

ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебно-методическое пособие
по дисциплине
«Численные методы для инженеров»
«Численное интегрирование»

Авторы
Азимова Н.Н.
Бедоидзе М.В.
Лобянов И.С.
Цымбалов Д.С.

Ростов-на-Дону, 2023



Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	3
МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ	4
МЕТОД ТРАПЕЦИЙ	7
МЕТОД СИМПСОНА	9
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ГРАФИЧЕСКИ ЗАДАНЫХ ФУНКЦИЙ...13	
РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ В EXCEL	18
ВАРИАНТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	24
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	25

ВВЕДЕНИЕ

Численное интегрирование — это процедура вычисления приближённого значения определённого интеграла на основе ряда значений подынтегральной функций.

Аналитически значение определённого интеграла вычисляется с помощью формулы Ньютона–Лейбница. Необходимость в численном интегрировании возникает в следующих случаях:

1. Подынтегральная функция задана в виде таблицы или графически
2. Вычисление первообразной подынтегральной функции затруднительно или невозможно

В данном пособии рассмотрены методы, основанные на замене определённого интеграла конечной суммой:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n c_i f_i \quad (1)$$

где c_i — некоторые числовые коэффициенты, f_i — значения подынтегральной функции в точках x_i , $n + 1$ — число точек, в которых вычисляются значения подынтегральной функции.

При этом погрешностью численного интегрирования считается выражение следующего вида:

$$\varepsilon = \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^n c_i f_i \right| \quad (2)$$

Полученное значение и погрешность вычислений зависят от выбора точек, в которых вычисляются значения подынтегральной функции. В самом простом случае значения подынтегральной функции вычисляются на равномерной сетке с шагом $h = \frac{b-a}{n}$, то есть на множестве точек:

$$\{x_i = a + hi; i = 0 \dots n\}$$

Все описанные ниже методы могут быть применены как к равномерной, так и к неравномерной сетке, однако в последнем случае оценка погрешности может оказаться затруднительной.

МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Метод прямоугольников предполагает замену подынтегральной функции некоторым многочленом нулевой степени, то есть константой C , на каждом отрезке интегрирования. Выбор этой константы может быть осуществлён разными способами. Наиболее распространены следующие варианты:

1. *Метод левых прямоугольников* предполагает в качестве константы C значение подынтегральной функции в левом конце отрезка интегрирования
2. *Метод правых прямоугольников* предполагает в качестве константы C значение подынтегральной функции в правом конце отрезка интегрирования
3. *Метод центральных прямоугольников* предполагает в качестве константы C значение подынтегральной функции в середине отрезка интегрирования

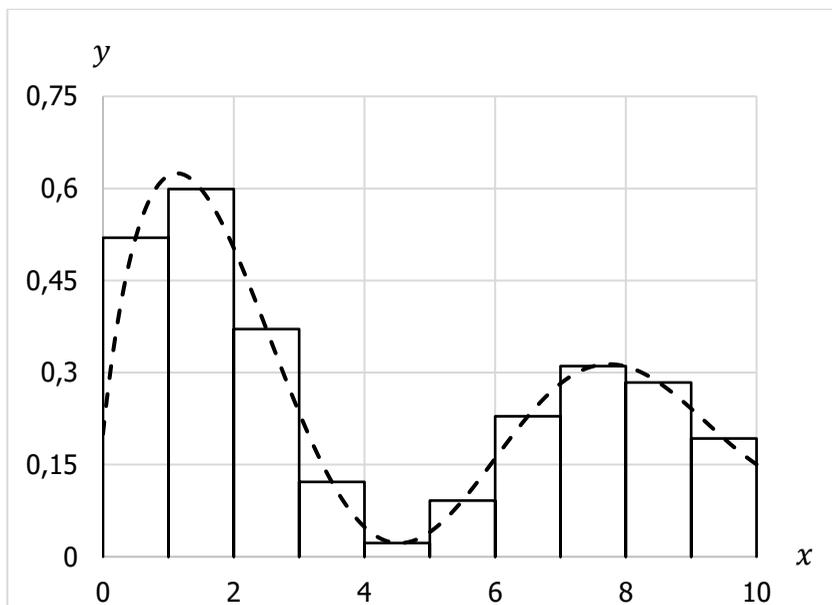


Рисунок 1. Графическое представление метода прямоугольников.

На рисунке 1 представлена иллюстрация метода прямоугольников для равномерной сетки с шагом $h = 1$. Пунктирная линия изображает функцию $f(x) = \frac{1}{5} + \frac{\sin x}{1+x}$. Сплошными линиями изображены прямоугольники с шириной h и длиной f_i . За искомое значения интеграла принимается сумма площадей этих прямоугольников, откуда и происходит название метода.

Для метода центральных прямоугольников выражение (1) имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

Если на i -том отрезке интегрирования вторая производная подынтегральной функции существует и ограничена, то оценка погрешности на этом отрезке выражается величиной:

$$\varepsilon_i \leq \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{24} M_{2,i}$$

где $M_{2,i} = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f''(x)$.

Поскольку для равномерной сетки $(x_i - x_{i-1}) = h$, то в этом случае выражение (1) примет вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

При этом погрешность на i -том отрезке интегрирования оценивается следующей величиной:

$$\varepsilon_i \leq \frac{h^3}{24} M_{2,i}$$

В случае равномерной сетки можно оценить погрешность на всём отрезке интегрирования $[a, b]$ следующим образом:

$$\varepsilon \leq \frac{Nh^3}{24} M_2 = \frac{(b-a)h^2}{24} M_2$$

где $M_2 = \max_{x \in [a,b]} f''(x)$.

Можно отметить то достоинство метода, что при небольших объёмах вычислений он имеет относительно высокий порядок точности — $O(h^2)$. Однако есть и значительный недостаток — поскольку необходимо вычислять значения функции в точках $\frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, метод не может быть применён к таблично заданным функциям, если их значения в таких промежуточных точках неизвестны.

Выражение (1) для метода левых прямоугольников имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f_{i-1}$$

Аналогично, для метода правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f_i$$

В обоих случаях погрешность на i -том отрезке интегрирования выражается величиной:

$$\varepsilon_i \leq \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} M_{1,i}$$

где $M_{1,i} = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f'(x)$.

Для случая равномерной сетки можно оценить погрешность на всём отрезке интегрирования $[a, b]$:

$$\varepsilon \leq \frac{Nh^2}{2} M_1 = \frac{(b-a)h}{2} M_1$$

где $M_1 = \max_{x \in [a,b]} f'(x)$.

Методы правых и левых прямоугольников уступают методу центральных прямоугольников, имея порядок точности $O(h)$. Однако их, в отличие от предыдущего метода, можно применять к таблично заданным функциям.

Важно также отметить, что несмотря на одинаковую оценку погрешности обоих методов, найденные значения интеграла в общем случае не равны между собой.

МЕТОД ТРАПЕЦИЙ

Метод трапеций предполагает замену подынтегральной функции некоторым многочленом первой степени, то есть прямой $kx + b$, на каждом отрезке интегрирования. Прямая для отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ выбирается так, чтобы она проходила через точки (x_{i-1}, f_{i-1}) и (x_i, f_i) . Поскольку точек две, то для каждого отрезка существует единственная такая прямая.

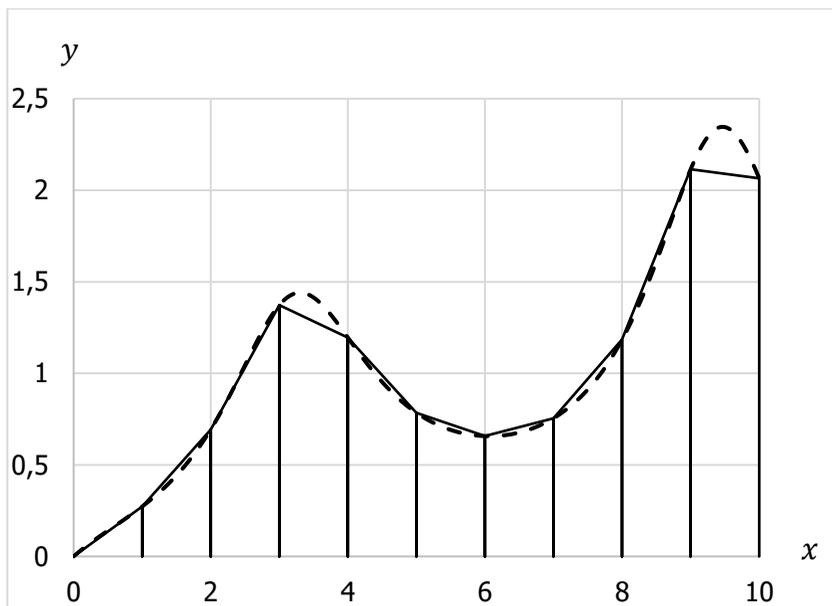


Рисунок 2. Графическое представление метода трапеций.

На рисунке 2 представлена иллюстрация метода трапеций для равномерной сетки с шагом $h = 1$. Пунктирная линия изображает функцию $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{2+\cos x}$. Сплошными линиями изображены трапеции с высотой h и основаниями f_{i-1} и f_i . За искомое значение интеграла принимается сумма площадей этих трапеций, откуда и происходит название метода.

Для метода трапеций выражение (1) имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{f_{i-1} + f_i}{2} (x_i - x_{i-1})$$

Оценка погрешности на i -том отрезке интегрирования выражается величиной:

$$\varepsilon_i \leq \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{12} M_{2,i}$$

Для случая равномерной сетки выражение (1) можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n \frac{f_{i-1} + f_i}{2} = h \left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right)$$

При этом погрешность на i -том отрезке интегрирования оценивается следующей величиной:

$$\varepsilon_i \leq \frac{h^3}{12} M_{2,i}$$

Соответственно, оценить погрешность на всём отрезке интегрирования $[a, b]$ можно следующим образом:

$$\varepsilon \leq \frac{Nh^3}{12} M_2 = \frac{(b-a)h^2}{12} M_2$$

Можно заметить, что погрешность метода трапеций оценивается вдвое большей величиной, чем погрешность метода центральных прямоугольников. Это также означает, что эти методы имеют одинаковый порядок точности — $O(h^2)$. Однако, несмотря на меньшую точность, метод трапеций имеет преимущество над методом центральных прямоугольников — он может применяться к таблично заданным функциям.

МЕТОД СИМПСОНА

Метод трапеций предполагает замену подынтегральной функции некоторым многочленом второй степени, то есть параболой $ax^2 + bx + c$, на каждом отрезке интегрирования. Отсюда также происходит второе название метода — метод парабол.

Парабола для отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ выбирается так, чтобы она проходила через точки (x_{i-1}, f_{i-1}) , $\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\right)$ и (x_i, f_i) . Построить такую параболу можно с помощью интерполяционного полинома Ларгнажа. Поскольку точек три, то для каждого отрезка такая парабола единственна.

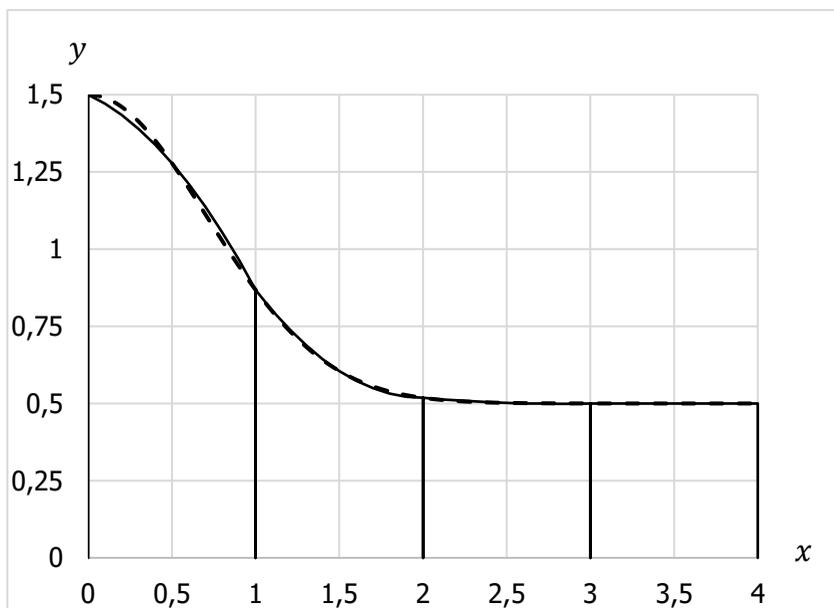


Рисунок 3. Графическое представление метода Симпсона.

На рисунке 3 представлена иллюстрация метода Симпсона для равномерной сетки с шагом $h = 1$. Пунктирная линия изображает функцию $f(x) = \frac{1}{2} + e^{-x^2}$. Сплошными линиями изображены криволинейные трапеции, ограниченные осью Ox , прямыми

$y = f_{i-1}$ и $y = f_i$, а также заданными параболоми. За искомое значения интеграла принимается сумма площадей этих криволинейных трапеций.

Построим интерполяционный полином Лагранжа для искомой параболы на i -том отрезке интегрирования:

$$L_i(x) = \frac{2}{(x_i - x_{i-1})^2} \left((x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_i)f_{i-1} - \right. \\ \left. - 2(x - x_{i-1})(x - x_i)f_{i-\frac{1}{2}} + (x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_i)f_i \right)$$

где $x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, $f_{i-\frac{1}{2}} = f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$.

Проинтегрировав полученное выражение в диапазоне от x_{i-1} до x_i , получим:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} L_i(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{6} \left(f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i \right)$$

Тогда выражение (1) для метода Симпсона будет иметь следующий вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \left(f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i \right)$$

Оценка погрешности на i -том отрезке интегрирования выражается величиной:

$$\varepsilon_i \leq \frac{(x_i - x_{i-1})^5}{2880} M_{4,i}$$

где $M_{4,i} = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f^{IV}(x)$.

Для случая равномерной сетки выражение (1) можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{6} \sum_{i=1}^n \left(f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i \right) =$$

$$= \frac{h}{6} \left(f_0 + f_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + 4 \sum_{i=1}^n f_{i-\frac{1}{2}} \right)$$

При этом погрешность на i -том отрезке интегрирования оценивается следующей величиной:

$$\varepsilon_i \leq \frac{h^5}{2880} M_{4,i}$$

Соответственно, оценить погрешность на всём отрезке интегрирования $[a, b]$ можно следующим образом:

$$\varepsilon \leq \frac{Nh^5}{2880} M_4 = \frac{(b-a)h^4}{2880} M_4$$

где $M_4 = \max_{x \in [a,b]} f^{IV}(x)$.

Метод Симпсона имеет очень высокий порядок точности — $O(h^4)$, а также требует вычисления значений подынтегральной функции в промежуточных точках $x_{i-\frac{1}{2}}$.

Если нет возможности вычислить значения в промежуточных точках, но известны значения функции на сетке из $2n + 1$ узлов, то можно представить, что отрезок интегрирования разбит только на n отрезков. Поскольку порядок точности высок, то даже при больших длинах отрезков можно достигнуть высокой точности решения. Это отличает данный метод от метода центральных прямоугольников, для которого аналогичная процедура может не быть рациональной.

Пусть значения функции известны на равномерной сетке из $2n + 1$ узлов с шагом $h = \frac{b-a}{2n}$, то есть на следующем множестве точек:

$$\{x_i = a + hi; i = 0 \dots 2n\}$$

Тогда выражение (1) можно переписать в следующем виде:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f_0 + f_{2n} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} + 4 \sum_{i=1}^n f_{2i-1} \right)$$

Примечательно также то, что решение I_S , полученное методом Симпсона, можно представить в виде линейной комбинации решений, полученных методом трапеций и методом центральных прямоугольников — I_T и I_R соответственно:

$$I_S = \frac{1}{3}I_T + \frac{2}{3}I_R$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ГРАФИЧЕСКИ ЗАДАНЫХ ФУНКЦИЙ

Описанные выше методы могут быть применены к функциям, заданным в виде формулы. Большинство методов также применимы к таблично заданным функциям. Однако, если функция задана в виде графика, никакие из описанных методов применяться к ней не могут. Поэтому задача численного интегрирования графически заданной функции сводится к задаче приведения функции к подходящему виду.

Графически заданные функции можно привести к табличному виду, используя специальное программное обеспечение. В данной главе используется программа Grafula, предназначенная для оцифровки координат точек отсканированных графиков (рисунок 4).

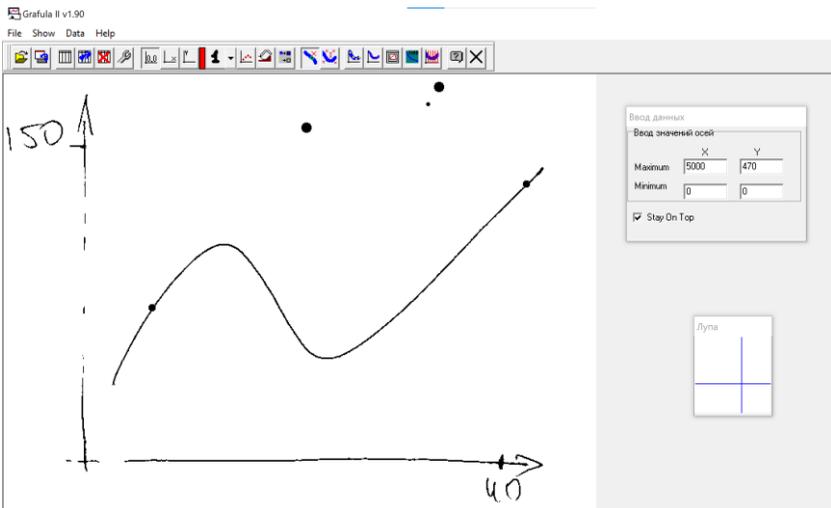


Рисунок 4. Общий вид программы.

Для начала работы необходимо выбрать изображение в формате JPG или BMP с графиком исследуемой функции. Затем на изображение вручную наносятся координатные оси с помощью соответствующих инструментов верхней панели:

1. «Указание точки $0,0$ » — выбор начала координат

Численные методы

2. «Указание точки $MaxX$ » — выбор точки, в которой будет указано максимальное значение по оси Ox , точка также определяет направление оси Ox .
3. «Указание точки $MaxY$ » — выбор точки, в которой будет указано максимальное значение по оси Oy , точка также определяет направление оси Oy .

Окно «Ввод данных» позволяет установить минимальные и максимальные значения для обеих координатных осей. Результат процедуры задания осей представлен на рисунке 5.

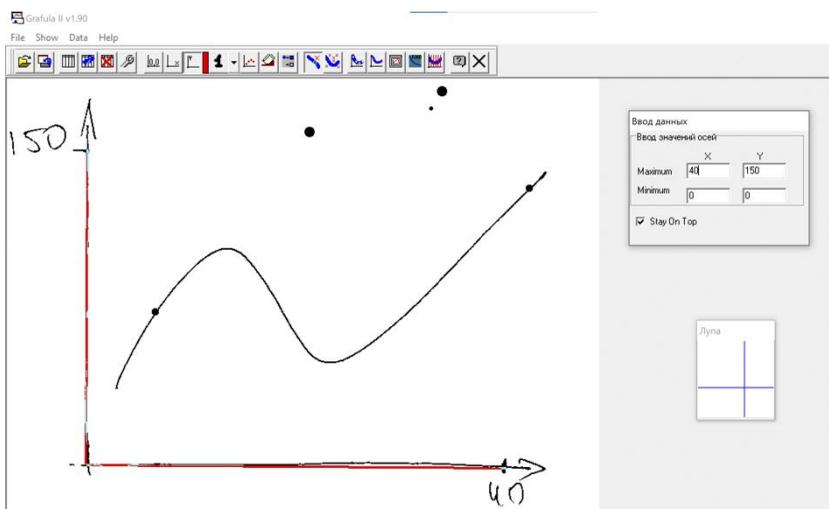


Рисунок 5. Задание координатных осей в программе.

Когда координатные оси заданы, с помощью инструмента «Указание точек» необходимо вручную отметить точки графика (рисунок 6). Отмечать точки можно с произвольным шагом в количестве до пяти тысяч. Для большей точности присутствует окно «Лупа», дублирующее увеличенную область изображения около курсора.

Численные методы

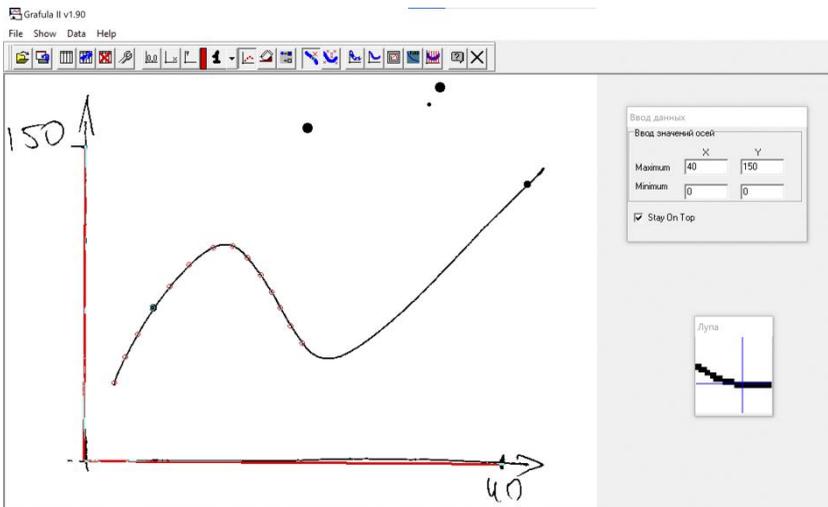


Рисунок 6. Выбор точек графика.

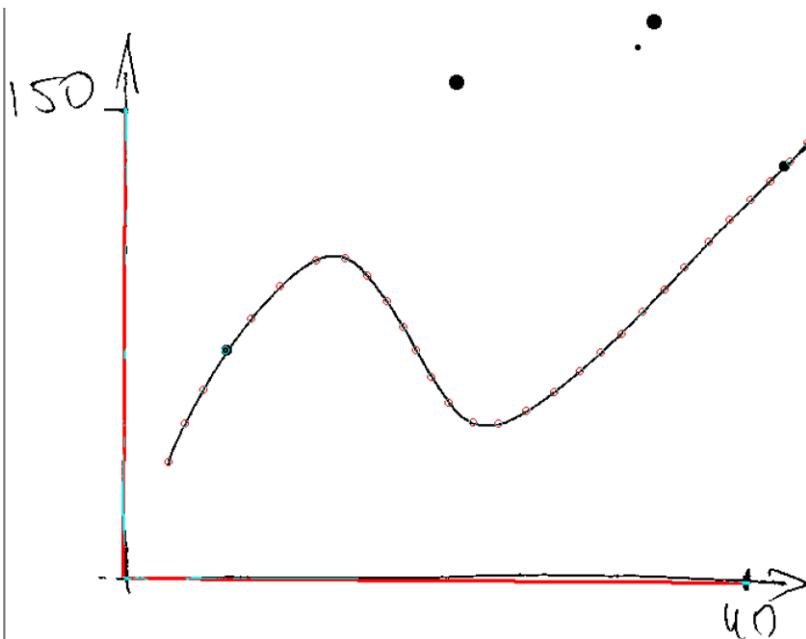
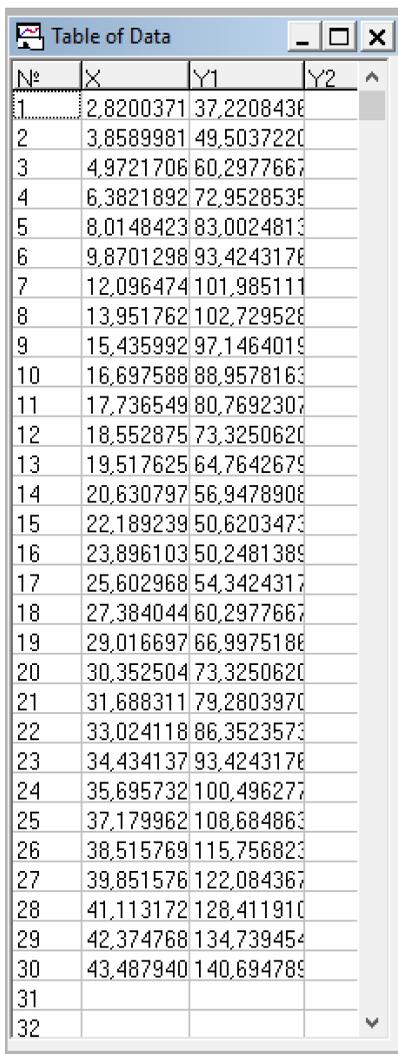


Рисунок 7. Оцифрованный график исследуемой функции.

Численные методы

Окончательный вид оцифрованного графика представлен на рисунке 7. В данном случае было отмечено тридцать точек. Точки лучше всего отмечать так, чтобы соединяющие их участки графика были достаточно гладкими.



№	X	Y1	Y2
1	2,8200371	37,2208436	
2	3,8589981	49,5037220	
3	4,9721706	60,2977667	
4	6,3821892	72,9528535	
5	8,0148423	83,0024813	
6	9,8701298	93,4243176	
7	12,096474	101,985111	
8	13,951762	102,729526	
9	15,435992	97,1464019	
10	16,697588	88,9578163	
11	17,736549	80,7692307	
12	18,552875	73,3250620	
13	19,517625	64,7642679	
14	20,630797	56,9478908	
15	22,189239	50,6203473	
16	23,896103	50,2481389	
17	25,602968	54,3424317	
18	27,384044	60,2977667	
19	29,016697	66,9975186	
20	30,352504	73,3250620	
21	31,688311	79,2803970	
22	33,024118	86,3523573	
23	34,434137	93,4243176	
24	35,695732	100,496277	
25	37,179962	108,684863	
26	38,515769	115,756823	
27	39,851576	122,084367	
28	41,113172	128,411910	
29	42,374768	134,739454	
30	43,487940	140,694789	
31			
32			

Рисунок 8. Таблица с данными графика.

Численные методы

В процессе выбора точек их координаты будут автоматически добавляться в таблицу с данными в порядке следования вдоль оси Ox (рисунок 8). После этого данные таблицы можно скопировать, например, в Excel или другую программу для дальнейшей обработки. В том числе, поскольку теперь функция задана таблично, к ней применимы методы численного интегрирования, описанные в предыдущих главах.

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ В EXCEL

Предположим, что необходимо найти значение следующего интеграла:

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \quad (3)$$

Поскольку найти его аналитически для заданной подынтегральной функции нельзя, воспользуемся описанными выше численными методами и оценим погрешность вычислений.

Будем решать задачу на равномерной сетке с шагом $h = 0,1$.

Сперва создадим таблицу Excel и введём в ячейки столбца A точки, в которых будем вычислять значения подынтегральной функции. Сами значения найдём в соответствующих ячейках столбца B .

Некоторые методы требуют вычисления подынтегральной функции в точках $\frac{x_{i-1} + x_i}{2}$. Чтобы найти эти значения, введём в ячейку $C2$ формулу $=EXP((A2 + A1)/2)/((A2 + A1)/2)$ и распространив её на ячейки ниже. Результат представлен на рисунке 9.

Численные методы

	A	B	C
1	1	2,71828183	—
2	1,1	2,73106002	2,72157249
3	1,2	2,7667641	2,7462547
4	1,3	2,8225359	2,79227437
5	1,4	2,8965714	2,85735224
6	1,5	2,98779271	2,94007898
7	1,6	3,09564527	3,03965818
8	1,7	3,21996905	3,15574535
9	1,8	3,36091526	3,28834439
10	1,9	3,51889181	3,43774028
11	2	3,69452805	3,60445517

Рисунок 9. Подготовка данных для решения задачи.

Решения различными методами получим путём применения следующих формул:

$= 0,1 * СУММ(C2: C11)$ — метод центральных прямоугольников (в ячейке E1).

$= 0,1 * СУММ(B1: B10)$ — метод левых прямоугольников (в ячейке E2).

$= 0,1 * СУММ(B2: B11)$ — метод правых прямоугольников (в ячейке E3).

$= 0,1 * ((B1 + B11)/2 + СУММ(B2: B10))$ — метод трапеций (в ячейке E4).

$= 0,1 * (B1 + B11 + 2 * СУММ(B2: B10) + 4 * СУММ(C2: C11))/6$ — метод Симпсона (в ячейке E5).

Результат применения формул представлен на рисунке 10.

Численные методы

	A	B	C	D	E
1	1	2,71828183	—		3,05834762
2	1,1	2,73106002	2,72157249		3,01184274
3	1,2	2,7667641	2,7462547		3,10946736
4	1,3	2,8225359	2,79227437		3,06065505
5	1,4	2,8965714	2,85735224		3,05911676
6	1,5	2,98779271	2,94007898		
7	1,6	3,09564527	3,03965818		
8	1,7	3,21996905	3,15574535		
9	1,8	3,36091526	3,28834439		
10	1,9	3,51889181	3,43774028		
11	2	3,69452805	3,60445517		

Рисунок 10. Таблица с полученными значениями интеграла.

Чтобы оценить погрешности всех использованных методов, необходимо найти максимумы первой, второй и четвёртой производных подынтегральной функции на отрезке интегрирования $[1; 2]$. В данном случае несложно найти производные аналитически:

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) e^x$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) e^x$$

$$f^{IV}(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{12}{x^3} - \frac{24}{x^4} + \frac{24}{x^5}\right) e^x$$

Используя Excel, построим графики первой, второй и четвёртой производных на указанном отрезке. Результат представлен на рисунке 11. Сплошной линией изображена первая производная

подынтегральной функции, пунктирной линией — вторая производная, «точка-тире» — четвёртая производная. Для наглядности графики построены в двух масштабах.

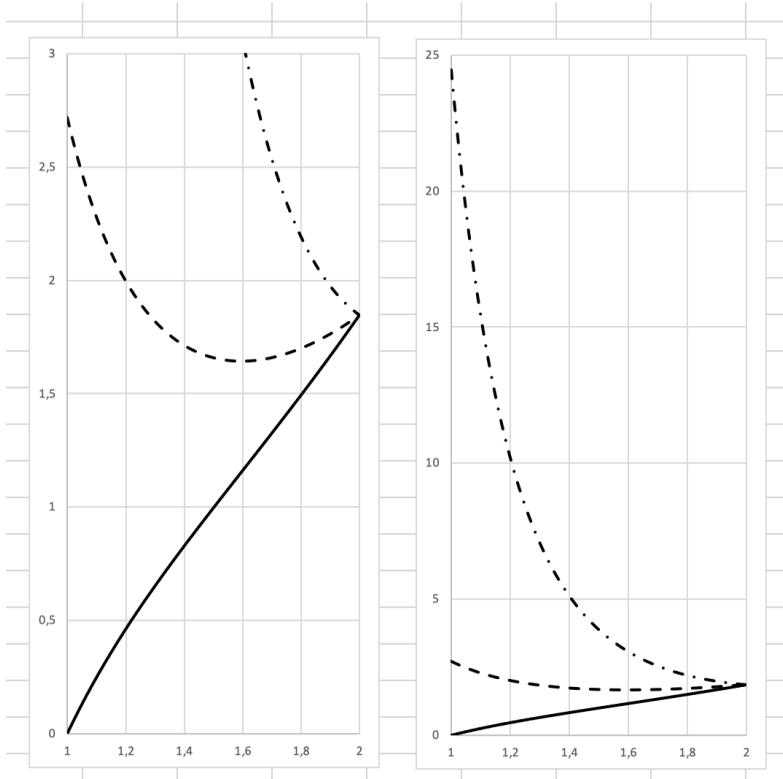


Рисунок 11. Графики производных в Excel.

Легко заметить, что первая производная достигает своего максимума в правом конце отрезка интегрирования, тогда как вторая и четвёртая производные — в левом. Отсюда можно получить следующие значения для оценки погрешностей:

$$M_1 = \max_{x \in [1; 2]} f'(x) = f'(2) \approx 1,84726402$$

$$M_2 = \max_{x \in [1; 2]} f''(x) = f''(1) \approx 2,71828183$$

Численные методы

$$M_4 = \max_{x \in [1; 2]} f^{IV}(x) = f^{IV}(1) \approx 24,4645365$$

Введём значения M_1 , M_2 и M_4 в ячейки $E7$, $E8$ и $E9$ соответственно. Тогда погрешности можно оценить путём применения следующих формул:

$= 0,1^2 * E8/24$ — для метода центральных прямоугольников (в ячейке $F1$).

$= 0,1 * E7/2$ — для методов левых и правых прямоугольников (в ячейках $F2$ и $F3$).

$= 0,1 * СУММ(B2: B11)$ — метод правых прямоугольников (в ячейке $E3$).

$= 0,1^2 * E8/12$ — для метода трапеций (в ячейке $F4$).

$= 0,1^4 * E9/2880$ — для метода Симпсона (в ячейке $F5$).

Результат применения формул представлен на рисунке 12.

	A	B	C	D	E	F
1	1	2,71828183	—		3,05834762	1,13E-03
2	1,1	2,73106002	2,72157249		3,01184274	9,24E-02
3	1,2	2,7667641	2,7462547		3,10946736	9,24E-02
4	1,3	2,8225359	2,79227437		3,06065505	2,27E-03
5	1,4	2,8965714	2,85735224		3,05911676	8,49E-07
6	1,5	2,98779271	2,94007898			
7	1,6	3,09564527	3,03965818		1,84726402	
8	1,7	3,21996905	3,15574535		2,71828183	
9	1,8	3,36091526	3,28834439		24,4645365	
10	1,9	3,51889181	3,43774028			
11	2	3,69452805	3,60445517			

Рисунок 12. Решение задачи.

Численные методы

Что и следовало ожидать, метод Симпсона имеет самую маленькую погрешность. При том, что этот метод потребовал вычисления значений функции всего в двадцати одной точке, полученное им решение верно с точностью до шестой цифры после запятой. Наименее точными оказались методы левых и правых прямоугольников.

ВАРИАНТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

9. $\int_0^8 \frac{dx}{\ln(2+x)}$

2. $\int_0^\pi \sin^4 x dx$

10. $\int_0^{\sqrt{6}} \sin(x^2) dx$

3. $\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

11. $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin(8x) \cos(3x) dx$

4. $\int_{-1}^1 \sqrt{x^3 - 3x + 4} dx$

12. $\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{2}} |\ln(x+3)| dx$

5. $\int_{-2}^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$

13. $\int_{-5}^{-1} \frac{x^5 - 4x^2 + 2}{x^3 - 8} dx$

6. $\int_{-\pi}^\pi |\sin x| dx$

14. $\int_{e^{-3}}^3 \ln^2 x dx$

7. $\int_2^5 \sqrt[4]{x+2} dx$

15. $\int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{2 + \sin x} dx$

8. $\int_0^5 \frac{x^3 + 4x - 1}{x^2 - x + 2} dx$

16. $\int_{-10}^{10} \frac{6 + \sin 2x}{3 + \cos x} dx$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Дьяченко В.Ф., Основные понятия вычислительной математики.

Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А., Численное моделирование процессов тепло- и массообмена.

Федотов А.А, Храпов П.В, МГТУ им. Баумана, Численные методы.

Калиткин Н.Н., Численные методы. Под редакцией Самарского А.А.

Поршнев С.В., Вычислительная математика.