ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Аналитическая геометрия»

Авторы

Рябых Г.Ю.,

Фролова Н.В.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения специальностей 01.03.04, 09.06.01, 09.04.02, 09.03.02, 09.03.01, 09.03.03, 09.04.03, 09.03.04, 09.04.04.

Авторы

Доцент
Рябых Г.Ю.

Старший преподаватель
Фролова Н.В.

Оглавление

ГЛАВА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПРЕДМЕТ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ - ЭТО ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ С ПОМОЩЬЮ АЛГЕБРЫ (ИХ ПОЛОЖЕНИЕ, ВИД, А НЕ РАЗМЕРЫ). ТОЧКА – ИСХОДНЫЙ ЭЛЕМЕНТ, ВСЕ ОСТАЛЬНОЕ – СОВОКУПНОСТЬ ТОЧЕК.

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗЫ В R_2

1. Понятие об уравнении линии на плоскости.

Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости, определяемую ортонормированным базисом $\bar{i}, \bar{j}$ и точкой $O(0,0)$ – началом координат. Пусть на плоскости дана какая-нибудь линия.

Определение 1. Уравнением данной линии (в выбранной системе координат) называется такое уравнение

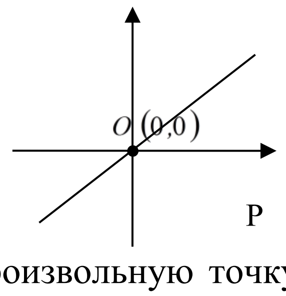
$$F(x, y) = 0$$

с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней.

Пример. 1) $y = x$ или $x - y = 0$ уравнение биссектрисы I и III координатных углов (рис. 1).

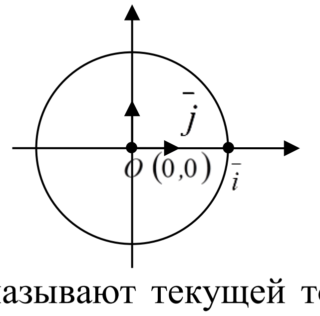
2) Уравнение окружности с центром в начале координат радиуса R (рис. 2.):

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$



$y = x$

Р



Р

Произвольную точку на линии называют текущей точкой. В дальнейшем, рассматривая уравнения с двумя переменными, мы не исключаем возможности, что левая часть уравнения содержит еще и другие символы: a, b, R и т.д., но в таком случае мы будем предполагать, что они представляют собой фиксированные числа, и будем называть их постоянными параметрами уравнения. Например, в уравнении:

$$y = kx + b$$

параметрами являются k и b, а в уравнении окружности:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

параметр - радиус R и координаты центра $O(0,0)$.

Составить уравнение линии (или, вообще говоря, геометрического образа), значит, исходя из свойств линии, установить зависимость между координатами текущей точки и параметрами. Этот метод позволяет свести изучение линий к изучению их уравнений, т.е. задачи геометрии свести к задачам алгебры.

Основным предметом изучения в аналитической геометрии являются линии, определяемые по отношению к декартовым прямоугольным координатам алгебраическими уравнениями. Это суть уравнения следующих видов:

$$Ax + By + C = 0 \qquad A^2 + B^2 \neq 0 \qquad (1)$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \qquad (2)$$

$$\begin{gathered} Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Ly + K = 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \neq 0 \end{gathered} \qquad (3)$$

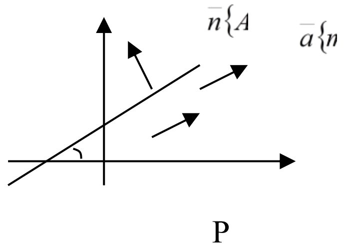
Уравнения (1), (2), (3) соответственно общие уравнения 1-ой, 2-ой, 3-ей степени.

Определение 2. Линия, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется алгебраическим уравнением степени n, называется алгебраической линией $n - го$ порядка.

2. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Вектор $\bar{n}(A,B)$ - перпендикулярный прямой, назовем ***нормальным вектором*** прямой, а вектор $\bar{a}(m,n)$, параллельный прямой, назовем ***направляющим вектором*** (рис. 3.). Пусть α - угол между прямой и положительным направлением оси OX, угол наклона прямой, $tg\alpha = k$ - угловой коэффициент прямой.

Вектор $\overline{a_p}(1,k)$ назовем приведенным направляющим вектором.



Типы уравнений прямой

Название уравнения определяется названием постоянных величин, определяющих положение прямой линии в системе координат.

1) ***Уравнение прямой линии, проходящей через данную точку*** $M_0(x_0, y_0)$, ***перпендикулярно данному вектору*** $\bar{n}(A,B)$ имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{1}$$

Оно вытекает из условия того, что скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов равно нулю.

Действительно, возьмем на прямой произвольную точку $M(x,y)$. Образуем текущий вектор $\bar{a}$, направленный из точки $M(x,y)$ в точку $M_0(x_0, y_0)$. Этот вектор будет иметь координаты $\bar{a} = \{(x - x_0), (y - y_0)\}$, и направлен он будет вдоль прямой. Второй вектор – это данный вектор $\bar{n} = \{A,B\}$. Скалярное произведение этих векторов равно нулю, отсюда и вытекает уравнение прямой.

2) Общее уравнение прямой линии:

$$Ax + By + C = 0 \tag{2}$$

где коэффициенты при неизвестных A, B суть координаты нормального вектора прямой. Действительно, раскроем скобки в предыдущем уравнении:

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0 \quad \to \quad Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0 \quad \to \quad Ax + By + C = 0$$

Теорема 1. Всякая прямая на плоскости имеет уравнение первой степени, и всякое уравнение первой степени является уравнением некоторой прямой.

Следствия.

а) $x = a$ – уравнение прямой, параллельной оси OY ($x = 0$, уравнение оси OY), б) $y = b$ - уравнение прямой, параллельной оси OX ($y = 0$, уравнение оси OX),

в) $y = k\,x$ - прямая линия, проходящая через начало координат.

Замечание. При переменном коэффициенте k - это будут уравнения пучка прямых, проходящих через начало координат.

3) Уравнение прямой линии, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$, параллельно данному вектору $\bar{a}(m,n)$ (***каноническое***):

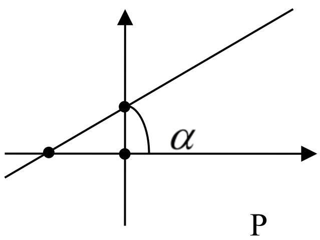
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \tag{3}$$

Вектор вдоль прямой $\bar{a} = \{(x - x_0), (y - y_0)\}$ коллинеарен вектору $\bar{a}(m,n)$, отсюда это условие.

4) Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{4}$$

Замечание. При переменном коэффициенте k уравнение называется уравнением пучка прямых линий, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$.



P

5) Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом (рис. 4):

$$y = kx + b \tag{5}$$

Здесь $b = OA, \quad k = tg\alpha \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2})$. К этому виду нельзя привести прямую, параллельную оси OY.

6) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \tag{6}$$

Действительно, пусть даны две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, через которые должна пройти наша прямая. На этой прямой возьмем текущую точку $M(x, y)$ и образуем два вектора: $\bar{a} = \{(x - x_0), (y - y_0)\}$ и $\bar{b} = \{(x_1 - x_0), (y_1 - y_0)\}$. Эти два вектора коллинеарные, отсюда и вытекает уравнение.

Замечание. Если $x_1 = x_0$, то уравнение прямой $x = x_1$; если $y_1 = y_0$, то $y = y_0$.

3. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности

1) Пусть прямые линии заданы общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C = 0 \qquad A_2x + B_2y + C = 0\ ,$$

где нормальные векторы: $\bar{n}_1(A_1, B_1)$ и $\bar{n}_2(A_2, B_2)_2$, φ - угол между векторами $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, т.е. угол между прямыми. Тогда:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{7}$$

Условие параллельности прямых эквивалентно условию коллинеарности их нормальных векторов:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \tag{8}$$

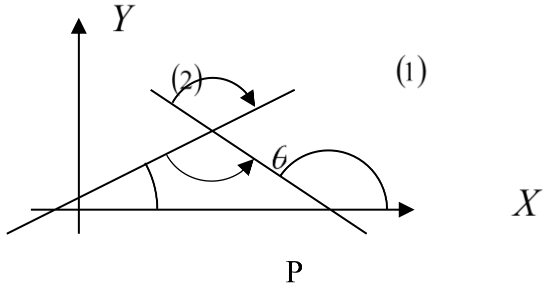
Условие перпендикулярности прямых – ортогональность векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \tag{9}$$

2) Пусть прямые линии заданы с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 (рис. 5):

$y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$,

где $k_1 = tg\alpha_1$ $k_2 = tg\alpha_2$. Тогда



$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Это вытекает из формулы тангенса суммы углов. $\theta + \alpha_1 + (\pi - \alpha_2) = \pi$,

$\theta + \alpha_1 - \alpha_2 = 0$, $\theta = \alpha_1 + \alpha_2$, $tg\theta = tg(\alpha_1 + \alpha_2)$, $tg\theta = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$ (*).

За k_1 принимаем угловой коэффициент той прямой, которую надо вращать против хода часовой стрелки, чтобы обойти угол θ до совмещения со второй прямой.

Условие параллельности прямых: $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности прямых: $k_2 = \dfrac{-1}{k_1}$.

Расстояние точки $M_0(x_0, y_0)$ от прямой $Ax + By + C = 0$ определяется формулой:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \quad (10)$$

Доказательство смотри в другом файле.

Замечания.

1. Если две прямые L_1 и L_2 заданы в каноническом виде, то угол между ними можно рассматривать как угол между их направляющими векторами $\overline{a_1} = \{m_1, n_1\}$, $\overline{a_2} = \{m_2, n_2\}$, а значит,

$$\cos\alpha = \cos(\angle \overline{a}_1, \overline{a}_2) = \frac{\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2}{|\overline{a}_1| \cdot |\overline{a}_2|} = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \quad (11)$$

Пример 1. Даны точки $A(-1,2)$, $B(0,-2)$, $C(2,4)$.

Найти:

1) Уравнение прямой AB.

Согласно уравнению (6) (уравнение прямой, проходящей через две точки), запишем:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-4}, \quad \text{или} \quad 4x+y+2=0.$$

2) Уравнение прямой L_1, проходящей через точку C, параллельно прямой AB.

Согласно уравнению (1), (уравнение прямой, проходящей через точку параллельно данному вектору) точка $M_0(x_0, y_0)$ это точка $C(2,4)$, параллельно прямой AB значит перпендикулярно ее нормальному вектору $\bar{n}=\{4,1\}$. Следовательно, запишем

$$4\cdot(x-2)+1\cdot(y-4)=0 \;\rightarrow\; 4x+y-12=0.$$

3) Уравнение прямой L_2, проходящей через точку C, перпендикулярно прямой AB.

Перпендикулярно прямой, значит параллельно ее нормальному вектору, в нашем случае $\bar{n}=\{4,1\}$. Точка $M_0(x_0, y_0)$ это точка $C(2,4)$. Согласно уравнению (3), запишем

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-4}{1} \rightarrow \; x-2=4y-16 \;\rightarrow\; x-4y+14=0$$

4) Уравнение медианы AD треугольника ΔABC.

На медиане AD образуем текущий вектор $\overline{AM}(x+1, y-2)$.

Найдем координаты точки D - середины стороны BC:

$$x_D=\frac{0+2}{2}=1, \qquad y_D=\frac{-2+4}{2}=1, \qquad D=(1,1)$$

Образуем вектор $\overline{AD}(2,-1)$, расположенный параллельно текущему вектору $\overline{AM}$. Тогда, в силу условия параллельности векторов, получим уравнение медианы AD:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}, \quad \text{или} \quad x+2y-3=0.$$

5) Уравнение высоты BH.

На высоте BH возьмем текущую точку $M(x,y)$ и образуем текущий вектор $\overline{BH}(x-0, y+2)$. Так как $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, где $\overline{AC}(3{,}2)$, то условие перпендикулярности этих векторов порождает уравнение прямой BH (скалярное произведение векторов равно нулю):

$$3(x-0)+(y+2)=0 \quad \text{или} \quad 3x+2y+4=0.$$

6) Длину высоты BH.

Заметим, что длина высоты BH равна расстоянию от точки B до прямой AC. Чтобы воспользоваться формулой (10), сначала найдем уравнение прямой AC.

На стороне AC образуем текущий вектор $\overline{AM}(x+1, y-2)$.

Запишем условие параллельности векторов $\overline{AM} \parallel \overline{AC}$, где $\overline{AC}(3{,}2)$:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}, \quad \text{или в общем виде} \quad 2x-3y+8=0.$$

Теперь, подставляя известные данные в формулу (10), имеем:

$$d=\frac{|2\cdot 0-3\cdot(-2)+8|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{14}{\sqrt{13}}.$$

Пример 2. Дана прямая L_1: $x-2y-3=0$ и точка $A(-1,2)$.
Найти:

1) Для прямой L_1 уравнение с угловым коэффициентом, угловой коэффициент k, отрезок, отсекаемый по оси ординат.

Разрешив уравнение прямой L_1 относительно Y, получаем уравнение с угловым коэффициентом:

L_1: $y=0{,}5x-1{,}5$. Отсюда $k=0{,}5$, $b=-1{,}5$.

2) Нормаль $\overline{n_1}$ и направляющий вектор $\overline{a_1}$ прямой L_1 - $x-2y-3=0$.

Коэффициенты при переменных x, y в общем уравнении прямой L_1, есть координаты нормального вектора, то есть $\overline{n_1}(1,-2)$.

Поскольку направляющий вектор $\overline{a_1}(l,m)$ прямой L_1 – это любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой, то выполняется условие (перпендикулярность векторов):

$$\overline{a} \cdot \overline{n} = 0 = 1 \cdot l - 2 \cdot m \qquad \text{где} \qquad l^2 + m^2 \neq 0.$$

Дадим величине m какое-нибудь значение. Пусть, например, $m = 1$, тогда $l - 2 = 0$, то есть $l = 2$. Получаем направляющий вектор $\overline{a_1}(2,1)$.

3) Каноническое уравнение прямой L_1.

Для составления канонического уравнения (3) прямой L_1 нам необходимо знать точку M_0, лежащую на L_1, и направляющий вектор $\overline{a_1}$. Так как координаты вектора $\overline{a_1} = (2,1)$ были получены нами ранее в задание 2, осталось найти координаты точки M_0.

Зафиксируем произвольное значение, например, $y = 0$ и подставим его в уравнение прямой L_1. Получим $x = 3$. Следовательно, $M_0(3,0)$.

Воспользовавшись теперь каноническим уравнением прямой (10), находим:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-0}{1}.$$

4) Уравнение прямой L_2, параллельной L_1 - $x - 2y - 3 = 0$ и проходящей через точку $A(-1,2)$.

Прежде всего, заметим, что точка A не лежит на прямой L_1, поскольку ее координаты не удовлетворяют уравнению этой прямой. Поэтому можно построить прямую L_2, проходящую через A параллельно L_1, но не совпадающую с L_1.

Пусть $M(x,y)$ - текущая точка прямой L_2. Так как текущий вектор $\overline{AM}(x+1, y-2)$ перпендикулярен вектору нормали $\overline{n_1}(1,-2)$ прямой L_1, то $\overline{AM} \cdot \overline{n_1} = 0$. Отсюда получаем уравнение прямой L_2:

$$1 \cdot (x+1) - 2 \cdot (y-2) = 0 \qquad \text{или} \qquad x - 2y + 5 = 0$$

5) уравнение прямой L_3, перпендикулярной L_1 - $x - 2y - 3 = 0$ и проходящей через точку $A(-1,2)$.

Пусть $\overline{AM}(x+1, y-2)$ - текущий вектор прямой L_3. Из условия параллельности $\overline{AM}$ и нормали $\overline{n_1}(1,-2)$ прямой L_1, получаем уравнение L_3:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2} \quad .$$

Пример 3. Проверить, являются ли прямые линии

$$L_1: \quad 2x+y-4=0, \qquad L_2: \frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{3}$$

1. Параллельными.

Прямые L_1 и L_2 будут параллельны, если их нормали $\overline{n_1} \| \overline{n_2}$. Из общего уравнения прямой L_1 найдем нормаль $\overline{n_1}(2,1)$. Чтобы найти нормаль $\bar{n}2$ приведем уравнение прямой L_2 к общему виду: $3x+y+5=0$. Отсюда $\overline{n_2}=(3,1)$.

Поскольку условие параллельности векторов $\overline{n_1}$ и $\bar{n}2$ не выполняется, так как $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{1}$, стало быть, L_1 и L_2 не параллельны.

б) Перпендикулярными.

Прямые L_1 и L_2 будут перпендикулярны, если $\overline{n_1} \perp \bar{n}2$. Но условие перпендикулярности для векторов $\overline{n_1}$ и $\bar{n}2$ не выполняется, так как $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}=2 \cdot 3+1 \cdot 1=7 \neq 0$. Следовательно, L_1 не перпендикулярна L_2.

в) Найти угол α между L_1 и L_2.

Угол между прямыми равен углу между их нормалями. Поэтому, используя формулу угла между двумя векторами, получим

$$\cos\alpha=\cos\left(\angle \bar{n}_1, \bar{n}_2\right)=\frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{\left|\bar{n}_1\right| \cdot \left|\bar{n}_2\right|}.$$

Так как $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}=7$, $\left|\overline{n_1}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, $\left|\overline{n_2}\right|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$, то $\cos\alpha=\frac{7}{5\sqrt{2}}$.

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗЫ В R_3

4. Понятие алгебраической поверхности

Определение. Алгебраической поверхностью называется множество, которое в какой-нибудь декартовой системе координат может быть задано уравнением вида:

$$A_1x^{k_1}y^{l_1}z^{m_1}+\ldots+A_sx^{k_s}y^{l_s}z^{m_s}=0$$

где все показатели степени – целые неотрицательные числа. Наибольшая из сумм: $k_1+l_1+m_1,\ \ldots,\ k_s+l_s+m_s$ называется степенью уравнения, а также периодом алгебраической поверхности.
Это определение означает, в частности, что сфера является алгебраической поверхностью второго порядка.

Перейдем к рассмотрению конкретных линейных образов в пространстве R_3.

4.а. Плоскость.

1. ***Уравнение плоскости (α), проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, перпендикулярно данному вектору $\bar{n}\{A;B;C\}$*** (рис. 6).

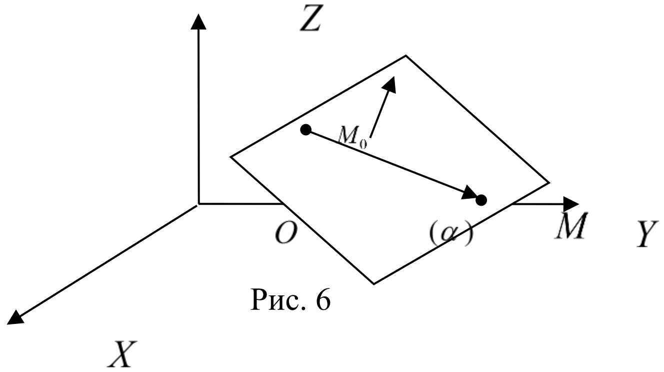


Рис. 6

$M(x,y,z)$ - текущая точка плоскости (α). Вектор $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}\in\alpha$. Для любой точки плоскости векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{n}$ ортогональны, следовательно, их скалярное произведение равно 0.

$$(\overline{M_0M} \cdot \bar{n}) = 0.$$

В уравнении перейдём к координатной форме:

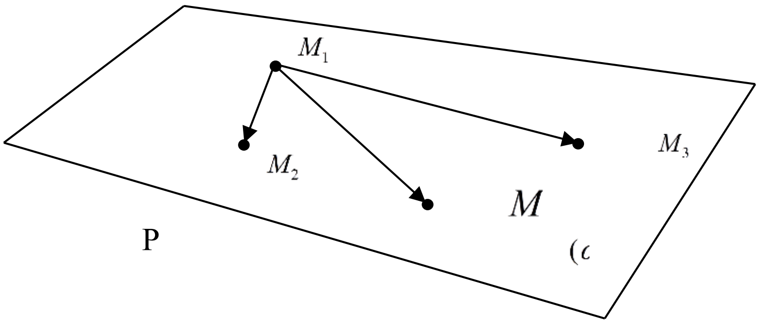
$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \qquad (12)$$

Уравнение (12) называется уравнением плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору.

2. Общее уравнение плоскости - это уравнение $1-ой$ степени с неизвестными x, y, z, которое имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (13)$$

3. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки (рис. 7).



Пусть плоскости (α) принадлежат три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. $M(x, y, z)$ - текущая точка плоскости, тогда векторы $\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$ компланарны и, следовательно, смешанное произведение этих векторов равно нулю.

$$(\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3}) = 0, \text{ или } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (14)$$

4. Уравнение плоскости «в отрезках»:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (15)$$

где a,b,c – величины отрезков,отсекаемых плоскостью от начала координат на осях координат (рис. 8).

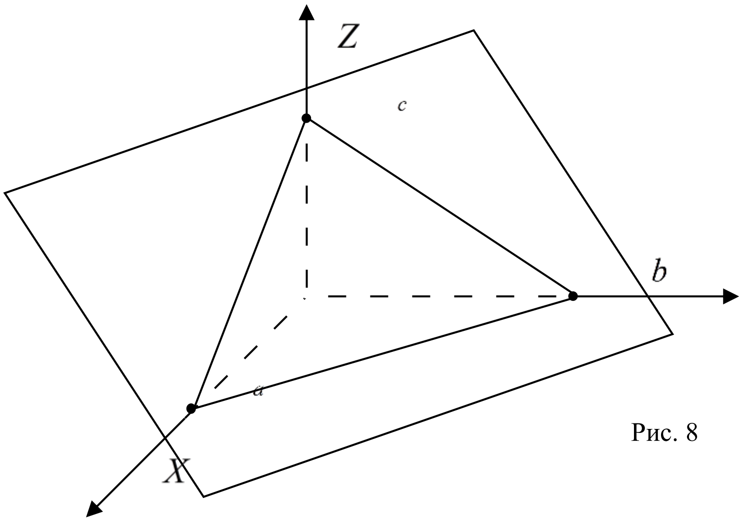


Рис. 8

5. Расстояние точки от плоскости.

Дана плоскость (α) - $Ax+By+Cz+D=0$ и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ вне плоскости, тогда расстояние d точки M_0 от плоскости (α) имеет вид:

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \qquad (16)$$

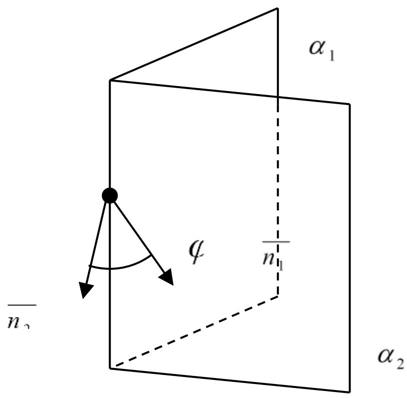
6. Угол между двумя плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей (рис. 9).

Даны две плоскости:

$\alpha_1 \rightarrow A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и

$\alpha_2 \rightarrow A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

и $\overline{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$; $\overline{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$ - нормальные векторы к соответствующим данным плоскостям.



Ри

За угол между двумя плоскостями принимается угол между их нормальными векторами:

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{n_1}\cdot\overline{n_2})}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|}=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (17)$$

Если плоскости параллельны, то векторы $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ коллинеарны, и, следовательно,

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (18)$$

условие параллельности двух плоскостей.

Если плоскости перпендикулярны, то

$$\varphi=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \cos\varphi=0\Rightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \qquad (19)$$

условие перпендикулярности двух плоскостей.

5. Прямая линия в пространстве

Прямую линию в пространстве можно представить как пересечение двух плоскостей, то есть совокупность двух уравнений плоскостей. Систему двух непараллельных уравнений (плоскостей) называют общими уравнениями прямой:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}.$$

5.а. Канонические уравнения прямой в пространстве.

Каждый не равный нулю вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей, называется направляющим вектором данной прямой и обозначается: $\bar{a}(m,n,p)$.

Если известна точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, прямой и направляющий вектор $\bar{a}(m,n,p)$, то прямая может быть определена (двумя) уравнениями вида:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad (20)$$

которые называются каноническими уравнениями прямой.

Канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и $M_1(x_1,y_1,z_1)$ имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \qquad (21)$$

Обозначив буквой t каждое из равных отношений в канонических уравнениях, мы получим: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$. Отсюда

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}. \qquad (22)$$

Уравнения (22) есть параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, параллельно вектору $\bar{a}(m,n,p)$. В уравнениях (22) t рассматривается как произвольно изменяющийся параметр; x, y, z - как функции от t. При изменении t величины x,y,z меняются так, что точка $M(x,y,z)$ движется по данной прямой.

5.б. Приведение общих уравнений прямой к каноническому виду

Пусть прямая линия задана общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}, \qquad (23)$$

где $\bar{n}_1(A_1,B_1,C_1)$, $\bar{n}_2(A_2,B_2,C_2)$ – нормальные векторы заданных плоскостей .

Выберем на прямой определенную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Для этого, например, z_0 зададим произвольно, а x_0 и y_0 получим из системы (23).

В качестве направляющего вектора возьмем вектор $\bar{a}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2$:

$$\bar{a}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}+\bar{j}\cdot\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, каноническое уравнения прямой, соответствующее системе (23), имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \qquad (24)$$

6. Угол между двумя прямыми

За угол между двумя прямыми

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

принимается угол между их направляющими векторами.

Здесь $\overline{a}_1(m_1, n_1, p_1)$, $\overline{a}_2(m_2, n_2, p_2)$ – направляющие вектора данных прямых:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}}{|\overline{a_1}|\cdot|\overline{a_2}|}=\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{25}$$

Условие параллельности двух прямых:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \tag{26}$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0 \tag{27}$$

Пример 4. Составить каноническое уравнение прямой L, проходящей через две заданные точки: $A(1,-2,1)$, $B(3,1,-1)$.

Согласно формуле (21) запишем:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}.$$

Пример 5. Составить уравнение прямой L_1, проходящей через точку $A(1,-1,2)$ параллельно прямой L_2:

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{0}$$

Решение. На прямой L_1 образуем текущий вектор $\overline{AM}(x-1, y+1, z-2)$. Из канонического уравнения прямой L_2 находим направляющий вектор $\overline{a_2}(5,-2,0)$, здесь $m=5,\ n=-2,\ p=0$. Так как $L_1 \parallel L_2$, то $\overline{a_2}\parallel\overline{AM}$ для любой точки $M(x,y,z)\in L_1$. Используя теперь условие параллельности, получаем канонические уравнения прямой L_1:

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{0}.$$

Пример 6. Известны уравнения двух прямых:

$$L_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}, \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + y - 5z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Проверить, являются ли L_1 и L_2 параллельными.

b) Проверить, являются ли L_1 и L_2 перпендикулярными.

c) Найти угол φ между прямыми L_1 и L_2.

Решение.

a) Из условия параллельности прямых имеем, $L_1 \parallel L_2$, если их направляющие вектора $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ параллельны. Координаты вектора $\overline{a_1}$ легко получаются из заданных канонических уравнений прямой L_1: $\overline{a_1}(-1, 3, 1)$. Для прямой L_2, определяемой пересечением плоскостей, направляющий вектор $\overline{a_2}$ находится как векторное произведение: $\overline{a_2} = \overline{n_1} \times \overline{n_2}$, где $\overline{n_1}(1, -1, 0)$, $\overline{n_2}(2, 1, -5)$.

Вычисляем,

$$\overline{a}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 5\overline{i} + 5\overline{j} + 3\overline{k}, \qquad \overline{a}_2(5, 5, 3).$$

Так как координаты векторов $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ не пропорциональны, то условие параллельности для векторов $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ не выполняется, а значит, L_1 не параллельна L_2.

b) Из условия перпендикулярности прямых, $L_1 \perp L_2$, если $\overline{a_1} \perp \overline{a_2}$. Так как $\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 13$, то условие перпендикулярности векторов $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ не выполняется. Стало быть, L_1 не перпендикулярна к L_2.

c) Угол между прямыми найдем по формуле (25):

$$\cos\varphi = \frac{13}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{59}}.$$

Пример 7. Привести к каноническому виду уравнения прямой:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Решение.

Найдем направляющий вектор прямой $\bar{a}$:

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -8\bar{i} - 7\bar{j} - 5\bar{k}, \qquad \bar{a}(-8,-7,-5).$$

За точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит искомая прямая в уравнении (20), можно принять точку пересечения ее с любой из координатных плоскостей, например с плоскостью YOZ. Так как при этом $x_0 = 0$, то координаты y_0, z_0 определяются из заданного уравнения прямой, если в нем положить $x = 0$:

$$\begin{cases} y - 3z = 0 \\ -3y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Откуда находим $z_0 = \dfrac{-1}{8}$, $y_0 = \dfrac{-3}{8}$ и $M_0\left(0, \dfrac{-1}{8}, \dfrac{-3}{8}\right)$.

Итак, воспользовавшись теперь общей формулой (20), получаем:

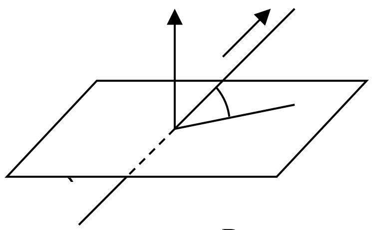
$$\frac{x}{-8} = \frac{y + 3/8}{-7} = \frac{z + 1/8}{-5}.$$

7. Прямая и плоскость

1) Угол между прямой и плоскостью.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 11).

Пусть даны плоскость (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ с нормальным вектором $\bar{n}(A, B, C)$ и прямая $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ с направляющим вектором $\bar{a}(m, n, p)$.



Рис

Угол между векторами $\bar{n}$ и $\bar{a}$ отличается от угла между прямой и плоскостью на $\frac{\pi}{2}$; $\quad cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right) = \frac{(\bar{n} \cdot \bar{a})}{|\bar{n}| \cdot |\bar{a}|}$ или

$$sin\,\varphi = \pm \frac{A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \qquad (28)$$

2) Условие параллельности прямой и плоскости**:**

$$A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0 \qquad (29)$$

3) Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad (30)$$

Условие того, что прямая лежит в данной плоскости.

Пусть $Ax + By + Cz = 0$ данная плоскость (α), $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ - каноническое уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно вектору $\bar{a}(m, n, p)$.

Условие принадлежности прямой плоскости (α) имеет вид:

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases} \qquad (31)$$

Если прямая лежит в плоскости, то она этой плоскости параллельна (первое уравнение) и любая точка прямой удовлетворяет уравнению плоскости (второе уравнение).

Условие того, что две прямые лежат в одной плоскости.

Пусть имеем две прямые:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Отсюда, направляющие вектора этих прямых $\bar{a}_1(m_1, n_1, p_1)$, $\bar{a}_2(m_2, n_2, p_2)$ и точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежат на соответствующих прямых. Если прямые лежат в одной плоскости, то векторы $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$,

$\overline{a_1}$ и $\bar{a}_2$ компланарны. Условие того, что две прямые лежат в одной плоскости равносильно условию компланарности этих векторов: $\left(\overline{M_1M_2}, \overline{a_1}, \overline{a_2}\right) = 0$ или

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (32)$$

Условие (32) является также критерием пересечения двух прямых.

Замечание. Если заданы две прямые, то они могут быть в одном из трех следующих соотношений:

1) параллельны, $\Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$,

2) пересекаются, $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

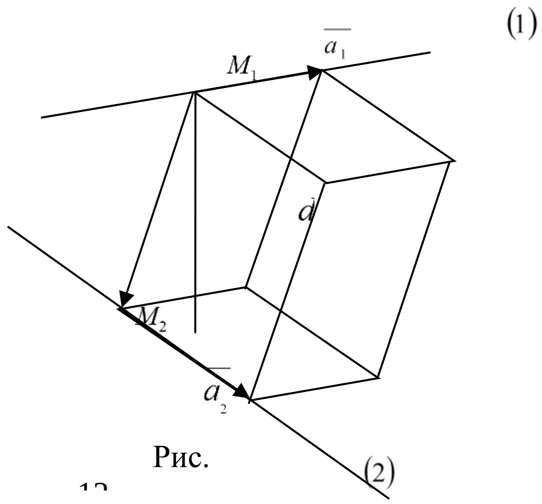


Рис. 12

3) прямые (1) и (2) скрещиваются (рис. 12), следовательно, $\left(\overline{M_1M_2} \cdot \overline{a_1} \cdot \overline{a_2}\right) \neq 0$. Тогда возникает вопрос об определении расстояния между скрещивающимися прямыми, как высоты параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{M_1M_2}, \overline{a_1}, \overline{a_2}$, как на сторонах:

$$d = \frac{\left|\left(\overline{M_1M_2} \cdot \overline{a_1} \cdot \overline{a_2}\right)\right|}{\left|\overline{a_1} \times \overline{a_2}\right|}.$$

Пример 8. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,-2,3)$ параллельно прямым :

$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{-1} \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = -3t + 1. \\ z = 4 \end{cases}$$

Решение.

На искомой плоскости образуем текущий вектор $\overline{AM}(x-1, y+2, z-3)$. Из канонического уравнения прямой L_1 и параметрического уравнения прямой L_2 получим координаты их направляющих векторов $\overline{a_1}(3,4,-1)$ и $\overline{a_2}(1,-3,0)$. Условие компланарности этих трех векторов $(\overline{AM}, \overline{a}_1, \overline{a}_2) = 0$ дает уравнение плоскости **α**:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 9. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2,1,0)$ и прямую L:

$$\begin{cases} x-2y+4z+1=0 \\ 3x-z+2=0 \end{cases}.$$

Решение.

На искомой плоскости образуем текущий вектор $\overline{AM}(x+2, y-1, z)$.

Уравнение прямой задано пересечением плоскостей, поэтому ее направляющий вектор $\overline{a}$ определяется из равенств:

$$\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\overline{i} + 13\overline{j} + 6\overline{k}, \qquad \overline{a}(2,13,6).$$

Так как $\overline{a} \| L$, $L \in \alpha$, то $\overline{a} \in \alpha$.

На прямой L зафиксируем произвольную точку B. Координаты B найдем из системы уравнений заданной прямой, положив в них, например, $x = 0$:

$$\begin{cases} -2y+4z+1=0 \\ -z+2=0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим $y = 4{,}5$, $z = 2$. Таким образом, $B(0;4{,}5;2)$. Соединив точки A и B, получим вектор $\overline{AB}(2;3{,}5;2)$, принадлежащий плоскости **α**.

Для любой точки $M(x,y,z) \in \alpha$ выполняется условие компланарности векторов $(\overline{AM}, \overline{a}, \overline{AB}) = 0$. И, так как

$\overline{AB}$ не параллелен $\bar{a}$, то уравнение плоскости дается равенством:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 2 & 13 & 6 \\ 2 & 3{,}5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Пример 10. Найти уравнение плоскости **α**, проходящей через прямые

$$L_1: \ \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-1} \quad \text{и} \quad L_2: \ \frac{x}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{3}.$$

Решение.

Из канонического уравнения прямой L_1 найдем координаты некоторой точки A, расположенной на L_1: $A(1,0,-2)$ и, соединив ее с текущей точкой $M(x,y,z)$, образуем текущий вектор $\overline{AM}(x-1, y, z+2) \in \alpha$.

Из уравнений прямых получим направляющие вектора $\overline{a_1}(3,2,-1)$, $\overline{a_2}(1,-2,3)$, которые, как и прямые L_1, L_2, принадлежат плоскости α. Так как для любой точки $M(x,y,z) \in \alpha$ выполняется условие компланарности векторов $\left(\overline{AM}, \bar{a}_1, \bar{a}_2\right) = 0$, а $\overline{a_1}$ не параллелен $\bar{a}_2$, то искомая плоскость описывается уравнением:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

8. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Порядком алгебраического уравнения называется высшая степень входящего в уравнение неизвестного. Порядок кривой не зависит от выбора осей координат на плоскости.

Общий вид кривой 2-го порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

К кривым 2-го порядка относятся ***эллипс***, частным случаем которого является ***окружность***, ***гипербола и парабола***.

8.а Окружность

Пусть $c(a,b)$ – центр окружности радиуса R, тогда уравнение окружности имеет вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

8.б. Эллипс (в декартовой системе координат)

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами эллипса, постоянна и равна $2a$ (рис. 13).

Пусть фокусами эллипса являются точки F_1 и F_2, при этом $F_1F_2 = 2c$ есть фокальная ось эллипса. $M(x, y)$ – некоторая точка, принадлежащая эллипсу. По определению эллипса, для любой его точки $M(x, y)$, имеем:

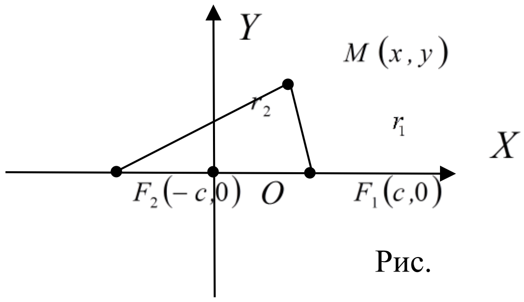


Рис.

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

Пусть ось OX совпадает с фокальной осью F_1F_2. Начало координат выберем посередине между фокусами F_1 и F_2, а ось OY перпендикулярно фокальной оси. При таком выборе системы координат уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Действительно, согласно рисунку 13, $MF_1 = \{(x - c), y\}$. Следовательно, $|MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Аналогично $|MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. Отсюда, по определению,

$$2a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Преобразуем полученное уравнение эллипса.

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 2 \cdot 2a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 = 4a^2 - 2 \cdot 2a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2$$

$$-2xc = 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2xc$$

$$xc + a^2 = a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$x^2c^2 + 2xca^2 + a^4 = a^2 \cdot (x+c)^2 + a^2 \cdot y^2$$

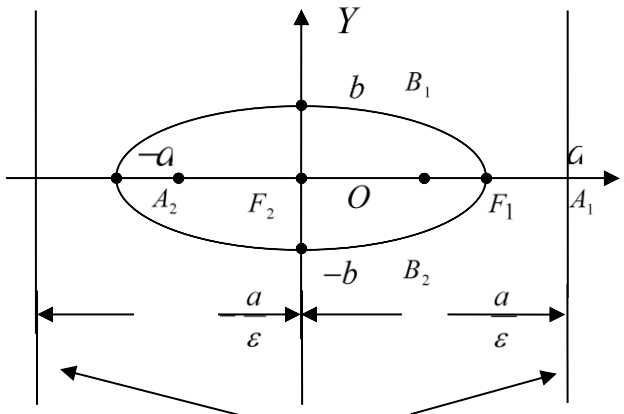
$$x^2c^2 + 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2 2xc + a^2c^2 + a^2 \cdot y^2$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - x^2c^2 + a^2 \cdot y^2 \quad \rightarrow \quad a^2 \cdot (a^2 - c^2) = x^2 \cdot (a^2 - c^2) + a^2 \cdot y^2$$

Отсюда получаем искомое уравнение эллипса.

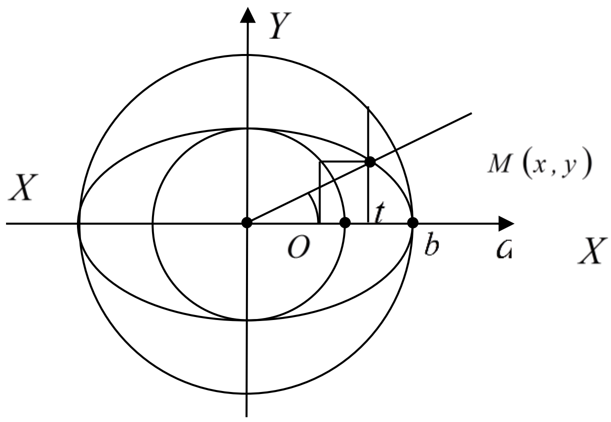
Так как из ΔF_1MF_2 следует, что $2a > 2c$ т.е. $a > c$, то полагают $a^2 - c^2 = b^2$ и получают ***каноническую*** (простейшую) ***форму уравнения эллипса:***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (33)$$



Ди-

Р



Р

Эксцентриситет эллипса: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}<1$.

A_1, A_2, B_1, B_2 – вершины эллипса, а директрисы имеют уравнения: $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ (рис. 14).

Параметрические уравнения эллипса (рис. 15): $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$

8.в. Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами гиперболы, постоянна и равна $\pm 2a$ (рис. 16).

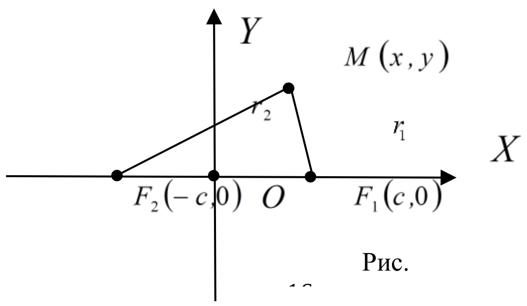


Рис.

Фокальная ось гиперболы $F_2F_1=2c$;

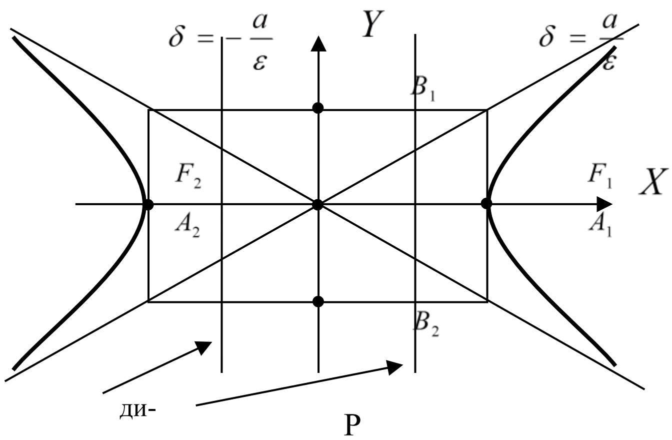
$r_1, r_2,$ – фокальные радиусы гиперболы, соответствующие точке $M(x,y)$. $r_2-r_1=\pm 2a$; $2c>2a$, $c>a$ (по свойству сторон треугольника).

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Обозначим $c^2 - a^2 = b^2$, тогда уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (34)$$



Вершины гиперболы: $A_1(a,0)$ $A_2(-a,0)$ – вещественные вершины; $B_1(0,b)$ $B_2(0,-b)$ – мнимые вершины.

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы (рис. 17).

Гипербола состоит из двух несмыкающихся ветвей, лежащих в углах между прямыми $y = -\frac{b}{a}x$, $y = \frac{b}{a}x$ и неограниченно приближающихся к этим прямым. $A_1 A_2$ вещественная ось, $B_1 B_2$ – мнимая ось.

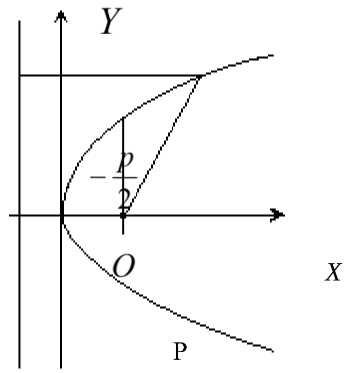
Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$.

Директрисы гиперболы обладают тем свойством, что отношение расстояния любой точки гиперболы до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы.

Уравнение директрис $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ или $x = \pm\frac{a^2}{c}$.

8.г. Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, одинаково удаленных от заданной прямой (директрисы) и заданной точки (фокуса). Пусть точка $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ – фокус. Прямая BD – директриса параболы; $M(x,y)$ – произвольная точка параболы, $FD = p > 0$ параметр параболы.



По определению параболы $MF = MB$. Уравнение параболы с вершиной в точке $O(0,0)$ и директрисой BD (см. рис. 18) , заданной уравнением $x = -\frac{p}{2}$, имеет канонический вид:

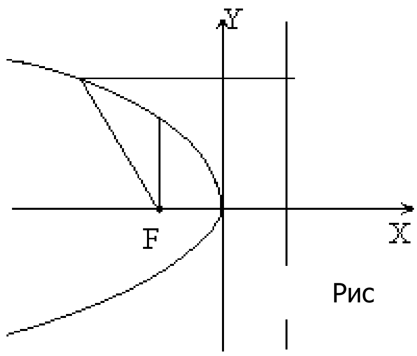
$$y^2 = 2px. \qquad (35)$$

Замечание: если положить $x = \frac{p}{2}$, то $y = \pm p$, то есть $NF = p$ $(NF \perp OX)$.

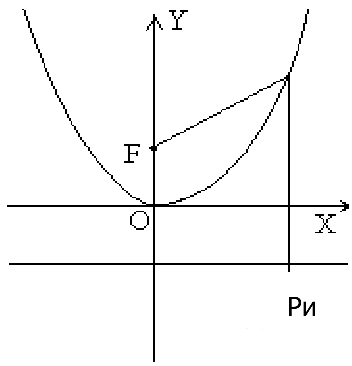
Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

Другие виды параболы:

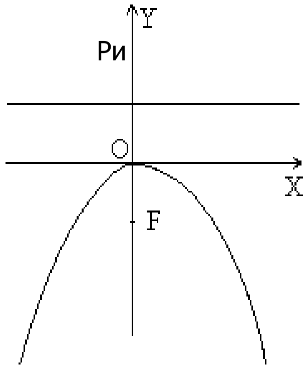
2) $y^2 = -2px$ (рис. 19) - парабола с осью симметрии OX, фокусом $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$ и директрисой $x = \frac{p}{2}$.



3) $x^2 = 2py$ - (рис. 20.) парабола с осью симметрии OY, фокусом $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ и директрисой $y = -\frac{p}{2}$.



4) $x^2 = -2py$ - (рис. 21.) парабола с осью симметрии OY, фокусом $F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$ и директрисой $y=\frac{p}{2}$.



ПРИМЕР 18. УСТАНОВИТЬ, ЧТО УРАВНЕНИЕ

$$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$$

определяет эллипс. Найти его центр C, полуоси, координаты фокусов F_1, F_2, эксцентриситет и уравнения директрис. Сделать чертеж.

Решение.

1. В заданном уравнении сгруппируем слагаемые, содержащие одноименные координаты и вынесем коэффициенты при квадратах за скобки:

$$5\cdot\left(x^2-6x\right)+9\cdot\left(y^2+2y\right)+9=0.$$

Дополним выражения, стоящие в скобках, до полного квадрата и полученные свободные константы перенесем в правую часть:

$$5\cdot\left(x^2-6x+9-9\right)+9\cdot\left(y^2+2y+1-1\right)+9=0,$$

$$5\cdot\left((x-3)^2-9\right)+9\cdot\left((y+1)^2-1\right)+9=0,$$

$$5\cdot(x-3)^2+9\cdot(y+1)^2=45.$$

Разделим обе части уравнения на **45,**

получим

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1.$$

2. Введем новую систему координат XOY, полученную сдвигом по каждой из координатных осей, и связанную со старой декартовой системой координат равенствами:

$$\begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y + 1 \end{cases} \qquad (1).$$

Тогда, исследуемое уравнение кривой относительно новых осей примет вид:

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{5} = 1, \qquad \frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1.$$

Это есть канонический вид эллипса с центром $\tilde{C}(0,0)$, большой полуосью $a = 3$, малой полуосью $b = \sqrt{5}$. Фокусы эллипса располагаются на оси OX на расстоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от начала координат O, в точках $\tilde{F}_1(c,0)$, $\tilde{F}_2(-c,0)$ в новой системе координат **XOY**.

Вычисляем, $c = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9-5} = 2$, $\tilde{F}_1(2,0)$, $\tilde{F}_2(-2,0)$. Мера сжатия, то есть эксцентриситет, дается равенством $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Отсюда $\varepsilon = \frac{2}{3}$. Директрисы эллипса в системе **XOY** задаются уравнениями $X = \pm\frac{a}{\varepsilon}$. В нашем случае, $X = \pm\frac{9}{2}$.

3. Чтобы найти координаты центра и фокусов в старой системе xoy, воспользуемся равенствами (1), осуществляющими связь систем координат:

центр C: $\begin{cases} 0 = x - 3 \\ 0 = y + 1 \end{cases}$, $C(3,-1)$,

фокусы F_1: $\begin{cases} 2 = x - 3 \\ 0 = y + 1 \end{cases}$, $F_1(5,-1)$, F_2: $\begin{cases} -2 = x - 3 \\ 0 = y + 1 \end{cases}$, $F_2(1,-1)$.

Уравнения директрис: $x - 3 = \pm\frac{9}{2}$.

4. Теперь построим эллипс. С помощью параллельного переноса системы координат xoy образуем новую систему координат XOY так, чтобы новое начало координат O совпадало с точкой $C(3,-1)$. При указанном выборе, оси координат системы XOY являются осями симметрии эллипса, а точка O - центром

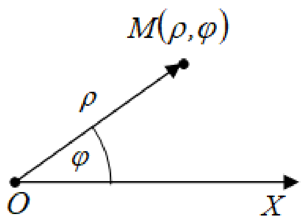
симметрии. Теперь симметрично $\boldsymbol{O}$ по оси $\boldsymbol{OX}$ отложим отрезки длины $\boldsymbol{a = 3}$, а по оси $\boldsymbol{OY}$ отрезки длины $\boldsymbol{b = \sqrt{5}}$.

Соединив найденные вершины, получим эллипс. На оси $\boldsymbol{OX}$ симметрично относительно $\boldsymbol{O}$ на расстоянии $\boldsymbol{c = 2}$ отложим точки F_1, F_2 - фокусы эллипса. Так как директрисы эллипса описываются уравнениями $\boldsymbol{x = const}$, то они располагаются параллельно $\boldsymbol{OY}$, причем одна из них проходит через точку $\boldsymbol{(7{,}5;0)}$, другая через $\boldsymbol{(-1{,}5;0)}$.

Полярная система координат

При решении многих задач аналитической геометрии оказывается более удобным определять положение точки на плоскости не прямоугольными декартовыми координатами, а так называемыми полярными координатами.

Система полярных координат задается полюсом - точкой O и полупрямой, исходящей из полюса («луч» - ρ - полярная ось).

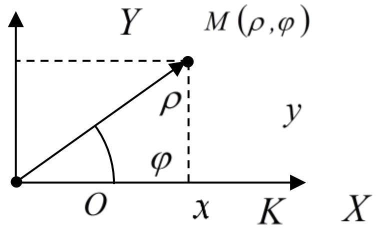


$OM = \rho$, $\angle MOX = \varphi$. Числа ρ и φ определяют положение точки M относительно системы координат, их называют полярными координатами точки $M(\rho,\varphi)$.

Чтобы установить взаимнооднозначное соответствие между точками плоскости и координатами этой точки, ограничим изменение полярного угла $\boldsymbol{\varphi}$ промежутком $\boldsymbol{-\pi < \varphi \le \pi}$ (или иным промежутком длины $\boldsymbol{2\pi}$). Значения $\boldsymbol{\varphi}$, удовлетворяющие этому условию, называют *главными значениями*. Назовем полярные координаты $\boldsymbol{\rho, \varphi}$ *основными*, если $\boldsymbol{\rho \ge 0}$, а $\boldsymbol{\varphi}$ есть главное значение полярного угла, т.е. если $\boldsymbol{-\pi < \varphi \le \pi}$.

***Связь между прямоугольными и полярными координатами*.**

Пусть полюс системы координат совпадает с началом декартовой системы координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью OX. Тогда из ΔOMK:



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

- это формулы перехода к декартовой системе координат.

Выведем формулы обратного перехода от декартовых координат к полярным.

Полярный радиус – вектор ρ, будучи расстоянием от точки M до начала координат, будет равен:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \text{а также,} \quad \cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

Угол φ определяется из условия: $tg\varphi = \dfrac{x}{y}$t и знаков функций $\cos\varphi = \dfrac{x}{\rho}$; $\sin\varphi = \dfrac{y}{\rho}$.

<u>Примеры решения задач</u>

Линейные образы в R_2

Пример 1. Даны точки $A(-1,2)$, $B(0,-2)$, $C(2,4)$.

Найти:

1) Уравнение прямой AB.

Согласно уравнению прямой, проходящей через две данные точки, запишем:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-4}, \quad \text{или} \quad 4x + y + 2 = 0.$$

2) Уравнение прямой L_1, проходящей через точку C, параллельно прямой AB.

Используем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно данному вектору, точка $M_0(x_0, y_0)$ это точка $C(2,4)$.

Прямая L_1 параллельна прямой AB значит перпендикулярна ее нормальному вектору $\bar{n} = \{4,1\}$. Следовательно, запишем

$$4 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y-4) = 0 \quad \to \quad 4x + y - 12 = 0.$$

3) Уравнение прямой L_2, проходящей через точку C, перпендикулярно прямой AB.

Перпендикулярно прямой, значит параллельно ее нормальному вектору, в нашем случае $\bar{n} = \{4,1\}$. Точка $M_0(x_0, y_0)$ это точка $C(2,4)$. Согласно уравнению (3), запишем

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y-4}{1} \to \quad x - 2 = 4y - 16 \quad \to \quad x - 4y + 14 = 0$$

4) Уравнение медианы AD треугольника $\Delta\, ABC$.

На медиане AD образуем текущий вектор $\overline{AM}\,(x+1, y-2)$.

Найдем координаты точки D - середины стороны BC:

$$x_D = \frac{0+2}{2} = 1, \qquad y_D = \frac{-2+4}{2} = 1, \qquad D = (1,1)$$

Образуем вектор $\overline{AD}(2,-1)$, расположенный параллельно текущему вектору $\overline{AM}$. Тогда, в силу условия параллельности векторов, получим уравнение медианы AD:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1}, \quad \text{или} \qquad x + 2y - 3 = 0.$$

5) Уравнение высоты BH.

На высоте BH возьмем текущую точку $M(x, y)$ и образуем текущий вектор $\overline{BH}\,(x-0, y+2)$. Так как $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, где $\overline{AC}\,(3,2)$, то условие перпендикулярности этих векторов порождает уравнение прямой BH (скалярное произведение векторов равно нулю):

$$3(x-0)+(y+2)=0 \quad \text{или} \quad 3x+2y+4=0.$$

6) Длину высоты BH.

Заметим, что длина высоты BH равна расстоянию от точки B до прямой AC. Найдем уравнение прямой AC.

На стороне AC образуем текущий вектор $\overline{AM}(x+1, y-2)$.

Запишем условие параллельности векторов $\overline{AM} \| \overline{AC}$, где $\overline{AC}(3,2)$:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}, \quad \text{или в общем виде} \quad 2x-3y+8=0.$$

Теперь, подставляя известные данные в формулу $d=\left|\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ имеем:

$$d=\frac{|2\cdot 0-3\cdot(-2)+8|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{14}{\sqrt{13}}.$$

Пример 2. Дана прямая L_1: $x-2y-3=0$ и точка $A(-1,2)$.
Найти:

1) Для прямой L_1 уравнение с угловым коэффициентом, угловой коэффициент k, отрезок, отсекаемый по оси ординат.

Разрешив уравнение прямой L_1 относительно Y,

получаем уравнение с угловым коэффициентом:

L_1: $y=0{,}5x-1{,}5$. Отсюда $k=0{,}5$, $b=-1{,}5$.

6) Нормаль $\overline{n_1}$ и направляющий вектор $\overline{a_1}$ прямой L_1 - $x-2y-3=0$.

Коэффициенты при переменных x, y в общем уравнении прямой L_1, есть координаты нормального вектора, то есть $\overline{n_1}(1,-2)$.

Поскольку направляющий вектор $\overline{a_1}(l,m)$ прямой L_1 – это любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой, то выполняется условие (перпендикулярность векторов):

$$\bar{a}\cdot\bar{n}=0=1\cdot l-2\cdot m \qquad \text{где} \qquad l^2+m^2\neq 0.$$

Дадим величине m какое-нибудь значение. Пусть, например, $m=1$, тогда $l-2=0$, то есть $l=2$. Получаем направляющий вектор $\overline{a_1}(2,1)$.

7) Каноническое уравнение прямой L_1.

Для составления канонического уравнения прямой L_1 нам необходимо знать точку M_0, лежащую на L_1, и направляющий вектор $\overline{a_1}$. Так как координаты вектора $\overline{a_1}=(2,1)$ были получены нами ранее в задание 2, осталось найти координаты точки M_0.

Зафиксируем произвольное значение, например, $y=0$ и подставим его в уравнение прямой L_1. Получим $x=3$. Следовательно, $M_0(3,0)$.

Воспользовавшись теперь каноническим уравнением прямой , находим:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-0}{1}.$$

8) Уравнение прямой L_2, параллельной L_1 - $x-2y-3=0$ и проходящей через точку $A(-1,2)$.

Прежде всего, заметим, что точка A не лежит на прямой L_1, поскольку ее координаты не удовлетворяют уравнению этой прямой. Поэтому можно построить прямую L_2, проходящую через A параллельно L_1, но не совпадающую с L_1.

Пусть $M(x,y)$ - текущая точка прямой L_2. Так как текущий вектор $\overline{AM}(x+1,y-2)$ перпендикулярен вектору нормали $\overline{n_1}(1,–2)$ прямой L_1, то $\overline{AM}\cdot\overline{n_1}=0$. Отсюда получаем уравнение прямой L_2:

$$1\cdot(x+1)-2\cdot(y-2)=0 \quad \text{или} \quad x-2y+5=0$$

9) уравнение прямой L_3, перпендикулярной L_1 - $x-2y-3=0$ и проходящей через точку $A(-1,2)$.

Пусть $\overline{AM}(x+1,y-2)$ - текущий вектор прямой L_3. Из условия параллельности $\overline{AM}$ и нормали $\overline{n_1}(1,–2)$ прямой L_1, получаем уравнение L_3:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}.$$

Пример 3. Проверить, являются ли прямые линии

$$L_1: \ 2x+y-4=0, \qquad L_2: \ \frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{3}$$

2. Параллельными.

Прямые L_1 и L_2 будут параллельны, если их нормали $\overline{n_1} \parallel \overline{n_2}$. Из общего уравнения прямой L_1 найдем нормаль $\overline{n_1}(2,1)$. Чтобы найти нормаль $\overline{n}_2$ приведем уравнение прямой L_2 к общему виду: $3x+y+5=0$. Отсюда $\overline{n_2}=(3,1)$.

Поскольку условие параллельности векторов $\overline{n_1}$ и $\overline{n}_2$ не выполняется, так как $\frac{2}{3}\neq\frac{1}{1}$, стало быть, L_1 и L_2 не параллельны.

б) Перпендикулярными.

Прямые L_1 и L_2 будут перпендикулярны, если $\overline{n_1} \perp \overline{n}_2$. Но условие перпендикулярности для векторов $\overline{n_1}$ и $\overline{n}_2$ не выполняется, так как $\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=2\cdot3+1\cdot1=7\neq0$. Следовательно, L_1 не перпендикулярна L_2.

в) Найти угол α между L_1 и L_2.

Угол между прямыми равен углу между их нормалями. Поэтому, используя формулу угла между двумя векторами,

получим

$$\cos\alpha=\cos\left(\angle\overline{n}_1,\overline{n}_2\right)=\frac{\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2}{\left|\overline{n}_1\right|\cdot\left|\overline{n}_2\right|}.$$

Так как $\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=7$, $\left|\overline{n_1}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, $\left|\overline{n_2}\right|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$, то $\cos\alpha=\frac{7}{5\sqrt{2}}$

.

Линейные образы в R3

Пример 4. Найти каноническое уравнение, если прямая задана в виде:

$$\begin{cases}2x-y+3z-1=0\\5x+4y-z-7=0\end{cases}$$

Для нахождения произвольной точки прямой, примем ее координату x = 0, а затем подставим это значение в заданную систему уравнений.

$$\begin{cases} y = 3z - 1 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ 12z - 4 - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$, т.е. A(0, 2, 1).

Находим компоненты направляющего вектора прямой.

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11; \quad n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 17; \quad p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Тогда канонические уравнения прямой:

$$-\frac{x}{11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

<u>Пример 5.</u> Привести к каноническому виду уравнение прямой, заданное в виде:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}$$

Для нахождения произвольной точки прямой, являющейся линией пересечения указанных выше плоскостей, примем z = 0. Тогда:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}; \quad y = -3x;$$

2x – 9x – 7 = 0;

x = -1; y = 3;

Получаем: A(-1; 3; 0).

Направляющий вектор прямой: $\vec{S} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -16 \\ 3 & 1 & -17 \end{vmatrix} = -35\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k}$.

Итого: $\frac{x+1}{-35} = \frac{y-3}{-14} = \frac{z}{-7}$; $\quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$;

Пример 6. Точки $A(2;7;4)$, $B(4;11;7)$, $C(9;15;4)$, $D(8;5;5)$. являются вершинами пирамиды. Найти:

а). Уравнения ребра AB;

б). Угол между ребрами AB и AC;

в). Уравнение грани ABC;

г). Угол между ребром AD и гранью ABC;

д). Уравнение высоты пирамиды, опущенной из вершины D, а также проекцию этой вершины на плоскость ABC.

Решение. а). Канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки, определяются соотношениями

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Следовательно, уравнения ребра AB имеют вид

$$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-7}{11-7}=\frac{z-4}{7-4}, \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y-7}{4}=\frac{z-4}{3}.$$

б). Угол между ребрами - это угол φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Эти векторы соответственно равны $\overline{AB}=\{4-2;11-7;7-4\}=\{2;4;3\}$ и $\overline{AC}=\{9-2;15-7;4-4\}=\{7;8;0\}$. Поэтому

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|}=\frac{2\cdot7+4\cdot8+3\cdot0}{\sqrt{2^2+4^2+3^2}\sqrt{7^2+8^2+0^2}}=\frac{46}{\sqrt{29}\sqrt{113}}=\frac{46}{\sqrt{3277}}.$$

$$\Rightarrow \quad \varphi=\arccos\frac{46}{\sqrt{3277}}$$

в). Составим уравнение грани ABC, используя условие компланарности векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и текущего вектора $\overline{AM}=\{x-1;y-2;z-3\}$:

$$\left(\overline{AM},\overline{AB},\overline{AC}\right)=\begin{vmatrix} x-2 & y-7 & z-4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$(x-2)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}-(y-7)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=0$$

$$-24(x-2)+21(y-7)-12(z-3)=0,$$

$$-24x+21y-12z-63=0$$

или

$$8x-7y+4z+21=0.$$

г). Угол α между прямой с направляющим вектором $\overline{a}$ и плоскостью с нормальным вектором $\overline{N}$ определяется формулой

$$\sin\alpha=\frac{\overline{a}\cdot\overline{N}}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{N}\right|}.$$

Направляющий вектор ребра равен $\overline{a}=\overline{AD}=\{8-2;5-7;5-4\}=\{6;-2;1\}$, координаты нормального вектора плоскости – это коэффициенты в общем уравнении плоскости, т.е. $\overline{N}=\{8;-7;4\}$. Отсюда получаем

$$\sin\alpha=\frac{6\cdot8+(-2)\cdot(-7)+1\cdot4}{\sqrt{6^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{8^2+(-7)^2+4^2}}=\frac{22\sqrt{5289}}{1763},$$

$$\alpha=\arcsin\frac{22\sqrt{5289}}{1763}\approx1.137 \text{ или } \approx 65^\circ.$$

д). Направляющим вектором высоты пирамиды, опущенной из вершины D, является нормальный вектор плоскости $\bar{N}=\{8;-7;4\}$. Поэтому канонические уравнения высоты следующие

$$\frac{x-8}{8}=\frac{y-5}{-7}=\frac{z-5}{4}.$$

Проекцию P вершины D на плоскость основания найдем как пересечение прямой DP и плоскости ABC. Для этого от канонических уравнений высоты перейдем к параметрическим уравнениям:

$$\frac{x-8}{8}=\frac{y-5}{-7}=\frac{z-5}{4}=t, \quad x=8t+8, \quad y=-7t+5, \quad z=4t+5$$

Подставляя последние соотношения в уравнение плоскости ABC, получаем уравнение для определения значения параметра t, соответствующего точке P:

$$8(8t+8)-7(-7t+5)+4(4t+5)+21=0 \quad \Rightarrow \quad 129t+70=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{70}{129}.$$

Подставляя полученное значение t в параметрические уравнения высоты, находим координаты точки P:

$$x=8\cdot\frac{70}{129}+8=\frac{1592}{129}, \quad y=-7\cdot\frac{70}{129}+5=\frac{155}{129}, \quad z=4\cdot\frac{70}{129}+5=\frac{925}{129}.$$

Пример 7. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,-2,3)$ параллельно прямым :

$$L_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z+1}{-1} \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x=t-2 \\ y=-3t+1 \\ z=4 \end{cases}.$$

Решение.

На искомой плоскости образуем текущий вектор $\overline{AM}(x-1, y+2, z-3)$. Из канонического уравнения прямой L_1 и параметрического уравнения прямой L_2 получим координаты их направляющих векторов $\bar{a}_1(3,4,-1)$ и $\bar{a}_2(1,-3,0)$. Условие компланарности этих трех векторов $(\overline{AM},\bar{a}_1,\bar{a}_2)=0$ дает уравнение плоскости α:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Пример 8. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2,1,0)$ и прямую L:

$$\begin{cases} x-2y+4z+1=0 \\ 3x-z+2=0 \end{cases}.$$

Решение.

На искомой плоскости образуем текущий вектор $\overline{AM}(x+2, y-1, z)$.

Уравнение прямой задано пересечением плоскостей, поэтому ее направляющий вектор $\overline{a}$ определяется из равенств:

$$\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\overline{i} + 13\overline{j} + 6\overline{k}, \qquad \overline{a}(2,13,6).$$

Так как $\overline{a} \| L$, $L \in \alpha$, то $\overline{a} \in \alpha$.

На прямой L зафиксируем произвольную точку B. Координаты B найдем из системы уравнений заданной прямой, положив в них, например, $x=0$:

$$\begin{cases} -2y+4z+1=0 \\ -z+2=0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим $y=4{,}5$, $z=2$. Таким образом, $B(0;4{,}5;2)$. Соединив точки A и B, получим вектор $\overline{AB}(2;3{,}5;2)$, принадлежащий плоскости **α**.

Для любой точки $M(x,y,z) \in \alpha$ выполняется условие компланарности векторов $(\overline{AM}, \overline{a}, \overline{AB}) = 0$. И, так как

$\overline{AB}$ не параллелен $\overline{a}$, то уравнение плоскости дается равенством:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 2 & 13 & 6 \\ 2 & 3{,}5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Пример 9 . Найти уравнение плоскости **α**, проходящей через прямые

$$L_1: \ \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-1} \quad \text{и} \quad L_2: \ \frac{x}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{3}.$$

Решение.

Из канонического уравнения прямой L_1 найдем координаты некоторой точки A, расположенной на L_1: $A(1{,}0{,}-2)$ и, соединив ее с текущей точкой $M(x,y,z)$, образуем текущий вектор $\overline{AM}(x-1, y, z+2) \in \alpha$.

Из уравнений прямых получим направляющие вектора $\overline{a_1}(3,2,-1)$, $\overline{a_2}(1,-2,3)$, которые, как и прямые L_1, L_2, принадлежат плоскости α . Так как для любой точки $M(x,y,z)\in\alpha$ выполняется условие компланарности векторов $(\overline{AM},\overline{a}_1,\overline{a}_2)=0$, а $\overline{a_1}$ не параллелен $\overline{a}_2$, то искомая плоскость описывается уравнением:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Кривые второго порядка

Пример10. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2{,}5y - 2 = 0$$
$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2{,}5y + 25/16 - 25/16 - 2 = 0$$
$$(x-2)^2 + (y+5/4)^2 - 25/16 - 6 = 0$$
$$(x-2)^2 + (y+5/4)^2 = 121/16$$

Отсюда находим O(2; -5/4);   R = 11/4.

Пример11. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$

1) Координаты нижней вершины: $x = 0$; $y^2 = 16$; $y = -4$.
2) Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; $c = 3$; $F_2(-3; 0)$.
3) Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-0}{-3-0}=\frac{y+4}{0+4};\qquad \frac{x}{-3}=\frac{y+4}{4};\qquad 4x=-3y-12;\qquad 4x+3y+12=0$$

Пример12. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Расстояние между фокусами:

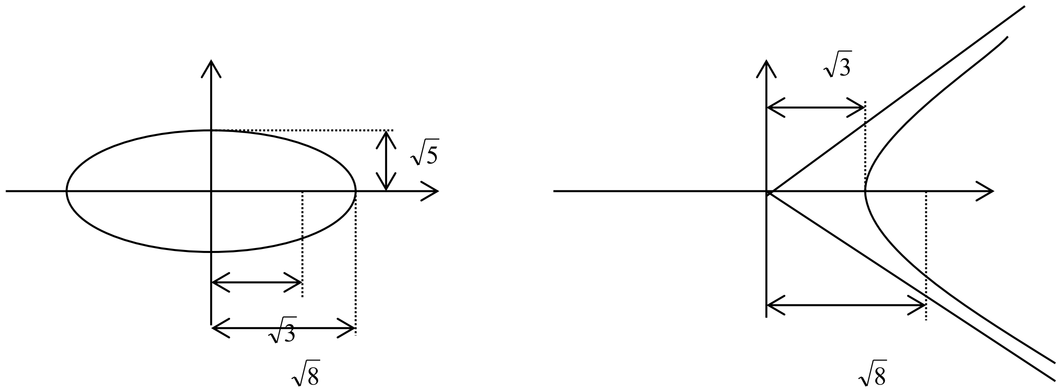
$2c = \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$, таким образом, $a^2 - b^2 = c^2 = ½$

по условию 2a = 2, следовательно a = 1, b = $\sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2$.

Итого: $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1/2} = 1$.

<u>Пример13.</u> Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Для эллипса: $c^2 = a^2 - b^2$.
Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2$.



Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

<u>Пример14.</u> Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 - 9 = 16$.
Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $e = c/a = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$;
$b^2 = 16 - 4 = 12$.

Итого: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ - искомое уравнение гиперболы.

<u>Пример15.</u> На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Из уравнения параболы получаем, что p = 4.
$r = x + p/2 = 4$; следовательно:
$x = 2$; $y^2 = 16$; $y = \pm 4$. Искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

Пример 16. **Установить, что уравнение**

$$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$$

определяет эллипс. Найти его центр C, полуоси, координаты фокусов F_1, F_2, эксцентриситет и уравнения директрис. Сделать чертеж.

Решение.

1. В заданном уравнении сгруппируем слагаемые, содержащие одноименные координаты и вынесем коэффициенты при квадратах за скобки:

$$5\cdot\left(x^2-6x\right)+9\cdot\left(y^2+2y\right)+9=0.$$

Дополним выражения, стоящие в скобках, до полного квадрата и полученные свободные константы перенесем в правую часть:

$$5\cdot\left(x^2-6x+9-9\right)+9\cdot\left(y^2+2y+1-1\right)+9=0,$$

$$5\cdot\left((x-3)^2-9\right)+9\cdot\left((y+1)^2-1\right)+9=0,$$

$$5\cdot(x-3)^2+9\cdot(y+1)^2=45.$$

Разделим обе части уравнения на **45,**

получим

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1.$$

2. Введем новую систему координат XOY, полученную сдвигом по каждой из координатных осей, и связанную со старой декартовой системой координат равенствами:

$$\begin{cases} X=x-3 \\ Y=y+1 \end{cases} \qquad (1).$$

Тогда, исследуемое уравнение кривой относительно новых осей примет вид:

$$\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{5}=1, \qquad \frac{X^2}{3^2}+\frac{Y^2}{(\sqrt{5})^2}=1.$$

Это есть канонический вид эллипса с центром $\tilde{C}(0,0)$, большой полуосью $a=3$, малой полуосью $b=\sqrt{5}$. Фокусы эллипса располагаются на оси OX на расстоянии $c=\sqrt{a^2-b^2}$ от начала координат O, в точках $\tilde{F}_1(c,0)$, $\tilde{F}_2(-c,0)$ в новой системе координат **XOY**.

Вычисляем, $c=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{9-5}=2$, $\tilde{F}_1(2{,}0)$, $\tilde{F}_2(-2{,}0)$. Мера сжатия, то есть эксцентриситет, дается равенством $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$. Отсюда $\varepsilon=\dfrac{2}{3}$. Директрисы эллипса в системе **XOY** задаются уравнениями $X=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$. В нашем случае, $X=\pm\dfrac{9}{2}$.

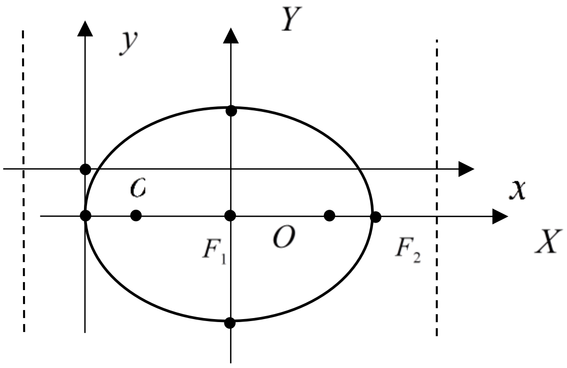
3. Чтобы найти координаты центра и фокусов в старой системе xoy, воспользуемся равенствами (1), осуществляющими связь систем координат:

центр C: $\begin{cases}0=x-3\\0=y+1\end{cases}$, $C(3,-1)$,

фокусы F_1: $\begin{cases}2=x-3\\0=y+1\end{cases}$, $F_1(5,-1)$, F_2: $\begin{cases}-2=x-3\\0=y+1\end{cases}$, $F_2(1,-1)$.

Уравнения директрис: $x-3=\pm\dfrac{9}{2}$.

4. Теперь построим эллипс. С помощью параллельного переноса системы координат xoy образуем новую систему координат XOY так, чтобы новое начало координат O совпадало с точкой $C(3,-1)$. При указанном выборе, оси координат системы XOY являются осями симметрии эллипса, а точка O - центром симметрии. Теперь симметрично O по оси OX отложим отрезки длины $a=3$, а по оси OY отрезки длины $b=\sqrt{5}$.



Соединив найденные вершины, получим эллипс. На оси OX симметрично относительно O на расстоянии $c=2$ отложим точки F_1, F_2 - фокусы эллипса. Так как директрисы эллипса описываются уравнениями $x=const$, то они располагаются параллельно OY, причем одна из них проходит через точку $(7{,}5;0)$, другая через $(-1{,}5;0)$.

Задачи для самостоятельного решения

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Прямая на плоскости

1) Выписать нормальный вектор $\bar{n}$ и угловой коэффициент k прямых, построить прямые
а) 5x-2y+7=0 б) 4x+9y=0 в) 5y+1=0 г) 3x+8=0 д) y=2 е) x=-3

2) Составить уравнения прямых, проходящих через данную точку M0 перпендикулярно данному вектору $\bar{n}$
а) M0(2,-3) $\bar{n}$(-4,3); б) M0(1,-5) $\bar{n}$(3,-1); в) M0(0,-2) $\bar{n}$(1,2); г) M0(0,0) $\bar{n}$(5,-4)
д) M0(1,4) $\bar{n}$(0,-3); е) M0(2,-1) $\bar{n}$(3,0)

3) Составить уравнения прямых, проходящих через данную точку M0 параллельно данному вектору $\bar{s}$
а) M0(1,-5) $\bar{s}$(2,-7); б) M0(1,0) $\bar{s}$(3,-1); в) M0(4,-1) $\bar{s}$(3,0); г) M0(-5,3) $\bar{s}$(0,-2)

4) Составить уравнения прямых, проходящих через две данные точки M1 и M2
а) M1(2,-7) M2(3,4); б) M1(1,-3) M2(5,-1); в) M1(1,8) M2(2,-7)
г) M1(1,3) M2(1,-4); д) M1(3,-2) M2(5,-2); е) M1(2,7) M2(2,-1)

5) Составить уравнения прямых, отсекающих на осях координат отрезки
а) а=2, в=-3 б) а=5, в=1 в) а=3, в=-4

6) Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой l от координатного угла
а) 3x-2y+6=0 б)-2x+y-4=0 в) x-5y-10=0

7) Рассмотреть пары прямых, выявить параллельные, перпендикулярные, найти угол между прямыми
а) x-2y+7=0 (l1) б) 3x-6y+1=0 (l1) в) 2x-8y+5=0 (l1) г) x-8y+1=0 (l1)
2x-4y+1=0 (l2) 6x+3y-7=0 (l2) -x+4y+3=0 (l2) 8x+y-5=0 (l2)
д) 3x-y+5=0 (l1) е) x-5y+1=0 (l1)
2x+y-7=0 (l2) 2x+3y-7=0 (l2)

8) При каком значении α прямые параллельные?
а) 2x-3y+5=0 l1 б) x - α y+8=0 l1 в) α x-3y+7=0 l1
α x+y-1=0 l2 5x+2y-1=0 l2 2x+α y-1=0 l2

9) При каком α прямые перпендикулярны ?

а) α x-3y+1=0 б) 3x- α y+1=0 в) α x-7y=0
α x+5y-6=0 x+5y-2=0 3x+ α y-1=0

10) Составить уравнение прямой l1 , проходящей через данную точку М0 параллельно данной прямой l
а) М0(5,-2) l: 3x-y=0 б) М0(1,0) l: x-2y+1=0 в) М0(1,-3) l: x-5y+2=0
г) М0(0,-3) l: x-6y=0

11) Составить уравнение прямой l1, проходящей через точку М0 перпендикулярно прямой l
а) М0(2,-4) l: x+3y-2=0 б) М0(1,0) l: x-y+7=0 в) М0(1,-8) l: 3x+5=0
г) М0(2,0) l: 5y+2=0

12) Вычислить расстояние от точки М0 до прямой l
а) М0(2,-7) l:x-2y+3=0 б) М0(2,-3) l:3y+7=0 в) М0(1,-2) l:2x+5=0

13) Даны вершины ΔABC. A(1,1) B(3,3) C(5,2) найти : 1) уравнение и длину стороны АС, 2) уравнение и длину медианы ВМ, 3) уравнение и длину высоты ВК, 4) $\angle BAC$, 5) уравнение прямой, проходящей через точку В параллельную АС.

14) Вычислить расстояние между параллельными прямыми
а) l1: 3x-4y-10=0 б) l1:x-2y+1=0 в) l1:2x+y-7=0
l2: 6x-8y+5=0 l2:2x-4y+5=0 l2:4x+2y-1=0

15) Найти проекцию точки Р на прямую l
а) Р(-6,4) l:4x-5y+3=0 б) Р(1,0) l:x+2y-5=0

16) Найти точки пересечения прямых
а) x+5y-1=0 б) 3x-y+1=0 в) 2x+3y-5=0
2x-7y+4=0 x-2y+2=0 3x-5y+3=0

Плоскость

17)Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М0 $\perp$ вектору $\overline{N}$

а) М0 (2,-1,3) $\overline{N}$ (5,-3,2) ; б) М0 (0,0,0) $\overline{N}$(1,-2,3) ; в) М0 (-1,12,1) $\overline{N}$(0,2,-3) ; г) М0 (2,0,-1) $\overline{N}$(3,0,1)

18)Выписать нормальные вектора плоскостей
а) 3x-5y+2z-7=0 б) 5y-x+11=0 в) x-y+2z=0 г) 2y+z=0 д) x=-2 е) y=5 ж) z-3=0

19)Составить уравнение плоскости, проходящие через 3 данные точки М1, М2 и М3

а) M1 (1,2,-3)   M2 (2,-1,0)   M3 (1,5,2)
б) M1 (5,-4,1)   M2 (3,0,-2)   M3 (1,2,1)

20)Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки a,b и с. Построить плоскости
а) a=5, b=2, c=-4   б) a=-2, b=2, c=1   в) a=3, b=-2, c=5

21)Построить плоскости и вычислить площади треугольников, которые эти плоскости отсекают от координатных углов.
а) x+2y+3z-6=0   б) 2x-5y+z+10=0   в) 3x-5y+z-15=0

22)При каких значениях параметров l и m плоскости параллельны? 926(1)
2x+ly+3z-5=0
mx-6y-6z+z=0

23)При каком значении параметра l плоскости перпендикулярны? 927(1)
3x-5y+lz-3=0
x+3y+2z+5=0

24) Найти угол между плоскостями. 928
а) x-y$\sqrt{2}$ +z-1=0, x+y$\sqrt{2}$ -z+3=0 ; б) 3y-z=0, 2y+z=0 ;
в) 6x+3y-2z=0, x+2y+6z-12=0; г) x+2y+2z-3=0, 16x+12y-15z-1=0

25) Составить уравнения плоскостей, проходящих через
а) точку M1(2,-3,5) параллельную плоскости oxy,
б) точку M1(1,-5,1) параллельную плоскости oxz,
в) точку M1(0,-1,2) параллельную плоскости oyz.

26) Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку M0 параллельную плоскости β
а) M0 (5,1,-2) β : x-2y+3z-4=0
б) M0 (1,-2,1) β : 2x-y+z-5=0

27)Вычислить расстояние от точки M0 до плоскости α
а) M0(2,3,-5) α : x-2y+3z=0
б) M0(1,0,1) α : 2x-y+z-5=0

<u>**Прямая в пространстве**</u>

28) Составить канонические и параметрические уравнения прямых

а) проходящей через точку $M_0(2,-1,3)$ параллельно вектору $\bar{s}=\{2,5,-1\}$

б) проходящей через точку $M_0(2,-3,1)$ параллельно вектору $\bar{s}=\{1,5,-2\}$

в) проходящей через две точки $M_1(5,-2,1)$ и $M_2(1,-3,4)$

г) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$ д) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$

29) Выписать направляющий вектор прямой

а) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ б) $\begin{cases} x=2-3t \\ y=-1+t \\ z=6t \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=1 \\ y=-5t \\ z=0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y-3z-1=0 \\ 2x-y-9z-2=0 \end{cases}$

30) Доказать параллельность прямых

а) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ и $\dfrac{x-4}{-9}=\dfrac{y+1}{6}=\dfrac{z-2}{-3}$

б) $\begin{cases} x=2t+3 \\ y=-t+2 \\ z=t-7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+3y+z-2=0 \\ x-y-3z-4=0 \end{cases}$

31) Доказать перпендикулярность прямых

а) $\dfrac{x-5}{-1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ и $\begin{cases} x=2t+3 \\ y=-t \\ z=4 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y-3z-1=0 \\ 2x-y-9z-2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-2y-z+2=0 \end{cases}$

32) Найти угол между прямыми

а) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{\sqrt{2}}$ и $\begin{cases} x=t-3 \\ y=2+t \\ z=\sqrt{2}t \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x+y-6z-2=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3t-2 \\ y=-2t+1 \\ z=4 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x-2y+8=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$

<u>Прямая</u> и <u>плоскость в пространстве</u>

33) Найти точку пересечения прямой и плоскости

а) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ $\qquad 2x+3y+z-1=0$

б) $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ $\qquad 3x+5y-z-2=0$

34) При каком значении m прямая параллельна плоскости

а) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ $\qquad x-3y+6z+7=0$

б) $\begin{cases} x=2t \\ y=1-4t \\ z=5t \end{cases}$ $\qquad mx-y+2z=0$

35) При каких значениях А и В прямая перпендикулярна плоскости

а) $\begin{cases} x=3+2t \\ y=5-3t \\ z=-2-2t \end{cases}$ $\qquad Ax+By+3z-5=0$

б) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{A}=\frac{z-1}{B}$ $\qquad 2x-y+3z=0$

36) Найти угол между прямой и плоскостью

а) $\begin{cases} x-2z+3=0 \\ y+3z-1=0 \end{cases}$ и 2x-y+z+3=0

б) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-8}{1}$ $\qquad 3x+y+8z+1=0$

37) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М(3,5,-4) перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{3}$

38) Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки К(2,-1,3) на плоскость 3x-2y+z-5=0.

39) Найти проекцию точки А(2,-1,0) на плоскость x-2y+z-2=0

Типовой расчет по теме «Аналитическая геометрия»

Вариант 1.

1. Даны вершины треугольника: $A(4,6)$, $B(-4,0)$ и $C(-1,-4)$.

Найти уравнение стороны AC и уравнение медианы CK.

2. Определить угол, образованный прямыми:

$2x + 3y = 0$ и $z - y + 5 = 0$.

3. Четырехугольник *ABCD* задан координатами своих вершин: $A(2, -3, 1)$, $B(-1,1,1)$, $C(-4,5,6)$, $D(2, -3,6)$. Доказать, что *ABCD* - это плоский четырехугольник. Найти площадь четырехугольника *ABCD*.

4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через $M(0,2,3)$

параллельно $\bar{a}=(1,0,1)$ и $\bar{b}=(2,1,3)$.

b) Найти уравнение плоскости, проходящей через $O(0,0,0)$ и прямую

$$\begin{cases} x - y + z - 7 = 0 \\ 3x + 2y - 12z + 5 = 0 \end{cases}$$

5. Найти прямую, проходящую через точку (1, -3, 2) и перпендикулярную к прямым $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+3}{-5}$.

Вариант 2.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x - y - 3 = 0$ и $2x + 3y - 11 = 0$, параллельно прямой $5x - 4y - 17 = 0$.

2. Определить угол, образованный прямыми:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{x+5}{2} \text{ и } \frac{z}{1} = \frac{y-7}{4}.$$

3. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках A(2,-1,1), B(5,5,4), C(3,2,-1), D(4,1,3).

4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через $M(1,2,3)$, $P(2,-1,3)$ параллельно $\bar{a}=(1,2,2)$.

b)Найти равнение плоскости, проходящей через прямые $\frac{x-1}{3} = \frac{y-7}{-5} = \frac{z+1}{4}$ и $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{4}$.

5. Найти уравнение перпендикуляра , опущенного из точки (2, 3, -1) на плоскость $4x+5y-2z+3=0$.

Вариант 3.

1. Даны вершины треугольника: $A(0,1)$, $B(1,0)$ и $C(1,1)$. Найти уравнение высоты BD и уравнение стороны BC.
2. Определить угол, образованный прямыми:

   $y = \frac{1}{2}x - 1$ и $y + 3 = -3(x + 4)$.
3. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$=(1,1,1), $\bar{b}$=(-1,0,1), $\bar{c}$ =(1,1,0).
4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через $M(0,0,1)$ параллельно $\bar{a}$ =(2,1,5) и $\bar{b}$=(1,0,1).

   b) Найдите уравнение плоскости, проходящей через прямые
   $\begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$
5. Найти угол между прямой $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x - z - 2 = 0 \end{cases}$

   и плоскостью $2x - y + z + 5 = 0$.

Вариант 4.

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых

   $3x - y - 3 = 0$ и $4x + 3y - 4 = 0$, перпендикулярно и первой из них.
2. Определить угол, образованный прямыми:

   $x - 3y + 2 = 0$ и $2x + y = 0$.
3. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$=(1,-2,5), $\bar{b}$ =(2,-3,4).

   и $\frac{x-1}{3} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{-2}$.
4. а) Найти уравнение плоскости, проходящей через $M(0,0,1)$

   и $P(-1,0,1)$параллельно вектору $\bar{a}$=(2,1,2).

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через $M(1,2,3)$ параллельно прямым $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

5. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(1, -2, 3)$ на прямую $\begin{cases} x - 2y + 4z - 2 = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$

Вариант 5

1. Найти уравнения медиан треугольника, образованного прямыми

   $2x - 3y + 11 = 0$ и $3x + y - 11 = 0$ и $x + 4y = 0$.
2. Определить угол, образованный прямыми:

$y = 5x + 7$ и $y = 3x + 2$.

3. Найти объем пирамиды с вершинами A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,6), D(2,3,8). Определите высоту, опущенную на грань *ABC*.
4. a) найти уравнение плоскости, проходящей через M (1, 1, 1) и ось *oX*.

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через M(1, 2, 3) прямую $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$.
5. Найти прямую, проходящую через точку *A*(-1, 2, 2) параллельно прямой

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Вариант 6

1. Найти основание перпендикуляра, опущенного из точки *M*(-1,2) на прямую $3x - 5y - 21 = 0$.
2. Определить угол, образованный прямыми:

   $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{1}$ и $\frac{x+5}{-1} = \frac{y-1}{3}$.
3. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках *A*(2,1,1), *B*(3,7,-2), *C*(4,9,2).
4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *A*(1,2,3), *B*(2,1,3), *C*(0,-1,2).

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через *O*(0,0,0) и *P*(2,1,-1) перпендикулярно плоскости $2x - 3z = 0$.

5. Найти угол между прямой $\begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $2x - y + z + 3 = 0$.

Вариант 7

1. Даны вершины треугольника: *A*(-3,2), *B*(5,10) и *C*(7,2). Найти точку пересечения высот *AD* и *BE*.
2. Определить угол, образованный прямыми:

   $2x + 5y - 3 = 0$ и $5x + 2y - 6 = 0$.

3. Проверить, лежат ли точки *A*(2,-1,-2), *B*(1,2,1), *C*(2,3,0), *D*(5,0,-6) в одной плоскости.
4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через *M*(2,3,8) и ось *Oy*.

b) Найти уравнение плоскости, проходящей через $M(1,1,2)$ и $P(6,5,4)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{3}$.

5. Найти прямую проходящую через точку A(7,2,-5) и точку пересечения прямой $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ и плоскости $x+2y-4z+1=0$.

Вариант 8

1. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x+y=1$ и $3x-y+4=0$ и точка пересечения его диагоналей К(3,3). Найти уравнение двух других сторон.
2. Определить угол, образованный прямыми: $y-2=2(x+1)$ и $y+1=-3(x-7)$.
3. Найти объем пирамиды с вершинами $A(1,0,1)$, $B(3,2,4)$, $C(-1,4,4)$, $D(1,1,3)$.
4. а) Найти уравнение плоскости, проходящей через $M(3,4,-2)$ параллельно $\bar{a}=(4,7,8)$ и $\bar{b}=(3,2,3)$.

b) Найти уравнение плоскости, проходящей через M(0,4,-2) параллельно прямым $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{3}$ и $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-3}{1}$.

5. Через точку пересечения прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{1}$ и плоскости $x+y-z+2=0$ провести прямую параллельно прямой $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{-2}$.

Вариант 9

1. Даны вершины треугольника: $A(2,3)$. $B(0,-3)$ и $C(5,-2)$. Составить уравнения высоты AK и медианы CD.
2. Определить угол, образованный прямыми: $\frac{x-5}{4}=\frac{y+1}{3}$ и $\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{5}$.
3. Вершины треугольника находятся в точках $A(-1,1,2)$, $B(1,1,0)$, $C(2,6,-2)$. Найти площадь треугольника ABC и высоту BH.
4. а) Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,6,4)$, $B(6,6,-3)$, $C(-1,5,4)$.

b)Найти равнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+5}{-1}$ перпендикулярно плоскости x-y+3z+5=0.

5. Найти угол между прямыми $\begin{cases}3x-4y-2z=0\\2x+y-2z=0\end{cases}$ и $\begin{cases}4x+y-6z-2=0\\y-3z+2=0\end{cases}$.

Вариант 10

1. Найти уравнение прямой, которая проходит через точку $A(5,-1)$ параллельно прямой, соединяющей точки $B(0,3)$ и $C(2,0)$.
2. Определить угол, образованный прямыми:

$3x+4y-12=0$ и $5x-12y+60=0$.

3. Проверить, лежат ли точки $A(2,3,1)$, $B(0,1,2)$, $C(4,5,2)$, $D(0,0,1)$ в одной плоскости.
4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через $M(1,2,0)$ параллельно плоскости $x+3y-4z+2=0$.

b) Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x-y+3z-1=0 \\ 2x+y+z-5=0 \end{cases}$ перпендикулярно плоскости $3x-y=0$.

5. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $A(3,1,-2)$ и точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ и плоскости $2x-3y-5z-3=0$.

Вариант 11

1. Даны вершины треугольника: $A(0,5)$, $B(3,1)$ и $C(-6,-3)$. Найти центр описанной окружности.
2. Определить угол, образованный прямыми:

$y=-\frac{2}{3}(x+5)$ и $y=x-4$.

3. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2,-1,-1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$, $D(9,0,1)$.
4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,0,2)$,

$B(0,-1,5)$ параллельно оси Ox.

b) Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{5}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{2}$ перпендикулярно $x-y+5z-2=0$.

5. Через точку A(3,-1,2) провести прямую, параллельную плоскостям $2x-y+2z-7=0$, $x-y-z+3=0$.

Вариант 12

1. Дана прямая $x+2y-4=0$ и точка $A(5,7)$. Найти проекцию точки A на данную проекцию.
2. Определить угол, образованный прямыми:

$\frac{x+7}{3}=\frac{y+2}{4}$ и $\frac{x+3}{12}=\frac{y-8}{5}$.

3. Вершины треугольника находятся в точках $A(2,1,0)$, $B(-3,-6,4)$,

$C(-2,4,1)$. Найти площадь треугольника ABC и высоту BH.

4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через $M(1,-4,5)$ параллельно Oxy.

b) Найти уравнение плоскости, проходящей через $M(2,1,3)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$

5. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ с плоскостью $3x - 3y + 2z - 5 = 0$ перпендикулярно плоскости $2x - y - z + 17 = 0$.

Вариант 13

1. Даны две вершины треугольника $A(-4,3)$ и $B(4,-1)$ и точка пересечения высот $K(3,3)$. Найти третью вершину C.
2. Определить угол, образованный прямыми:

   $5x - y + 7 = 0$ и $2x - 3y + 1 = 0$.
3. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}=(1,1,2)$, $\bar{b}=(-1,1,-1)$, $\bar{c}=(4,5,0)$.
4. а) Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Oy параллельно $\bar{a}=(2,9,-8)$.

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x-8}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z-3}{2}$.

5. Найти угол между прямой $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$ и плоскостью $3x + 5y - 4z + 2 = 0$.

Вариант 14

1. Зная уравнения двух сторон параллелограмма $x - 3y = 0$ и $2x + 5y + 6 = 0$ и одну из его вершин С(4,-1), составить уравнения двух других сторон параллелограмма.
2. Определить угол, образованный прямыми:

   $y = 2x - 3$ и $y = \frac{1}{2}x + 1$.
3. Найти объем пирамиды с вершинами $A(8,3,0)$, $B(5,4,3)$, $C(4,3,3)$, $D(1,2,1)$.
4. а) Найти уравнение плоскости, проходящей через $M(1,2,0)$ параллельно $\bar{a}=(2,0,7)$ и $\bar{b}=(1,1,0)$.

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через $M(2,1,0)$ перпендикулярно плоскостям $x + y - z = 0$, $y - 2x = 0$.

5. Найти угол между прямыми $\begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$ и

$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + 2y - 5z + 1 = 0 \end{cases}$.

Вариант 15

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точки пересечения пар прямых

   $2x - y = 0, x + 4y - 2 = 0$ и $3x - 7y + 4 = 0$.
2. Определить угол, образованный прямыми:

   $\frac{x-5}{11} = \frac{y+1}{3}$ и $\frac{x+4}{4} = \frac{y-2}{3}$.
3. Проверить, лежат ли точки *A*(5,1,2), *B*(-1,0,4), *C*(2,3,2), *D*(5,3,2) в одной плоскости.
4. а) Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *A*(1,2,1), *B*(0,-2,3), *C*(1,6,-5).

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через *P*(1,0,1) и *M*(0,2,-4) перпендикулярно плоскости $x + 2y + 5z - 8 = 0$.
5. Найти проекцию точки *A* (4,-3,1) на плоскость $x+2y-z-3=0$.

Вариант 16

1. Даны вершины треугольника: *A*(-2,0), *B*(2,6) и *C*(4,2).

   Найти уравнение стороны *BC* и уравнение медианы *AE*.
2. Определить угол, образованный прямыми:

   $2x + y = 0$ и $3x - y - 4 = 0$.
3. Найти объем треугольной призмы, построенной на векторах $\bar{a}$=(2,3,4), $\bar{b}$ (1,1,-2), $\bar{c}$=(2,3,8).
4. а) Найти уравнение плоскости, проходящей через *M*(1,1,2) параллельно $\bar{a}$ =(1,-2,3) и $\bar{b}$=(-5,9,0).

   Найти уравнение плоскости, проходящей через *P*(-3,2,5) и перпендикулярной плоскостям $4x + y = 0$, $x - 2y + z - 11 = 0$.
5. Найти угол между прямыми $\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = t \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z - 8 = 0 \end{cases}$.

Вариант 17

1. Через точку пересечения прямых *3x-y=0* и *x+4y-2=0* провести прямую, перпендикулярную к прямой *2x+7y=0.*
2. Определить угол, образованный прямыми *y=-3x+7* и *y=2x+1.*
3. Даны вершины тетраэдра *A (1, 2, -1), B (0, 1, 5), C (-1, 2, 1), D (2, 1, 5).* Найти длину его высоты, опущенной из вершины *D.*
4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через *M (-8, 6, 11), P (1, 5, -2)* параллельно вектору *a= (2, 2, 6).*

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{1}$ и $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{1}$.

5. Через точку пересечения прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$ и плоскости *3x-2y+z-3=0* провести прямую параллельно прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$.

Вариант 18

1. Даны уравнения высот треугольника *ABC: x+y-2=0, 9x-3y-4=0* и вершина *A (2;2)*. Найти стороны треугольника.
2. Определить угол, образованный прямыми $\frac{x+1}{5}=\frac{y-4}{12}$ и $\frac{x-9}{2}=\frac{y+7}{3}$
3. Даны пирамида с вершинами *A (1, 0, 1), B (0, 2, 3), C (2, 4, 0), D (3, 3, 4).* Найти высоту, опущенную на грань *ABC.*
4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через *M (1, 6, 2)* параллельно векторам *a= (2, 7, 8)* и *b= (-1, 6, 7).*

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через *M (5, 6, 7)* и прямую $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-5}{-2}$.

5. Найти угол между прямыми $\begin{cases} x-5z+2=0 \\ y-4z-7=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+2z-3=0 \\ 4y-9z+4=0 \end{cases}$.

Вариант 19

1. Даны стороны треугольника: *x+2y+5=0 (AB), 3x+y+1=0 (BC), x+y+7=0 (AC)*. Найти уравнение высоты *BD.*
2. Определить угол, образованный прямыми *3x-4y-6=0* и *8x+6y-11=0.*
3. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках *A (1, 2, 0), B (2, 2, 1), C (1, 4, -1).*
4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через *M (1, 0, 1), A (-2, 6, 4)* параллельно вектору *a= (2, 6, -5).*

b) Найти уравнение плоскости, проходящей через *P (1, 1, 1)* параллельно прямым $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{3}$, $\frac{x}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{3}$.

5. Найти угол между прямой $\begin{cases}x-5z+2=0\\y-4z-7=0\end{cases}$ и плоскостью *2x+y+z-4=0.*

Вариант 20

1. Дан треугольник *ABC: A (-2, -2), B (-1, 2), C (6, 2)*. Составить уравнения высоты *BD* и медианы *BK.*
2. Определить угол, образованный прямыми *4x-3y+7=0* и *x+y-12=0.*
3. Найти объем пирамиды, построенной на векторах: *a= (3, 0, -1), b= (2, 4, 3), c= (-1, 3, 2).*
4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через *P (-5, 1, 9)* и ось *Oy.*
   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через *M (1, 2, 3)* и прямую $\frac{x}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-5}$.
5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку *A (1, 2, 3)* и точку пересечения прямой $\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{1}$ с плоскостью *x+2y-z+3=0.*

Вариант 21

1. Найти проекцию точки *(-5, 6)* на прямую *7x-13y-105=0.*
2. Определить угол, образованный прямыми $y=\frac{1}{3}(x+2)$ и *y=-2x.*
3. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках *A (4, 8, 1), B (0, 0, 1), C (5, 2, 3).*
4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *A (1, 1, 2), B (0, 2, 0), C (-1, 0, 6).*
   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *O (0, 0, 0)* и *P (2, 1, -1)* перпендикулярно плоскости *4x-y+2z-3=0.*

5. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки *A (2, 3, -1)* на плоскость *5x-3y+1=0.*

Вариант 22

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых *2x+3y-5=0, 4x-3y-1=0* и параллельной прямой *6x-7y+9=0.*
2. Определить угол, образованный прямыми $\frac{x-3}{12}=\frac{y+4}{-5}$ и $\frac{x-2}{4}=\frac{y-5}{5}$
3. Проверить, лежат ли точки *A (3, 7, -3), B (5, 2, 1), C (1, 0, 1), D (-3, 2, 1)* в одной плоскости.
4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через *M (4, 2, -3)* параллельно векторам *a= (1, 2, 4)* и *b= (0, -2, 5).*

b) Найти уравнение плоскости, проходящей через *M (3, 5, -4)* перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{3}$.

5. Через точку пересечения прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}$ и плоскости *2x-y+3z=1* провести прямую параллельно прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$

Вариант 23

1. Найти точку пересечения медиан треугольника ABC, если *A (2, -8), B (-3, 9), C (7, -10).*
2. Определить угол, образованный прямыми *5x-y-5=0* и *3x-2y-6=0.*
3. Найти объем пирамиды, построенной на векторах: *a= (2, 3, -1), b= (4, 5, 1), c= (1, -2, 3).*
4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *A (4, 5, -1), B (4, 2, 1), C (0, 0, 2).*

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z}{1}$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости *2x+y-3z+1=0* с прямыми $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2}$ и $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-6}$

Вариант 24

1. Найти точку, симметричную точке *(-2, 9)* относительно прямой *2x-3y+18=0.*
2. Определить угол, образованный прямыми $y= -\frac{2}{5}x-3$ и $y= -\frac{5}{2}x+1$.
3. Даны вершины тетраэдра *A (2, 3, 1), B (4, 1, -2), C (6, 3, 7), D (-5, -4, 8).* Найти длину его высоты, опущенной из вершины *D.*
4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *M (2, -5, 0)* параллельно векторам *a (0, 6, 2)* и *b (2, -3, 8).*

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через *M (5, 6, 7)* и прямую $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-2}$.
5. Найти проекцию точки *A (3, 1, -1)* на плоскость *3x+y+z-20=0.*

Вариант 25

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых *5x-7y-3=0, 3x+y-7+0* и перпендикулярной прямой *8x+3y-5=0.*
2. Определить угол, образованный прямыми $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{2}$ и $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+8}{1}$
3. Найти объем пирамиды, построенной на векторах: *a= (2, 2, 2), b= (-2, 0, 2), c= (1, 3, -7).*

4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *O (0, 0, 0)*, параллельно векторам *a (2, 1, 3)* и *b (1, 2, 1)*.

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z}{2}$ параллельно прямой $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

5. Найти угол прямой $\begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ с прямой, проходящей через начало координат и через точку *A (1, -1, -1)*.

Вариант 26

1. В треугольнике *ABC* известны: сторона *AB: 4x+y-12=0*, высота *BH: 5x-4y-15=0* и высота *AH: 2x+2y-9=0*. Найти уравнение сторон *AC* и *BC*.
2. Определить угол, образованный прямыми *x-2y+3=0* и *2x-4y+7=0.*
3. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках *A (2, -1, 3), B (1, 1, 1), C (0, 0, 5).*
4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *O (0, 0, 0)*, параллельно плоскости *2y-x+3=0.*

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через *M (3, 2, -1)* и прямую $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1}$.

5. Найти угол между прямыми $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0 \\ 3x - z + 6 = 0 \end{cases}$.

Вариант 27

1. Найти проекцию точки *C (6, 2)* на прямую, проходящую через точки *A (-2, -2)* и *B (3, 4).*
2. Определить угол, образованный прямыми $y = -\frac{1}{4}x+5$ и $y= \frac{1}{2}x-7$.
3. Определить длину высоты *AD* треугольника с вершинами *A (-2, 3, 0), B (0, 1, 4), C (2, 0, 3).*
4. a) Найти уравнение плоскости, проходящей через *M (1, 2, 8)* параллельно плоскости *3x-y+4z-5=0.*

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-5}$ параллельно вектору a= *(3, 2, 1).*

5. Найти проекцию точки *A (3, -4, -2)* на плоскость *x-y+3z+10=0.*

Вариант 28

1. Даны вершины треугольника: *A (2, -4), B (-6, 8)* и *C (4, 6)*. Найти уравнения стороны *AB* и высоты *AD.*

2. Определить угол, образованный прямыми $\frac{x+8}{2}=\frac{y+2}{-3}$ и $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{4}$.
3. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках *A (1, 0, 1), B (4, 4, 6), C (2, 2, 3).*
4. а) Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *A (1, 0, 1), B (0, -2, 6), C (4, 8, 0).*

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{3}$ перпендикулярно *-2x+3y+4z-12=0.*

5. Найти угол, образованный прямой, проходящей через точки *A (2, 1, -1), B* $(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{5}{4})$ с плоскостью *x-y+z-1=0.*

Вариант 29

1. Даны вершины параллелограмма: *A (-2, 1), B (2, 4), C (3, 1)* и *D (-1, -2).* Найти уравнения диагонали *AC* и высоты *AK.*
2. Определить угол, образованный прямыми *2x+3y+5=0* и *3x-4y-12=0.*
3. Найти объем пирамиды, построенной на векторах: *a= (2, 3, -1), b= (8, 10, 2), c= (1, -2, 3).*
4. а) Найти уравнение плоскости, проходящей через *M (-1, 6, 5)* и ось *Oz.*

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую
   $$\begin{cases} x-4y+2z-5=0 \\ 3x+y-z+2=0 \end{cases}$$
   перпендикулярно плоскости *2x+3y=6.*
5. Найти угол между прямыми $\begin{cases} x-5z+2=0 \\ y-4z-7=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+2z-3=0 \\ 4y-9z+4=0 \end{cases}$.

Вариант 30

1. Найти точку, симметричную точке *B (4, 7)* относительно прямой, проходящей через точки *A (0, 3)* и *C (8, 3).*
2. Определить угол, образованный прямыми $y-4=-\frac{3}{2}(x+6)$ и *y=5x+3.*
3. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках *A (2, 1, -1), B (4, 2, 0), C (-1, 0, 2).*
4. а) Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *M (2, -5, 0)* параллельно векторам *a (1, 9, 8)* и *b (-1, 6, 0).*

   b) Найти уравнение плоскости, проходящей через *O (0, 0, 0)* и прямую
   $$\begin{cases} x-y+z-7=0 \\ 3x+2y-12z+5=0 \end{cases}.$$

5. Через точку пересечения прямой $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ и плоскости $3x+5y$-z-$2=0$ провести прямую параллельно прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-3}$.