ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Математика»

«Варианты заданий контрольных работ по дисциплине «Математика» и методические указания для их выполнения»

Авторы
Рябых Г.Ю.,
Фролова Н.В.,
Ворович Е.И.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов заочной формы обучения специальностей 12.03.04, 15.03.04, 27.03.01.

Авторы

Доцент
Рябых Г.Ю.

Старший преподаватель
Фролова Н.В.

Доцент
Борович Е.И

Оглавление

Глава 4

Параграф 1. Задания 4

Параграф 2. Решения 11

ГЛАВА

Варианты заданий контрольных работ по дисциплине «Математика» и методические указания для их выполнения

Задания

Задание №1

Найдите $|\bar{a}|$, его направляющие косинусы, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, координаты векторов $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$ . .

1. $\bar{a} = \{-1; -2; 3\}$, $\bar{b} = \{3; 0; -1\}$, $\bar{c}_1 = 2\bar{a} + 4\bar{b}$, $\bar{c}_2 = 3\bar{b} - \bar{a}$;

2. $\bar{a} = \{1; 0; 1\}$, $\bar{b} = \{-2; 3; 5\}$, $\bar{c}_1 = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\bar{c}_2 = 3\bar{a} - \bar{b}$;

3. $\bar{a} = \{-2; 4; 1\}$, $\bar{b} = \{1; -2; 7\}$, $\bar{c}_1 = 5\bar{a} + 3\bar{b}$, $\bar{c}_2 = 2\bar{a} - \bar{b}$;

4. $\bar{a} = \{1; 2; -3\}$, $\bar{b} = \{2; -1; -1\}$, $\bar{c}_1 = 4\bar{a} + 3\bar{b}$, $\bar{c}_2 = 8\bar{a} - \bar{b}$;

5. $\bar{a} = \{3; 5; 4\}$, $\bar{b} = \{5; 9; 7\}$, $\bar{c}_1 = -2\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{c}_2 = 3\bar{a} - 2\bar{b}$;

6. $\bar{a} = \{1; 4; -2\}$, $\bar{b} = \{1; 1; -1\}$, $\bar{c}_1 = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{c}_2 = 4\bar{a} + 2\bar{b}$;

7. $\bar{a} = \{1; -2; 5\}$, $\bar{b} = \{3; -1; 0\}$, $\bar{c}_1 = 4\bar{a} - 2\bar{b}$, $\bar{c}_2 = \bar{b} - 2\bar{a}$

8. $\bar{a} = \{3; 4; -1\}$, $\bar{b} = \{2; -1; 1\}$, $\bar{c}_1 = 6\bar{a} - 3\bar{b}$, $\bar{c}_2 = \bar{b} - 2\bar{a}$;

9. $\bar{a} = \{-2; -3; -2\}$, $\bar{b} = \{1; 0; 5\}$, $\bar{c}_1 = 3\bar{a} + 9\bar{b}$, $\bar{c}_2 = -\bar{a} - 3\bar{b}$;

10. $\bar{a} = \{-1; 4; 2\}$, $\bar{b} = \{3; -2; 6\}$, $\bar{c}_1 = 2\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{c}_2 = 3\bar{b} - 6\bar{a}$;

Задание №2

Заданы матрицы А и В. Вычислить матричный многочлен.

1. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $A^2 - BA + 3A$.

2. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $A^2 - 2BA + A$.

3. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $2A^2 + BA + 3A$.

4. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $B^2 - BA + 4A$.

5. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $A^2 + BA + 3B$.

6. Для матриц $A=\begin{pmatrix}1&5&4\\-2&2&-4\\1&1&2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-5&1&2\\0&3&-1\\2&3&1\end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $A^2-BA+4B$.

7. Для матриц $A=\begin{pmatrix}1&0&4\\2&2&3\\3&-7&2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&1&2\\3&5&2\\5&3&1\end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $B^2-BA+3A$.

8. Для матриц $A=\begin{pmatrix}3&-1&4\\3&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&1&2\\-4&0&2\\2&-4&3\end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $A^2+3BA+2B$.

9. Для матриц $A=\begin{pmatrix}1&0&4\\2&-3&1\\1&1&-5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&6&-2\\2&3&0\end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $A^2-BA+3A$.

10. Для матриц $A=\begin{pmatrix}3&-5&4\\2&0&3\\1&1&-4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&2\\1&3&-3\end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $B^2-BA+2A$.

Задание №3

Решить системы уравнений методом Крамера, методом Гаусса, матричным способом.

1. а) $\begin{cases}x+2y-2z=5\\4x-y+10z=11\\5x+3y-5z=9\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-3y+z=2\\x+2y-3z=1\\5x+y-6z=5\end{cases}$

2. а) $\begin{cases}x-3z+4t=-4\\2x+y+10z-15t=10\\2y+3z-6t=7\\3x+4y-z+2t=4\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3-2x_4-x_5=2\\-x_1-2x_2+3x_3+x_4-2x_5=-1\\x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1\\2x_1-3x_2+x_3-2x_4-3x_5=2\end{cases}$

3. а) $\begin{cases}2x-y+5t=6\\3x+2y-z=3\\-x+2y+4z+t=10\\-y-z+3t=0\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-y=3\\2x+y-3z=3\\-x-2y+3z=0\end{cases}$

4. а) $\begin{cases}4x+4y-5z=-2\\3x+2y+z=7\\x-y+10z=20\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+3y-z=4\\x+2y+z=1\\x+4y-3z=7\end{cases}$

5. а) $\begin{cases}2x+3y-4z+5t=3\\-y-t=-1\\x-3z+8t=-1\\x+2y-4z+3t=0\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-3y+z=2\\x+2y-3z=1\\5x+y-6z=5\\3x-y-2z=3\end{cases}$

6. а) $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3-3x_4=4\\-x_1+2x_2-x_3+4x_4=1\\2x_1+x_2-2x_3+4x_4=1\\x_1+x_2+x_3+x_4=7\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-3y+2z=2\\x+y-5z=7\\3x-y-8z=16\end{cases}$

7. а) $\begin{cases}7x-2y+4z=13\\2x+2y-z=2\\3x-y+z=0\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3-2x_4-x_5=2\\-x_1-2x_2+3x_3+x_4-2x_5=-1\\x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1\\2x_1-3x_2+x_3-2x_4-3x_5=2\end{cases}$

8. а) $\begin{cases} 2x - y + 5t = 6 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ -x + 2y + 4z + t = 10 \\ -y - z + 3t = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ x - y + 2z - 2t = -4 \\ 2y - z - t = 3 \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z + 5t = 3 \\ -y - t = -1 \\ x - 3z + 8t = -1 \\ x + 2y - 4z + 3t = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ -2x + 4y + 2z = -4 \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 4 \\ x + z = 6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - 5z - t = 2 \\ x - 2y + 2t = 1 \\ -x + 3y - z - 3t = -1 \\ x - y - z + t = 1 \end{cases}$

Задание №4

Даны вершины ΔABC. Найдите: *1)* уравнение и длину *AC*; *2)* косинус угла $\angle BAC$; *3)* уравнение и длину высоты *BK*, медианы *BM* и биссектрисы $\angle ABC$; Выполнить чертежи.

1. $A(6;6),\ B(5;4),\ C(2;4)$;
2. $A(-1;5),\ B(0;0),\ C(1;3)$;
3. $A(0;8),\ B(1;1),\ C(2;8)$;
4. $A(-1;4),\ B(4;-4),\ C(3;1)$;
5. $A(2;-4),\ B(1;1),\ C(2;2)$;
6. $A(0;-3),\ B(4;0),\ C(2;4)$;
7. $A(1;-2),\ B(5;1),\ C(3;5)$;
8. $A(7;7),\ B(6;5),\ C(3;5)$;
9. $A(8;6),\ B(1;1),\ C(2;4)$;
10. $A(1;9),\ B(2;2),\ C(3;9)$;

Задание №5

Даны координаты тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. Найдите 1) площадь грани $A_1A_2A_3$; 2) объем тетраэдра; 3) длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 4) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 5) уравнение прямой A_1A_4 (ответ записать в канонической и параметрической формах); 6) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 7) угол между прямыми A_1A_4 и A_2A_4; 8) угол между плоскостями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$; 9) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(3; 1; 4)$, $A_2(-1; 6; 1)$, $A_3(-1; 1; 6)$, $A_4(0; 4; -1)$
2. $A_1(3; 3; 9)$, $A_2(6; 9; 3)$, $A_3(1; 7; 3)$, $A_4(6; 5; 8)$
3. $A_1(3; 5; 4)$, $A_2(5; 8; 3)$, $A_3(1; 9; 9)$, $A_4(6; 4; 8)$
4. $A_1(2; 4; 3)$, $A_2(7; 6; 9)$, $A_3(4; 9; 3)$, $A_4(3; 6; 9)$
5. $A_1(9; 5; 5)$, $A_2(-3; 7; 1)$, $A_3(5; 7; 8)$, $A_4(6; 9; 2)$
6. $A_1(0; 7; 1)$, $A_2(4; 1; 6)$, $A_3(4; 6; 3)$, $A_4(3; 9; 8)$
7. $A_1(5; 5; 4)$, $A_2(3; 8; 4)$, $A_3(3; 5; 10)$, $A_4(5; 8; 2)$
8. $A_1(6; 2; 1)$, $A_2(4; 6; 6)$, $A_3(4; 2; 0)$, $A_4(1; 2; 6)$
9. $A_1(7; 5; 3)$, $A_2(9; 4; 4)$, $A_3(4; 5; 7)$, $A_4(7; 9; 6)$
10. $A_1(6; 6; 2)$, $A_2(5; 4; 7)$, $A_3(2; 4; 7)$, $A_4(7; 3; 0)$

Задание №6

Найдите пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

1\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3-1}$, 2) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$,

3) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{4x}$,

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)[\ln(x+3)-\ln x]$

2\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x+8}$,

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}$,

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$,

2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$,

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2)[\ln(x+1)-\ln x]$

3\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^4+5x+2}$,

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$,

3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$,

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)[\ln(2x+1)-\ln(2x-1)]$.

4\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-3x+1}{2x^2+8x-3}$,

2) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$,

3) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{1-\sqrt{x-4}}{2-\sqrt{2x-6}}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}$,

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{7x+8}{7x+1}\right)^x$

5\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4-2x+1}{x^3-2x+5}$,

2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$,

3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3-\sqrt{x+1}}{2-\sqrt{x+6}}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\arcsin x}$,

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)[\ln(x-3)-\ln x]$.

6\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-7x^2+5x^3}{2+2x-x^3}$,

2) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$,

3) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$,

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-5)[\ln(2x+4)-\ln(2x+1)]$

7\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+5x^2-3x^5}{8-6x-x^5}$,

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$,

3) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x\operatorname{tg}2x}$,

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1)[\ln(4x-1)-\ln(4x+1)]$

8. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-8x+1}{8x^4+5}$,
2) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{2x^2+7x-4}{2x^2+13x+20}$,
3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{8+x}}$
4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\operatorname{tg}3x}{\cos x-\cos^3 x}$,
5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-3)[\ln(x+2)-\ln(x-1)]$

9. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2x+5x^4}{2+3x^2+x^3}$,
4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\cos x-\cos^3 x}$,
3) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}$
2) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+4x-21}{2x^2-7x+3}$,
5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)[\ln(x+5)-\ln x]$

10. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+14x^2}{x^3-1}$
2) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{x^2-25}{x^2+8x+15}$,
3) $\lim\limits_{x\to4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$
4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 3x}{6x}$,
5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-7)[\ln(x+4)-\ln x]$;

Задание №7

Найти производную функций в точке $x_0=1$, исходя из определения производной.

1. а) $y=2x-9$, б)$y=x^2+2$;
2. а) $y=2x+1$, б)$y=3x^2+2$;
3. а) $y=5x-2$, б)$y=x^2-3$;
4. а) $y=3x-5$, б)$y=5x^2-3$;
5. а) $y=5x+2$, б)$y=x^2-10$;
6. а) $y=2x-7$, б)$y=2x^2+1$;
7. а) $y=6x-5$, б)$y=3x^2-11$;
8. а) $y=x+10$, б)$y=7x^2-2$;
9. а) $y=3x-5$, б)$y=3x^2-11$;
10. а) $y=3x+8$, б)$y=x^2+3$;

Задание №8

Найти первую производную функций y'_x.

1. а) $y=3\cos x-4\operatorname{tg}x+5^x+\arcsin\sqrt{x}$
   б) $y=\sqrt{1-\ln x}+\ln\left(\sqrt{x}-2\right)$
   в) $x^3-y^3+5xy=0$
   г) $x=t+2t^2+t^3$; $y=-2+3t-t^3$
2. а) $y=3x^3+\frac{1}{15}\cos^3 x+\ln^5 x$
   б) $y=\frac{1}{15}\cos^3 x\,(3\cos^2 x-5)$

в) $x^2y+y^2x=0$
г) $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$
3. а) $y=5^{x^2-3}+\cos^3 x+\sqrt{x^2-3}$
б) $y=\frac{1}{30}\sin(5x^2)-\frac{1}{5}\cos(x^2)$
в) $x=\operatorname{tg}(3t)$; $y=\operatorname{tg}^3 t$
г) $x^3+y^3-3y=0$
4. а) $y=\ln^3 x+3^{\sin 2x}+\sqrt{e^x-3}$
б) $y=\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+5^{x^2}$
в) $e^{x+y}=y$
г) $x=e^t\cos t$; $y=e^t\sin t$
5. а) $y=\cos^4 5x-x\sqrt{x^2+1}+\ln(x^2-3)$
б) $y=\ln^2 x-\ln(\ln x)$
в) $y=\operatorname{tg}(x+y)$
г) $x=\sin^3 t$; $y=\cos^3 t$
6. а) $y=\frac{1}{x}-3\ln x+\frac{\ln x}{x}$
б) $y=\operatorname{arctg}^2(3^x)$
в) $\operatorname{tg} y=xy$
г) $x=2\ln(\operatorname{ctg} t)$; $y=\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t$
7. а) $y=2x\sin x-(x^2-2)\cos x$
б) $y=\operatorname{tg}^3(2x)\cos^2(2x)$
в) $\ln y+\frac{x}{y}=0$
г) $x=\frac{1}{\cos t}$; $y=\operatorname{tg} t$
8. а) $y=\sqrt[3]{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}$
б) $y=3^{\sqrt{x^2-5}}+\ln(x^3-5)$
в) $x^2+x^2y+y^2=0$
г) $x=\ln(1+t^2)$; $y=t-\operatorname{arctg} t$
9. а) $y=\frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x+5)$
б) $y=\operatorname{arctg}(3^x)-e^{5x}$
в) $\cos^2(x+y)=a$
г) $\ln y-2x=0$
10. а) $y=\sin 5x+\cos\left(\frac{x}{5}\right)+tg\sqrt{x}$
б) $y=\operatorname{arctg}(\ln x)+\ln(\operatorname{arctg} x)$
в) $\operatorname{arctg}(x+y)=x$
г) $y=t^3+3t^2+t$; $x=-2+3t-t^3$

Задание №9

Найти производные второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}$

1. а) $y = x + \operatorname{arctg} x$ б) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$

2. а) $y = (1 - x^2)\cos x$ б) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

3. а) $y = x\ln x - x^3$ б) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$

4. а) $y = (\arcsin x)^2$ б) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

5. а) $y = e^{-x}\cos x$ б) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$

6. а) $y = \ln(1 + x^2)$ б) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$

7. а) $y = \operatorname{arctg}^2 x$ б) $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases}$

8. а) $y = e^x \sin 2x$ б) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$

9. а) $y = x^2 e^{-x}$ б) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

10. а) $y = e^{-2x}\sin 3x$ б) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$

Задание №10

Провести полное исследование функции и построить ее график.

1. $y = \frac{x}{x^2-4}$
2. $y = \frac{x^2}{x-3}$
3. $y = \frac{x^2-5x}{x-1}$
4. $y = \frac{x^2+6}{x^2-1}$
5. $y = x^2 - \frac{8}{x}$
6. $y = \frac{x^3+4}{x^2}$
7. $y = \frac{x^3}{x^2-4}$
8. $y = \frac{x^2+5}{x+2}$
9. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$
10. $y = \frac{1}{x} + x$

Решения

В этом разделе представлены решения некоторых типовых задач.

Задание 1. Найдите $|\bar{a}|$, его направляющие косинусы, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, координаты векторов $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$. Векторы $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$,

$\bar{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}$,

$\bar{c}_2 = \vec{a} - 4\vec{b}$

Решение

$\vec{a}$ = (1, 2, 3), $\vec{b}$ = (6, 4, -2)

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначим φ, скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = 6 + 8 – 6 = 8:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; \qquad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}.$$

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \qquad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}; \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}}; \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$

Координаты векторов $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$:

$\overline{c_1}(20,16,0); \overline{c_2}(-23,-14,11)$

Задание 3. Решить систему уравнений методом Крамера, методом Гаусса, матричным методом.

Системой линейных уравнений (линейной системой) называется система вида (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь m уравнений, n неизвестных. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A\,|B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

А называется матрицей системы, А/В - расширенной матрицей системы.

Метод Крамера и матричный метод предназначены для решения квадратных систем (m = n) в случае, если система имеет единственное решение. Общий вид квадратной системы

$$(2)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Правило Крамера

Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$ - определитель системы

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ b_n & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & b_n & & a_{nn} \end{vmatrix} \dots \Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & b_n \end{vmatrix}$$

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$$

Пример1 Решить систему уравнений методом Крамера $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \quad x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1 \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$$

Матричный метод.

Матричная запись линейной системы: $AX = B$. Решение системы получаем по формуле $X = A^{-1}B$, где A^{-1}-матрица, обратная матрице А

Пример.2 Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\quad \mathrm{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$$

$\det(\mathrm{A})=5\neq 0\rightarrow \exists \mathrm{A}^{-1}$. Найдем алгебраические дополнения матрицы А

$$\mathrm{A}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1\qquad \mathrm{A}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=-3\qquad \mathrm{A}_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1$$

$$\mathrm{A}_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix}=3\qquad \mathrm{A}_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1\qquad \mathrm{A}_{23}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-2$$

$$\mathrm{A}_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}=-2\qquad \mathrm{A}_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=1\qquad \mathrm{A}_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=3$$

$$A^V=\begin{pmatrix}1&-3&1\\3&1&-2\\-2&1&3\end{pmatrix}\ \mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\mathrm{A})}(A^V)^T=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3&1&1\\1&-2&3\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{x}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3&1&1\\1&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}15\\-5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Метод Гаусса

Пример 3. Решить систему методом Гаусса.
$$\begin{cases}5x-y-z=0\\x+2y+3z=14\\4x+3y+2z=16\end{cases}$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду А/В=

$$\begin{pmatrix}5&-1&-1&0\\1&2&3&14\\4&3&2&16\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&14\\4&3&2&16\\5&-1&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&14\\0&-5&-10&-40\\0&-11&-16&-70\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&14\\0&-5&-10&-40\\0&0&6&18\end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$\begin{cases}x+2y+3z=14\\-5y-10z=40\\6z=18\end{cases}$, откуда получаем: z = 3; y = 2; x = 1.

r(A/B)=r(A)=n=3. Система имеет единственное решение.

Здесь r(A/B) - ранг расширенной матрицы системы; r(A) –ранг матрицы системы; n – число неизвестных.

К заданию 4. На плоскости даны вершины треугольника $\triangle ABC$. $A(1;0)$, $B(2;2)$, $C(3;1)$.

Найти:

а) уравнения и длину сторон AB и AC;

б) уравнение и длину высоты ВК

в) косинус угла ВАС

г) уравнение медианы ВМ

Сделать чертеж

Решение

а). Уравнения сторон найдем, используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

$AB:\dfrac{y-0}{2-0}=\dfrac{x-1}{2-1}$, $y=2x-2$. $AC:\dfrac{y-0}{1-0}=\dfrac{x-1}{3-1}$, $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$. Угловой коэффициент прямой AC равен $k_{AC}=\dfrac{1}{2}$.

б). Угловой коэффициент высоты ВК связан с угловым коэффициентом стороны AC соотношением $k_{AC}\cdot k_{BH}=-1$. Отсюда находим, $k_{BH}=-2$. Уравнение высоты составим, используя уравнение прямой, имеющей заданный наклон и проходящей через заданную точку: $y-y_0=k(x-x_0)$.

ВК: y-2=-2(x-2), y=-2x+6

Длина высоты ВК – расстояние от точки В до прямой АС. Его найдем по формуле

$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, где $Ax+By+C=0$ - общее уравнение прямой,

$(x_0;y_0)$ -

точка, от которой определяется расстояние. Общее уравнение стороны

AC имеет вид: $x-2y-1=0$. Поэтому длина высоты ВК равна

$$d=\frac{|2-2\cdot 2-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

в). Для нахождения угла ВАС используем формулу

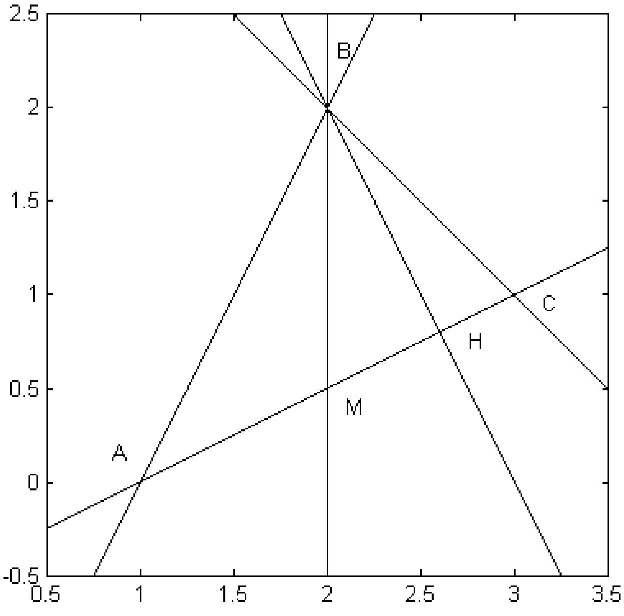
$$tg\angle A=\frac{k_{AB}-k_{AC}}{1+k_{AB}\cdot k_{AC}}.$$

Получаем, $tg\angle A=\frac{2-1/2}{1+2\cdot 1/2}=\frac{3}{4}$. $\angle A=arctg\frac{3}{4}$.

г). Чтобы составить уравнение медианы, найдем координаты точки M - середины стороны AC: $x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{1+3}{2}=2$, $y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$.

$BM:\frac{y-2}{1/2-2}=\frac{x-2}{2-2}$, $x=2$ (каноническое уравнение вертикальной прямой).

Строим треугольник в координатных осях:



К заданию 5.

Пример. Точки $A(1;2;3)$, $B(3;0;2)$, $C(6;3;-1)$, $D(4;1;5)$ являются вершинами пирамиды. Найти:

а). Уравнения ребра AB;

б). Угол между ребрами AB и AC;

в). Уравнение грани ABC;

г). Угол между ребром AD и гранью ABC;

д). Уравнение высоты пирамиды, опущенной из вершины D

Решение

а). Канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки, определяются соотношениями

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Следовательно, уравнения ребра AB имеют вид

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{0-2}=\frac{z-3}{2-3}, \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-1}.$$

б). Угол между ребрами - это угол φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Эти векторы соответственно равны $\overline{AB}=\{2;-2;-1\}$ и $\overline{AC}=\{5;1;-4\}$. Поэтому

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|}=\frac{2\cdot 5+(-2)\cdot 1+(-1)\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}\sqrt{5^2+1^2+(-4)^2}}=\frac{4}{\sqrt{42}}.$$

в). Составим уравнение грани ABC, используя условие компланарности векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и текущего вектора $\overline{AM}=\{x-1;y-2;z-3\}$:

$$\left(\overline{AM},\overline{AB},\overline{AC}\right)=\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$(x-1)\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -4\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & -4\end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix}2 & -2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=0,\qquad \text{или}$$

$$3x+y+4z-17=0.$$

г). Угол α между прямой с направляющим вектором $\mathbf{a}$ и плоскостью с нормальным вектором $\mathbf{N}$ определяется формулой

$$\sin\alpha=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{N}}{|\mathbf{a}||\mathbf{N}|}.$$

Направляющий вектор ребра равен $\mathbf{a}=\overline{AD}=\{3;-1;2\}$, координаты нормального вектора плоскости – это коэффициенты в общем уравнении плоскости, т.е. $\mathbf{N}=\{3;1;4\}$. Отсюда получаем

$$\sin\alpha=\frac{3\cdot3+(-1)\cdot1+2\cdot4}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{3^2+1^2+4^2}}=\frac{8}{\sqrt{91}},\qquad \alpha=\arcsin\frac{8}{\sqrt{91}}.$$

д). Направляющим вектором высоты пирамиды, опущенной из вершины D, является нормальный вектор плоскости $\mathbf{N}=\{3;1;4\}$. Поэтому канонические уравнения высоты следующие

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{4}.$$

Задание 6. Найти пределы функций: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-1)(4x+1)}{x^2+2x+\sqrt{x}+3}$; б) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{x-8}-1}{x^2-81}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin2x}{1-\cos2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^x$

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-1)(4x+1)}{x^2+2x+\sqrt{x}+3}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ *Чтобы раскрыть неопределенность типа* $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

необходимо и в числителе и в знаменателе в каждом из сомножителей вынести старшие степени $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(3-\dfrac{1}{x}\right)\cancel{x}\left(4+\dfrac{1}{x}\right)}{\cancel{x}^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}+\dfrac{3}{x^2}\right)} = \dfrac{(3-0)(4+0)}{(1+0+0+0)} = 12;$

б)

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x-8}-1}{x^2-81} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 9}\frac{\left(\sqrt{x-8}-1\right)\left(\sqrt{x-8}+1\right)}{\left(\sqrt{x-8}+1\right)(x-9)(x+9)} = \lim_{x\to 9}\frac{x-8-1}{\left(\sqrt{9-8}+1\right)(x-9)(9+9)} = \frac{1}{36}$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x2\sin x\cos x}{2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos 0}{\sin x} = 1;$

Здесь использован первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^x = \left(1^\infty\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{3x+2}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-3}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-3}}\right]^{\frac{-3}{3x+2}x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{-3\cancel{x}}{\cancel{x}\left(3+\frac{2}{x}\right)}} = \dfrac{1}{e}$

Здесь применен второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Задание 7.

Пример 1. Используя определение, найти производную функции $y = x^2 + 3x$ в точке $x_0 = 1$.

Решение.

По определению $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}$.

$$y(x_0) = y(1) = 1^2 + 3\cdot 1 = 4, \qquad y(x_0+\Delta x) = y(1+\Delta x) = (1+\Delta x)^2 + 3(1+\Delta x) = 4 + 5\Delta x + \Delta x^2$$

Отсюда

$$y'(1) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+5\Delta x+\Delta x^2-4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\cancel{x}(5+\Delta x)}{\Delta\cancel{x}} = 5.$$

Пример 2. Используя определение, найти производную функции $y = x^3 - \frac{1}{x}$

Решение.

$y(x) = x^3 - \frac{1}{x}, \quad y(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3 - \frac{1}{x+\Delta x}$. Отсюда следует

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \left((x+\Delta x)^3 - x^3\right) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\Delta x} =$$

$$= (x+\Delta x - x)\left((x+\Delta x)^2 + x(x+\Delta x) + x^2\right) + \frac{x+\Delta x - x}{x(x+\Delta x)} =$$

$$= \Delta x\left((x+\Delta x)^2 + x(x+\Delta x) + x^2\right) + \frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

Используя определение производной, получаем

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\Delta x\left((x+\Delta x)^2 + x(x+\Delta x) + x^2\right) + \frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}\right) = 3x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Задание 8. Найти первую производную функций

Решение.

а) $y = \frac{1}{2} + 3\operatorname{ctg}x - x^4 10^x + \frac{\sin 5x}{\sqrt{x}}$

Применяя правила дифференцирования, получим

$$y' = \left(\frac{1}{2} + 3\operatorname{ctg}x - x^4 10^x + \frac{\sin 5x}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{1}{2}\right)' + 3(\operatorname{ctg}x)' - \left(x^4 10^x\right)' + \left(\frac{\sin 5x}{\sqrt{x}}\right)' =$$

$$= 0 + 3\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) - \left(x^4\right)' 10^x - x^4\left(10^x\right)' + \frac{(\sin 5x)'\sqrt{x} - \sin 5x\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = .$$

$$= -\frac{3}{\sin^2 x} - 4x^3 10^x - x^4 10^x \ln 10 + \frac{5\cos 5x\sqrt{x} - \frac{\sin 5x}{2\sqrt{x}}}{x}$$

б) $y = \lg^9(\arcsin x + x)$

Применим формулу дифференцирования сложной функции:

$$\left(y\left(u\left(v(x)\right)\right)\right)' = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x .$$

$$y'_x = \left(\lg^9\left(\arcsin x + x\right)\right)' = 9\lg^8\left(\arcsin x + x\right)\cdot\left(\lg\left(\arcsin x + x\right)\right)' =$$

$$= 9\lg^8\left(\arcsin x + x\right)\cdot\frac{1}{\left(\arcsin x + x\right)\ln 10}\left(\arcsin x + x\right)' = \qquad .$$

$$= 9\lg^8\left(\arcsin x + x\right)\cdot\frac{1}{\left(\arcsin x + x\right)\ln 10}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right)$$

г) $\operatorname{arctg}^2(x+y) = xy$

Если в уравнение, задающее неявную функцию, подставить решение $y = y(x)$, то уравнение превращается в тождество. Тождество можно дифференцировать – равенство не нарушится. Дифференцируем обе части соотношения $\operatorname{arctg}^2(x+y) = xy$, учитывая, что y - функция x:

$$\left(\operatorname{arctg}^2(x+y)\right)' = (xy)', \qquad 2\operatorname{arctg}(x+y)\left(\operatorname{arctg}(x+y)\right)' = x'y + xy',$$

$$2\operatorname{arctg}(x+y)\frac{1}{1+(x+y)^2}(1+y') = y + xy',$$

$$\frac{2\operatorname{arctg}(x+y)}{1+(x+y)^2} + y'\frac{2\operatorname{arctg}(x+y)}{1+(x+y)^2} = y + xy',$$

$$y'\left(\frac{2\operatorname{arctg}(x+y)}{1+(x+y)^2} - x\right) = y - \frac{2\operatorname{arctg}(x+y)}{1+(x+y)^2},$$

Получили уравнение относительно неизвестной y'. Решая его, находим

$$y' = -\frac{\dfrac{2\operatorname{arctg}(x+y)}{1+(x+y)^2} - y}{\dfrac{2\operatorname{arctg}(x+y)}{1+(x+y)^2} - x}.$$

д) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$

Производную функции, заданной параметрически, определим по формуле

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Получаем: $$y'_x=\frac{a\left(1-\cos t\right)'}{a\left(t-\sin t\right)'}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Задание 9. Найти производную второго порядка функции

$$\begin{cases}x=\sin t-t\cos t\\ y=\cos t+t\sin t\end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases}\dot{x}=\cos t-(\cos t-t\sin t)=t\sin t\\ \dot{y}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t\end{cases}$$

$$y'_x=\frac{t\cos t}{t\sin t}=ctgt \qquad \left(y'_x\right)'_t=-\frac{1}{\sin^2 t};$$

$$y''_{xx}=\frac{1}{\sin^2 t\, t\sin t}=-\frac{1}{t\sin^3 t}.$$

Задание 10. Построить график функции $y=\frac{x^3}{1-x^2}$.

Решение. Проведем полное исследование данной функции по стандартной схеме.

Областью определения функции является вся числовая ось, кроме точек x=1; x=-1.

Функция нечетная т.к. $f(-x)=-f(x)$. Для построения графика данной функции $y=f(x)$ достаточно исследовать ее для $x\geq 0$, а затем воспользоваться ее симметричностью.

Находим точки пересечения графика функции с осями координат: x=0, y=0, O(0,0)- график функции проходит через начало системы координат.

Находим асимптоты вертикальные и наклонные.

$y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ Т.к. знаменатель обращается в нуль в точках x=1, x=-1, то $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)=\mp\infty$, $\lim\limits_{x\to -1\pm 0} f(x)=\pm\infty$ и прямые x=1; x=-1. являются вертикальными асимптотами.

Находим наклонные асимптоты $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1-x^2}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-x^2}=0.$$

Кривая имеет двустороннюю наклонную асимптоту $y=-x$.

Вычислим производную. Находим интервалы монотонности и точки экстремума функции: $f'(x)=\dfrac{x^2\left(3-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$. Производная существует во всех точках числовой оси, кроме x=1, x=-1 и равна нулю в точках $x=0,\quad x=\pm\sqrt{3}$. Следовательно, критическими точками будут: $x_1=-\sqrt{3},\quad x_2=0,\quad x_3=\sqrt{3}$.

Исследуем поведение $f'(x)$ в окрестности каждой критической точки. Т.к. данная функция $f(x)$ нечетная, достаточно рассмотреть знак $f'(x)$ на промежутках (-1,0); (0,1); (1,$\sqrt{3}$); ($\sqrt{3},+\infty$).

Для наглядности результаты соберем в таблицу 1.

Таблица 1.

x	$x\in(-1,0)$	X=0	$x\in(0,1)$	$x\in(1, \sqrt{3})$	X=$\sqrt{3}$	$x\in(\sqrt{3},\infty)$
Знак производной f'(x)	+	0	+	+	0	-
f(x)	возрастает	Нет экстремума	возрастает	возрастает	Максимум	убывает

В точках x=1, x=-1 функция не имеет экстремума, так как эти точки не принадлежат
области определения данной функции. Т.к. функция *f(x)* нечетная,то в точке $x=-\sqrt{3}$ функция достигает минимума данной функции:

$$y_{\min} = \frac{(-\sqrt{3})^3}{1-(\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика данной функции *y=f(x).*

Вычислим вторую производную: $f''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$.

Критические точки данной функции по второй производной x=0, x=1, x=-1. Точки x=1, x=-1 не принадлежат области определения функции, поэтому точкой перегиба кривой является только точка с абсциссой x=0. Результаты исследования запишем в таблицу 2.

Таблица 2.

x	$x \in (-\infty,-1)$	$x \in (-1,0)$	X=0	$x \in (0,1)$	$x \in (1,\infty)$
Знак производной $f''(x)$	+	-	0	+	-
f(x)	Кривая вогнута	Кривая выпукла	Точка перегиба	Кривая вогнута	Кривая выпукла

Строим график функции: