ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Численные методы для инженеров»

«Численное дифференцирование»

Авторы
Азимова Н.Н.
Бедоидзе М.В.
Лобянов И.С.
Цымбалов Д.С.

Ростов-на-Дону, 2023

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Дифференцированием называется операция нахождения производной некоторой функции $f(x)$. При этом функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если её производная в этой точке существует и конечна.

Первая производная аналитически заданной функции $f(x)$ определяется следующим выражением:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Численное дифференцирование — это процедура вычисления приближённого значения производной функции на основе ряда значения этой самой функции.

Необходимость в численном дифференцировании возникает в следующих случаях:

1. Функция задана в виде таблицы или графически
2. Функция задана аналитически, но вычисление её производной является затруднительным

В данном пособии методы численного дифференцирования рассмотрены на примере функции одной переменной. Но они также могут применяться для нахождения частных производных функции многих переменных. Для этого достаточно значения всех переменных, за исключением той, по которой происходит дифференцирование, считать за константы.

ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Простейшие формулы численного дифференцирования основаны на приближённом вычислении предела (1). Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5 \tag{2}$$

Найдём приближённое значение её производной в точке $x_0 = 1{,}2$, используя шаг дифференцирования $\Delta x = 0{,}01$.

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(1{,}2) \approx \frac{f(1{,}21) - f(1{,}2)}{0{,}01} = \frac{1{,}296961 - 1{,}288}{0{,}01} = 0{,}8961$$

Сравним полученное значение с точным значением производной.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

$$f'(1{,}2) = 0{,}92$$

На рисунке 1 дана графическая интерпретация используемого метода (для наглядности используется шаг большего размера $\Delta x = 0{,}1$). Сплошной линией изображена функция (2), пунктирной линией — касательная к графику функции в точке x_0. Известно, что тангенс угла наклона касательной равен производной функции в соответствующей точке. «Точка-тире» изображает секущую, пересекающую график функции в точках x_0 и $(x_0 + \Delta x)$. Тангенс её угла наклона равен приближённому значению производной. Легко заметить, что углы наклона обоих прямых отличаются несильно, и чем меньше шаг Δx, тем меньше разница между наклоном.

В данном методе приращение аргумента даётся в сторону увеличения значения аргумента, что соответствует выражению для правой односторонней производной:

$$f'(x + 0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Полученное при этом выражение $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется восходящей конечной разностью функции $f(x)$.

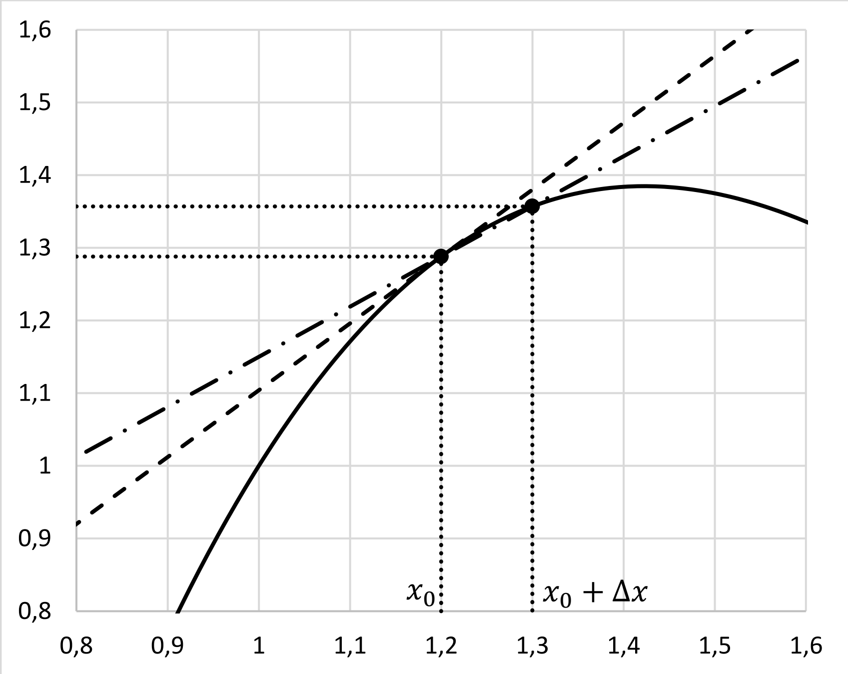

Рисунок 1. Вычисление производной с помощью восходящей конечной разности.

Для вычисления приближённого значения производной можно также использовать нисходящую конечную разность, определяемую следующим выражением:

$$f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)$$

При этом аргумент получает приращение в сторону уменьшения своего значения, что соответствует выражению для левой односторонней производной:

$$f'(x - 0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Соответственно, формула для приближённого значения производной примет следующий вид (здесь полагаем $\Delta x > 0$):

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

Снова вычислим производную функции (2) в точке $x_0 = 1{,}2$, используя шаг $\Delta x = 0{,}01$.

$$f'(1{,}2) \approx \frac{f(1{,}2) - f(1{,}19)}{0{,}01} = \frac{1{,}288 - 1{,}278559}{0{,}01} = 0{,}9441$$

Графическая интерпретация описанного метода представлена на рисунке 2 (шаг снова увеличен до $\Delta x = 0{,}1$). Аналогично предыдущему случаю, «точкой-тире» изображена секущая, пересекающая график функции (2) в точках x_0 и $(x_0 - \Delta x)$.

Из рисунков 1 и 2 легко заметить, что погрешность обоих методов при одной и той же величине шага примерно одинакова. Оба метода имеют порядок точности $O(\Delta x)$.

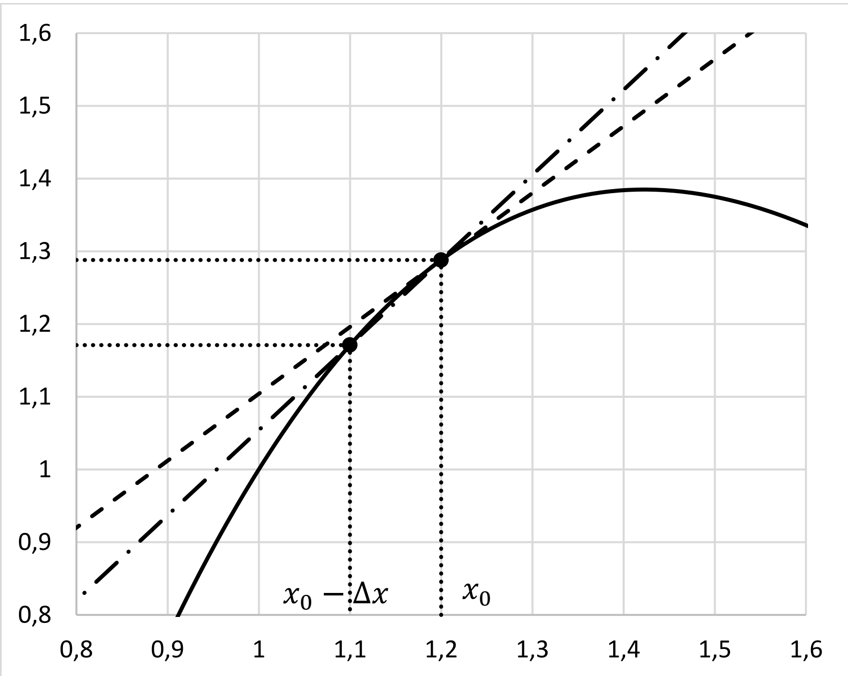

Рисунок 2. Вычисление производной с помощью нисходящей конечной разности.

Большей точностью — порядка $O(\Delta x^2)$ — обладает метод, основанный на центральной (или симметричной) конечной разности. Центральная конечная разность определяется следующим выражением:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)$$

Соответственно, формула для приближённого значения производной примет следующий вид:

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

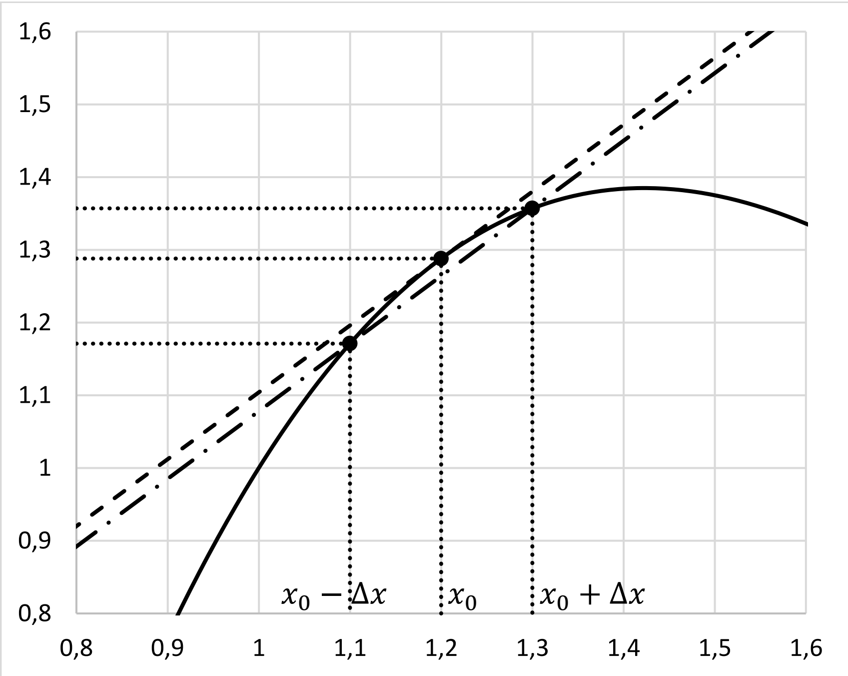

Рисунок 3. Вычисление производной с помощью центральной конечной разности.

Снова вычислим производную функции (2) в точке $x_0 = 1{,}2$, используя шаг $\Delta x = 0{,}01$.

$$f'(1{,}2) \approx \frac{f(1{,}21) - f(1{,}19)}{2 \times 0{,}01} =$$

$$= \frac{1{,}296961 - 1{,}278559}{0{,}02} = 0{,}9201$$

Нетрудно заметить, что точность данного метода значительно превосходит точность двух предыдущих.

Этот факт также подтверждается графической интерпретацией метода, изображенной на рисунке 3 (шаг снова увеличен до $\Delta x = 0{,}1$). Аналогично обозначениям предыдущих рисунков, пунктирная линия — касательная к графику функции (2) в точке x_0, «точка-тире» — секущая, пересекающая график функции (2) в точках $(x_0 - \Delta x)$ и $(x_0 + \Delta x)$. Даже при относительно большом шаге дифференцирования касательная и секущая почти параллельны друг другу, что и говорит о высокой точности метода.

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть необходимо найти значение второй производной функции $f(x)$ в точке x_0. Введём некоторые вспомогательные точки (рисунок 4):

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \qquad x_{-1} = x_0 - \Delta x$$

$$x_{\frac{1}{2}} = x_0 + \frac{\Delta x}{2}, \qquad x_{-\frac{1}{2}} = x_0 - \frac{\Delta x}{2}$$

Если известны значения первой производной функции $f(x)$ в точках $x_{-\frac{1}{2}}$ и $x_{\frac{1}{2}}$, то вторую производную можно вычислить методом центральных конечных разностей.

$$f''(x) \approx \frac{f'\left(x_{\frac{1}{2}}\right) - f'\left(x_{-\frac{1}{2}}\right)}{\Delta x}$$

Значения $f'\left(x_{\frac{1}{2}}\right)$ и $f'\left(x_{-\frac{1}{2}}\right)$, в свою очередь, тоже можно найти методом центральных конечных разностей следующим образом:

$$f'\left(x_{\frac{1}{2}}\right) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'\left(x_{-\frac{1}{2}}\right) \approx \frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{\Delta x}$$

Отсюда получим формулу для приближённого вычисления второй производной функции из значений самой функции:

$$f''(x) \approx \frac{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{\Delta x}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_{-1})}{(\Delta x)^2}$$

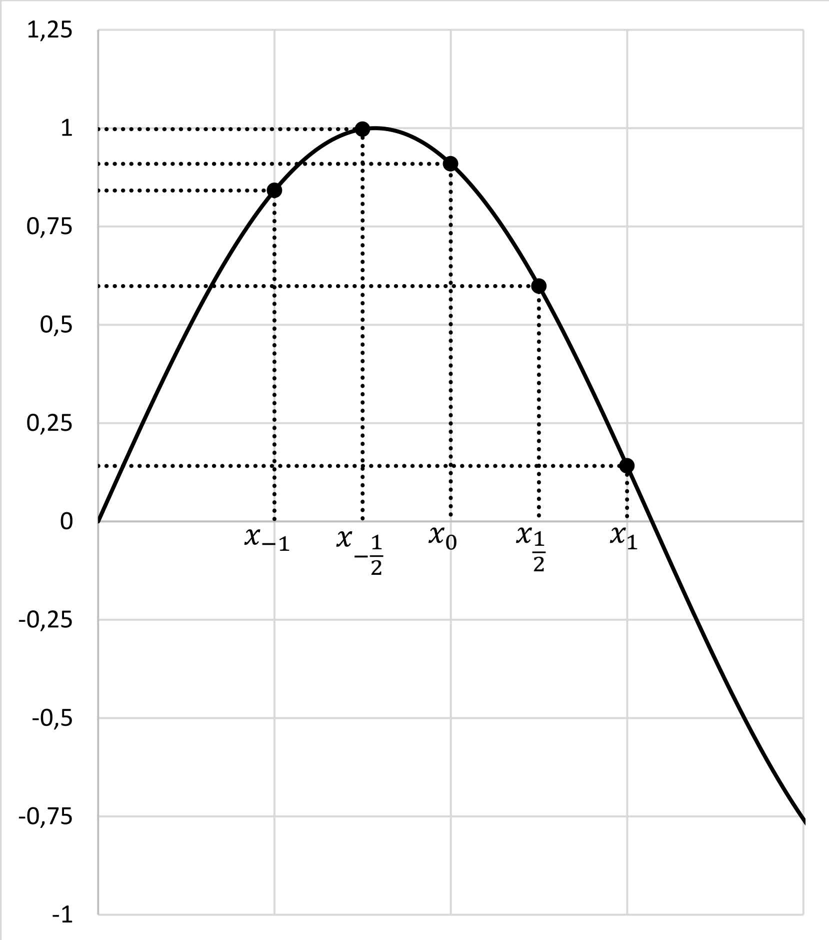

Рисунок 4. Вычисление второй производной.

Аналогичным путём можно получить формулы для производных более высоких порядков, например для третьей производной:

$$f'''(x_0) \approx \frac{f(x_3) - 3f(x_1) + 3f(x_{-1}) - f(x_{-3})}{(2\Delta x)^3},$$

где $x_3 = x_0 + 3\Delta x,\ \ x_{-3} = x_0 - 3\Delta x$

ГРАФИЧЕСКИ ЗАДАННЫЕ ФУНКЦИИ

Описанные выше методы могут быть применены к функциям, заданным в виде формулы или таблицы. Однако, если функция задана в виде графика, никакие из описанных методов применяться к ней не могут. Поэтому задача численного дифференцирования графически заданной функции сводится к задаче приведения функции к подходящему виду.

Графически заданные функции можно привести к табличному виду, используя специальное программное обеспечение. В данной главе используется программа Grafula, предназначенная для оцифровки координат точек отсканированных графиков (рисунок 5).

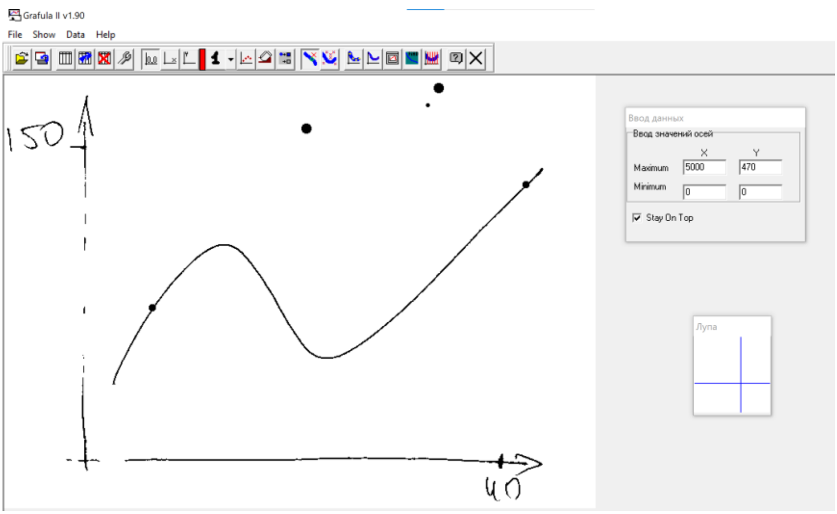

Рисунок 5. Общий вид программы.

Для начала работы необходимо выбрать изображение в формате JPG или BMP с графиком исследуемой функции. Затем на изображение вручную наносятся координатные оси с помощью соответствующих инструментов верхней панели:

1. *«Указание точки 0,0»* — выбор начала координат

2. *«Указание точки MaxX»* — выбор точки, в которой будет указано максимальное значение по оси Ox, точка также определяет направление оси Ox.
3. *«Указание точки MaxY»* — выбор точки, в которой будет указано максимальное значение по оси Oy, точка также определяет направление оси Oy.

Окно «Ввод данных» позволяет установить минимальные и максимальные значения для обоих координатных осей. Результат процедуры задания осей представлен на рисунке 6.

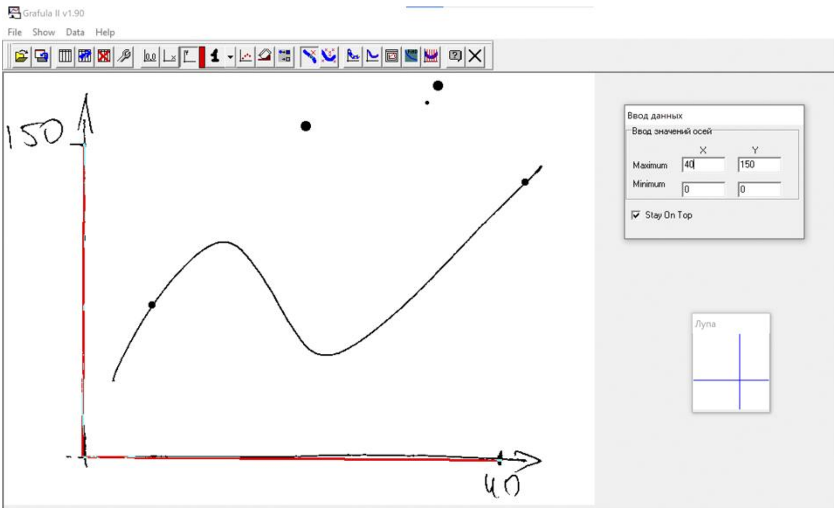

Рисунок 6. Задание координатных осей в программе.

Когда координатные оси заданы, с помощью инструмента «Указание точек» необходимо вручную отметить точки графика (рисунок 7). Отмечать точки можно с произвольным шагом в количестве до пяти тысяч. Для большей точности присутствует окно «Лупа», дублирующее увеличенную область изображения около курсора.

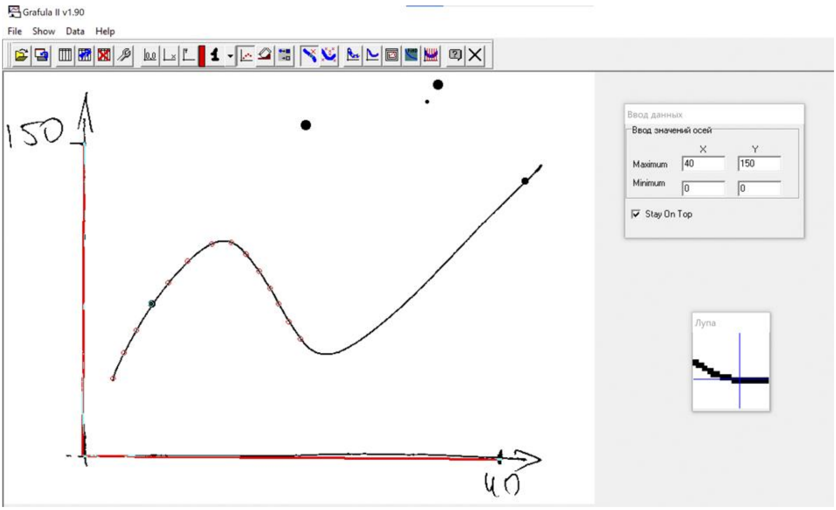

Рисунок 7. Выбор точек графика.

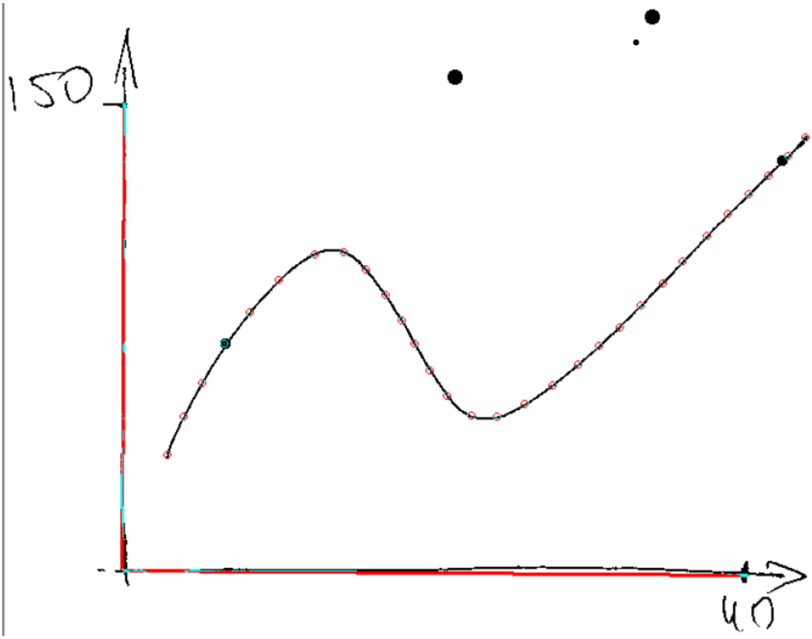

Рисунок 8. Оцифрованный график исследуемой функции.

Окончательный вид оцифрованного графика представлен на рисунке 8. В данном случае было отмечено тридцать точек. Точки лучше всего отмечать так, чтобы соединяющие их участки графика были достаточно гладкими.

Table of Data

№	X	Y1	Y2
1	2,8200371	37,220843	
2	3,8589981	49,503722	
3	4,9721706	60,297766	
4	6,3821892	72,952853	
5	8,0148423	83,002481	
6	9,8701298	93,424317	
7	12,096474	101,985111	
8	13,951762	102,72952	
9	15,435992	97,146401	
10	16,697588	88,957816	
11	17,736549	80,769230	
12	18,552875	73,325062	
13	19,517625	64,764267	
14	20,630797	56,947890	
15	22,189239	50,620347	
16	23,896103	50,248138	
17	25,602968	54,342431	
18	27,384044	60,297766	
19	29,016697	66,997518	
20	30,352504	73,325062	
21	31,688311	79,280397	
22	33,024118	86,352357	
23	34,434137	93,424317	
24	35,695732	100,49627	
25	37,179962	108,68486	
26	38,515769	115,75682	
27	39,851576	122,08436	
28	41,113172	128,41191	
29	42,374768	134,73945	
30	43,487940	140,69478	
31			
32			

Рисунок 9. Таблица с данными графика.

В процессе выбора точек их координаты будут автоматически добавляться в таблицу с данными в порядке следования вдоль оси Ox (рисунок 9). После этого данные таблицы можно скопировать, например, в Excel или другую программу для дальнейшей обработки. В том числе, поскольку теперь функция задана таблично, к ней применимы методы численного дифференцирования, описанные в предыдущих главах.

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ В EXCEL

Пусть необходимо найти производную следующей функции, а также построить график самой функции и график производной:

$$f(x) = e^{-x}(x^3 + 4x - 3)\sin 2x$$

Чтобы построить график функции, введём в ячейки $A1{:}A121$ числа от 0 до 12 с шагом 0,1, а затем в ячейках $B1{:}B121$ вычислим значения функции в соответствующих точках (рисунок 10).

	A	B	C
1	0	0	
2	0,1	-0,4672052	
3	0,2	-0,6988727	
4	0,3	-0,7416413	
5	0,4	-0,6424265	
6	0,5	-0,4465807	
7	0,6	-0,1964213	
8	0,7	0,06997846	
9	0,8	0,31978581	
10	0,9	0,52620014	
11	1	0,66902366	
12	1,1	0,73498058	
13	1,2	0,71775608	

Рисунок 10. Построение графика функции в Excel.

В результате получим график, представленный на рисунке 11.

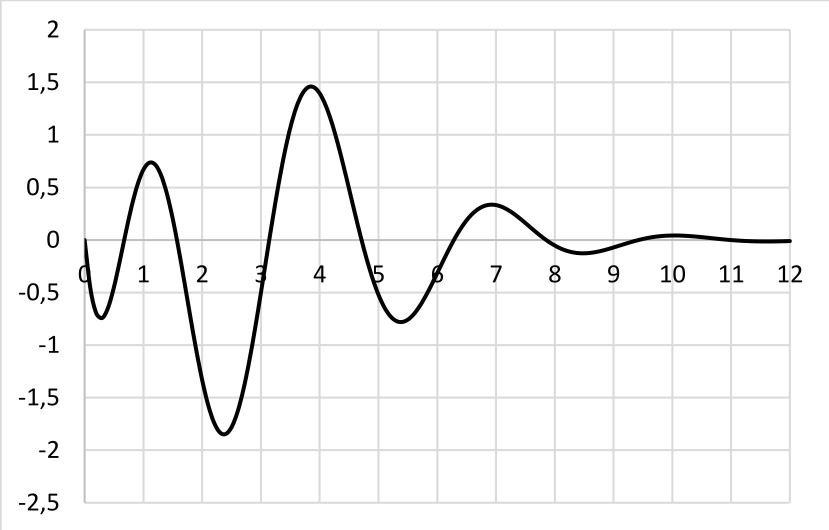

Рисунок 11. График исходной функции.

Для вычисления значений производной функции воспользуемся методом центральных конечных разностей. Для этого введём в ячейку $B2$ формулу $=(B3-B1)/0{,}2$ и распространим её до ячейки $B120$.

Поскольку для крайних точек интервала применить метод центральных конечных разностей нельзя, в ячейку $B1$ введём выражение для восходящей конечной разности $=(B2-B1)/0{,}1$, а в ячейку $B121$ — выражение для нисходящей конечной разности $=(B120-B121)/0{,}1$.

Результат вычислений представлен на рисунке 12.

	A	B	C	D
1	0	0	-4,6720519	
2	0,1	-0,4672052	-3,4943633	
3	0,2	-0,6988727	-1,3721808	
4	0,3	-0,7416413	0,28223079	
5	0,4	-0,6424265	1,4753032	
6	0,5	-0,4465807	2,23002588	
7	0,6	-0,1964213	2,58279583	
8	0,7	0,06997846	2,58103572	
9	0,8	0,31978581	2,2811084	
10	0,9	0,52620014	1,74618925	
11	1	0,66902366	1,04390219	
12	1,1	0,73498058	0,2436621	
13	1,2	0,71775608	-0,586219	
14	1,3	0,61773679	-1,3815197	

Рисунок 12. Вычисление производной в Excel.

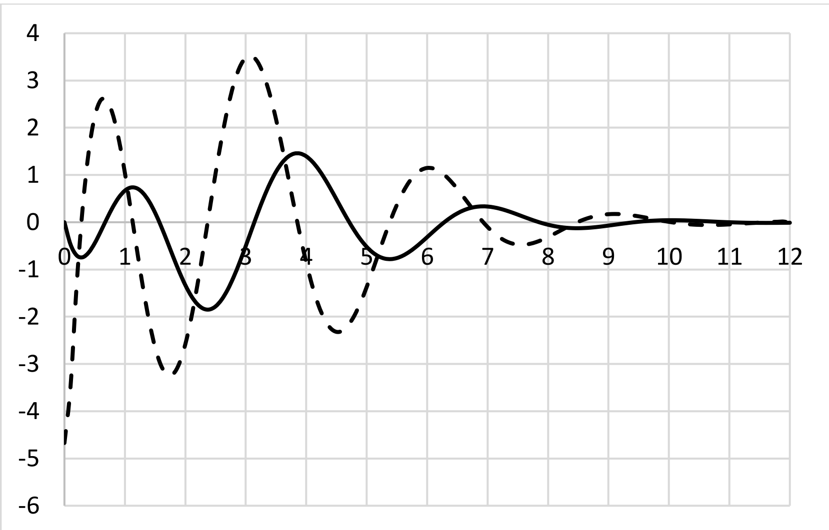

Рисунок 13. График исходной функции и её производной.

Для наглядности изобразим график самой функции и график её производной на одной координатной плоскости. Результат представлен на рисунке 13. Здесь производная изображена пунктирной линией.

ВАРИАНТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $f(x) = x^3 - x + 1$

$f'(2)-?, f''(2)-?$

2. $f(x) = \sin(2x+1)$

$f'(5)-?, f''(5)-?$

3. $f(x) = x^2 \ln x$

$f'\left(\frac{20}{3}\right)-?, f''\left(\frac{20}{3}\right)-?$

4. $f(x) = \sqrt{17x^2 - 9x + 3}$

$f'(10)-?, f'(20)-?$

5. $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$

$f'(5{,}8)-?, f'(11{,}3)-?$

6. $f(x) = \dfrac{3x^2 + 13\sin x}{7}$

$f'(2\pi)-?, f''(2\pi)-?$

7. $f(x) = 4x^2 + \dfrac{6}{x}$

$f'(-e)-?, f'(e)-?$

8. $f(x) = x(2 + \sin x)$

$f'(50)-?, f'(170)-?$

9. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 8$

$f'(10)-?, f''(10)-?$

10. $f(x) = 4\sqrt[4]{8 + x^4}$

$f'\left(\frac{25}{7}\right)-?, f'\left(\frac{75}{2}\right)-?$

11. $f(x) = \sqrt[3]{(1 + x^7)}$

$f''(7)-?, f'''(7)-?$

12. $f(x,y) = e^{x^2 - 6y^2}$

$f'_x(5;2)-?, f'_y(5;2)-?,$

13. $f(x) = (2 + \cos x)\ln x$

$f''(6\pi)-?, f'''(6\pi)-?$

14. $f(x) = \dfrac{x^5}{55} + \dfrac{x^3}{33} + \dfrac{x}{11}$

$f^{IV}(5)-?$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Дьяченко В.Ф., Основные понятия вычислительной математики.

Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А., Численное моделирование процессов тепло- и массообмена.

Федотов А.А., Храпов П.В, МГТУ им. Баумана, Численные методы.

Калиткин Н.Н., Численные методы. Под редакцией Самарского А.А.

Поршнев С.В., Вычислительная математика.