881048	17597

Рисунок 28. Суммы значений столбцов A3:A11, B3:B11,…,G3:G11

Построим в ячейках $O3{:}\,Q5$ матрицу следующего вида:

$$M = \begin{pmatrix} \sum x^2 & \sum x & n \\ \sum x^3 & \sum x^2 & \sum x \\ \sum x^4 & \sum x^3 & \sum x^2 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Для получения обратной матрицы введём в ячейку $R3$ следующую формулу:

$$= \text{МОБР}\ (O3\!:Q5).$$

и нажмем сочетание клавиш Ctrl+Shift+Enter.

Полученная матрица займёт ячейки $R3\!:T5$ (рис. 29).

O	P	Q	R	S	T
Матрица			**Обратная матрица**		
11052	196	9	=МОБР(O3:Q5)		4,58984E-07
762442	11052	196	-0,01899	0,002863	-3,53025E-05
55881048	762442	11052	0,272746	-0,01899	0,000205178

Рисунок 30. Построение матрицы вида (11) и матрицы, обратной ей

Заполним ячейки $U3\!:U5$ формулами

$$= \text{СУММ}\ (B3\!:B11)$$
$$= \text{СУММ}\ (C3\!:C11)$$
$$= \text{СУММ}\ (J3\!:J11)$$

соответственно.

Чтобы найти коэффициенты a, b и c, введём в ячейку $W3$ следующую формулу:

$$= \text{МУМНОЖ}\ (O3\!:Q5; U3\!:U5\ )$$

Полученная матрица-столбец, содержащая искомые значения, займёт ячейки $W3\!:W5$ (рис. 31).

R	S	T	U	V	W
Обратная матрица			**X^i*Y**	**Коэффициенты**	
0,000205	-3,5E-05	4,58984E-07	196	**A**	=МУМНОЖ(R3:T5;U3:U5)
-0,01899	0,002863	-3,53025E-05	711	**B**	-2,308192905
0,272746	-0,01899	0,000205178	17597	**C**	43,56580444

Рисунок 31. Вычисление коэффициентов a, b, и c

В ячейки $X3\!:\!X90$ запишем новые значения переменной x с шагом 1, начиная с единицы. Для этого в ячейке $X3$ напишем «1», в $X4$ — «2», после чего выделим обе ячейки, наведём курсор на правый нижний угол ячейки $X4$ и выделим все ячейки до $X90$ включительно.

В ячейки $Y3\!:\!Y90$ запишем новые значения переменной y, подставляя значения x в уравнение квадратичной регрессии (6) с учётом вычисленных ранее значений a, b и c. Результат представлен на рисунке 32.

V	W	X	Y
Коэффициенты		**Xк**	**Yк**
A	0,023191601	1	41,28080314
B	-2,308192905	2	=$W$3*X4^2+$W$4*X4+$W$5
C	43,56580444	3	36,84995013
		4	34,70409843
		5	32,60462993
		6	30,55154463
		7	28,54484253
		8	26,58452364
		9	24,67058794
		10	22,80303545

Рисунок 32. Аппроксимированные значения y

Добавим новые значения на диаграмму следующим образом: Фильтры диаграммы >> Выбрать данные >> Добавить.

В качестве имени ряда введем название аппроксимирующей функции. В поле значений x введём диапазон ячеек $X3\!:\!X90$, в поле значений y — $Y3\!:\!Y90$.

Добавим на диаграмму линию тренда. Для этого нажмем правой кнопкой мыши по графику, отображающему узлы аппроксимации. В появившемся списке выберем пункт «Добавить линию тренда». В качестве типа выберем полиномиальный 2-й степени. В низу меню выберем пункты «Показывать уравнение на диаграмме» и «Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)»

Получившийся график представлен на рисунке 33.

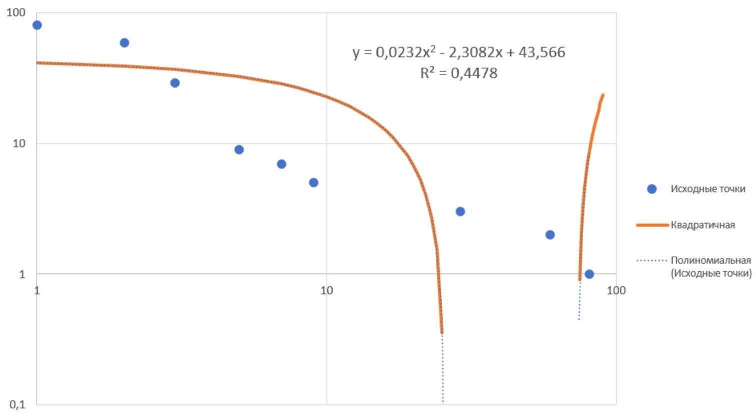


Рисунок 33. График аппроксимирующей функции, узлов аппроксимации и их линии тренда

Вставим новый столбик C. В него впишем значения y, вычисленные по формуле кубической регрессии только для тех значений x, которые были даны по условию.

В ячейках AA3:AA11 запишем квадраты разности соответствующих данных по условию значений y и тех, что были только что расчитаны. Для этого в ячейку AA3 запишем формулу

$$= (B3 - C3)^2$$

и распространим ее в указанном диапазоне.

В ячейках AB3:AB11 запишем квадрат разности данных по условию значений y и суммы этих же значений, деленной на n (равное 9 в нашем случае). Для этого в ячейку AB3 запишем формулу

$$= (B3 - \$J\$3/9)^2$$

и распространим ее в указанном диапазоне.

Для нахождения коэффициента парной корреляции в ячейку AC3 запишем формулу (8) (рис. 34) :

=КОРЕНЬ(1-СУММ(AA3:AA11)/СУММ(AB3:AB11))

AA	AB	AC
(Y-Y.куб)^2	(Y-1/n(сумм y))^2	r.xy
1577,6146	3507,271605	=КОРЕНЬ(1-СУММ(AA3:AA11)/СУММ(AB3:AB11))
398,3143783	1385,493827	
61,62171705	52,16049383	
557,1785541	163,2716049	
464,1802398	218,382716	
386,93203	281,4938272	
47,16466775	352,6049383	
192,8658614	391,1604938	
60,25284209	431,7160494	

Рисунок 34. Вычисление коэффициента парной корреляции

Полученное значение коэффициента парной корреляции равно $0{,}669151558$.

Как можно видеть по рисунку 33 и полученному коэффициенту парной корреляции, использование уравнения квадратичной регрессии не подходит для решения задачи аппроксимации.

В ячейки $AD3{:}ADD11$ запишем модуль частного, в знаменателе которого будет стоять соответствующее значение y, а в числителе разность этого же значения y соответствующего значения y из тех, что были только что рассчитаны. Для этого в ячейке $AD3$ запишем следующую формулу:

$$= ABS\left((B3\ -\ C3)/B3\right)$$

и распространим ее по всему указанному диапазону.

В ячейку $AE3$ запишем формулу средней ошибки аппроксимации (10) при $n = 9$:

$$= 1/9 * \text{СУММ}\ (AD3{:}AD11)$$

Переведя ячейку AE в процентный формат, получим среднюю ошибку аппроксимации для наших данных (рис. 35).

AD	AE
ABS(y-y.куб)/y	**Средняя ошибка**
0,490360455	308,10%
0,33826805	
0,270687936	
2,622736659	
3,077834648	
3,934117588	
2,28921791	
6,943807698	
7,762270421	

Рисунок 35. Значение средней ошибки аппроксимации

Средняя ошибка аппроксимации равна 308,10%. Это означает, что аппроксимированные значения y сильно отличаются от фактических. Т.е., значение средней ошибки подтвердило вывод о том, что при данных условиях уравнение квадратичной регресии не подходит для решения задачи аппроксимации.

Кубическая регрессия

Уравнение регрессии для кубической функции имеет вид:

$$\hat{y} = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{12}$$

где значения коэффициентов a, b, c и d вычисляются следующим образом:

$$\begin{cases} a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i + nd = \sum y_i \\ a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 + d\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i^5 + b\sum x_i^4 + c\sum x_i^3 + d\sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i \\ a\sum x_i^6 + b\sum x_i^5 + c\sum x_i^4 + d\sum x_i^3 = \sum x_i^3 y_i \end{cases} \tag{13}$$

Для вычисления коэффициента корреляции и средней ошибки аппроксимации используются формулы (8)-(10) из темы «Квадратичная регрессия».

В ячейки $C3:C11$ запишем произведения соответствующих значений x и y (рис. 36).

	A	B	C
1			
2	**x**	**y**	**X*Y**
3	1	81	=A3*B3
4	2	59	118
5	3	29	87
6	5	9	45
7	7	7	49
8	9	5	45
9	29	3	87
10	59	2	118
11	81	1	81

Рисунок 36. Правило заполнения ячеек $C3:C11$

Запишем в диапазоны $D3:D11$, $E3:E11$, $F3:F11$, $G3:G11$, $H3:H11$ соответственно значения x^2, x^3, x^4, x^5 и x^6 (рис. 37 и рис. 38).

	A	B	C	D
1				
2	**x**	**y**	**X*Y**	**X^2**
3	1	81	81	=A3^2
4	2	59	118	4
5	3	29	87	9
6	5	9	45	25
7	7	7	49	49
8	9	5	45	81
9	29	3	87	841
10	59	2	118	3481
11	81	1	81	6561

Рисунок 37. Правило заполнения ячеек $D3:D11$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Кубическая регрессия							
2	x	y	X*Y	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6
3	1	81	81	1	1	1	1	=A3^6
4	2	59	118	4	8	16	32	64
5	3	29	87	9	27	81	243	729
6	5	9	45	25	125	625	3125	15625
7	7	7	49	49	343	2401	16807	117649
8	9	5	45	81	729	6561	59049	531441
9	29	3	87	841	24389	707281	20511149	594823321
10	59	2	118	3481	205379	12117361	714924299	42180533641
11	81	1	81	6561	531441	43046721	3486784401	2,8243E+11

Рисунок 38. Правило заполнения ячеек $H3:H11$

В диапазонах $I3:I11$, $J3:J11$ запишем значения x^2y и x^3y соответственно (рис. 39 и рис. 40).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Кубическая регрессия								
2	x	y	X*Y	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6	X^2*Y
3	1	81	81	1	1	1	1	1	=D3*B3
4	2	59	118	4	8	16	32	64	236
5	3	29	87	9	27	81	243	729	261
6	5	9	45	25	125	625	3125	15625	225
7	7	7	49	49	343	2401	16807	117649	343
8	9	5	45	81	729	6561	59049	531441	405
9	29	3	87	841	24389	707281	20511149	594823321	2523
10	59	2	118	3481	205379	12117361	714924299	42180533641	6962
11	81	1	81	6561	531441	43046721	3486784401	2,8243E+11	6561

Рисунок 39. Правило заполнения ячеек $I3:I11$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Кубическая регрессия									
2	x	y	X*Y	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6	X^2*Y	X^3*Y
3	1	81	81	1	1	1	1	1	81	=E3*B3
4	2	59	118	4	8	16	32	64	236	472
5	3	29	87	9	27	81	243	729	261	783
6	5	9	45	25	125	625	3125	15625	225	1125
7	7	7	49	49	343	2401	16807	117649	343	2401
8	9	5	45	81	729	6561	59049	531441	405	3645
9	29	3	87	841	24389	707281	20511149	594823321	2523	73167
10	59	2	118	3481	205379	12117361	714924299	42180533641	6962	410758
11	81	1	81	6561	531441	43046721	3486784401	2,8243E+11	6561	531441

Рисунок 40. Правило заполнения ячеек $J3:J11$

В ячейках $L3:U3$ запишем соответственно суммы значений столбцов $A3:A11$, $B3:B11$, …, $J3:J11$ (рис. 41).

L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
Сумма X	Сумма Y	Сумма X*Y	Сумма X^2	Сумма X^3	Сумма X^4	Сумма X^5	Сумма X^6	Сумма X^2*Y	Сумма X^3*Y
196	196	711	11052	762442	55881048	4222299106	3,25206E+11	17597	1023873

Рисунок 41. Суммы значений $x, y, xy, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^2y$ и x^3y

Построим в ячейках $V3{:}Y6$ матрицу следующего вида:

$$M = \begin{pmatrix} \sum x^3 & \sum x^2 & \sum x & n \\ \sum x^4 & \sum x^3 & \sum x^2 & \sum x \\ \sum x^5 & \sum x^4 & \sum x^3 & \sum x^2 \\ \sum x^6 & \sum x^5 & \sum x^4 & \sum x^3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Для получения обратной матрицы введём в ячейку $Z3$ следующую формулу:

$$= \text{МОБР}\ (V3{:}Y6)$$

и нажмем сочетание клавиш Ctrl+Shift+Enter.

Полученная матрица займёт ячейки $Z3{:}AC6$ (рис. 42).

V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
Матрица				**Обратная матрица**			
762442	11052	196	9	=МОБР(V3:Y6)	3,74E-06	-1,3E-07	1,04819E-0
55881048	762442	11052	196	0,001864091	-0,00049	1,6E-05	-1,27525E-0
4,22E+09	55881048	762442	11052	-0,067636664	0,016203	-0,00049	3,73947E-0
3,25E+11	4,22E+09	55881048	762442	0,450124375	-0,06764	0,001864	-1,36355E-0

Рисунок 42. Матрица вида (14) и матрица, обратная ей

Заполняем ячейки $AD3{:}AD6$ соответственно формулами:

$$= \text{СУММ}\ (B3{:}B11)$$
$$= \text{СУММ}\ (D3{:}D11)$$
$$= \text{СУММ}\ (J3{:}J11)$$
$$= \text{СУММ}\ (K3{:}K11)$$

Чтобы найти коэффициенты a, b, c, и d введём в ячейку $AF3$ следующую формулу:

$$= \text{МУМНОЖ}\ (Z3: AC6; AD3: AD6\ )$$

и нажмем сочетание клавиш Ctrl+Shift+Enter.

Полученная матрица-столбец, содержащая искомые значения, займёт ячейки $AF3: AF6$ (рис. 43).

Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF
Обратная матрица				**X^i*Y**	**Коэффициенты**	
-1,36355E-05	3,74E-06	-1,3E-07	1,04819E-09	196	**A**	=МУМНОЖ(Z3:AC6;AD3:AD6)
0,001864091	-0,00049	1,6E-05	-1,27525E-07	711	**B**	0,167315223
-0,067636664	0,016203	-0,00049	3,73947E-06	17597	**C**	-6,534398554
0,450124375	-0,06764	0,001864	-1,36355E-05	1023873	**D**	58,97611348

Рисунок 43. Вычисление коэффициентов a, b, c, и d

В ячейки $AG3: AG90$ запишем новые значения переменной x с шагом 1, начиная с единицы. Для этого в ячейке $AG3$ напишем «1», в $AG4$ — «2», после чего выделим обе ячейки, наведём курсор на правый нижний угол ячейки $AG4$ и выделим все ячейки до $AG90$ включительно.

В ячейки $AH3: AH90$ запишем новые значения переменной y, подставляя значения x в уравнение кубической регрессии (12) с учётом вычисленных ранее значений a, b, c и d. Результат представлен на рисунке 44.

AE	AF	AG	AH
Коэффициенты		**Xк**	**Yк**
A	-0,001184629	1	=$AF$3*AG3^3+$AF$4*AG3^2+$AF$5*AG3+AF
B	0,167315223	2	46,56710023
C	-6,534398554	3	40,84676985
D	58,97611348	4	35,43974659
		5	30,33892269
		6	25,53719037
		7	21,02744185
		8	16,80256938
		9	12,85546517

Рисунок 44. Аппроксимированные значения y

Добавим новые значения на диаграмму следующим образом: Фильтры диаграммы >> Выбрать данные >> Добавить.

В качестве имени ряда введем название аппроксимирующей функции. В поле значений x введём диапазон ячеек $AG3{:}\,AG90$, в поле значений y — $AH3{:}\,AH90$.

Добавим на диаграмму линию тренда. Для этого нажмем правой кнопкой мыши по графику, отображающему узлы аппроксимаци. В появившемся списке выберем пункт «Добавить линию тренда». В качестве типа выберем полиномиальный степени 3. В низу меню выберем пункты «Показывать уравнение на диаграмме» и «Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)»

Получившийся график представлен на рисунке 45.

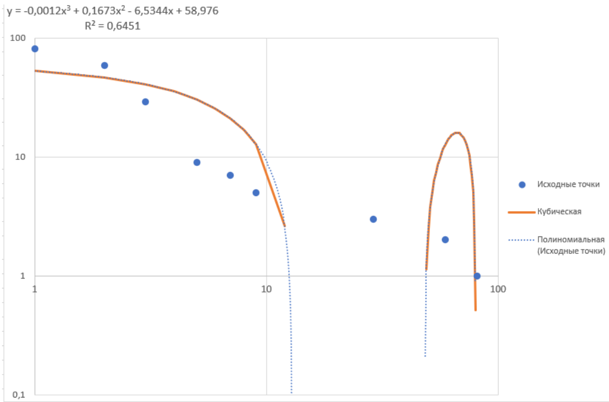


Рисунок 45. График аппроксимирующей функции, узлов аппроксимации и их линии тренда

Вставим новый столбик C. В него впишем значения y, вычисленные по формуле кубической регрессии только для тех значений x, которые были даны по условию.

В ячейках $AI3{:}\,AI11$ запишем квадраты разности соответствующих данных по условию значений y и тех, что были только что расчитаны. Для этого в ячейку AA3 запишем формулу

$$=(B3-C3)\hat{}2$$

и распространим ее в указанном диапазоне.

В ячейках $AJ3{:}AJ11$ запишем квадрат разности данных по условию значений y и суммы этих же значений, деленной на n (равное 9 в нашем случае). Для этого в ячейку $AJ3$ запишем формулу

$$=(B3-\$M\$3/9)\text{^}2$$

и распространим ее в указанном диапазоне.

Для нахождения коэффициента парной корреляции в ячейку АС3 запишем формулу (8) (рис. 46):

$$=\text{КОРЕНЬ}(1-\text{СУММ}(AA3{:}AA11)/\text{СУММ}(AB3{:}AB11))$$

AI	AJ	AK
(Y-Y.куб)^2	(Y-1/n(сумм y))^2	r.xy
806,1144361	3507,271605	=КОРЕНЬ(1-СУММ(AI3:AI11)/СУММ(AJ3:AJ11))
154,5769966	1385,493827	
140,3459558	52,16049383	
455,3496214	163,2716049	
196,769125	218,382716	
61,70833303	281,4938272	
470,9444135	352,6049383	
111,7885908	391,1604938	
9,705118769	431,7160494	

Рисунок 46. Вычисление коэффициента парной корреляции

Полученное значение коэффициента парной корреляции равно $0{,}803197811$.

Как можно видеть по рисунку 45 и полученному коэффициенту парной корреляции, использование уравнения кубической регрессии для решения задачи аппроксимации с данными условиями неуместно.

В ячейки $AL3{:}AL11$ запишем модуль частного, в знаменателе которого будет соответствующее значение y, данное по условию, а числителе разность этого же значения y и значения y из тех, что были только что рассчитаны. Для этого в ячейке $AL3$ запишем следующую формулу:

$$=ABS\left((B3\ -\ C3)/B3\right)$$

и распространим ее по всему указанному диапазону.

В ячейку $AM3$ запишем формулу средней ошибки аппроксимации (10) при $n = 9$:

$$= 1/9 * \text{СУММ}\,(AL3: AL11)$$

Переведя ячейку $AM3$ в процентный формат, получим среднюю ошибку аппроксимации для наших данных (рис. 47).

AL	AM
ABS(y-y.куб)/y	**Средняя ошибка**
0,350520426	250,57%
0,210727115	
0,408509305	
2,37099141	
2,003920265	
1,571093034	
7,233751244	
5,286506191	
3,115303961	

Рисунок 47. Значение средней ошибки аппроксимации

Средняя ошибка аппроксимации равна 250,57%. Это значит, что аппроксимированные значения y сильно отличаются от фактических. Т.е., полученное значение средeней ошибки аппроксимации подтвердило вывод о том, что при данных условиях уравнение кубической регрессии не подходит для решения задачи аппроксимации.

Степенная регрессия

Уравнение регрессии для степенной функции имеет вид:

$$\hat{y} = ax^b \tag{15}$$

где значения коэффициентов a и b вычисляются следующим образом:

$$a = \exp\left(\frac{1}{n}\sum lny_i - \frac{b}{n}\sum lnx_i\right) \tag{16}$$

$$b = \frac{n\sum(lnx_i * lny_i) - \sum lnx_i * \sum lny_i}{n\sum ln^2x_i - (\sum lnx_i)^2} \tag{17}$$

Для вычисления коэффициента парной корреляции и средней ошибки аппроксимации используются формулы (8)-(10) из темы «Квадратичная регрессия».

В ячейки $C3{:}C11$ запишем натуральные логарифмы соответствующих значений x. Для этого в ячейке $C3$ запишем формулу $=\mathrm{LN}\,(A3)$ и распространим ее в указанном диапазоне.

Аналогичным образом в ячейки $D3{:}D11$ запишем натуральные логарифмы соответствующих значений y, применяя формулу $=\mathrm{LN}\,(B3)$ к ячейке $D3$ и распространяя её на весь указанный диапазон.

В ячейки $E3{:}E11$ запишем произведения соответствующих натуральных логарифмов значений x и y. Для этого в ячейку $E3$ запишем формулу $=\mathrm{LN}\,(A3)*\mathrm{LN}\,(B3)$ и распространим ее в указанном диапазоне (рис. 48).

	A	B	C	D	E
1					
2	**x**	**y**	**Lnx**	**Lny**	**Lnx*Lny**
3	1	81	0	4,394449	=C3*D3
4	2	59	0,693147	4,077537	2,826333583
5	3	29	1,098612	3,367296	3,699352578
6	5	9	1,609438	2,197225	3,536296537
7	7	7	1,94591	1,94591	3,786566308
8	9	5	2,197225	1,609438	3,536296537
9	29	3	3,367296	1,098612	3,699352578
10	59	2	4,077537	0,693147	2,826333583
11	81	1	4,394449	0	0

Рисунок 48. Правило заполнения ячеек $E3{:}E11$

В ячейки $F3{:}F11$ запишем квадраты натуральных логарифмов соответствующих значений x. В ячейку $F3$ запишем формулу $=\mathrm{LN}\,(A3)\,\hat{}\,2$ и распространим ее в указанном диапазоне (рис. 49).

	A	B	C	D	E	F
1						
2	x	y	Lnx	Lny	Lnx*Lny	Ln^2 x
3	1	81	0	4,394449	0	=LN(A3)^2
4	2	59	0,693147	4,077537	2,826333583	0,480453
5	3	29	1,098612	3,367296	3,699352578	1,206949
6	5	9	1,609438	2,197225	3,536296537	2,5902904
7	7	7	1,94591	1,94591	3,786566308	3,7865663
8	9	5	2,197225	1,609438	3,536296537	4,8277958
9	29	3	3,367296	1,098612	3,699352578	11,338681
10	59	2	4,077537	0,693147	2,826333583	16,626312
11	81	1	4,394449	0	0	19,311183

Рисунок 49. Правило заполнения ячеек $F3:F11$

В ячейки $G3$, $H3$, $I3$ и $J3$ соответсвенно запишем суммы получившихся значений $\ln x$, $\ln y$, $\ln x \times \ln y$ и $\ln^2 x$ (рис. 50):

$$G3 = \text{СУММ}\ (C3:C11)$$
$$H3 = \text{СУММ}\ (D3:D11)$$
$$I3 = \text{СУММ}\ (E3:E11)$$
$$J3 = \text{СУММ}\ (F3:F11)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1							Степенная регрессия			
2	x	y	Lnx	Lny	Lnx*Lny	Ln^2 x	Сумма Lnx	Сумма Ln y	Сумма Lnx*Lny	Сумма Ln^2 x
3	1	81	0	4,394449	0	0	19,38361454	19,38361454	23,9105317	60,16823071
4	2	59	0,693147	4,077537	2,826333583	0,480453				
5	3	29	1,098612	3,367296	3,699352578	1,206949				
6	5	9	1,609438	2,197225	3,536296537	2,5902904				
7	7	7	1,94591	1,94591	3,786566308	3,7865663				
8	9	5	2,197225	1,609438	3,536296537	4,8277958				
9	29	3	3,367296	1,098612	3,699352578	11,338681				
10	59	2	4,077537	0,693147	2,826333583	16,626312				
11	81	1	4,394449	0	0	19,311183				

Рисунок 50. Суммы значений $\ln x$, $\ln y$, $\ln x \times \ln y$ и $\ln^2 x$

В ячейку $G5$ запишем формулу $= G3\hat{}2$, соответсвующую величине $(\sum \ln x)^2$ (рис. 51).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1							Степенная регрессия			
2	x	y	Lnx	Lny	Lnx*Lny	Ln^2 x	Сумма Lnx	Сумма Ln y	Сумма Lnx*Lny	Сумма Ln^2 x
3	1	81	0	4,394449	0	0	19,38361454	19,38361454	23,9105317	60,16823071
4	2	59	0,693147	4,077537	2,826333583	0,480453	(Сумма Lnx)^2			
5	3	29	1,098612	3,367296	3,699352578	1,206949	375,7245125			
6	5	9	1,609438	2,197225	3,536296537	2,5902904				
7	7	7	1,94591	1,94591	3,786566308	3,7865663				
8	9	5	2,197225	1,609438	3,536296537	4,8277958				
9	29	3	3,367296	1,098612	3,699352578	11,338681				
10	59	2	4,077537	0,693147	2,826333583	16,626312				
11	81	1	4,394449	0	0	19,311183				

Рисунок 51. Значение $(\sum \ln x)^2$

В ячейку $L3$ запишем формулу (17) для расчета коэффициента b при $n = 9$ (рис. 52):

$$= (9 * I3\ -\ G3 * H3)/(9 * J3\ -\ G5)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1							Степенная регрессия					
2	x	y	Lnx	Lny	Lnx*Lny	Ln^2 x	Сумма Lnx	Сумма Ln y	Сумма Lnx*Lny	Сумма Ln^2 x	Коэффициент A	Коэффициент B
3	1	81	0	4,394449	0	0	19,38361454	19,38361454	23,9105317	60,16823071	69,34822428	=(9*I3-G3*H3)/(9*J3-G5)
4	2	59	0,693147	4,077537	2,826333583	0,480453	(Сумма Lnx)^2					
5	3	29	1,098612	3,367296	3,699352578	1,206949	375,7245125					
6	5	9	1,609438	2,197225	3,536296537	2,5902904						
7	7	7	1,94591	1,94591	3,786566308	3,7865663						
8	9	5	2,197225	1,609438	3,536296537	4,8277958						
9	29	3	3,367296	1,098612	3,699352578	11,338681						
10	59	2	4,077537	0,693147	2,826333583	16,626312						
11	81	1	4,394449	0	0	19,311183						

Рисунок 52. Вычисление коэффицента b

В ячейку $K3$ запишем формулу (16) для расчета коэффициента a при $n = 9$ (рис. 53):

$$= \mathrm{EXP}\ (1/9 * H3\ -\ L3/9 * G3)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1							Степенная регрессия					
2	x	y	Lnx	Lny	Lnx*Lny	Ln^2 x	Сумма Lnx	Сумма Ln y	Сумма Lnx*Lny	Сумма Ln^2 x	Коэффициент A	Коэффициент B
3	1	81	0	4,394449	0	0	19,38361454	19,38361454	23,9105317	60,16823071	=EXP(1/9*H3-L3/9*G3)	-0,968274018
4	2	59	0,693147	4,077537	2,826333583	0,480453	(Сумма Lnx)^2					
5	3	29	1,098612	3,367296	3,699352578	1,206949	375,7245125					
6	5	9	1,609438	2,197225	3,536296537	2,5902904						
7	7	7	1,94591	1,94591	3,786566308	3,7865663						
8	9	5	2,197225	1,609438	3,536296537	4,8277958						
9	29	3	3,367296	1,098612	3,699352578	11,338681						
10	59	2	4,077537	0,693147	2,826333583	16,626312						
11	81	1	4,394449	0	0	19,311183						

Рисунок 53. Вычисление коэффициента a

В ячейки $M3{:}\,M90$ запишем новые значения переменной x с шагом 1, начиная с единицы. Для этого в ячейке $M3$ напишем «1», в $M4$ — «2», после чего выделим обе ячейки, наведём курсор на правый нижний угол ячейки $M4$ и выделим все ячейки до $M90$ включительно.

В ячейки $N3{:}\,N90$ запишем новые значения переменной y, подставляя значения x в уравнение степенной регрессии (15) с учётом вычисленных ранее значений a и b. Результат проделанных действий представлен на рисунке 54.

K	L	M	N
Коэффициент A	**Коэффициент B**	**X.степ**	**Y.степ**
69,34822428	-0,968274018		
		1	=$K$3*M4^$L$3
		2	35,44506863
		3	23,93598095
		4	18,11658342
		5	14,59623512
		6	12,23409102
		7	10,53777376
		8	9,259696975
		9	8,261656158
		10	7,460386489

Рисунок 54. Аппроксимированные значения y

Добавим новые значения на диаграмму следующим образом: Фильтры диаграммы >> Выбрать данные >> Добавить.

В качестве имени ряда возьмём название аппроксимирующей функции. В поле значений x введём диапазон ячеек $M3: M90$, в поле значений y — $N3: N90$.

Добавим на диаграмму линию тренда. Для этого нажмем правой кнопкой мыши по графику, отображающему узлы аппроксимаци. В появившемся списке выберем пункт «Добавить линию тренда». В качестве типа выберем степенной. В низу меню выберем пункты «Показывать уравнение на диаграмме» и «Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)»

Получившийся график представлен на рисунке 55.

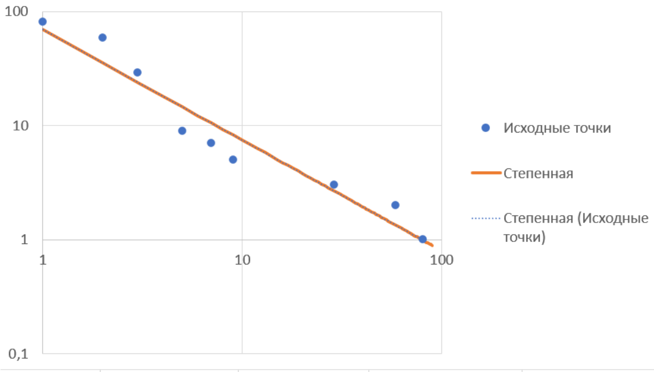


Рисунок 55. График аппроксимирующей функции, узлов аппроксимации и их линии тренда

Добавим новый столбец C. В него впишем значения y, вычисленные по формуле степенной регрессии (15) только для тех значений x, которые были даны по условию.

В ячейки P3:P11 запишем квадрат разности данных по условию значений y и тех, что были только что вычислены (рис. 56).

P
(Y-Y.степ)^2
=(B3-C3)^2
554,8347919
25,64428891
31,31784748
12,51584315
10,6384009
0,114968841
0,43861426
0,000248529

Рисунок 56. Правило заполнения ячеек $P3{:}P11$

Запишем в ячейку $Q3$ следующую формулу:

$$= \left(B3\ - \left(1/9 * \text{СУММ}\ (\$B\$3{:}\,\$B\$11)\right)\right)\hat{}2$$

соответствующую величине $\left(y - \frac{1}{n}\sum y\right)^2$, а затем распростаним её в диапазоне $Q3:Q11$ (рис. 57).

Q
(Y-1/n(сумм y))^2
=(B3-(1/9*СУММ($B$3:$B$11)))^2
1385,493827
52,16049383
163,2716049
218,382716
281,4938272
352,6049383
391,1604938
431,7160494

Рисунок 57. Правило заполнения ячеек Q3:Q11

В ячейку $R3$ запишем формулу (8) для вычисления коэффициента корреляции (рис. 58):

$$= \text{КОРЕНЬ}\left(1 - \text{СУММ}\,(P3:P11)/\text{СУММ}\,(Q3:Q11)\right)$$

P	Q	R
(Y-Y.степ)^2	**(Y-1/n(сумм y))^2**	**r.xy**
135,7638775	3507,271605	=КОРЕНЬ(1-(СУММ(P3:P11))/(СУММ(Q3:Q11)))
554,8347919	1385,493827	
25,64428891	52,16049383	
31,31784748	163,2716049	
12,51584315	218,382716	
10,6384009	281,4938272	
0,114968841	352,6049383	
0,43861426	391,1604938	
0,000248529	431,7160494	

Рисунок 58. Вычисление коэффициента парной корреляции

Полученное значение коэффициента парной корреляции равно $0{,}9414$.

Как можно видеть по рисунку 55 и полученному коэффициенту парной корреляции, использование уравнения степенной регрессии для решения задачи аппроксимации с данным условием возможно, хотя и нахождения искомой функции с желаемой точностью (с коэффициентов парной корреляции $\geq 0{,}95$) это не дает.

Запишем в ячейку $S3$ формулу:

$$= \mathrm{ABS}\ \big((B3\ -\ C3)/B3\big)$$

и распространим её в диапазоне $S3{:}\,S11$.

В ячейку $T3$ впишем формулу (10) для вычисления средней ошибки аппроксимации при $n = 9$:

$$= 1/9 * \text{СУММ}\ (S3{:}\,S11)$$

Переведя ячейку $T3$ в процентный формат, получим среднюю ошибку аппроксимации для наших данных (рис. 59).

S	T
ABS(y-y.лин)/y	Средняя ошибка
0,143849083	32,86%
0,399236125	
0,174621346	
0,621803902	
0,505396251	
0,652331232	
0,113023518	
0,331139797	
0,015764813	

Рисунок 59. Значение средней ошибки аппроксимации

Средняя ошибка аппроксимации равна 32,86%. Это подтверждает тезис о том, что аппроксимация данных из условия при помощи уравнения степенной регрессии возможна, но не абсолютно надежна.

Показательная регрессия

Уравнение показательной регрессии имеет вид:

$$\hat{y} = a * b^x \qquad (18)$$

где значения коэффициентов a и b вычисляются следующим образом:

$$a = \exp\left(\frac{1}{n}\sum lny_i - \frac{lnb}{n}\sum x_i\right) \quad (19)$$

$$b = \exp\frac{n\sum x_i lny_i - \sum x_i \sum lny_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (20)$$

Для вычисления коэффициента парной корреляции и средней ошибки аппроксимации используются формулы (8)-(10) из темы «Квадратичная регрессия».

В ячейки $C3{:}C11$ запишем натуральные логарифмы соответствующих значений y. Для этого в ячейке $C3$ запишем формулу $= \mathrm{LN}\,(B3)$ и распространим ее в указанном диапазоне (рис. 60).

	A	B	C
1			
2	**x**	**y**	**Lny**
3	1	81	=LN(B3)
4	2	59	4,077537
5	3	29	3,367296
6	5	9	2,197225
7	7	7	1,94591
8	9	5	1,609438
9	29	3	1,098612
10	59	2	0,693147
11	81	1	0

Рисунок 60. Правило заполнения ячеек $C3{:}C11$

В ячейки $D3{:}D11$ запишем значения x^2, введя для этого в ячейку $D3$ формулу $= A3\text{^}2$ и распространив её на весь диапазон (рис. 61).

	A	B	C	D
1				
2	x	y	Lny	X^2
3	1	81	4,394449	=A3^2
4	2	59	4,077537	4
5	3	29	3,367296	9
6	5	9	2,197225	25
7	7	7	1,94591	49
8	9	5	1,609438	81
9	29	3	1,098612	841
10	59	2	0,693147	3481
11	81	1	0	6561

Рисунок 61. Правило заполнения ячеек $D3:D11$

В ячейки $E3:E11$ запишем значения $x \ln y$, введя для этого в ячейку $E3$ формулу $= A3 * C3$ и распространив её на весь диапазон (рисунок 62).

	A	B	C	D	E
1					
2	x	y	Lny	X^2	X*ln y
3	1	81	4,394449	1	=A3*C3
4	2	59	4,077537	4	8,1550749
5	3	29	3,367296	9	10,101887
6	5	9	2,197225	25	10,986123
7	7	7	1,94591	49	13,621371
8	9	5	1,609438	81	14,484941
9	29	3	1,098612	841	31,859756
10	59	2	0,693147	3481	40,895684
11	81	1	0	6561	0

Рисунок 62. Правило заполнения ячеек $E3:E11$

В ячейки $F3$, $G3$, $H3$ и $I3$ запишем соответсвенно суммы получившихся значений x, $\ln y$, x^2и $x \ln y$ (рис. 63):

$$F3 = \text{СУММ}\ (A3:A11)$$
$$G3 = \text{СУММ}\ (C3:C11)$$
$$H3 = \text{СУММ}\ (D3:D11)$$

$$I3 = \text{СУММ}\ (E3{:}\,E11)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	**x**	**y**	**Lny**	**X^2**	**X*ln y**	**Сумма X**	**Сумма Lny**	**Сумма X^2**	**Сумма X*Ln y**
3	1	81	4,394449	1	4,3944492	196	19,38361454	11052	134,4992867
4	2	59	4,077537	4	8,1550749				
5	3	29	3,367296	9	10,101887				
6	5	9	2,197225	25	10,986123				
7	7	7	1,94591	49	13,621371				
8	9	5	1,609438	81	14,484941				
9	29	3	1,098612	841	31,859756				
10	59	2	0,693147	3481	40,895684				
11	81	1	0	6561	0				

Рисунок 63. Суммы значений x, $\ln y$, x^2и $x \ln y$

В ячейку $F5$ запишем формулу $= F3\hat{}2$, соответсвующую величине $(\sum x)^2$ (рис. 64).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	**x**	**y**	**Lny**	**X^2**	**X*ln y**	**Сумма X**	**Сумма Lny**	**Сумма X^2**	**Сумма X*Ln y**
3	1	81	4,394449	1	4,3944492	196	19,38361454	11052	134,4992867
4	2	59	4,077537	4	8,1550749	**(Сумма X)^2**			
5	3	29	3,367296	9	10,101887	38416			
6	5	9	2,197225	25	10,986123				
7	7	7	1,94591	49	13,621371				
8	9	5	1,609438	81	14,484941				
9	29	3	1,098612	841	31,859756				
10	59	2	0,693147	3481	40,895684				
11	81	1	0	6561	0				

Рисунок 64. Значение величины $(\sum x)^2$

В ячейку $K3$ запишем формулу (20) для расчета коэффициента b при $n = 9$ (рис. 65):

$$= \text{EXP}\left((9 * I3 - F3 * G3)/(9 * H3 - F5)\right)$$

F	G	H	I	J	K
Сумма X	**Сумма Lny**	**Сумма X^2**	**Сумма X*Ln y**	**Коэффициент А**	**Коэффициент В**
196	19,38361454	11052	134,4992867	21,6963676	=EXP((9*I3-F3*G3)/(9*H3-F5))
(Сумма X)^2					
38416					

Рисунок 65. Вычисление коэффициента b

В ячейку $J3$ запишем формулу (19) для расчета коэффициента a при $n = 9$ (рис. 66):

$$= \mathrm{EXP}\ (1/9 * G3\ - \mathrm{LN}\ (K3)/9 * F3)$$

F	G	H	I	J	K
Сумма X	Сумма Lny	Сумма X^2	Сумма X*Ln y	Коэффициент A	Коэффициент B
196	19,38361454	11052	134,4992867	=EXP(1/9*G3-LN(K3)/9*F3)	0,958484895
(Сумма X)^2					
38416					

Рисунок 66. Вычисление коэффициента a

В ячейки $L3{:}L90$ запишем новые значения переменной x с шагом 1, начиная с нуля. Для этого в ячейке $L3$ напишем «0», в $L4$ — «1», после чего выделим обе ячейки, наведём курсор на правый нижний угол ячейки $L4$ и выделим все ячейки до $L90$ включительно.

В ячейки $M3{:}M90$ запишем новые значения переменной y, подставляя значения x в уравнение показательной регрессии (18) с учётом вычисленных ранее значений a и b. Результат представлен на рисунке 67.

J	K	L	M
Коэффициент A	Коэффициент B	X.пок	Y.пок
21,6963676	0,958484895	0	=\$J\$3*\$K\$3^L3
		1	20,79564062
		2	19,93230743
		3	19,1048156
		4	18,31167718
		5	17,55146598
		6	16,82281504
		7	16,12441411
		8	15,45500737
		9	14,81339112
		10	14,19841164

Рисунок 67. Аппроксимированные значения y

Добавим новые значения на диаграмму следующим образом: Фильтры диаграммы>> Выбрать данные >> Добавить.

В качестве имени ряда возьмём название аппроксимирующей функции. В поле значений x введём диапазон ячеек $L3{:}\,L90$, в поле значений y — $M3{:}\,M90$.

Добавим на диаграмму линию тренда. Для этого нажмем правой кнопкой мыши по графику, отображающему узлы аппроксимации. В появившемся списке выберем пункт «Добавить линию тренда». В качестве типа выберем экспоненциальный. В низу меню выберем пункты «Показывать уравнение на диаграмме» и «Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)»

Получившийся график представлен на рисунке 68.

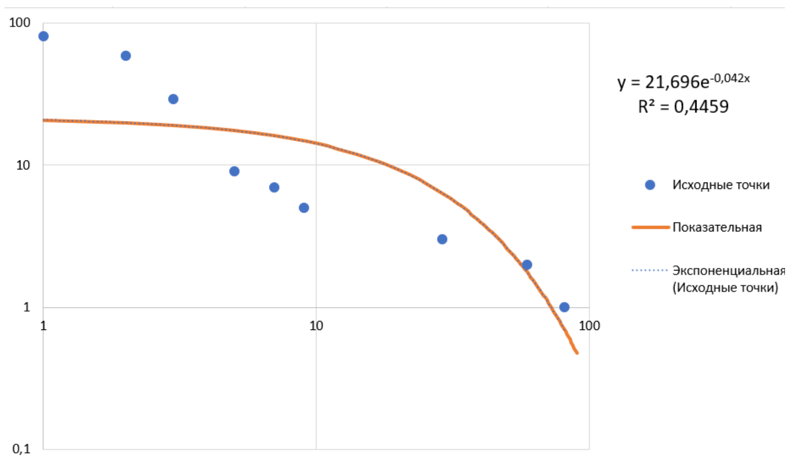


Рисунок 68. График аппроксимирующей функции, узлов аппроксимации и их линии тренда

Добавим новый столбец C. В него впишем значения y, вычисленные по формуле показательной регрессии (18) только для тех значений x, которые были даны по условию.

В ячейки $O3{:}\,O11$ запишем квадрат разности данных по условию значений y и тех, что были только что вычислены (рис. 69).

O
(Y-Y.пок)^2
=(B3-C3)^2
1526,284603
97,91467436
73,12757046
83,25493283
96,30264528
11,18202149
0,049308731
0,090294011

Рисунок 69. Правило заполнения ячеек $O3:O11$

В ячейку $P3$ запишем формулу $=\left(B3-\left(1/9*\text{СУММ}\,(\$B\$3:\$B\$11)\right)\right)\hat{}2$ и распространим её на весь диапазон $P3:P11$ (рис. 70).

P
(Y-1/n(сумм y))^2
=(B3-(1/9*СУММ($B$3:$B$11)))^2
1385,493827
52,16049383
163,2716049
218,382716
281,4938272
352,6049383
391,1604938
431,7160494

Рисунок 70. Правило заполнения ячеек $P3{:}\,P11$

Теперь можем записать в ячейку $Q3$ формулу (8) для вычисления коэффициента корреляции:

$$= \text{КОРЕНЬ}\left(1\ -\ \text{СУММ}\ (O3{:}\,O11)/\ \text{СУММ}\ (P3{:}\,P11)\right)$$

Результат представлен на рисунке 71.

O	P	Q
(Y-Y.пок)^2	(Y-1/n(сумм y))^2	r.xy
3624,564888	3507,271605	=КОРЕНЬ(1-(СУММ(O3:O11))/(СУММ(P3:P11)))
1526,284603	1385,493827	
97,91467436	52,16049383	
73,12757046	163,2716049	
83,25493283	218,382716	
96,30264528	281,4938272	
11,18202149	352,6049383	
0,049308731	391,1604938	
0,090294011	431,7160494	

Рисунок 71. Вычисление коэффициента парной корреляции

Полученное значение коэффициента парной корреляции равно $0{,}4328$.

Как можно видеть по рисунку 68 и полученному коэффициенту парной корреляции, уравнение показательной регрессии не подходит для решения задачи аппроксимации с данным условием.

Запишем в ячейку $R3$ формулу $= ABS((B3 - C3)/B3)$ и распространим её на весь диапазон $R3{:}\,R11$.

В ячейку $S3$ запишем формулу (10) средней ошибки аппроксимации при $n = 9$:

$$= 1/9 * \text{СУММ}\ (R3{:}\,R11)$$

Переведя ячейку $S3$ в процентный формат, получим среднюю ошибку аппроксимации для наших данных (рисунок 72).

R	S
ABS(y-y.лин)/y	**Средняя ошибка**
0,743263696	83,21%
0,662164281	
0,341213255	
0,950162887	
1,30348773	
1,962678224	
1,114650991	
0,111027847	
0,300489618	

Рисунок 72. Значение средней ошибки аппроксимации

Средняя ошибка аппроксимации равна 83,21%. Это подтверждает вывод о том, что решение задачи аппроксимации с данным условием при помощи уравнения показательной регрессии нецелесообразно.

Логарифмическая регрессия

Уравнение показательной регрессии имеет вид:

$$\hat{y} = a + b \ln x \quad (21)$$

где значения коэффициентов a и b вычисляются следующим образом:

$$a = \frac{1}{n}\sum y_i - \frac{b}{n}\sum x_i \quad (22)$$

$$b = \frac{n\sum(y_i \ln x_i) - \sum x_i \sum y_i}{n\sum \ln^2 x_i - (\sum \ln x_i)^2} \quad (23)$$

Для вычисления коэффициента парной корреляции и средней ошибки аппроксимации используются формулы (8)-(10) из темы «Квадратичная регрессия».

В ячейки $C3:C11$ запишем натуральные логарифмы соответствующих значений x. Для этого в ячейку $C3$ впишем формулу =LN(A3) и распространим ее в указанном диапазоне (рис. 73).

	A	B	C
1			**Логарифм**
2	**x**	**y**	**Ln x**
3	1	81	=LN(A3)
4	2	59	0,693147
5	3	29	1,098612
6	5	9	1,609438
7	7	7	1,94591
8	9	5	2,197225
9	29	3	3,367296
10	59	2	4,077537
11	81	1	4,394449

Рисунок 73. Правило заполнения ячеек $C3{:}C11$

В ячейки $D3{:}D11$ запишем квадраты соответствующих натуральных логарифмов x. В ячейку D3 запишем формулу $= LN(A3)\hat{}2$ и распространим ее в указанном диапазоне (рис. 74).

	A	B	C	D
1	Логарифмическая			
2	x	y	Ln x	Ln^2 x
3	1	81	0	=LN(A3)^2
4	2	59	0,693147	0,480453014
5	3	29	1,098612	1,206948961
6	5	9	1,609438	2,590290394
7	7	7	1,94591	3,786566308
8	9	5	2,197225	4,827795843
9	29	3	3,367296	11,33868121
10	59	2	4,077537	16,62631161
11	81	1	4,394449	19,31118337

Рисунок 73. Правило заполнения ячеек $D3{:}\,D11$

В ячейки $E3{:}\,E11$ запишем произведения соответствующих значений y и натуральных логарифмов x. В ячейку $E3$ запишем формулу $= B3 * C3$ и распространим ее в указанном диапазоне (рис. 74).

	A	B	C	D	E
1	Логарифмическая				
2	x	y	Ln x	Ln^2 x	y*Ln x
3	1	81	0	0	=B3*C3
4	2	59	0,693147	0,480453014	40,89568365
5	3	29	1,098612	1,206948961	31,85975637
6	5	9	1,609438	2,590290394	14,48494121
7	7	7	1,94591	3,786566308	13,62137104
8	9	5	2,197225	4,827795843	10,98612289
9	29	3	3,367296	11,33868121	10,10188749
10	59	2	4,077537	16,62631161	8,155074888
11	81	1	4,394449	19,31118337	4,394449155

Рисунок 74. Правило заполнения ячеек $E3{:}\,E11$

В ячейки $G3, H3, I3, J3,$ запишем суммы значений y, натуральных логарифмов x, квадратов натуральных логарифмов x, произведений y и натуральных логарифмов x соответственно:

$$G3 = \text{СУММ}(B3{:}B11)$$
$$H3 = \text{СУММ}(C3{:}C11)$$
$$I3 = \text{СУММ}(D3{:}D11)$$
$$J3 = \text{СУММ}(E3{:}E11)$$

В ячейку $H5$ запишем квадрат суммы натуральных логарифмов x при помощи формулы $= H3\hat{}2$ (рис. 75).

G	H	I	J
Сумм Y	**Сумм Ln x**	**Сумм Ln^2 x**	**Сумм y*Ln x**
196	19,38361454	60,16823071	134,4992867
	(Сумм Ln x)^2		
	375,7245125		

Рисунок 75. Значения сумм величин $y, lnx, ln^2x, ylnx$, квадрат сумм lnx

В ячейку $L3$ запишем формулу (23) для коэффициента b при n=9 (рис. 76):

=(9*J3-G3*H3)/(9*I3-H5)

G	H	I	J	K	L
Сумм Y	**Сумм Ln x**	**Сумм Ln^2 x**	**Сумм y*Ln x**	**Коэффициент A**	**Коэффициент B**
196	19,38361454	60,16823071	134,4992867	55,40693079	=(9*J3-G3*H3)/(9*I3-H5)
	(Сумм Ln x)^2				
	375,7245125				

Рисунок 76. Вычисление коэффициента b

В ячейку $K3$ запишем формулу (22) для коэффициента a при n=9 (рис. 77):

=1/9*G3-L3/9*H3

G	H	I	J	K	L
Сумм Y	**Сумм Ln x**	**Сумм Ln^2 x**	**Сумм y*Ln x**	**Коэффициент A**	**Коэффициент B**
196	19,38361454	60,16823071	134,4992867	=1/9*G3-L3/9*H3	-15,61434151
	(Сумм Ln x)^2				
	375,7245125				

Рисунок 77. Вычисление коэффициента a

В ячейки $M3{:}M90$ запишем новые значения переменной x с шагом 1.

В ячейки $N3{:}N90$ запишем новые значения переменной y, подставляя новые значения x и вычисленные коэффициенты a и b (ссылки на них зафиксируем) в формулу логарифмической регрессии (21) (рис. 78):

K	L	M	N
Коэффициент A	**Коэффициент B**	**X.лог**	**Y.лог**
55,40693079	-15,61434151		
		1	=$K$3+$L$3*LN(M4)
		2	44,58389399
		3	38,25282332
		4	33,7608572
		5	30,27661758
		6	27,42978653
		7	25,02282517
		8	22,9378204
		9	21,09871586
		10	19,45358079

Рисунок 78. Аппроксимированные значения y

Добавим новые значения на диаграмму следующим образом: Фильтры диаграммы >> Выбрать данные >> Добавить.

В качестве имени ряда возьмём название аппроксимирующей функции. В поле значений x введём диапазон ячеек $M3{:}M90$, в поле значений y — $N3{:}N90$.

Добавим на диаграмму линию тренда. Для этого нажмем правой кнопкой мыши по графику, отображающему узлы аппроксимацbи. В появившемся списке выберем пункт «Добавить линию тренда». В качестве типа выберем логарифмический. В низу меню выберем пункты «Показывать уравнение на диаграмме» и «Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)»

Получившийся график представлен на рисунке 79.

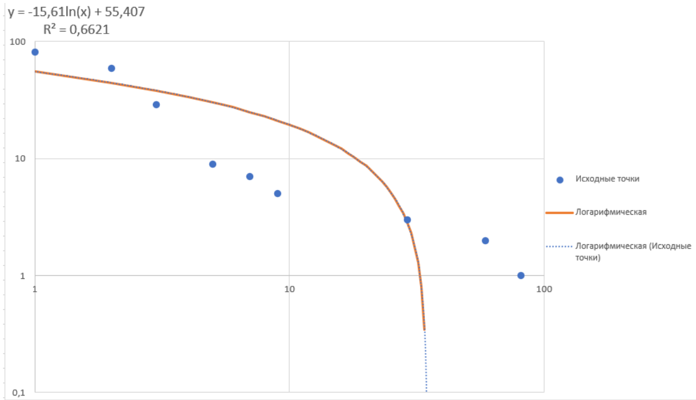


Рисунок 79. График аппроксимирующей функции, узлов аппроксимации и их линии тренда

Добавим новый столбец C. В него впишем значения y, вычисленные по формуле показательной регрессии (21) только для тех значений x, которые были даны по условию.

В ячейки $O3{:}O11$ запишем квадраты разностей соответствующих значений y, данных по условию и тех, что были вычислены в предыдущем пункте. Для этого в ячейке $O3$ запишем формулу $=(B3-C3)\hat{}2$ и распространим ее в указанном диапазоне.

В ячейках $P3{:}P11$ запишем квадрат разности данных по условию значений y и суммы этих же значений, деленной на n (равное 9 в нашем случае). Для этого в ячейку $P3$ запишем формулу

$$=(B3-(1/9*\text{СУММ}(\$B\$3{:}\$B\$11)))\hat{}2$$

и распространим ее в указанном диапазоне.

В ячейку $Q3$ запишем формулу (8) для расчета коэффициента парной корреляции (рис. 80):

$$=\text{КОРЕНЬ}(1-\text{СУММ}(O3{:}O11)/\text{СУММ}(P3{:}P11))$$

O	P	Q
(Y-Y.лог)^2	**(Y-1/n(сумм y))^2**	**r.xy**
655,0051917	3507,271605	=КОРЕНЬ(1-СУММ(O3:O11)/СУММ(P3:P11))
207,8241124	1385,493827	
85,61473947	52,16049383	
452,6944557	163,2716049	
324,8222271	218,382716	
259,1686524	281,4938272	
0,029301315	352,6049383	
105,2908173	391,1604938	
201,9098637	431,7160494	

Рисунок 80. Вычисление коэффициента парной корреляции

Полученное значение коэффициента парной корреляции равно $0{,}8136$.

Как можно видеть по рисунку 79 и полученному коэффициенту парной корреляции, решение задачи аппроксимации с данным условием при помощи уравнения логарифмической регрессии ненадежно.

Запишем в ячейку $R3$ формулу $=ABS((B3-C3)/B3)$ и распространим её на весь диапазон $R3{:}R11$.

В ячейку $S3$ запишем формулу (10) средней ошибки аппроксимации при $n=9$:

$$=1/9*\text{СУММ}\ (R3{:}R11)$$

Переведя ячейку $S3$ в процентный формат, получим среднюю ошибку аппроксимации для наших данных (рисунок 81).

R	S
ABS(y-y.лог)/y	**Средняя ошибка**
0,315963817	315,94%
0,24434078	
0,319062873	
2,36406862	
2,57468931	
3,219743172	
0,057058757	
5,130565692	
14,20949906	

Рисунок 81. Значение средней ошибки аппроксимации

Средняя ошибка аппроксимации равна 315,94%. Это означает, что вывод о нецелесообразности использования уравнения логарифмической регрессии для аппроксимации данных из условия был сделан верно.

Гиперболическая регрессия

Уравнение регрессии для гиперболической функции имеет вид:

$$\hat{y} = a + \frac{b}{x} \tag{24}$$

где значения коэффициентов a и b вычисляются следующим образом:

$$a = \frac{1}{n}\sum y_i - \frac{b}{n}\sum \frac{1}{x_i} \tag{25}$$

$$b = \frac{n\sum \frac{y_i}{x_i} - \sum \frac{1}{x_i}\sum y_i}{n\sum \frac{1}{x_i^2} - (\sum \frac{1}{x_i})^2} \tag{26}$$

Для вычисления коэффициента парной корреляции и средней ошибки аппроксимации используются формулы (8)-(10) из темы «Квадратичная регрессия».

В ячейки $C3{:}\,C11$ запишем значения $\frac{1}{x}$. Для этого запишем в ячейку $C3$ формулу $= 1/A3$ и распространим её на весь указанный диапазон (рисунок 82).

	A	B	C
1			
2	**x**	**y**	**1/x**
3	1	81	=1/A3
4	2	59	0,5
5	3	29	0,333333
6	5	9	0,2
7	7	7	0,142857
8	9	5	0,111111
9	29	3	0,034483
10	59	2	0,016949
11	81	1	0,012346

Рисунок 82. Правило заполнения ячеек $C3{:}\,C11$

В ячейки $D3{:}\,D11$ запишем значения $\frac{1}{x^2}$. Для этого запишем в ячейку $D3$ формулу $=1/A3\hat{}2$ и распространим её на весь указанный диапазон (рисунок 83).

	A	B	C	D
1				
2	**x**	**y**	**1/x**	**1/x^2**
3	1	81	1	=1/A3^2
4	2	59	0,5	0,25
5	3	29	0,333333	0,111111
6	5	9	0,2	0,04
7	7	7	0,142857	0,020408
8	9	5	0,111111	0,012346
9	29	3	0,034483	0,001189
10	59	2	0,016949	0,000287
11	81	1	0,012346	0,000152

Рисунок 83. Правило заполнения ячеек $D3{:}\,D11$

В ячейки $E3{:}\,E11$ запишем значения $\frac{y}{x}$. Для этого запишем в ячейку $E3$ формулу $=B3/A3$ и распространим её на весь указанный диапазон (рисунок 84).

	A	B	C	D	E
1					
2	**x**	**y**	**1/x**	**1/x^2**	**y/x**
3	1	81	1	1	=B3/A3
4	2	59	0,5	0,25	29,5
5	3	29	0,333333	0,111111	9,666667
6	5	9	0,2	0,04	1,8
7	7	7	0,142857	0,020408	1
8	9	5	0,111111	0,012346	0,555556
9	29	3	0,034483	0,001189	0,103448
10	59	2	0,016949	0,000287	0,033898
11	81	1	0,012346	0,000152	0,012346

Рисунок 84. Правило заполнения ячеек $E3{:}E11$

В ячейки $G3$, $H3$, $I3$, $J3$ запишем соответсвенно суммы значений y, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{y}{x}$ (рис. 85):

$$G3 = \text{СУММ}\ (B3{:}B11)$$
$$H3 = \text{СУММ}\ (C3{:}C11)$$
$$I3 = \text{СУММ}\ (D3{:}D11)$$
$$J3 = \text{СУММ}\ (E3{:}E11)$$

G	H	I	J
Сумм Y	**Сумм 1/x**	**Сумм 1/x^2**	**Сумм y/x**
196	2,351079177	1,435493704	123,6719145

Рисунок 85. Суммы значений y, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{y}{x}$

В ячейку $H5$ запишем формулу $= H3\hat{}2$, соответсвующую величине $\left(\sum \frac{1}{x}\right)^2$ (рисунок 86).

H
Сумм 1/x
2,351079177
(Сумм 1/x)^2
5,527573299

Рисунок 86. Значение выражения $\left(\sum \frac{1}{x}\right)^2$

В ячейку $L3$ запишем формулу (26) для расчёта коэффициента b при $n = 9$ (рисунок 87):

$$= (9 * J3 - H3 * G3)/(9 * I3 - H5)$$

G	H	I	J	K	L
Сумм Y	**Сумм 1/x**	**Сумм 1/x^2**	**Сумм y/x**	**Коэффициент A**	**Коэффициент B**
196	2,351079177	1,435493704	123,6719145	-1,272438102	=(9*J3-H3*G3)/(9*I3-H5)
	(Сумм 1/x)^2				
	5,527573299				

Рисунок 87. Вычисление коэффициента b

В ячейку $K3$ запишем формулу (25) для расчёта коэффициента a при $n = 9$ (рисунок 88):

$$= 1/9 * G3 - L3/9 * H3$$

G	H	I	J	K	L
Сумм Y	**Сумм 1/x**	**Сумм 1/x^2**	**Сумм y/x**	**Коэффициент A**	**Коэффициент B**
196	2,351079177	1,435493704	123,6719145	=1/9*G3-L3/9*H3	88,23690197
	(Сумм 1/x)^2				
	5,527573299				

Рисунок 88. Вычисление коэффициента a

В ячейки $M4{:}\,M90$ запишем новые значения переменной x с шагом 1, начиная с единицы. Для этого в ячейке $M4$ напишем «1», в $M5$ — «2», после чего выделим обе ячейки, наведём курсор на правый нижний угол ячейки $M5$ и выделим все ячейки до $M90$ включительно.

В ячейки $N4{:}\,N90$ запишем новые значения переменной y, подставляя значения x в уравнение гиперболической регрессии (24) с учётом вычисленных ранее значений a и b. Результат представлен на рисунке 89.

K	L	M	N
Коэффициент A	**Коэффициент B**	**X.гип**	**Y.гип**
-1,272438102	88,23690197		
		1	86,96446387
		2	=$K$3+$L$3/M5
		3	28,13986256
		4	20,78678739
		5	16,37494229
		6	13,43371223
		7	11,33283361
		8	9,757174645
		9	8,531662118
		10	7,551252096

Рисунок 89. Аппроксимированные значения y

Добавим новые значения на диаграмму следующим образом: Фильтры диаграммы >> Выбрать данные >> Добавить.

В качестве имени ряда возьмём название аппроксимирующей функции. В поле значений x введём диапазон ячеек $M3{:}M90$, в поле значений y — $N3{:}N90$.

Добавим на диаграмму линию тренда. Для этого нажмем правой кнопкой мыши по графику, отображающему узлы аппроксимации. В появившемся списке выберем пункт «Добавить линию тренда». В качестве типа выберем степенной. В низу меню выберем пункты «Показывать уравнение на диаграмме» и «Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)»

Получившийся график представлен на рисунке 90.

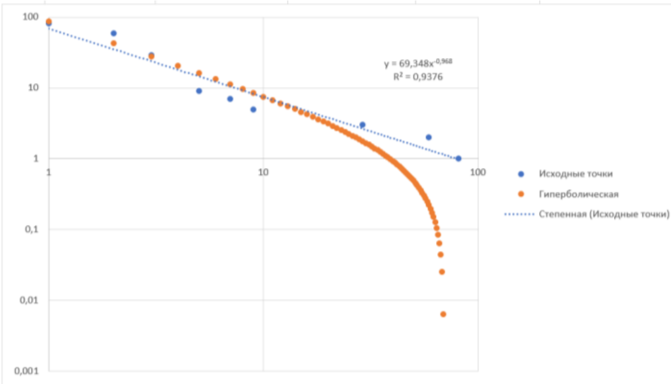


Рисунок 90. График аппроксимирующей функции, узлов аппроксимации и их линии тренда

Добавим новый столбец C. В него впишем значения y, вычисленные по формуле гиперболической регрессии (24) только для тех значений x, которые были даны по условию.

В ячейки $O3{:}\,O11$ запишем квадраты разностей соответствующих значений y, данных по условию и тех, что были вычислены в предыдущем пункте. Для этого в ячейке $O3$ запишем формулу $=(B3-C3)\hat{}2$ и распространим ее в указанном диапазоне.

В ячейках $P3{:}\,P11$ запишем квадрат разности данных по условию значений y и суммы этих же значений, деленной на n (равное 9 в нашем случае). Для этого в ячейку $P3$ запишем формулу

$$=(B3-(1/9*\text{СУММ}(\$B\$3{:}\,\$B\$11)))\hat{}2$$

и распространим ее в указанном диапазоне.

В ячейку $Q3$ запишем формулу (8) для расчета коэффициента парной корреляции (рис. 91):

$$=\text{КОРЕНЬ}(1-\text{СУММ}(O3{:}\,O11)/\text{СУММ}(P3{:}\,P11))$$

O	P	Q
(Y-Y.гип)^2	(Y-1/n(сумм y))^2	r.xy
35,57482928	3507,271605	=КОРЕНЬ(1-(СУММ(O3:O11))/(СУММ(P3:P11)))
260,9512997	3481	
0,739836422	841	
54,38977383	81	
18,77344708	49	
12,47263731	25	
1,512374367	9	
3,157364336	4	
1,399710544	1	

Рисунок 91. Вычисление коэффициента парной корреляции

Полученное значение коэффициента парной корреляции равно $0{,}9753$.

Как можно видеть по рисунку 90 и полученному коэффициенту парной корреляции, уравнение гиперболической регрессии хорошо подходит для решения задачи аппроксимации с данным условием.

В ячейку $R3$ запишем формулу $= ABS(B3 - C3)B3$ и распространим ее в диапазоне $R3{:}R11$.

В ячейке $S3$ запишем формулу (10) для вычисления средней ошибки аппроксимации при n=9 (рис. 92):

$$= 1/9 * \text{СУММ}(R3{:}R11)$$

R	S
ABS(y-y.гип)/y	Средняя ошибка
0,073635356	55,59%
0,273796392	
0,029659912	
0,819438033	
0,61897623	
0,706332424	
0,40992877	
0,888448695	
1,183093633	

Рисунок 92. Значение средней ошибки аппроксимации

Средняя ошибка аппроксимации равна 55,59%. Это подтверждает вывод о том, что уравнение гиперболической регрессии хорошо подходит для решения задачи аппроксимации с данным условием.

Экспоненциальная регрессия

Уравнение регрессии для гиперболической функции имеет вид:

$$\hat{y} = e^{a+bx} \tag{27}$$

где значения коэффициентов a и b вычисляются следующим образом:

$$a = \frac{1}{n}\sum lny_i - \frac{b}{n}\sum x_i \tag{28}$$

$$b = \frac{n\sum x_i lny_i - \sum x_i \sum lny_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{29}$$

Для вычисления коэффициента парной корреляции и средней ошибки аппроксимации используются формулы (8)-(10) из темы «Квадратичная регрессия».

В ячейки $C3:C11$ запишем натуральный логарифм соответствующих значений y (рис. 93).

	A	B	C
1			
2	x	y	Ln y
3	1	81	=LN(B3)
4	2	59	4,077537
5	3	29	3,367296
6	5	9	2,197225
7	7	7	1,94591
8	9	5	1,609438
9	29	3	1,098612
10	59	2	0,693147
11	81	1	0

Рисунок 93. Правило заполнения ячеек $C3:C11$

В ячейки $D3:D11$ запишем квадраты соответствующих значений x (рис. 94).

	A	B	C	D
1				
2	**x**	**y**	**Ln y**	**x^2**
3	1	81	4,394449	=A3^2
4	2	59	4,077537	4
5	3	29	3,367296	9
6	5	9	2,197225	25
7	7	7	1,94591	49
8	9	5	1,609438	81
9	29	3	1,098612	841
10	59	2	0,693147	3481
11	81	1	0	6561

Рисунок 94. Правило заполнения ячеек $D3:D11$

В ячейки $E3:E11$ запишем произведения соответствующих значений x и натуральных логарифмов y (рис. 95).

	A	B	C	D	E
1					
2	**x**	**y**	**Ln y**	**x^2**	**x*Ln y**
3	1	81	4,394449	1	=A3*C3
4	2	59	4,077537	4	8,15507489
5	3	29	3,367296	9	10,1018875
6	5	9	2,197225	25	10,9861229
7	7	7	1,94591	49	13,621371
8	9	5	1,609438	81	14,4849412
9	29	3	1,098612	841	31,8597564
10	59	2	0,693147	3481	40,8956837
11	81	1	0	6561	0

Рисунок 95. Правило заполнения ячеек $E3:E11$

В ячейки $F3, G3, H3, I3$ запишем суммы значений x, натуральных логарифмов y, x^2, произведений x и натуральных логарифмов y соответственно (рис. 96).

F	G	H	I
Сумм X	**Сумм Ln Y**	**Сумм X^2**	**Сумм X*Ln y**
196	19,38361454	11052	134,4992867

Рисунок 96. Суммы значений $x, y,\ x^2, x\ln y$

В ячейку $F5$ запишем квадрат суммы значений x, вычисленной в предыдущем пункте (рис. 97).

F	G	H	I
Сумм X	**Сумм Ln Y**	**Сумм X^2**	**Сумм X*Ln y**
196	19,38361454	11052	134,4992867
(Сумм X)^2			
38416			

Рисунок 97. Квадрат суммы значений x

В ячейку $K3$ запишем формулу (29) для вычисления коэффициента b при n=9 (рис. 98):

$$= (9 * I3 - F3 * G3)/(9 * H3 - F5)$$

F	G	H	I	J	K
Сумм X	**Сумм Ln Y**	**Сумм X^2**	**Сумм X*Ln y**	**Коэффициент А**	**Коэффициент В**
196	19,38361454	11052	134,4992867	3,077144855	=(9*I3-F3*G3)/(9*H3-F5)
(Сумм X)^2					
38416					

Рисунок 98. Вычисление коэффициента b

В ячейку J3 запишем формулу (28) для вычисления коэффициента a при n=9 (рис. 99):

$$= 1/9 * G3 - K3/9 * F3$$

F	G	H	I	J	K
Сумм X	Сумм Ln Y	Сумм X^2	Сумм X*Ln y	Коэффициент А	Коэффициент В
196	19,38361454	11052	134,4992867	=1/9*G3-K3/9*F3	-0,042401475
(Сумм X)^2					
38416					

Рисунок 99. Вычисление коэффициента a

В ячейки $L3{:}L90$ запишем новые значения переменной x с шагом 1.

В ячейки $M3{:}M90$ запишем новые значения переменной y, подставляя новые значения X и вычисленные коэффициенты a и b (ссылки на них зафиксируем) в формулу (27) экспоненциальной регрессии (рис. 100):

J	K	L	M
Коэффициент А	Коэффициент В	X.эксп	Y.эксп
3,077144855	-0,042401475	0	=EXP($J$3+$K$3*L3)
		1	20,79564062
		2	19,93230743
		3	19,1048156
		4	18,31167718
		5	17,55146598
		6	16,82281504
		7	16,12441411
		8	15,45500737
		9	14,81339112
		10	14,19841164

Рисунок 100. Аппроксимированные значения у

Добавим новые значения на диаграмму следующим образом: Фильтры диаграммы >> Выбрать данные >> Добавить.

В качестве имени ряда возьмём название аппроксимирующей функции. В поле значений x введём диапазон ячеек $L3{:}L90$, в поле значений y — $M3{:}M90$.

Добавим на диаграмму линию тренда. Для этого нажмем правой кнопкой мыши по графику, отображающему узлы аппроксимации. В появившемся списке выберем пункт «Добавить линию тренда». В качестве типа выберем экспоненциальный. В низу меню выберем пункты «Показывать уравнение на диаграмме» и «Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)»

Получившийся график представлен на рисунке 101.

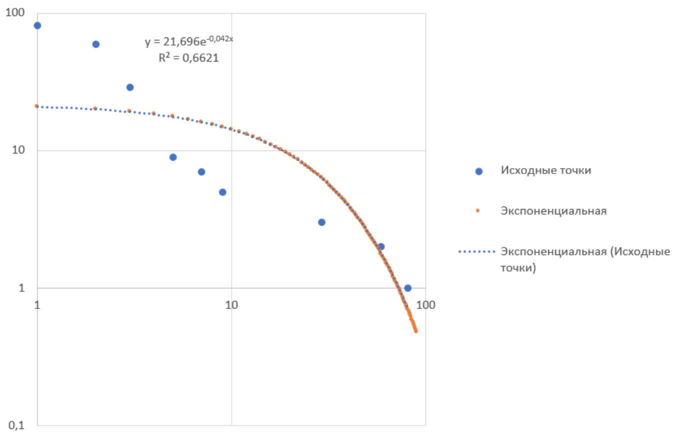


Рисунок 101. График аппроксимирующей функции, узлов аппроксимации и их линии тренда

Добавим новый столбец C. В него впишем значения y, вычисленные по формуле экспоненциальной регрессии (27) только для тех значений x, которые были даны по условию.

В ячейки $P3:P11$ запишем квадраты разностей соответствующих значений y, данных по условию и тех, что были вычислены в предыдущем пункте. Для этого в ячейке $O3$ запишем формулу $=(B3-C3)^\wedge 2$ и распространим ее в указанном диапазоне.

В ячейках $Q3:Q11$ запишем квадрат разности данных по условию значений y и суммы этих же значений, деленной на n (равное 9 в нашем случае). Для этого в ячейку $Q3$ запишем формулу

$$=(B3-(1/9*\text{СУММ}(\$B\$3:\$B\$11)))^\wedge 2$$

и распространим ее в указанном диапазоне.

В ячейку $R3$ запишем формулу (8) для расчета коэффициента парной корреляции (рис. 102):

$$=\text{КОРЕНЬ}(1-\text{СУММ}(P3:P11)/\text{СУММ}(Q3:Q11))$$

P	Q	R
(Y-Y.эксп)^2	(Y-1/n(сумм y))^2	r.xy
3624,564888	3507,271605	=КОРЕНЬ(1-СУММ(P3:P11)/СУММ(Q3:Q11))
1526,284603	1385,493827	
97,91467436	52,16049383	
73,12757046	163,2716049	
83,25493283	218,382716	
96,30264528	281,4938272	
11,18202149	352,6049383	
0,049308731	391,1604938	
0,090294011	431,7160494	

Рисунок 102. Вычисление коэффициента парной корреляции

Полученное значение коэффициента парной корреляции равно $0{,}4328$.

Как можно видеть по рисунку 101 и полученному коэффициенту парной корреляции, уравнение экспоненциальной регрессии не подходит для решения задачи аппроксимации с данным условием.

В ячейку $S3$ запишем формулу $= ABS(B3 - C3)B3$ и распространим ее в диапазоне $R3{:}\,R11$.

В ячейке $S3$ запишем формулу (10) для вычисления средней ошибки аппроксимации при n=9 (рис. 103):

$$= 1/9 * \text{СУММ}(S3{:}\,S11)$$

S	T
ABS(y-y.эксп)/y	Средняя ошибка
0,743263696	83,21%
0,662164281	
0,341213255	
0,950162887	
1,30348773	
1,962678224	
1,114650991	
0,111027847	
0,300489618	

Рисунок 103. Значение средней ошибки аппроксимации

Средняя ошибка аппроксимации равна 83,21%. Это подтверждает вывод о том, что уравнение экспоненциальной регрессии не подходит для решения задачи аппроксимации с данным условием.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить задачи интерполяции и аппроксимации для следующих табулированных функций:

1.

x	1	2	3	5	7	11	13	29	31	41
y	1	5	13	29	31	41	31	29	31	1

2.

x	102	105	110	126	150	165	182
y	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{15}$

3.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{11}{13}$	$\frac{13}{17}$	$\frac{17}{19}$	$\frac{19}{23}$

4.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{13}{11}$	$\frac{17}{13}$	$\frac{19}{17}$	$\frac{23}{19}$

5.

x	$\frac{1}{182}$	$\frac{1}{165}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{126}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{102}$
y	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{15}$

6.

x	103	107	112	118	124	131	139
y	49	94	45	54	37	73	29

7.

x	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
y	23	19	17	13	11	8	6	4	3	1

8.

x	17	$\frac{1}{16}$	15	$\frac{1}{14}$	13	$\frac{1}{12}$	11	$\frac{1}{10}$	9	$\frac{1}{8}$
y	77	66	88	55	99	44	111	33	222	22

9.

x	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
y	1	18	26	31	42	54	76	89	100	218

10.

x	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{79}$	$\frac{1}{87}$	$\frac{1}{92}$	$\frac{1}{197}$	$\frac{1}{215}$	$\frac{1}{399}$
y	502	487	433	399	375	301	284	265	220	187

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. В. Ф. Дьяченко «Основные понятия вычислительной математики», М, Изд-во «Наука», 1972. -120 с.

2. В. М. Пасконов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов, «Численное моделирование процессов тепло- и массообмена», М, Изд-во «Наука», 1984.- 290с.

3. А. А. Федотов, П. В. Храпов, «Численные методы», М, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012.-141с.

4. Н. Н. Калиткин под ред. А. А. Самарского «Численные методы», М, Изд-во «Наука», 1978.- 512с.

5. Поршнев С. В., «Вычислительная математика» курс лекций, СПБ, Изд-во «БХВ-Петербург», 2004.- 302с.