ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Конспект лекций

по курсу математики второго семестра

Автор

Братищев А.В.

Ростов-на-Дону, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 5

ОТОБРАЖЕНИЯ И ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 5.1 Элементы топологии в $\tilde{\mathrm{R}}^n$. Предел. Непрерывность.

Опр. Лучом в $\tilde{\mathrm{R}}^n$ естественным базисом, выходящим из точки $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$, с направляющим вектором $\bar{k}=\{k_1,...,k_n\}\neq\bar{0}$ называется множество

$$r(M_0,\bar{k})=\left\{(x_1,...,x_n):\exists t\geq 0\quad \begin{cases} x_1=x_1^0+k_1t \\ \quad . \quad . \quad . \\ x_n=x_n^0+k_nt \end{cases}\right\}.$$

Опр. Шаром с центром в точке $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$ и радиусом R (R-окрестностью точки M_0) называется множество $D(M_0,R)=\Big\{M(x_1,...,x_n)\in\tilde{\mathrm{R}}^n$:

$$\rho(M_0,M)=\left\|\overline{M_0M}\right\|=\sqrt{<\overline{M_0M},\overline{M_0M}>}=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+..+(x_n-x_n^0)^2}<R\Big\}.$$

Пр.

Опр. Множество $G\subseteq\mathrm{R}$ называется открытым, если каждая точка входит в него вместе с некоторой своей ε-окрестностью $D(M_0,\varepsilon)$. Множество $K\subseteq\tilde{\mathrm{R}}^n$ называется замкнутым, если его дополнение $\tilde{\mathrm{R}}^n\setminus K$ является открытым множеством.

Опр. Граничной точкой множества D называется точка евклидовой плоскости, в каждой окрестности которой есть как точки, принадлежащие D, так и точки, которые не принадлежат D. Множество $\Gamma=\Gamma(D)$ граничных точек называется границей множества D. Замыканием множества D называется множество $\bar{D}:=D\bigcup\Gamma(D)$.

Пр.

Опр. Множество X в $\tilde{\mathrm{R}}^n$ называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре $D(M_0,R)$.

Опр. Пусть множество $X\subseteq\tilde{\mathrm{R}}^n$. Отображение $F:X\to\tilde{\mathrm{R}}^m$, ставящее в соответствие каждой точке $(x_1...x_n)\in X$ точку $(y_1...y_m)\in\tilde{\mathrm{R}}^m$, называется отображением от n переменных $x_1,...,.x_n$ (понятие отображения – Дедекинд, 1887, Пеано, 1911).

Опр. Отображение $f(x_1...x_n):X\to\mathrm{R}$ называется функцией от n переменных.

Опр. Отображение $F:X\to\tilde{\mathrm{R}}^m$ определяет и вполне определяется m функциями от n переменных по правилу $F=(y_1...y_m)=:\big(f_1(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n)\big)$. Функции $f_i(x_1,...,x_n)$ называются координатными.

Пр.

Опр. Пусть $X\subseteq\tilde{\mathrm{R}}^2$, $f:X\to\mathrm{R}$. C - линией уровня функции $f(x,y)$ называется множество точек $S_f(C) := \{ (x, y) \in X : f(x, y) = C \}$ (впервые рассматривал Бассантен, 1557. Понятие ввел Монж, 1798).

Опр. Пусть $X \subseteq \tilde{\mathrm{R}}^n, n \le 3$. C - поверхностью уровня функции $f(M) : X \to \mathrm{R}$ называется множество точек $S_f(C) := \{ M \in X : f(M) = C \}$ (понятие и термин - Маклорен, 1742).

Пр.

Опр. Пусть M_0 - предельная точка множества $X \subseteq \tilde{\mathrm{R}}^n$ и отображение $F : X \to \tilde{\mathrm{R}}^m$. Точка $B := (b_1, ..., b_m) \in \tilde{\mathrm{R}}^m$ называется пределом отображения F при $M(x_1, .., x_n) \to M_0(x_1^0, .., x_1^0)$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall M \in D(M_0, \delta) \setminus \{M_0\} \subset \tilde{\mathrm{R}}^n \quad F(M) \in D_m(B, \varepsilon) \subset \tilde{\mathrm{R}}^m$ (Вейерштрасс).

Опр. Пусть отображение $F(M)$ определено в окрестности точки M_0 и задан луч $r(M_0, \bar{k})$. Говорят, что $F(M)$ имеет предел в точке M_0 по направлению $\bar{k}$, если существует конечный предел $\lim\limits_{M \to M_0}{}_{\bar{k}} f(M) := \lim\limits_{M \to M_0}{}_{r(\bar{k}, M_0)} f(M)$.

Кпр.

ТЕОРЕМА 5.1 (*свойства пределов*) 1) $\lim\limits_{M \to M_0} F(M) = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \le m \quad \lim\limits_{M \to M_0} f_i(M) = b_i$.

2) Если $X \subset Y$, M_0 - предельная точка M и существует $\lim\limits_{M \to M_0}{}_Y F(M)$, то

$\lim\limits_{M \to M_0}{}_X F(M) = \lim\limits_{M \to M_0}{}_Y F(M)$.

3) Если предел в точке M существует, то он единственен.

4) $\lim\limits_{M \to M_0} (\alpha f_1(M) + \beta f_2(M) = \alpha \lim\limits_{M \to M_0} f_1(M) + \beta \lim\limits_{M \to M_0} f_2(M)$.

5) $\lim\limits_{M \to M_0} f_1(M) f_2(M) = \lim\limits_{M \to M_0} f_1(M) \cdot \lim\limits_{M \to M_0} f_2(M)$

6) $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f_1(M)}{f_2(M)} = \dfrac{\lim\limits_{M \to M_0} f_1(M)}{\lim\limits_{M \to M_0} f_2(M)}$, если предел знаменателя не равен 0.

Пр.

Опр. Пусть $M_0 \in X$ и является его предельной точкой. Отображение $F : X \to \tilde{\mathrm{R}}^n$ называется непрерывным в точке M_0, если существует предел $\lim\limits_{M \to M_0}{}_X F(M) = F(M_0)$.

Опр. Отображение называется непрерывным на множестве, если оно непрерывно в каждой точке множества.

Опр. Пусть даны переменная точка $M(x_1, ..., x_n)$ и фиксированная точка $M_0(x_1^0, ..., x_n^0)$. Полным приращением переменной M в точке M_0 называется вектор

$$\Delta M = \overline{M_0 M} = \{x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0\} = \{dx_1, ..., dx_n\},$$

а полным приращением отображения F в точке M_0 называется вектор

$$\Delta F = \left\{ f_1(M) - f_1(M_0), ..., f_n(M) - f_n(M_0) \right\} =: \{\Delta f_1, ..., \Delta f_n\} \in \mathrm{R}^m.$$

Опр. Для точки $M=(x_1^0,...,x_{k-1}^0,x_k,x_k^0,...,x_n^0)$ только с k-ой переменной координатой соответствующий вектор $\Delta_k F=\{\Delta_k f_1,...,\Delta_k f_n\}$ называется частичным приращением отображения F в точке M_0 по переменной x_k.
Пр.

ТЕОРЕМА 5.2 (*свойства непрерывных отображений*)

1) Отображение $F=(f_1,...f_m)$ непрерывно в точке M_0 тогда и только тогда, когда его координатные функции $f_i(M),\ i=1,...,m$, непрерывны в этой точке.
2) Отображение F непрерывно в точке M_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{M\to M_0}\|\Delta F\|=\lim\limits_{M\to M_0}\sqrt{(\Delta f_1)^2+...+(\Delta f_m)^2}=0$.
3) Если F непрерывно в точке M_0, то оно непрерывно в этой точке по каждой переменной, Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.
4) Если функции $f_1,\ f_2$ непрерывны в точке $M_0\in\tilde{\mathrm{R}}^m$, то их линейная комбинация $\alpha f_1+\beta f_2$, произведение $f_1\cdot f_2$ и частное $\dfrac{f_1}{f_2}$ непрерывны в этой точке, в последнем случае при условии $f_2(M_0)\neq 0$.
5) Пусть отображение $G:X\to\tilde{\mathrm{R}}^m$ непрерывно в точке M_0 и $N_0:=G(M_0)\in\tilde{\mathrm{R}}^m$. Если отображение F непрерывно в точке $N_0\in Y$ и принимает значения в $\tilde{\mathrm{R}}^p$, тогда композиция отображений $G\circ F:X\to\tilde{\mathrm{R}}^p$ непрерывна в точке M_0.
6) Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает на этом множестве своих наибольшего и наименьшего значений.

§ 5.2 Дифференцируемые отображения и функции.

Опр. Пусть отображение $F(M)$ определено в окрестности точки M_0. Оно называется дифференцируемым в точке M_0, если полное приращение в этой точке представимо в виде $\Delta F=L\Delta M+\alpha(M)$, где $L:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^m$ - линейный оператор, определяемый отображением F и точкой M_0, $\Delta M=\{dx_1,...,dx_n\}\in\mathrm{R}^n$, а отображение $\alpha(M)$ определено в окрестности точки M_0 и обладает свойством $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{\|\alpha(M)\|_m}{\|\Delta M\|_n}=0$ (Фреше, 1911-1913).

ЗАМЕЧАНИЕ Линейный оператор $L:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^m$ совпадает с матричным оператором, порожденным его матрицей $A(L)=(a_{ij})$ в естественных базисах пространств $\mathrm{R}^n,\mathrm{R}^m$. Это позволяет записать полное приращение отображения в координатной форме

$$\Delta F=\{\Delta f_1,...,\Delta f_m\}=\{\sum_{j=1}^n a_{1j}dx_j+\alpha_1(M),\ ...,\ \sum_{j=1}^n a_{mj}dx_j+\alpha_m(M)\},$$

где $\alpha(M)=\{\alpha_1(M),..,\alpha_m(M)\}$. Матрица $A(L)=(a_{ij})$ имеет размер $m\times n$ и называется матрицей Якоби отображения F в точке M_0.
Замечание позволяет дать такое

Опр. Пусть функция $f(M)$ определена в окрестности точки M_0. Она называется дифференцируемой в точке M_0, если ее полное приращение в этой точке представимо в виде $\Delta f = a_1 dx_1 + ... + a_n dx_n + \alpha(M)$, где $a_1,...,a_n$ - некоторые числа, а функция $\alpha(M)$ обладает свойством $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{|\alpha(M)|}{\|\Delta M\|_n} = 0$ (Томе, Юнг, Пирпонт, Штольц, 1873-1908).

Опр. Если отображение F дифференцируемо в точке M_0, то слагаемое $dF := L(\Delta M)$ называется дифференциалом (главной частью приращения ΔF) отображения F в точке M_0. Линейный оператор $L : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ называется производной отображения F в точке M_0.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 В силу предыдущего замечания координатные функции дифференциала dF вычисляются по формуле $\begin{pmatrix} df_1 \\ ... \\ df_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}...a_{1n} \\ . \quad\quad . \\ a_{m1}...a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ ... \\ dx_n \end{pmatrix}$. В частном случае функции $f(M)$ $df = a_1 dx_1 + ... + a_n dx_n$ есть дифференциал функции в точке M_0.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Техника полных дифференциалов - Эйлер, 1730-ые гг.
Дифференциал как главная линейная часть приращения - Коши.

Опр. Пусть функция $f(M)$ определена в окрестности точки M_0, и единичный вектор $\bar{k} = \{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, ..., \cos\alpha_n\}$ в R^n задан своими направляющими косинусами ($\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + ... + \cos^2\alpha_n = 1$). Производной функции $f(M)$ в точке M_0 по направлению $\bar{k}$ называется конечный предел $\left[D_{\bar{k}} f\right](M_0) = \lim\limits_{M \to M_0} {}_{\bar{k}} \frac{F(M) - F(M_0)}{\|\overline{M_0 M}\|_n}$, если он существует.

Опр. Пусть функция $f(M)$ определена в окрестности точки M_0. Частной производной $f(M)$ в точке M_0 по переменной x_k называется конечный предел $\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) := \lim\limits_{x_k \to x_k^0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k}$, если он существует (определение - Якоби, 1841; обозначение - Лежандр, 1786).

Опр. Если функция $F(M)$ имеет частные производные по всем переменным в точке M_0, то ее градиентом в точке M_0 называется вектор $grad\, f(M_0) := \left\{ \frac{df}{dx_1}(M_0), ..., \frac{df}{dx_n}(M_0) \right\}$

ЗАМЕЧАНИЕ От лат. gradior – идти вперед. Термин и обозначение - Максвелл, 1873.

ТЕОРЕМА 5.3 (*свойства дифференцируемого отображения*)

1) Отображение F дифференцируемо в точке M_0 тогда и только тогда, когда координатные функции $f_1(M), ..., f_m(M)$ дифференцируемы в этой точке.
2) Если $F = (f_1, ..., f_m)$ дифференцируемо в точке M_0, то матрица Якоби в этой точке

имеет вид $A(L)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(M_0)\ldots\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(M_0) \\ . \quad . \quad . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(M_0)\ldots\frac{\partial f_m}{\partial x_n}(M_0) \end{pmatrix}$. В частности, если $F(M)$ дифференцируема в точке M_0, то дифференциал функции $df=\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)dx_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)dx_n$ (Якоби, 1841).

3) Если функция $F(M)$ имеет непрерывные частные производные в точке M_0, то она дифференцируема в этой точке.
4) Если функция $F(M)$ дифференцируема в точке M_0, то она дифференцируема в этой точке по каждому направлению $\bar{k}=\{\cos\alpha_1,\ldots,\cos\alpha_n\}$, и производная

$$\left[D_{\bar{k}} f\right](M_0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\cos\alpha_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\cos\alpha_n=\left\langle grad\ f(M_0),\bar{k}\right\rangle.$$

5) Градиент функции определяет направление $\overline{k_0}:=\frac{grad\ f(M_0)}{\|grad\ f(M_0)\|}$, производная по которому будет максимальной : $\forall\bar{k}\ \ D_{\bar{k}} f(M_0)\le D_{\bar{k}0} f(M_0)$. При этом в противоположном направлении $-\bar{k}_0$ производная будет минимальной.

СЛЕДСТВИЕ Дифференцируемое отображение непрерывно.
ЗАМЕЧАНИЕ Рассмотрим кривую в области определения функции, в каждой точке M_0 которой касательная имеет направление $-grad\ f(M_0)$. Множество соответствующих точек $(M_0, f(M_0))$ графика функции называется линией наискорейшего спуска. Это объясняется тем, что для каждой точки M_0 кривой величина спуска $f(M_0)-f(M)$ точки $(M, f(M))$ по поверхности будет наибольшей при движении M по этой кривой.

Опр. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$. Плоскость $\mathrm{L}: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-f(x_0,y_0))=0$ называется касательной плоскостью к графику Γ_f функции в точке $N_0=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, если для переменной точки $N:=(M,f(M))=$ $=(x,y,f(x,y))\in\Gamma_f$ $\quad \lim\limits_{M\to M_0}\frac{\rho(N,\mathrm{L})}{\left|\overline{N_0N}\right|}=0$. В этом случае говорят коротко, что функция $z=f(x,y)$ имеет касательную плоскость в точке M_0 (Дюпен, 1813, Коши, 1826).

Опр. Если функция $z=f(x,y)$ имеет касательную плоскость в точке $M_0(x_0,y_0)$, то прямая, проходящая через точку $N_0=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ и перпендикулярная к этой касательной плоскости, называется нормалью к поверхности (термин – Эйлер, 1775).
ЗАМЕЧАНИЕ (*геометрический смысл дифференцируемости*) График функции Γ_f имеет невертикальную ($C\ne 0$) касательную плоскость в точке $N_0=\left(M_0, f(M_0)\right)$ $\Leftrightarrow$ функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке M_0 (Фреше, 1911). В этом случае уравнение

касательной плоскости имеет вид $L: \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y-y_0)-(z-f(x_0,y_0))=0$, а уравнение нормали к поверхности – вид $l: \dfrac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)}=\dfrac{y-y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)}=\dfrac{z-f(x_0,y_0)}{-1}$.

Опр. Пусть функция $f(M)$ имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в каждой точке некоторой окрестности точки M_0. Если существует частная производная функции $\frac{\partial f}{\partial x_i}(M)$ в точке M_0 по переменной x_j, то в случае $i \neq j$ она обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)$ и называется смешанной производной, а в случае $i=j$ она обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(M_0)$ и называется частной производной второго порядка по переменной x_i (обозначение – Якоби, 1837).

ЗАМЕЧАНИЕ Если существуют смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M)$ в окрестности точки M_0 и хотя бы одна из них непрерывна в этой точке, то они совпадают. В дальнейшем молчаливо предполагается совпадение этих производных.
Пр.

ТЕОРЕМА 5.4 (*о сложном отображении*) Пусть U есть открытое множество в $\tilde{R}^n$, V - открытое множество в $\tilde{R}^m$. Пусть отображение $G: U \to V$ - дифференцируемо в точке $M_0 \in U$, отображение $F: V \to \tilde{R}^p$ дифференцируемо в точке $N_0 := G(M_0)$. Тогда отобра жение $F \circ G: U \to \tilde{R}^p$ дифференцируемо в точке M_0 и его матрица Якоби совпадает с произведением матриц Якоби отображений в F и G в соответствующих точках:

$$A\left[(F \circ G)'\right](M_0) = A[F'](N_0) \cdot A[G'](M_0).$$

Пр.

ТЕОРЕМА 5.5 (*формула Тейлора функции двух переменных*) Пусть функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до $(n+1)$-го порядка включительно в окрест ности точки $M_0(x_0,y_0)$; $p(x,y) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left[\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right](M_0)$ - многочлен Тейлора функции $f(x,y)$ в окрестности точки M_0, записанный в символической форме. Тогда в окрестности этой точки имеет место формула Тейлора $f(x,y)=p(x,y)+R_n(x,y)$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\right]\left(x_0+\xi(x-x_0),y_0+\xi(y-y_0)\right),\text{ где } \xi\in(0,1).$$

ЗАМЕЧАНИЕ Аналогичная формула Тейлора имеет место и для функции от n переменных.

Опр. Аппроксимировать функцию $f(x,y)$ на множестве $X\subset \tilde{R}^2$ многочленом с заданной точностью ε - это значит найти многочлен $p(x,y)$ со свойством $\forall(x,y)\in X \quad |f(x,y)-p(x,y)|\le\varepsilon$.

Для формулировки условий локального экстремума функции n переменных нам понадобится классификация квадратичных форм и некоторые ее свойства.

Опр. Квадратичная форма $g(x_1,...x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_i x_j$ называется положительно (отрицательно) определенной, если $\forall(x_1,...,x_n)\ne(0,...,0) \quad g(x_1,...,x_n)>0 \quad \left(g(x_1,...,x_n)<0\right)$ (Гаусс, 1801) .

Пр.

Опр. Квадратичная форма $g(x_1,...,x_n)$ называется полуопределенной, если $\forall(x_1,...,x_n)\in\tilde{R}^n$ $g(x_1,...,x_n)\ge 0$ или $\forall(x_1,...,x_n)\in\tilde{R}^n \quad g\left(x_1,...,x_n\right)\le 0$, причем $\exists(x_1^0,...,x_n^0)\ne 0 \quad g(x_1^0,...,x_n^0)=0$.

Пр.

Опр. Кв. форма $g(x_1,...,x_n)$ называется неопределенной, если $\exists M_1,M_2\in\tilde{R}^n \quad g(M_1)>0,\ g(M_2)<0$

Пр.

Опр. Миноры матрица $A=(a_{ij})$ квадратичной формы $\delta_1:=a_{11},\quad \delta_2:=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},...,\quad \delta_n=\det A$ называются главными минорами.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Пусть квадратичная форма $g(x_1,...x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_i x_j$ симметричная: $a_{ij}=a_{ji}$

1) Равносильны утверждения: а) она положительно определеная;
   б) (*критерий Сильвестра*) все главные миноры ее матрицы положительны;
   в) все собственные числа ее матрицы положительны.
2) Квадратичная форма $g(x_1,...,x_n)$ отрицательно определеная тогда и только тогда, когда последовательность главных миноров ее матрицы коэффициентов знакочередующаяся:
$$-\delta_1>0,\delta_2>0,\ldots,(-1)^n\delta_n=(-1)^n\det(a_{ij})>0.$$
3) $g(x_1,...,x_n)$ неопределенная тогда и только тогда, когда собственные числа ее матрицы имеют разные знаки.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Квадратичная форма допускает запись в матричном виде
$$g(x_1,...,x_n)=X^T\cdot(a_{ij})\cdot X=(x_1\ldots x_n)\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Опр. Матрицей Гессе функции $f(M) = f(x_1,...,x_n)$, имеющей частные производные второго порядка, называется матрица $H_f(M) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) \right)$.

Опр. Пусть функция $f(M) = f(x_1,...,x_n)$ определена на множестве X, точка $M_0 \in X$ и является предельной точкой. Говорят, что M_0 является точкой локального максимума (минимума), если $\varepsilon > 0 \ \forall M \in D(M_0,\varepsilon) \bigcap X \quad f(M) \le f(M_0) \quad (f(M) \ge f(M_0))$. При этом $f(M_0)$ называется локальным максимумом (минимумом).

ТЕОРЕМА 5.6 (*необходимое и достаточное условия локального экстремума*)

1) Если функция $f(M) = f(x_1,...,x_n)$ имеет локальный экстремум в точке $M_0 = (x_1^0,...,x_n^0)$ и имеет частные производные в этой точке, то $\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0$.

2) Пусть $f(M)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка

включительно в точке M_0 и $\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0$. Тогда:

а) если квадратичная форма $g(x_1,...,x_n) = X^T \cdot H_f(M_0) \cdot X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\, x_i x_j$

положительно определенная, то M_0 есть точка локального минимума;

б) если $g(x_1,...,x_n)$ отрицательно определенная, то M_0 есть точка локального максимума;

в) если $g(x_1,...,x_n)$ является неопределенной, то M_0 - седловая точка:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_1, M_2 \in D(M_0,\varepsilon) \quad f(M_1) > f(M_0), \ \ f(M_2) < f(M_0)$$

г) если $g(x_1,...,x_n)$ полуопределенная, то нужны дополнительные исследования (Эйлер,1755, Лагранж, 1759).

ЗАМЕЧАНИЕ 1 (*метод наискорейшего спуска или градиентный метод*) Пусть $f(M) = f(x_1,...,x_n)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в области G и ее квадратичная форма сильно положительна

$$\exists\, c, C > 0 \ \ \forall M \in G \ \ \forall X \in \tilde{\mathrm{R}}^n \quad c \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) x_i x_j \le C \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Фиксируем M_0 и определим последовательность точек $\{M_k\}$ по правилу $\overline{OM_{k+1}} := \overline{OM_k} - \alpha_k \, grad\, f(M_k)$, где $\{\alpha_k\}$ выбирается из условия максимального убывания $f(M)$, когда M движется из точки M_k в направлении $-grad\, f(M_k)$. В теории оптимизации доказывается, что тогда $\{M_k\}$ сходится со скоростью геометрической прогрессии к точке локального минимума функции $f(M)$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Метод наискорейшего спуска применим к численному решению системы нелинейных уравнений $\begin{cases} f_1(x_1,...,x_n)=0 \\ \quad . \quad . \\ f_n(x_1,...,x_n)=0 \end{cases}$. Именно, множество решений этой системы совпадает с множеством решений уравнения $f(x_1,...,x_n):=\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x_1,...,x_n)=0$, то есть с множеством точек равного нулю минимума неотрицательной функции $f(x_1,...,x_n)$ если такие существуют. Их же можно искать методом наискорейшего спуска.

§ 5.3 Неявные отображения и условный экстремум.

Опр. Пусть для каждой $M=(x_1,...,x_n)\in X\subseteq \tilde{\mathrm{R}}^n$ система уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)=0 \\ \quad . \quad . \quad . \\ \Phi_m(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

с m неизвестными $(y_1,...,y_m)$ имеет одно (выделенное) решение, то есть задано правило, сопоставляющее каждой точке M точку $(y_1,...,y_m)\in\tilde{R}^m$. Это правило называется неявным отображением от n переменных из X в $\tilde{\mathrm{R}}^m$.

Опр. В случае, когда $m=1$, система (1) вырождается в одно уравнение $\Phi(x_1,...,x_1,y)=0$, и соответствующее неявное отображение из X в R называется неявной функцией от n переменных.

Опр. Образуем по отображению $F(M)=(f_1(M),...,f_m(M)):\ X\to\tilde{\mathrm{R}}^m$ систему уравнений $\begin{cases} f_1(x_1,...,x_n)-y_1=0 \\ \quad . \quad . \\ f_m(x_1,...,x_n)-y_m=0 \end{cases}$. Если эта система на некотором множестве $Y\subseteq\tilde{\mathrm{R}}^m$ определяет неявное отображение в множество X, то такое отображение называется правым обратным к $F(M)$ на множестве Y. При дополнительном условии биективности $F(M)$ из X на Y это неявное отображение обозначается F^{-1} и называется обратным к отображению F на множестве Y.

Пр.

Опр. Определитель матрицы Якоби отображения $F(M)=(f_1(M),...,f_n(M)):\ X\to\tilde{\mathrm{R}}^n$ называется якобианом

Обозначение $\dfrac{\partial(f_1,...,f_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}:=\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$. Понятие - Эйлер, 1759, Якоби, 1833. Обозначение - Донскин, 1854. Термин - Кэли, Сильвестр, 1856.

ТЕОРЕМА 5.7 (*дифференцируемость неявных отображений*) 1) Пусть функции $\Phi_1,...,\Phi_m$ а) имеют непрерывные частные производные в окрестности точки $N_0=(x_1^0...x_n^0,y_1^0...y_m^0)$, б) $\Phi_1(N_0)=...=\Phi_m(N_0)=0$ и в) якобиан $\det\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_j}(N_0)\right)=\frac{\partial(\Phi_1,...\Phi_m)}{\partial(y_1,...,y_m)}(N_0)\neq 0$.

Тогда: а) на некотором шаре $D(M_0,\varepsilon)$ с центром в точке $M_0:=(x_1^0,...,x_n^0)$ существует непрерывно дифференцируемое неявное отображение $F(M)=(f_1(M),...,f_m(M)):D(M_0,\varepsilon)\to\tilde{\mathrm{R}}^m$

б) частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ в точках $M(x_1,...,x_n)\in D(M_0,\varepsilon)$ находятся из решения СЛАУ, в которой $N=(x_1,...,x_n,\, f_1(M),...,\, f_m(M))$,

$$\begin{cases}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_j}(N)+\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1}(N)\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(M)+...+\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_m}(N)\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(M)=0\\ . \quad . \quad . \\ \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_j}(N)+\frac{\partial\Phi_m}{\partial y_1}(N)\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(M)+...+\frac{\partial\Phi_m}{\partial y_m}(N)\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(M)=0\end{cases},\quad j=1,...,n. \qquad (2)$$

2) Пусть отображение $F(M)=(f_1(M),...,f_n(M)):X\to\tilde{\mathrm{R}}^n$, $X\subseteq\tilde{\mathrm{R}}^m$, непрерывно дифференцируемо в окрестности точки M_0 и его якобиан в этой точке $\frac{\partial(f_1,...,f_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}(M_0)\neq 0$.

Обозначим $K_0:=F(M_0)$. Тогда в некоторой окрестности $D(K_0,\varepsilon)$ точки K_0 существует обратное непрерывно дифференцируемое отображение

$$F(K)=(g_1(K),...,g_n(K):D(K_0,\varepsilon)\to\tilde{\mathrm{R}}^n,$$

и его матрица Якоби является обратной к матрице Якоби исходного отображения:

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(K)\right)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(M)\right)^{-1},\quad K:=F(M).$$

Пр.

Опр. Пусть в системе уравнений $\begin{cases}\Psi_1(x_1,...,x_n)=0\\ \quad . \quad . \\ \Psi_m(x_1,...,x_n)=0\end{cases},\quad m<n, \qquad (3)$

а) функции $\Psi_1,...,\Psi_m$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $N_0=(x_1^0,...,x_n^0)$,

б) $\Psi_1(N_0)=...=\Psi_m(N_0)=0$, и, например, в) $\frac{\partial(\Psi_1,...,\Psi_m)}{\partial(x_1,...x_m)}(N_0)\neq 0$. Тогда по предыдущей теореме в некоторой окрестности $D_{n-m}(M_0,\varepsilon)$ точки $M_0:=(x_{m+1}^0,...,x_n^0)$ существует непрерывно дифференцируемое неявное отображение

$$F(x_{m+1},...,x_n)=F(M)=(f_1(M),...,f_m(M)):D_{n-m}(M_0,\varepsilon)\to\tilde{\mathrm{R}}^m.$$

График этого отображения

$$\Gamma_F=\left\{\left(x_{m+1},...,x_n,\, f_1(x_{m+1},...,x_n),...,\, f_m(x_{m+1},...,x_n)\right)\in\tilde{\mathrm{R}}^n:(x_{m+1},...,x_n)\in D_{n-m}(M_0,\varepsilon)\right\}$$

называется $(n-m)$ - мерным непрерывно дифференцируемым многообразием в окрестности точки $N_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$, определяемым системой уравнений (3).

Опр. Пусть функция $f(M)$ определена в окрестности точки $M_0(x_1^0,...x_n^0)$, M_0 и переменная точка $M(x_1,...,x_n)$ удовлетворяют системе уравнений связи (3), то есть M_0, M находятся на $(n-m)$-мерным многообразии Γ_F, определяемом системой (3) в $\tilde{R}^n$. Говорят, что $f(M)$ имеет в точке M_0 условный локальный максимум (минимум), если

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall M \in D(M_0, \varepsilon) \bigcap \Gamma_F \quad f(M) \le f(M_0) \ \ \left(f(M) \ge f(M_0) \right).$$

АЛГОРИТМ (*нахождения условного экстремума методом*)

1) (*необходимое условие*) Образуем функцию Лагранжа $\Phi(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m) :=$ $:= f(x_1,...,x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Psi_k(x_1,...,x_n)$, где переменные $\lambda_1,...,\lambda_m$ называются множителями Лагранжа. Если условный экстремум достигается в точке $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$, то $\exists\, \lambda_1^0,...,\lambda_m^0$

имеют место равенства $\begin{cases} \Phi'_{x_1}(N_0) = 0 \\ . \quad . \quad . \\ \Phi'_{x_n}(N_0) = 0 \\ \Phi'_{\lambda_1}(N_0) = 0 \\ . \quad . \quad . \\ \Phi'_{\lambda_m}(N_0) = 0 \end{cases}$, (4) где $N_0 := (x_1^0,...,x_n^0,\lambda_1^0,...,\lambda_m^0)$.

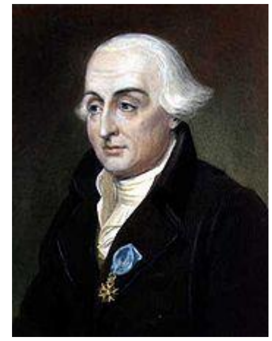
2) (*достаточное условие*) Пусть $N_0 := (x_1^0,...,x_n^0,\lambda_1^0,...,\lambda_m^0)$ удовлетворяет системе уравнений (4) и, например, $\dfrac{\partial(\Psi_1,...,\Psi_m)}{\partial(x_1,...x_m)}(M_0) \ne 0$. Тогда СЛАУ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + ... + \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_n}(M_0)dx_n = 0 \\ \qquad\qquad . \quad . \quad . \\ \dfrac{\partial \Psi_m}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + ... + \dfrac{\partial \Psi_m}{\partial x_n}(M_0)dx_n = 0 \end{cases}$$

разрешима относительно дифференциалов $dx_1,...,dx_m$. Образуем квадратичную форму $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(N_0) dx_i dx_j$ и подставим в нее эти решения $dx_1,...,dx_m$. Полученную квадратичную форму $\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j$ следует исследовать на определенность (*Лагранжа*, 1797).

Пр.

Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) - французский математик и механик. Разработал основные понятия вариационного исчисления и предложил метод вариаций для решения вариационных задач. Наиболее важные труды относятся к аналитической и теоретической механике, различным вопросам математического анализа (формула остаточного члена ряда Тейлора, формула конечных приращений, теория условных экстремумов), теории чисел, алгебре (симметрической функции корней уравнения, теория и приложения непрерывных дробей), дифференциальным уравнениям (теория особых решений), по интерполированию, математической картографии, астрономии и пр.



ГЛАВА 6 ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 6.1 Основные понятия.

Опр. Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную функцию, независимые переменные и производные этой функции.

Опр. Дифференциальное уравнением, в котором независимых переменных более одной (одна), называется дифференциальным уравнением в частных производных (ДУЧП), (обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)).

Пр.

Опр. Дифференциальным уравнением n-ого порядка называется ОДУ, в котором самый высокий порядок производной неизвестной функции равен n.

Опр. ОДУ вида $y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(n-1)})$ называется уравнением, разрешенным относительно старшей производной $y^{(n)}$. ОДУ вида $F(x, y, y', ... y^{(n)}) = 0$ называется уравнением общего вида. Здесь f, F - известные функции.

ЗАМЕЧАНИЕ В терминах ОДУ формулируются законы, по которым развиваются или связываются между собой процессы.

Пр.

Опр. Решением ОДУ n-ого порядка на интервале (a,b) называется n раз дифференцируемая на (a,b) функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождественное равенство на (a,b). График решения ОДУ называется интегральной кривой.

ПРИМЕР 1 $y' = f(x)$. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на (a,b), то согласно определению неопределенного интеграла множество решений этого ОДУ есть однопараметрическое семейство $\{F(x)+C\}$, $C \in \mathrm{R}$. Пара чисел (x_0, y_0), где $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in \mathrm{R}$, выделяют из этого семейства решений одно со свойством $y(x_0) = y_0$.

ПРИМЕР 2 Применяя два раза аналогичное рассуждение к дифференциальному уравнению $y'' = 2$, получим общее решение в виде двухпараметрического семейства функций

$y(x)=x^2+C_1x+C_2$. Произвольная тройка чисел $(x_0,y_0,y_1),\ x_0\in(a,b),\ y_0,y_1\in\mathrm{R}$, также определяет единственное решение этого уравнения со свойством $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1$.

КПР 1 Для ОДУ $y'=\dfrac{1}{x}$ не существует решения с условием $y(0)=y_0$, так как по определению такое решение должно иметь производную в точке $x_0=0$.

КПР 2 Для ОДУ $yy'=xy$ с условием $y(x_0)=0$ имеем два решения в окрестности точки

$$x_0\neq 0:\quad y=0,\quad y=\frac{1}{2}(x^2-x_0^2).$$

Приведенные примеры мотивируют следующие определения.

Опр. Пусть дано ОДУ $n-$ого порядка и числа $x_0,y_0,y_1,...,y_{n-1}$. Задача нахождения решения ОДУ в окрестности точки x_0, которое удовлетворяет равенствам $y(x_0)=y_0,...,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$, называется задачей Коши. Сами равенства называются условиями Коши, а числа $x_0,y_0,y_1,...,y_{n-1}$ - данными Коши.

Опр. Общим решением ОДУ n- ого порядка в окрестности точки x_0 называется функция $y=y(x,C_1,...C_n)$, зависящая от n параметров $C_1,...,C_n$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Решение, получаемое из общего при конкретных значениях параметров, называется частным.

Пр.

Опр. Решение ОДУ, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым.

Пр.

Опр. Решение, заданное в виде неявной функции $G(x,y,C_1,...,C_n)=0$, и зависящее от n произвольных параметров, называется общим интегралом.

Опр. Проинтегрировать ОДУ в явном виде – это значит найти его общее решение в виде элементарной функции. Проинтегрировать ОДУ в квадратурах – это значит найти его общее решение в виде интегралов от элементарных функций.

Пр.

§ 6.2 ОДУ первого и второго порядков, интегрируемые в квадратурах.

Опр. ОДУ вида $y'_x=f(x)g(y)$ или вида $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$ называется ОДУ с разделяющимися переменными. ОДУ вида $\dfrac{dy}{g(y)}=f(x)dx$ или вида $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\ +\dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0$ называется ОДУ с разделенными переменными.

ЗАМЕЧАНИЕ Решения этих уравнений выписываются в квадратурах:

$$\int\frac{dy}{g(y)}dy=\int f(x)dx,\qquad \int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0.$$

Пр.

Опр. Функция $F(x,y)$ называется однородной функцией степени k, если

$$\forall\lambda>0\quad\forall(x,y)\quad F(\lambda x,\lambda y)=\lambda^kF(x,y).$$

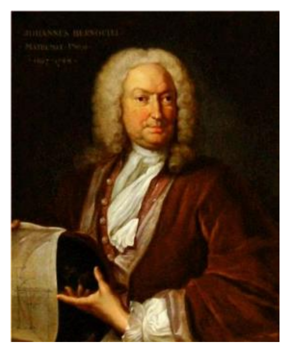
Опр. ОДУ вида $y'_x = f(x,y)$ или вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ называется однородным, если соответственно $f(x,y)$ - однородная функция нулевой степени, $M(x,y)$, $N(x,y)$ - однородные функции одинаковой степени. (Лейбниц, 1693).
ЗАМЕЧАНИЕ Однородное ОДУ преобразуется в ОДУ с разделяющимися переменными, если зависимую переменную y заменить на z по формуле $y = x \cdot z$.
Пр.

Опр. ОДУ вида $y'_x + p(x)y = q(x)y^\alpha$, где функции $p(x), q(x)$ заданы и непрерывны, называется уравнением Бернулли, если $\alpha \neq 0,1$ и линейным уравнением (ЛДУ) в противном случае.
ЗАМЕЧАНИЕ Эти ОДУ решаются методом вариации произвольной постоянной.
1) Сначала решается ОДУ с разделяющимися переменными $y' + p(x)y = 0$.

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\int p(x)dx = -P(x) + \ln C \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-P(x)}.$$

2) Решение исходного уравнения $y'_x + p(x)y = q(x)y^\alpha$ ищем в виде $y = C(x)e^{P(x)}$, считая в предыдущем решении произвольную постоянную зависящей от x (говорят: варьируя произвольную постоянную C). Для нахождения $C(x)$ подставим это решение в исходное уравнение: $C'_x e^{-P(x)} - Cp(x)e^{-P(x)} + p(x)Ce^{-P(x)} = q(x)C^\alpha e^{-\alpha\int p(x)dx}$. После сокращения получаем уравнение с разделяющимися переменными для нахождения $C(x)$.

Пр.



Иога́нн Берну́лли (1667 -1748) - швейцарский математик и механик, младший брат Якоба Бернулли, отец Даниила Бернулли. После смерти Ньютона - лидер европейских математиков. Получил формулу вычисления радиуса кривизны кривой (1692). Порядок дифференциального уравнения. Метод разделения переменных (1694). Метод неопределенных коэффициентов (совместно с Лейбницем,1702). Вывел дифференциальное уравнение геодезической линии на поверхности.
Воспитал множество учеников - Эйлер, Д.Бернулли и др.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Решение ОДУ второго порядка вида $y'' = f(x, y')$ сводится к решению ОДУ первого порядка $z' = f(x,z)$ с помощью замены $z = y'$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Решение ОДУ второго порядка вида $y'' = f(y, y')$ сводится к решению ОДУ первого порядка с помощью замены y' на зависимую переменную p.
Пр.

§ 6.3 Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Опр. Нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (НСОДУ) называется система вида $\begin{cases} x_1' = f_1(t_1, x_1, ..., x_n) \\ .... \\ x_n' = f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases}$, где функции $f_1, ..., f_n$ непрерывны на открытом множестве $G \subseteq \mathrm{R}^{n+1}$, а последовательность неизвестных функций $x_1(t), ..., x_n(t)$ называется решением системы. Число n называется порядком НСОДУ.

Опр. Если $x_1(t), ..., x_n(t)$ - решение НСОДУ в окрестности точки t_0, то кривая в $l := \{(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \in \mathrm{R}^{n+1} : t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\}$ называется интегральной кривой.

Опр. Пусть $(t_0, x_1^0, ..., x_n^0) \subset G$. Задачей Коши для НСОДУ с начальными условиями $\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0, \\ .... \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases}$ называется задача нахождения решения системы в окрестности точки t_0, которое удовлетворяет этим условиям.

Пр. Решение задачи Коши для ОДУ n – го порядка $y^{(n)} = f(t, y, ..., y^{(n-1)})$ с начальными условиями $y(t_0) = x_1^0, ..., y^{(n-1)}(t_0) = x_n^0$ равносильно нахождению решения задачи Коши для НСОДУ $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ .... \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, ..., x_n) \end{cases}$ с начальными условиями $x_1(t_0) = x_1^0, ..., x_n(t_0) = x_n^0$.

Опр. Функция $f(t, x_1, ..., x_n)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным $x_1, ..., x_n$ на множестве $K \subset \tilde{\mathrm{R}}^{n+1}$, если $\exists C > 0 \quad \forall (t, x_1, ..., x_n),\ (t, y_1, ..., y_n) \in K$

$$|f(t, x_1, ..., x_n) - f(t, y_1, ..., y_n)| < C\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ Если функция $f(t, x_1, ..., x_n)$ дифференцируема в каждой точке области $G \subset \tilde{\mathrm{R}}^{n+1}$, то она удовлетворяет условию Липшица на любом ограниченном замкнутом множестве (компакте) из G. Если $f(t, x_1, ..., x_n)$ удовлетворяет условию Липшица, то она непрерывна по совокупности переменных $x_1, ..., x_n$ в каждой точке из G.

ТЕОРЕМА 6.1 (*существования и единственности решения задачи Коши*)

Пусть функции $f_1(t, x_1, ..., x_n), ..., f_n(t, x_1, ..., x_n)$ непрерывны на открытом множестве $G \subset \tilde{\mathrm{R}}^{n+1}$ и удовлетворяют условию Липшица по $x_1, ..., x_n$ на любом компакте в G. Тогда $\forall\ (t_0, x_1^0, ..., x_n^0) \subset G$ в окрестности точки t_0 существует единственное решение $x_1(t), ..., x_n(t)$ задачи Коши для НСОДУ с начальным условием $x_1(t) = x_1^0, ..., \quad x_n(t_0) = x_n^0$. Если отказаться от условия Липшица, то решение задачи Коши существует, но оно, вообще говоря, неединственное (Коши, 1844. Липшиц, Пикар, 1890).

Опр. Нормальной системой линейных дифференциальных уравнений (НСЛДУ) называется система вида $\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$ или в матричной форме

$X_t' = A(t)X + B(t),$ где $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ - искомое решение на (α,β); $X_t' = \begin{pmatrix} x_t'(t) \\ \ldots\ldots \\ x_t'(t) \end{pmatrix}$;

$A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t)\ldots a_{1n}(t) \\ \ldots\ldots \\ a_{n1}(t)\ldots a_{nn}(t) \end{pmatrix}$ - матрица непрерывных на (α,β) коэффициентов; $B(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \ldots\ldots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ - матрица непрерывных на (α,β) свободных членов.

Опр. НСЛДУ называется однородной, если $\forall t \in (\alpha,\beta) \quad B(t) = 0$, и неоднородной в противном случае.

Пр.

Опр. Последовательность n решений $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \ldots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ldots, X_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ \ldots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ однородной НСЛДУ $X_t' = A(t)X$ называется фундаментальной системой, если $\forall t_0 \in (\alpha,\beta)$ векторы $X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0)$ линейно независимы.

Опр. Определитель и матрица $W(t) := \begin{vmatrix} x_{11}(t), \ldots x_{1n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1}(t) \ldots x_{nn}(t) \end{vmatrix}$, $\widetilde{W}(t) := \begin{pmatrix} x_{11}(t), \ldots x_{1n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1}(t) \ldots x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ называются соответственно вронскианом и фундаментальной матрицей (матрицей Вронского) НСЛДУ.

ТЕОРЕМА 6.2 (*свойства решений НСЛДУ*)

1) $\forall t_0 \in (\alpha,\beta) \quad \forall X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \ldots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^n$ существует единственное решение на (α,β) задачи Коши с начальным условием $x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$.
2) Систем n решений $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ фундаментальна на (α,β) тогда и только тогда, когда $\exists t_0 \in (\alpha,\beta) \quad W(t_0) \neq 0$.
3) Если система решений $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ фундаментальна на (α,β), то общее решение однородной НСЛДУ $X_t' = A(t)X$ имеет вид $c_1X_1(t) + \ldots + c_nX_n(t), \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{R}$;.
4) Если $X_0(t)$ - какое-либо (частное) решение неоднородной НСЛДУ, то общее (любое) решение этой НСЛДУ имеет вид $X(t) = X_0(t) + c_1X_1(t) + \ldots + c_nX_n(t), \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{R}$, где

$X_1(t),..., X_n(t)$ - фундаментальная система.

5) Если известна фундаментальная система $X_1(t),..., X_n(t)$, то частное решение неоднородной НСЛДУ можно вычислить по формуле $X_0(t) = \tilde{W}(t)\int_{t_0}^{t}\tilde{W}^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$, а решение задачи Коши с начальным условием $x_1(t_0) = x_1^0,..., x_n(t_0) = x_n^0$ - по формуле Коши $X(t) = \tilde{W}(t)\tilde{W}^{-1}(t_0)X_0 + \tilde{W}(t)\int_{t_0}^{t}\tilde{W}^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$, где $X_0 := \begin{pmatrix} x_1^0 \\ ... \\ x_n^0 \end{pmatrix}$.

Опр. Если $\tilde{W}(t)$ - фундаментальная матрица НСЛДУ, то матрица $\Phi(t) := \tilde{W}(t)\tilde{W}^{-1}(\tau)$ называется переходной матрицей этой системы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) Переходная матрица является решением задачи Коши для матричного уравнения $Z_t'(t) = A(t)Z(t)$ с функциональной матрицей $Z(t) = (z_{ij}(t))$ размера $n \times n$ и начальным условием $Z(\tau) = E$, где E есть единичная матрица.

2) Переходная матрица не зависит от выбора фундаментальной системы и полностью определяется матрицей коэффициентов $A(t)$ НСЛДУ.

Пр.

Опр. Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка (ЛДУ) называется ОДУ вида
$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x), \qquad (1)$$
где функции $a_1(x),..., a_n(x), f(x)$ непрерывны на (α, β). ЛДУ называется однородным, если $\forall x \in (\alpha, \beta) \quad f(x) = 0$ и неоднородным в противном случае.

Опр. Последовательность решений однородного ЛДУ n-го порядка называется линейно независимой на (α, β), если не существует такой ненулевой n-ки чисел $\alpha_1,...,\alpha_n$, что $\alpha_1 y_1(x) + ... + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$ на (α, β).

Опр. Вронскианом и фундаментальной матрицей однородного ЛДУ называются соответственно $W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_n(x) \\ . & . & . \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$, $\tilde{W}(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) & ... & y_n(x) \\ . & . & . \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$, где $y_1(x),..., y_n(x)$ есть последовательности линейно независимых решений (фундаментальная последовательность решении ЛДУ) (Вронский, 1812).

ЗАМЕЧАНИЕ Несложно показать, что линейная независимость последовательности n решений ЛДУ (1) равносильна тому, что последовательность соответствующих решений $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix},...,\begin{pmatrix} y_n(x) \\ \dots \\ y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$ ассоциированной с (1) НСЛДУ $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ \quad . \quad . \quad . \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -a_n(x)y_1 - ... - a_1(x)y_{n-1} + f(x) \end{cases}$, является фундаментальной. Поэтому прямым следствием теоремы 2 является

ТЕОРЕМА 6.3 (*свойства решений ЛДУ n-го порядка*)

1) $\forall x_0 \in (\alpha,\beta)\quad \forall\{y_1^0,...,y_n^0\}\in \tilde{\mathrm{R}}^n$ задача Коши с начальным условием $y(x_0)=y_1^0\ ,...,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_n^0$ имеет единственное решение на (α,β).
2) Решения $y_1(x),...,y_n(x)$ однородного ЛДУ линейно независимы на (α,β) тогда и только тогда, когда $\exists x_0\in(\alpha,\beta)\quad W(x_0)\neq 0$.
3) Если $y_1(x),...,y_n(x)$ - фундаментальная последовательность решений однородного ЛДУ, то любое (общее) его решение имеет вид $c_1y_1(x)+...+c_ny_n(x)$.
4) Если $y_0(x)$-какое-либо решение ЛДУ (1) и $y_1(x),...,y_n(x)$ - фундаментальная последо вательность решений, то любое (общее) решение ЛДУ (1) можно записать в виде
$$y_0(x)+c_1y_1(x)+...+c_ny_n(x).$$
5) Если известна фундаментальная последовательность $y_1(x),...,y_n(x)$, то решение задачи Коши для уравнения (1) можно искать по формуле Коши для этого уравнения $y(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}y_j^0\frac{W_{ji}(x_0)}{W(x_0)}\right)y_i(x)+\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{W_{ni}(\tau)}{W(\tau)}f(\tau)d\tau\, y_i(x)$, где $W_{ij}(\cdot)$ есть алгебраическое дополнение соответствующего элемента фундаментальной матрицы $\tilde{W}(\cdot)$.

Опр. Характеристическим многочленом матрицы $A\in M_{n,n}$ мы называется многочлен n-ой степени $p(\lambda):=\det(\lambda E-A)$. Нули этого многочлена $\lambda_1\ ,...,\ \lambda_r$ порядков соответственно $p_1\ ,...,\ p_r$ назывались собственными числами матрицы A. Ненулевые решения, вообще говоря комплекснозначные, СЛАУ $(A-\lambda_i E)X=0$ называются собственными векторами матрицы A.

Опр. Матрицы $A,C\in M_{n,n}$ называются подобными, если существует невырожденная матрица S (матрица перехода от A к C) со свойством $C=S^{-1}AS$.

ЗАМЕЧАНИЕ При решении НСЛДУ с постоянными коэффициентами $X_t'=AX+B(t)$ представляет интерес задача нахождения наиболее простой матрицы C, подобной матрице A. Если она найдена, то умножая уравнение $X_t'=SCS^{-1}X+B(t)$ слева на матрицу S^{-1}и делая замену переменных в полученном уравнении по формуле $Y:=S^{-1}X$, приходим к НСЛДУ $Y_t'=CY+S^{-1}B(t)$ с более простой матрицей коэффициентов. Одной из простейших матриц, подобных матрице A, будет так называемая жорданова нормальная форма этой матрицы.

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть дана НСЛДУ $\begin{cases} x_1'=a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n+b_1(t)\\ \dots\dots\dots\dots\\ x_n'=a_{n1}x_1+...+a_{nn}x_n+b_n(t)\end{cases}$ с постоянными коэффициен тами, и собственные числа $\lambda_1\ ,...,\ \lambda_n$ ее матрицы коэффициентов попарно различны и вещественны. Обозначим $X_1,..., X_n,\ X_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \dots \\ x_{nk} \end{pmatrix}$,соответствующие им собственные векторы

Тогда: 1) общее решение однородной НСЛДУ имеет вид $c_1 X_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n X_n e^{\lambda_n t}$;

2) матрица $\tilde{W}(t) := \left(x_{ij} e^{\lambda_j t} \right)$ является фундаментальной, и решение задачи Коши однородной НСЛДУ находится по формуле $\tilde{W}(t)\tilde{W}^{-1}(t_0)X_0$;

3) частное решение НСЛДУ ищется методом вариаций в виде

$$X_0(t) := c_1(t)X_1(t) + \ldots + c_n(t)X_n(t) = \tilde{W}(t)C(t),$$

где $C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ . \ . \ . \\ c_n(t) \end{pmatrix}$ есть решение системы $\begin{cases} x_{11}e^{\lambda_1 t}c_1' + \ldots + x_{1n}e^{\lambda_n t}c_n' = b_1(t) \\ \quad . \quad . \quad . \\ x_{n1}e^{\lambda_1 t}c_1' + \ldots + x_{nn}e^{\lambda_n t}c_n' = b_n(t) \end{cases}$ дифференциальных уравнений (метод вариаций, Лагранж, 1775)

§ 6.4 Интерполяционные многочлены и сплайны.

Интерполяционные многочлены понадобятся для получения формулы Коши решения НСЛДУ с постоянными коэффициентами. Сплайны же естественно излагать вместе с интерполяционными многочленами.

Опр. Задачей простой интерполяции на последовательности попарно различных узлов $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathrm{C}$ называется задача нахождения многочлена $p(z)$, принимающего в этих узлах наперед заданные значения $a_1,...,a_n$: $p(\lambda_i) = a_i,\ i = 1,...,n$.

ЗАМЕЧАНИЕ Многочленом наименьшей степени, решающим задачу простой интерполяции, является интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

$$p(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\omega'(\lambda_i)} \frac{\omega(z)}{z - \lambda_i}, \qquad \text{где } \omega(z) := (z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n).$$

Пр. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа по таблице

i	**1**	**2**	**3**
λ_i	2	3	4
a_i	4	-1	2

Опр. Сеткой с узлами $\{\lambda_k\}$ на отрезке $[a,b]$ называется разбиение $T := \{\lambda_k\}$: $a := \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n =: b$

Опр. Сплайном степени m на сетке T называется функция $S(x) = S_m(T, x)$, имеющая на $[a,b]$ непрерывные производные до $(m-1)$-го порядка включительно, которая совпадает на каждом отрезке $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ с каким-либо многочленом степени $\le m$ и хотя бы на одном отрезке – с многочленом степени m.

ПРИМЕР 1 $S_1(T, x)$ - линейный сплайн. Его график есть ломаная.

ПРИМЕР 3 $S_3(T, x)$ - кубический сплайн. Он является дважды непрерывно дифференцируемой на $[a,b]$ функцией, а его график составлен из кубических парабол.

Опр. Кубический сплайн называется естественным, если два дополнительных условия имеют вид $S''(\lambda_0) = S''(\lambda_n) = 0$, и периодическим, если они имеют вид

$$S'(\lambda_0)=S'(\lambda_n),\quad S''(\lambda_0)=S''(\lambda_n) \text{ и } a_0=a_n.$$

АЛГОРИТМ (*построения кубического сплайна*) Пусть заданы узлы, соответствующие значения в узлах $a_0,a_1,...,a_n$ и два дополнительных значения a', a'' первой или второй производной на каком-либо из концов.

1) Обозначим $b_i:=S''(\lambda_i)$, $h_i:=\lambda_i-\lambda_{i-1},\ i=1,...,n.$ $\Rightarrow$ $S''(x)=\dfrac{b_{i-1}(\lambda_i-x)+b_i(x-\lambda_{i-1})}{h_i}$ на $[\lambda_{i-1,}\lambda_i]$

$\Rightarrow$ Рабочая формула $\begin{cases} S(x)=\dfrac{b_{i-1}(\lambda_i-x)^3+b_i(x-\lambda_{i-1})^3}{6h_i}+\left(\dfrac{a_{i-1}}{h_i}-\dfrac{b_{i-1}h_i}{6}\right)(\lambda_i-x)+\left(\dfrac{a_i}{h_i}-\dfrac{b_ih_i}{6}\right)(x-\lambda_{i-1}),\\ x\in[\lambda_{i-1},\lambda_i],\quad i=1,...,n.\end{cases}$

2) Основная СЛАУ $\begin{cases} h_1b_0+2(h_1+h_2)b_1+h_2b_2=6\dfrac{a_2-a_1}{h_2}-6\dfrac{a_1-a_0}{h_1}\\ \quad . \quad . \quad .\\ h_{n-1}b_{n-2}+2(h_{n-1}+h_n)b_{n-1}+h_nb_n=6\dfrac{a_n-a_{n-1}}{h_n}-6\dfrac{a_{n-1}-a_{n-2}}{h_{n-1}}\end{cases}$ с $n-1$ уравнениями

и $n+1$ неизвестными $b_0,...,b_n$. Добавляем к ним два уравнения со значениями a',a''.

3) Решаем полученную СЛАУ и решение подставляем в рабочую формулу $S(x)$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть матрица $A\in M_{n,n}$ имеет попарно различные собственные числа $\lambda_1,...,\lambda_n$. Найдем соответствующие им собственные векторы и составим из последних как из столбцов матрицу $S_A:=\left(x_{i\,j}\right)$. Тогда имеет место равенство $J(A)=S_A^{-1}AS_A$, где матрица

$J(A):=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ . & . & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$ называется жордановой нормальной формой матрицы A.

S_A называется матрицей перехода от A к $J(A)$.

Опр. Образуем по многочлену $p(x):=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$, квадратной матрице A и единичной матрице E матрицу $p(A):=a_0A^n+a_1A^{n-1}+...+a_nE$. Она называется многочленом от матрицы A.

ПРИМЕР 1 $p(A)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{\omega'(\lambda_k)}\dfrac{\omega(x)}{x-\lambda_k}\Big|_{x=A}$, где $\omega(x):=(x-\lambda_1)...(x-\lambda_n)$.

ПРИМЕР 2 Обозначим $e^{tA}=:p(A)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\lambda_kt}}{\omega'(\lambda_k)}\dfrac{\omega(x)}{x-\lambda_k}\Big|_{x=A}$ для $p(\lambda_k):=e^{\lambda_kt},\ k=1,...,n$.

ЗАМЕЧАНИЕ Несложно показать, что $(e^{tA})'_t=A\cdot e^{tA}$ и $e^{0A}=E$.

ТЕОРЕМА 6.4 (*свойства решений НСЛДУ с постоянными коэффициентами*) Пусть в НСЛДУ $X'=AX+B(t)$ квадратная числовая матрица $A=(a_{ij})$ имеет размер n, а элементы матрицы $B(t)=(b_1(t),...,b_n(t))^T$ непрерывны на $[\alpha,\beta]$. Тогда:

1) матрица $\exp\{(t-\tau)A\}$ является переходной матрицей НСЛДУ, то есть фундаментальной со свойством $e^{(t-\tau)A}\Big|_{t=\tau}=E$;

2) общее решение однородной НСЛДУ $X(t)=e^{tA}C,\quad C=\begin{pmatrix}C_1\\ \dots\\ C_n\end{pmatrix}$;

3) решение задачи Коши $X(t_0)=X_0$ для однородной НСЛДУ имеет вид $e^{(t-t_0)A}X_0$;

4) (*формула Коши*) решение задачи Коши $X(t_0)=X_0$ для неоднородной НСЛДУ имеет вид

$$X(t)=e^{(t-t_0)A}X_0+\int\limits_{t_0}^{t}e^{(t-\tau)A}B(\tau)d\tau.$$

§ 6.5 Численное решение задачи Коши для ОДУ.

Опр. Сеткой с шагом h и узлами x_k называется разбиение отрезка $[x_0,x_0+l]$ точками $x_{n+1}:=x_n+h,\quad h:=\dfrac{l}{N},\quad n=0,...,N-1$. Сеточной функцией называется функция, определенная в узлах $x_0,...,x_N$.

Пусть правая часть ОДУ $y'_x=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные в точке (x_0,y_0). Тогда по формуле Тейлора в окрестности точки (x_0,y_0) для решения $y(t)$ задача Коши: $y'_x=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$, имеем $y(x_1)=y(x_0)+y'(x_0)h+O(h^2)=y(x_0)+f(x_0,y_0)h+O(h^2)\quad\Rightarrow$

Опр. Методом Эйлера приближенного решения задачи Коши $y'_x=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$, на сетке $x_0,...,x_n$ называется нахождение сеточной функции $\{y_k\}$ по формулам

$$y_0:=y_0,\quad y_{n+1}:=y_n+f(x_n,y_n)h,\quad n=0,..,N-1.$$

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Локальная погрешность метода Эйлера – это погрешность на одном шаге, и она равна, как следует из формулы Тейлора, $O(h^2)$. Глобальная погрешность – это величина $\max\limits_{n\in N}|y(x_n)-y_n|$. Для метода Эйлера она равна $O(h)$.

Опр. Методом Рунге-Кутта приближенного решения задачи Коши $y'_x=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$ на сетке $x_0,...,x_n$ называется нахождение сеточной функции $\{y_k\}$ по формулам

$$y_0:=y_0,\quad y_{n+1}:=y_n+\frac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right),\text{ где }\begin{cases}k_1:=f(x_n,y_n)h\\ k_2:=f\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+k_1\right)h\\ k_3:=f\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+k_2\right)h\\ k_4:=f(x_n+h,y_n+k_3)h\end{cases},\quad n=0,...,N-1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Локальная погрешность метода Рунге-Кутта на одном шаге равна $O(h^5)$. Глобальная погрешность равна $O(h^4)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Методы Эйлера и Рунге-Кутта имеют место и для НСОДУ.

ПРИМЕР Для задачи Коши $\begin{cases} x'_t = f(t,x,y) \\ y'_t = f(t,x,y) \end{cases}$, $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ формула метода Рунге-Кутта имеет вид $\begin{cases} x_0 := x_0 \\ y_0 := y_0 \end{cases}$, $\begin{cases} x_{n+1} := x_n + \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ y_{n+1} := y_n + \dfrac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \end{cases}$, где

$$\begin{cases} k_1 := f_1(t_n, x_n, y_n)h \\ k_2 := f_1(t_n + \dfrac{h}{2}, x_n + k_1, y_n + l_1)h \\ k_3 := f_1(t_n + \dfrac{h}{2}, x_n + k_2, y_n + l_2)h \\ k_4 := f_1(t_n + h, x_n + k_3, y_n + l_3)h \end{cases}, \quad \begin{cases} l_1 := f_2(t_n, x_n, y_n)h \\ l_2 := f_2(t_n + \dfrac{h}{2}, x_n + k_1, y_n + l_1)h \\ l_3 := f_2(t_n + \dfrac{h}{2}, x_n + k_2, y_n + l_2)h \\ l_4 := f_2(t_n + h, x_n + k_3, y_n + l_3)h \end{cases}.$$

§ 6.6 Динамические системы и траектории.

Опр. НСОДУ вида $\begin{cases} x'_{1t} = f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \quad\dots \\ x'_{nt} = f_n(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$ или в матричной форме $X' = F(x)$, где отображение $F = (f_1,\dots,f_n)$ определено на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, называется автономной системой (АС).

ЗАМЕЧАНИЕ Предполагаем, что функции $f_k(x_1,\dots,x_n),\ \ k = 1,\dots,n$, удовлетворяют условию Липшица на любом замкнутом ограниченном множестве $K \subset G$. Тогда по теореме единст венности задача Коши с начальными данными $t_0 \in \mathbb{R},\ x_0 \in G$ имеет единственное решение.

Опр. Множества точек $\{x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t)) : t \in (a,b)\}$ в $\mathbb{R}^n$ называются траекториями, множество траекторий называется фазовым портретом динамической системы, а пространство $\mathbb{R}^n$ - фазовым пространством (термины – Гюйгенс; Гиббс, 1884).

ЗАМЕЧАНИЕ В силу теоремы единственности траектории между собой не пересекаются. Траектории, задаваемые решениями $x(t), x(t+a),\ \ a \in \mathbb{R}$, совпадают.

Пр.

Опр. Постоянное решение $x(t) \equiv a \in \mathbb{R}^n$ динамической системы порождает траекторию, называемую положением равновесия.

ЗАМЕЧАНИЕ Из определения следует, что точка $a \in \mathbb{R}^n$ является положением равновесия динамической системы тогда и только тогда, когда число a является решением системы $\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \ .\ .\ .\ . \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$

Опр. Определенное на $(-\infty, +\infty)$ решение динамической системы $x(t)$ называется периодическим, а соответствующая траектория в $\mathbb{R}^n$ - замкнутой (циклом), если

$$\exists T > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad x(t+T) = x(t).$$

ЗАМЕЧАНИЕ Если траектория динамической системы сама себя пересекает хотя бы в одной точке, то она необходимо является либо положением равновесия, либо циклом (в силу теоремы единственности).

Пр.

Опр. Цикл ДС называется предельным, если во множестве траекторий, проходящих через точки, достаточно близкие к этому циклу, нет замкнутых траекторий. Цикл называется устойчивым (притягивающим), если он является асимптотой для всех траекторий, проходящих через достаточно близкие к этому циклу точки, при $t \to +\infty$. Цикл называется неустойчивым (отталкивающим), если он является асимптотой для всех близких траекторий при $t \to -\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ Существуют альбомы фазовых портретов динамических систем.

Анри Пуанкаре (1854 - 1912) - французский математик, физик, астроном. Фундаментальные открытия, касающиеся поведения интегральных кривых дифференциальных уравнений. Большое число работ по теории автоморфных функций, дифференциальным уравнениям, топологии, теории вероятностей. В 1904 г. сформулировал принцип относительности. Предложил первый вариант релятивистской теории гравитации. Леоте (1985) впервые использовал фазовый портрет системы для изучения характера возможных движений в системе и еще до Пуанкаре показал типичную картину фазового портрета, содержащего предельный цикл.

ПРИМЕР. Исследуем фазовый портрет однородной НСЛДУ $\begin{cases} x' = a_{11}x_1 + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$.

Пусть λ_1, λ_2 - собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$.

1.1) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Соответствующее поведение траекторий вблизи положения равновесия $(0,0)$ называется устойчивым узлом.

1.2) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Соответствующее поведение траекторий вблизи положения равновесия $(0,0)$ называется неустойчивым узлом $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Соответствующее поведение траекторий вблизи положения равновесия $(0,0)$ называется седлом $(0,0)$.

2) $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. Если матрица A имеет два линейно независимых собственных вектора. В зависимости от знака λ соответствующее поведение траекторий вблизи $(0,0)$ называется устойчивым или неустойчивым дикритическим узлом.

3) $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2 =: a + bi \in \mathbb{C}$.

3.1) $\mathrm{Re}\, a < 0$. Поведение траекторий вблизи положения равновесия $(0,0)$ называется устойчивым фокусом.

3.2) $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$. Поведение траекторий вблизи положения равновесия $(0,0)$ называется неустойчивым фокусом.

3.3) $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$. Поведение траекторий вблизи положения равновесия $(0,0)$ называется центром. Траектории являются циклами с периодом $= \dfrac{2\pi}{|\beta|}$.

§ 6.7 Понятия устойчивости и линеаризации.

Условимся обозначать $X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $x(t) := (x_1(t),\dots,x_n(t))$.

Опр. Пусть для НСОДУ $X'_t = F(t,x(t))$ выполнено условие теоремы единственности на множестве точек (t,x) таких, что $t > \alpha$, $x \in G \subset \mathbb{R}^n$. Решение $\varphi(t):[t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_0 \in G$ с условием $\rho(\varphi(t_0),x_0) < \delta$ решение $\psi(t)$ задачи Коши с начальным условием $\psi(t_0) = x_0$ удовлетворяет условию: $\forall t \ge t_0 \quad \rho(\psi(t),\varphi(t)) < \varepsilon$. Если кроме того $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(\psi(t),\varphi(t)) = 0$, то решение $\varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым.

ЗАМЕЧАНИЕ Устойчивость решения $\varphi(t)$ для НСОДУ $X'_t = F(t,x)$ равносильна устой чивости нулевого решения для НСОДУ $Y'_t = F\big(t, y_1(t)+\varphi_1(t),\dots,y_n(t)+\varphi_n(t)\big) - F(t,\varphi(t))$.

СЛЕДСТВИЕ Произвольное решение НСЛДУ $X'_t = A(t)X + B(t)$ устойчиво тогда и только тогда, когда устойчиво нулевое решение однородного уравнения $X'_t = A(t)X$. Поэтому для таких систем корректно говорить об (асимптотической) устойчивости НСЛДУ, а проверять ее только на нулевом решении однородной НСЛДУ.

Опр. ЛДУ с постоянными коэффициентами $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f$ называется устойчивым, если $\forall\ t_0, x_1^0,\dots,x_n^0 \in \mathbb{R}$ решение $x(t)$ соответствующей задачи Коши $x(t_0) = x_1^0,\dots,x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0$ однородного ЛДУ ограничено на $[t_0,+\infty)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

ТЕОРЕМА 6.5 (*свойства устойчивости ДУ*)

1) Пусть элементы функциональных матриц $A(t), B(t)$ НСЛДУ $X'_t = A(t)X + B(t)$ непрерывны на $[t_0,\infty)$. Система будет устойчивой тогда и только тогда, когда элементы ее фундаментальной матрицы ограничены на $[t_0,\infty)$.
2) НСЛДУ с постоянными коэффициентами $X'_t = AX + B(t)$ устойчива тогда и только тогда, когда собственные числа матрицы A имеют неположительные вещественные части, а для чисто мнимых собственных чисел $\lambda = \beta i$ выполняется равенство $rang(A - \beta i E) = rang(A - \beta i E)^2$ (то есть у матрицы $\lambda E - A$ нет присоединенных векторов)
3) В условиях предыдущего пункта НСЛДУ асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части.

4) (*критерий Рауса-Гурвица*) ЛДУ с постоянными коэффициентами $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f$ устойчиво тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы

$$R = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$ положительны: $\delta_1 := a_1 > 0, \quad \delta_2 := \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad ,\delta_n := \det R > 0$.

Пр.

Опр. Пусть $x_0(t)$ - решение НСОДУ $X'_t = F(t,x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix}$, которое назовем опорным (рабочим). Для "близкого" решения $x(t)$ положим $\Delta X := X(t) - X_0(t)$. Разложим функции $f_i(t, x(t))$ в окрестности $x_0(t)$ по формуле Тейлора

$$f_i(t, x(t)) = f_i(t, x_0(t)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x_0(t)) \Delta x_j(t) + R_i(t, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n), \quad i = 1, \ldots n,$$

или в матричной форме $F(t, x(t)) = F(t, x_0(t)) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x_0(t))\right) \Delta X + R(t, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$.

Тогда $(\Delta X)'_t = X'_t - X'_{0t} = F(t, x(t)) - F(t, x_0(t)) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x_0(t))\right) \Delta X + R(t, \Delta x_1(t), \ldots, \Delta x_n(t))$

Отбрасывая "малое" последнее слагаемое, получим НСЛДУ $(\Delta X)'_t = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x_0(t))\right) \Delta X$,

которая называется линеаризацией НСОДУ в окрестности опорного решения $X_0(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$ - положение равновесия динамической системы $X'_t = F(X)$, то есть $F(a) = 0$. Тогда $\Delta X = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \ldots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$ $(\Delta X)'_t = X'_t$, и потому линеаризацией динамической системы в окрестности положения равновесия a будет НСЛДУ $X'_t = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) \Delta X$ с постоянными коэффициентами. Решение последней находится по формуле Коши.

ТЕОРЕМА 6.6

Пусть $x_0 \equiv a$ - положение равновесия НСОДУ $X'_t = F(t,x)$, то есть $F(t,a) \equiv 0$.

1) (*теорема Ляпунова*) Если линеаризация в окрестности этого положения имеет постоянную матрицу коэффициентов $B := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,a)\right) \equiv const$ и $\lim\limits_{X \to A} \frac{\|F(t,x) - B \cdot \Delta X\|}{\rho(x,a)} = 0$, где

$F(t,x)$ непрерывна в цилиндрической области $G := \{(t,x): t \ge t_0,\ \rho(x,a) < \varepsilon\}$, то:

а) если все собственные числа матрицы B имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия a асимптотически устойчиво;

б) если хотя бы одно собственное число имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия a неустойчиво.

2) (*лемма Ляпунова*) Пусть НСОДУ $X'_t = F(t,x)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности в "трубе" $G := \{(t,x): t \ge t_0,\ \rho(x,a) < \varepsilon\}$. Пусть на шаре $D(a,\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x,a) < \varepsilon\}$ существует непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $v(x)$ со свойством: $\forall x \in D(a,\varepsilon)\setminus\{a\}\ v(x) > 0,\quad v(a) = 0,\quad \forall (t,x) \in G\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t,x) \le 0$.

Тогда a есть устойчивое положение равновесия.

Пр.

Ляпунов Александр Михайлович (1857 - 1918) - русский математик, механик, ученик П.Л.Чебышёва. Создал современную строгую теорию устойчивости равновесия и движения механических систем определяемых конечным числом параметров. Построен общий метод решения задач об устойчивости. Цикл исследований по фигурам равновесия вращающихся жидкостей. Цикл работ по математической физике. В теории вероятностей - метод характеристических функций; доказана центральная предельная теорема при весьма общих условиях

ГЛАВА 7

СУММИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ. РЯДЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ.

§ 7.1 Мера Лебега множества и суммируемые функции.

Опр. Внешней мерой Лебега множества $S \subset (-\infty,+\infty)$ называется точная нижняя грань $\mu^*(S)$ сумм длин конечного или счетного множества интервалов, покрывающих S.

Пр. $\mu^*(\mathbb{Q} \cap (\alpha,\beta)) = 0$.

Опр. Внутренней мерой Лебега множества $S \subset (\alpha,\beta)$ называется число

$$\mu_*(S) := \beta - \alpha - \mu^*((\alpha,\beta)\setminus S).$$

Пр. $\mu_*(\mathbb{I} \cap (\alpha,\beta)) := \beta - \alpha - \mu^*(\mathbb{Q} \cap (\alpha,\beta)) = \beta - \alpha$,

Опр. Ограниченное множество S называется измеримым (по Лебегу), если $\mu_*(S) = \mu^*(S)$

В этом случае мерой Лебега множества S называется число $\mu(S) := \mu_*(S) = \mu^*(S)$

Пр.

Анри Леон Лебе́г (1875 - 1941) - французский математик. Наиболее известен как автор теории интегрирования (интеграл Лебега), обобщаю щей обычное определение интеграла на более широкий класс функций. Интеграл Лебега нашёл широкое применение в теории вероятностей.
Л. решил проблему определения траектории снаряда.

Опр. Свойство выполняется почти всюду на множестве, если оно выполняется во всех точках этого множества за исключением подмножества точек меры 0.
Пр. Функция Дирихле почти всюду равна нулю.

Опр. Функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, называется измеримой, если она конечна почти всюду на $[a,b]$ и $\forall c \in \mathbb{R}$ измеримо множество $\{x \in [a,b]: f(x) \le c\}$.
Пр. Непрерывная на $[a,b]$ функция измерима.

Опр. Измеримые функции называются эквивалентными, если совпадают почти всюду.
ТЕОРЕМА 7.1 (*свойства измеримых функций*)

1) Если функция $f(x)$ измерима, то измерима и функция $|f(x)|$. Обратное, вообще говоря, неверно.
2) Если функции f_1, f_2 измеримы, то измеримы функции $a f_1 + b f_2$, $f_1 f_2$, $\frac{f_1}{f_2}$, причем в последнем случае предполагается, что $\forall x \in [a,b] \quad f_2(x) \neq 0$.
3) (*теорема Егорова*)Пусть последовательность измеримых на $[a,b]$ функций $f_k(x)$ сходится почти всюду к почти всюду конечной на $[a,b]$ функции $f(x)$. Тогда $f(x)$ измерима на $[a,b]$ и $\forall \varepsilon > 0$ найдется измеримое подмножество E_ε с мерой $\mu(E_\varepsilon) \ge b - a - \varepsilon$, на котором $\{f_k(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно.
4) (*теорема Лебега*) Если последовательность измеримых на $[a,b]$ функций $f_k(x)$ сходится почти всюду к почти всюду конечной на $[a,b]$ функции $f(x)$, то она сходится к $f(x)$ по мере: $\forall \varepsilon > 0 \ \lim\limits_{k \to \infty} \mu\left(\{x : |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}\right) = 0$.
5) (*теорема Рисса*) Обратное, вообще говоря, не верно. Если последовательность измеримых функций $f_k(x)$ сходится к $f(x)$ по мере, то $\exists \{k_n\}$ подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду на $[a,b]$.
6) (*теорема Фреше*) Измеримая функция совпадает почти всюду с пределом некоторой последовательности многочленов.

Кпр. Пусть $A \subset [\alpha, \beta]$ неизмеримое множество и $f_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$. Тогда функция $2 f_A(x) - 1$ неизмеримая, но её модуль $|f_A(x)| \equiv 1$ измерим.

Опр. Пусть $f(x)$ измерима и ограничена на $[\alpha,\beta]$, $A:=\inf\limits_{[\alpha,\beta]} f(x)$, $B:=\sup\limits_{[\alpha,\beta]} f(x)$. Разобьем отрезок $[A,B]$ точками $T:=\{y_k : A=:y_0<\ldots<y_n:=B\}$ и обозначим измеримые множества $S_k:=\{x\in[\alpha,\beta]: y_{k-1}<f(x)\le y_k\}$, $k=1,2,\ldots,n$. Выберем произвольно точки $E:=\{\eta_k:\eta_k\in[y_{k-1},y_k]\}$, и образуем интегральную сумму $S(T,E):=\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k\mu(S_k)$. Тогда конечный предел (можно показать, что он существует) $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx:=\lim\limits_{d(T)\to 0} S(T,E)$ называется интегралом Лебега функции $f(x)$, а сама функция – суммируемой (интегрируемой по Лебегу) на отрезке $[\alpha,\beta]$ (Лебег, 1902).

Пр. Было доказано, что функция Дирихле $d(x)$ не интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$

ТЕОРЕМА 7.2 (*свойства интеграла Лебега*)

1) Измеримая функция $f(x)$ суммируема тогда и только тогда, когда суммируема $|f(x)|$.
2) (*теорема Лебега*) Если $f(x)$ интегрируема по Риману на $[\alpha,\beta]$, то она измерима, интегрируема по Лебегу и эти интегралы равны. $f(x)$ интегрируема по Риману на $[\alpha,\beta]$ тогда и только тогда, когда она ограничена на $[\alpha,\beta]$ и непрерывна почти всюду на нем.
3) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ для любых суммируемых функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ на измеримом множестве S

$$\int\limits_S(\alpha f_1(x)+\beta f_2(x))dx=\alpha\int\limits_S f_1(x)dx+\beta\int\limits_S f_2(x))dx.$$

Опр. Измеримая на измеримом множестве S функция $f(x)$ называется суммируемой со степенью p ($p\ge 1$), если функция $|f(x)|^p$ суммируема на S.

ЗАМЕЧАНИЕ (*свойство суммируемых со степенью p функций*)

1) $\forall\, p>q\ge 1$ суммируемая со степенью p будет суммируемой со степенью q.
2) Для любых суммируемых со степенью p функций f,g $\forall a,b\in\mathbb{R}$ функция $af+bg$ тоже суммируема со степенью p.

Обозначение. Разобьем множество всех суммируемых со степенью p на $[\alpha,\beta]$ функций на классы эквивалентных функций. Интегралы представителей одного класса совпадают, и согласно замечанию множество $L_p[\alpha,\beta]$ этих классов удовлетворяет аксиомам векторного пространства.

Обозначение. $L_p[\alpha,\beta]$ - пространство суммируемых со степенью p функций.

$L[\alpha,\beta]:=L_1[\alpha,\beta]$ - пространство суммируемых функций.

ЗАМЕЧАНИЕ (*свойства пространства $L_p[\alpha,\beta]$*)

1) Величина $\|f\|_p:=\left(\int\limits_\alpha^\beta|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$ является нормой в $L_p[\alpha,\beta]$, а нормированное пространство $L_p[\alpha,\beta]$ является полным и значит банаховым.
2) Если последовательность $\{f_k(x)\}\in L_p[\alpha,\beta]$ сходится в среднем со степенью p к

$f(x) \in L_p[\alpha,\beta]$, то есть $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k - f\|_p = 0$, то она сходится к $f(x)$ по мере. Обратное, вообще говоря, не верно.

3) $L_2[a, b]$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $\langle f, g\rangle := \int\limits_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$, то есть оно является банаховым пространством относительно нормы $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

§ 7.2 Ортогональные системы функций и ряды Фурье.

Опр. Бесконечная последовательность элементов $\{e_k\}$ евклидова пространства $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется ортогональной, если ее элементы попарно ортогональны: $\forall i \neq j \ \langle e_i, e_j\rangle = 0$, и ортонормированной, если дополнительно эти элементы нормированы: $\forall i \ \|e_i\| = 1$, то есть $\forall i, j \ \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}$.

Обозначение. $E(a, a+2l)$ - пространство функций имеющих разрывы только первого рода на отрезке $[a, a+2l]$ и правые и левые производные в каждой точке непрерывности.

$\langle f, g\rangle := \int\limits_a^{a+2l} f(x)g(x)\,dx$ - скалярное произведение в $E(a, a+2l)$.

Пр.

Обозначения. $e^{xi} = \cos x + \sin x i$ - *формула Эйлера* (короткое обозначение комплексного числа вида $\cos x + \sin xi$. $\bar{z} := a - bi$ - сопряженное к комплексному числу $z = a + b$.

ЗАМЕЧАНИЕ Последовательность функций $\{\frac{1}{\sqrt{2l}} e^{\frac{k\pi}{l}xi}\}|_{k=-\infty}^{+\infty}$, ортонормирована относительно скалярного произведения $\langle f, g\rangle := \int\limits_a^{a+2l} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ на множестве комплекснозначных функций $f(t) : [a, a+2l] \to \mathrm{C}$.

Опр. Пусть $\{e_k\}$ - ортогональная последовательность в евклидовом пространстве E. Числа $\frac{\langle x, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle}$, $k = 1, 2, \ldots$, называются коэффициентами Фурье элемента x по системе $\{e_k\}$. Сумма $S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^n \frac{\langle x, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle} e_k$ называется n-ой частичной суммой, а ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{\langle x, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle} e_k$ - рядом Фурье элемента $x \in E$.

Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830) - французский математик и физик. Свои методы (ряды и интегралы Фурье) Ф. использовал в теории распространения тепла. Доказал, что всякую произвольно начерченную линию, составленную из отрезков дуг разных кривых, можно представить единым аналитическим выражением - рядом Фурье

Опр. Ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi}{l}x+b_k \sin\frac{k\pi}{l}x$, где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(t)dt,\ a_k=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}tdt,\ b_k=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(t)\sin\frac{k\pi}{l}tdt,$$

называется тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)\in E(a,a+2l)$ по ортогональной системе $\left\{1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x,...\right\}$ с коэффициентами $\{a_0, a_1, b_1,...\}$.

Опр. Ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{k\pi}{l}xi}$, где $c_k=\frac{1}{2l}\int_a^{a+2l} f(t)e^{-\frac{k\pi}{l}ti}dt$, называется рядом Фурье в комплексной форме функции $f(x)$ по ортогональной системе $\{e^{\frac{k\pi}{l}xi}\}|_{k=-\infty}^{+\infty}$ с коэффициентами $\{c_0, \pm c_1,...\}$.

Опр. Член $a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x$ называется k-ой гармоникой тригонометрического ряда $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi}{l}x+b_k \sin\frac{k\pi}{l}x$. Если положить $A_k:=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$ и определить угол $\varphi_k\in(-\pi,\pi]$ из системы $\begin{cases}\cos\varphi_k:=\frac{a_k}{A_k}\\ \sin\varphi_k:=\frac{-b_k}{A_k}\end{cases}$, то k-ю гармонику можно записать в виде $A_k\cos\left(\frac{k\pi}{l}+\varphi_k\right)$.

Опр. Пусть $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi}{l}x+b_k \sin\frac{k\pi}{l}x=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\left(\frac{k\pi}{l}x+\varphi_k\right)$ есть тригонометрический ряд Фурье $T:=2l$-периодической функции $f(x)$. Последовательность $\{a_k, b_k\}$ или $\{A_k, \varphi_k\}$ называются спектром периодической функции $f(x)$; A_k - амплитудой k-ой гармоники; φ_k - фазой k-ой гармоники. $\nu_0:=\frac{1}{T}=\frac{1}{2l}$ - основная частота; $\nu_k:=\frac{k}{T}=\frac{k}{2l}$ - k-ая гармоническая частота. $\omega_0:=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{l}$ - основная круговая частота; $\omega_k:=\frac{2\pi k}{T}=\frac{\pi k}{l}$ - k-ая круговая частота функции $f(x)$ (термин «спектр» – Гильберт, 1904).

ТЕОРЕМА 7.3 (*свойства поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье*)

1) Для функции $f(x)\in E(a,a+2l)$ ее тригонометрический ряд Фурье в каждой точке x сходится к числу $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.
2) Пусть $2l$-периодическая на всей оси функция $f(x)$ имеет разрывы только первого рода и имеет правые и левые производные в каждой точке. Тогда ее тригонометрический ряд Фурье в каждой точке x сходится к числу $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ (Дирихле, 1829).
3) В условиях предыдущего пункта $f(x)$ представима в этом же смысле в виде ряда

Фурье в комплексной форме $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{k\pi}{l}xi}$, причем $c_{-k}=\bar{c}_k$ и коэффициенты a_k, b_k, c_k связаны равенством $c_k=\dfrac{a_k-b_k i}{2}$.

4) Если функция $f(x)$ четная (нечетная) на $[-l,l]$ и удовлетворяет условиям пункта 2), то $\forall k\ge 1\ b_k=0$ $(\forall k\ge 0\ a_k=0)$, то есть она разлагается в ряд по косинусам (по синусам) на оси. При этом $a_k=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos(\dfrac{k\pi}{l}t)dt,\quad b_k=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(t)\sin(\dfrac{k\pi}{l}t)dt$ (Фурье, 1805).

ЗАМЕЧАНИЕ (*электротехнический смысл*) Для функции $f(x)\in E(a,a+2l)$ имеет место равенство Парсеваля $\dfrac{1}{2l}\|f\|_2^2=\dfrac{1}{2l}\int_a^{a+2l} f^2(t)dt=\left(\dfrac{a_0}{2}\right)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}(a_k^2+b_k^2)$. Для периодического с периодом T на $[0,+\infty)$ аналогового сигнала (тока, напряжения) $f(t)$ величина $A=\sqrt{\dfrac{1}{T}\int_a^{a+2l} f^2(t)dt}=\dfrac{1}{\sqrt{T}}\|f\|_2$ называется квадратическим (действующим) значением сигнала. Нетрудно убедиться, что для k-ой гармоники $A_k\cos\left(\dfrac{k\pi}{l}x+\varphi_k\right)$ такого сигнала квадрат действующего значения равен $\dfrac{a_k^2+b_k^2}{2}=\dfrac{A_k^2}{2},\quad \left(\dfrac{a_0}{2}\right)^2=A_0^2$. В этих обозначениях равенство Парсеваля принимает вид $A^2=A_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}A_k^2$. То есть квадрат действующего значения сигнала равен сумме квадратов действующих значений составляющих его гармоник.

ГЛАВА 8

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 8.1 Двойной интеграл.

Опр. Пусть множество $D\subset \tilde{\mathrm{R}}^2$ ограничено. Разобьем евклидову плоскость с ПДСК сеткой прямых $x=ih,\ y=jh,\quad i,j\in\mathbf{Z},\ h:=2^{-N}$, на квадраты со стороной h. Совокупность квадратных ячеек, содержащихся в D, обозначим D'_N, и площадь последнего множества обозначим s'_N. Совокупность квадратов, пересекающихся с D, обозначим D''_N, и площадь последнего множества обозначим s''_N. По построению $\{D'_N\}$ есть последовательность вло женных друг в друга множеств, и потому $\{s'_N\}$ есть неубывающая ограниченная сверху по следовательность чисел. Ее предел $s_i(D)=s':=\lim_{N\to\infty}s'_N$ называется нижней мерой Жордана множества D. Аналогично, последовательность $\{s''_N\}$ не возрастает и ее предел $s_e(D)=s'':=\lim_{N\to\infty}s''_N$ называется верхней мерой Жордана множества D.

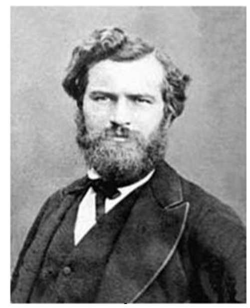
ЗАМЕЧАНИЕ По построению $\forall N \in \mathrm{N}\ \ s'_N \le s_i(D) \le s_e(D) \le s''_N$.
Кпр. Гребешёк Дирихле.

Опр. Если $s_i(D) = s_e(D)$, то множество D называется измеримым (по Жордану), а число $s(D) = s := s_i(D) = s_e(D)$ называется двумерной мерой Жордана (площадью) множества D (Жордан, 1882-1887).
Кпр.

Опр. Граница $\Gamma(D)$ имеет нулевую жорданову меру, если

$$s_e(\Gamma(D)) := \lim_{N\to\infty} s(D''_N \setminus D'_N) = \lim_{N\to\infty}(s''_N - s'_N) = 0 .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Множество D измеримо $\Leftrightarrow$ $\Gamma(D)$ имеет нулевую жорданову меру.
ЗАМЕЧАНИЕ 2 График Γ_f непрерывной функции $f(x) \ge 0$ имеет нулевую жорданову меру $\Rightarrow$ криволинейная трапеция $D_{0,f}(a,b) := \{(x,y) \in \tilde{\mathrm{R}}^2 : a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$ измерима.
ЗАМЕЧАНИЕ 3 Если граница $\Gamma(D)$ множества $D \subset \tilde{\mathrm{R}}^2$ является кусочно гладкой кривой, то это множество измеримо.
Пр.



Мари Эдмон Камиль Жордан (1838-1922) - французский математик, член-корр. Петербургской АН (1895). Работы Ж. относятся к алгебре, теории функций комплексного переменного и к топологии и кристалло графии. С именем Ж. связаны нормальная (жорданова) форма матриц, жорданова кривая, мера Жордана множества и другие понятия.

Опр. Диаметром множества $\overline{D \subset \tilde{\mathrm{R}}^2}$ называется число $d(D) := \sup\{\rho(M_1, M_2) : M_1, M_2 \in D\}$.
Диаметром разбиения $T := \{D_1, ..., D_n\}$ множества $D \subset \tilde{\mathrm{R}}^2$ на подмножества $D_1, ..., D_n$, называется число $d(T) := \max\{d(D_1), ..., d(D_n)\}$.
Пр.

Опр. Пусть на ограниченном измеримом множестве D евклидовой плоскости $\tilde{\mathrm{R}}^2$ задана функция $f(x,y)$. Разобьем D на измеримые попарно непересекающиеся подмножества: $T := \{D_1, ..., D_n\}$. Выберем точки $M_k \in D_k$, $E := \{M_1, ..., M_n\}$, и образуем интегральную сумму $S_f(T,E) := \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \cdot s(D_k)$. Если для некоторого числа s

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall T, d(T) < \delta,\ \forall E \quad |S_f(T,E) - s| < \varepsilon ,$$

то это число $s =: \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(M)ds$ называется двойным интегралом (Римана) от функции $f(x,y)$ на множестве D. При этом функция называется интегрируемой (по Риману) на множестве D (Эйлер, 1769).

Леона́рд Э́йлер (1707-1783) - выдающийся математик, механик, физик, астроном XVIII века. Автор более чем 800 работ по теории чисел, математическому анализу, дифференциальной геометрии, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др
Почти полжизни провёл в России (1726-1741, 1776-1783). Внёс существенный вклад в становление российской науки. Первые русские академики С. К. Котельников, С. Я. Румовский - его ученики.

Опр. Пусть на множестве D определены две функции $g(x,y) \le f(x,y)$. Цилиндрическим телом называется множество точек в $\tilde{R}^3$ $G_{g,f}(D) := \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ g(x,y) \le z \le f(x,y)\}$.

Опр. Если существует двойной интеграл $v(G_{g,f}(D)) := \iint\limits_D (f(M) - g(M))ds$, то он называется объемом цилиндрического тела.

СЛЕДСТВИЕ (*геометрический смысл двойного интеграла*) Функция $f(x,y) \ge 0$ интегрируема на ограниченном измеримом множестве D тогда и только тогда, когда цилиндрическое тело $G_{0,f}(D)$ имеет объем.

Опр. Двумерной функцией Дирихле называется функция $d(x,y) := \begin{cases} 1, & x, y \in Q \bigcap [0,1] \\ 0, & x \text{ или } y \in I \bigcap [0,1] \end{cases}$.

Щеткой Дирихле называется цилиндрическое тело $G_{0,d} := \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le d(x,y)\}$

ЗАМЕЧАНИЕ Щетка Дирихле не имеет объема.

ТЕОРЕМА 8.1 (*свойства двойного интеграла*)

1) (*теорема существования*) Двойной интеграл $\iint\limits_D f(M)ds$ от непрерывной функции $f(M)$ на ограниченном замкнутом измеримом множестве D существует.
2) Если функции $g(x,y),\ f(x,y)$ интегрируемы на множестве D, то интегрируема их линейная комбинация и $\forall \alpha, \beta \in R$ $\iint\limits_D (\alpha f(M) + \beta g(M))ds = \alpha \cdot \iint\limits_D f(M))ds + \beta \cdot \iint\limits_D g(M))ds$.
3) Если $\forall M \in D \quad g(M) \le f(M)$, то $\iint\limits_D g(M(ds) \le \iint\limits_D f(M)ds$.
4) Если $f(M)$ непрерывна на измеримом замкнутом ограниченном множестве D и $m := \min\limits_D f(x,y),\ M := \max\limits_D f(x,y)$, то $m \cdot s(D) \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le M \cdot s(D)$.
5) (*теорема о среднем*) В условиях предыдущего пункта $\exists M_0 \in D$ $\iint\limits_D f(M)ds = f(M_0) \cdot s(D)$
6) В условиях пункта 4) для любого разбиения D на измеримые подмножества $D_1, ..., D_n$

$$\iint\limits_D f(M)ds = \iint\limits_{D_1} f(M)ds + ... + \iint\limits_{D_n} f(M)ds .$$

Опр. Пусть функции $\varphi(x), \psi(x)$ непрерывны на $[a,b]$, $\varphi(x) \le \psi(x)$ и функция $f(x,y)$ непрерывна на криволинейной трапеции $D_{\varphi,\psi}(a,b)$. Можно показать, что функция $\Phi(x) := \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда существует определенный интеграл $\int\limits_a^b \Phi(x)dx := \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dydx$, который называется повторным интегралом

ТЕОРЕМА 8.2 1) (*формула сведения двойного интеграла к повторному*) В условиях пре дыдущего определения имеет место равенство $\iint\limits_D f(M)ds = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dydx$, где $D := D_{\varphi,\psi}(a,b)$

2) (*формула замены переменных*) Пусть непрерывно дифференцируемое отображение $F := (\varphi(u,v), \psi(u,v)) : D' \to D$ отображает взаимно однозначно множество D' с кусочно гладкой границей на множество D с кусочно гладкой границей. Пусть якобиан отображения $\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}$ имеет постоянный знак на D' и функция $f(x,y)$ непрерывна на D. Тогда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v) \cdot |\left|\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|| dudv$ (Эйлер, 1759-70).

ЗАМЕЧАНИЕ (*алгоритм вычисления двойного интеграла*)

а) Область D разбить на последовательность криволинейных трапеций $D_1,...,D_s$.

б) Двойной интеграл представить в виде суммы интегралов функции $f(x,y)$ на этих трапециях по формуле $\iint\limits_D f(M)ds = \iint\limits_{D_1} f(M)ds + ... + \iint\limits_{D_s} f(M)ds$.

в) Вычислить полученные интегралы с помощью подходящей замены переменных и перехода к повторным по формулам теоремы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 Вычисление объема цилиндрического тела.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 Вычисление площади поверхности.

Опр. Пусть функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные на ограничен ном плоском множестве D с кусочно гладкой границей. Обозначим L поверхность с уравнением $z = f(x,y)$. Разобьем D на подмножества $D_1,...,D_n$ с кусочно гладкими грани цами, и выберем точки $M_k = (x_k, y_k) \in D_k$. Проведем касательные плоскости

$$\mathrm{L}_k : \; f'_x(M_k)(x - x_k) + f'_y(M_k)(y - y_k) - (z - f(M_k)) = 0$$

к поверхности L в точках $N_k := (x_k, y_k, f(M_k)),\ k = 1,...,n$. Обозначим D'_k часть касательной плоскости L_k, расположенную над множеством D_k. Она измерима и

$$s(D_k) = s(D'_k) \cdot |\cos(\overline{n}(N_k)\, OZ)|,$$

где $\bar{n}(N_k)$ есть вектор нормали к поверхности в точке N_k. С другой стороны из уравнения касательной плоскости следует, что $\cos(\bar{n}(N_k)\,OZ) = \dfrac{(\bar{n}(N_k),\bar{k})}{|\bar{n}(N_k)|\cdot|\bar{k}|} = \dfrac{-1}{\sqrt{f_x'^2(M_k)+f_y'^2(M_k)+1}}$.

Поэтому площадь поверхности L приближенно равна

$$s(T,E) := \sum_{k=1}^{n} s(D_k') = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{f_x'^2(M_k)+f_y'^2(M_k)+1}\cdot s(D_k).$$

Предел последовательности этих интегральных сумм при $d(T)\to 0$ существует в силу теоремы. Его естественно назвать площадью поверхности L и обозначить

$$s(\mathrm{L}) := \iint_D \sqrt{f_x'^2(M)+f_y'^2(M)+1}\,ds.$$

ЗАМЕЧАНИЕ Площадь поверхности, задаваемой параметрически, $\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v),\ (u,v)\in D', \\ z=\chi(u,v) \end{cases}$

вычисляется по формуле $s(\mathrm{L}) = \iint_{D'} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\ dudv$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3 (*масса неоднородной пластинки*)

ПРИЛОЖЕНИЕ 4 (*координаты центра масс неоднородной пластинки*)

Опр. Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве D, причем либо $f(x,y)$ не ограничена, либо D не ограничена в $\tilde{\mathrm{R}}^2$. Пусть существует расширяющаяся последовательность ограниченных измеримых подмножеств $\{K_n\}$, $K_n\subset D$, которая исчерпывает D: $K_1\subset K_2\subset\ldots$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n = D$. Если $f(x,y)$ интегрируема на каждом K_n, и существует и конечен предел $\iint_D f(M)ds := \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f(M)ds$, то его естественно назвать сходящимся несобственным интегралом функции $f(x,y)$ на множестве D.

Пр.

§ 8.2 Криволинейный интеграл и формула Грина.

Опр. Пусть на спрямляемой кривой $l\in\bar{\mathrm{R}}^2$ заданы две функция $f(x,y)$, $g(x,y)$. Разобьем ее последовательностью точек $T:=\{A_0,\ldots,A_n\}$, $A_k=(x_k,y_k)$. $T:=\{A_0,\ldots,A_n\}$. Выберем на каждой дуге $A_{k-1}A_k$ точку M_k, и обозначим $E:=\{M_k\}$. Образуем интегральные суммы $S_x(T,E) := \sum_{r=1}^{n} f(M_k)\cdot\Delta x_k$, $S_y(T,E) := \sum_{r=1}^{n} g(M_k)\cdot\Delta y_k$ и положим $d(T) := \max_k \sigma_k$. Если для некоторого s_x $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall T, d(T)<\delta,\ \forall E\quad |S_x(T,E)-s_x|<\varepsilon$, то это число называется криволинейным интегралом второго рода (КИВР) функции $f(x,y)$ по переменной x на дуге l. Аналогично определяется криволинейный интеграл второго рода (КИВР) функции $g(x,y)$ по переменной y на дуге l. Если указанные интегралы $\int\limits_l f(x,y)dx := s_x$, $\int\limits_l g(x,y)dy := s_y$ существуют, то выражение $\int\limits_l f(x,y)dx + g(x,y)dy := \int\limits_l f(x,y)dx + \int\limits_l g(x,y)dy$ называется криволинейным интегралом второго рода (общего вида) (КИВР) (Клеро, 1743, Коши, 1825).

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Если кривая l кусочно гладкая и функции $f(x,y),\ g(x,y)$ непрерывны на ней, то КИВР существует и вычисляется по формуле

$$\int\limits_l f(x,y)dx + g(x,y)dy := \int\limits_\alpha^\beta \left(f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + g(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) \right) dt .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Аналогично определяется и вычисляется КИВР на пространственной кривой.

ЗАМЕЧАНИЕ 3 (*Мебиус*) Будем говорить что кривая l^{-1} с параметрическим заданием $\begin{cases} x = \varphi(\beta - (\beta - \alpha)t) \\ y = \psi(\beta - (\beta - \alpha)t) \end{cases}$, $t \in [0,1]$, имеет ориентацию, обратную к ориентации кривой l. Из определения КИВР следует равенство $\int\limits_{l^{-1}} f(x,y)dx + g(x,y)dy = -\int\limits_l f(x,y)dx + g(x,y)dy$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Работа по перемещению материальной точки вдоль кривой l под действием силы $\bar{F}(M)$ ($\equiv$ в силовом поле $\bar{F}(M)$) вычисляется по формуле

$$\int\limits_l \bar{F}(M)d\bar{r} := \int\limits_l f(x,y)dx + g(x,y)dy .$$

Пр.

Опр. Открытое множество $G \subseteq \tilde{\mathrm{R}}^2$ называется областью, если любые его две точки можно соединить ломаной, целиком лежащей в этом множестве.

ТЕОРЕМА 8.3 (*формула Грина*) Пусть функции $f(x,y),\ g(x,y)$ имеют непрерывные частные производные на замыкании D области, граница которой l является кусочно гладкой кривой. Тогда $\iint\limits_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)(M)ds = \int\limits_l f(x,y)dx + g(x,y)dy$ (Эйлер,1772; Грин, 1828).

СЛЕДСТВИЕ В условиях теоремы равносильны утверждения.

1) Выражение $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ является полным дифференциалом: существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x,y)$ со свойством $du \equiv f(x,y)dx + g(x,y)dy$ в D

2) $\forall M \in D\ \frac{\partial g}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M)$. 3) криволинейный интеграл $\int\limits_l f(x,y)dx + g(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования в D: для любых двух точек $M_1, M_2 \in D$ и любой соединяющей их кусочно гладкой кривой $\overline{M_1M_2}$ интеграл $\int\limits_{M_1M_2} f(x,y)dx + g(x,y)dy$

зависит только концов M_1, M_2 этой кривой.

Пр.
Джордж Грин (1793- 1841) - английский математик, внёсший значи тельный вклад во многие разделы математической физики. Доказал основную теорему теории потенциальных функций и дал особый метод вывода дифференциальных уравнений теории упругости. У Грина впервые встречается термин «потенциальная функция».

§ 8.3 Тройной интеграл.

Опр. Пусть множество $G \subset \tilde{\mathrm{R}}^3$ ограничено. Разобьем евклидово пространство с ПДСК плоскостями $x = i \cdot h,\ y = j \cdot h,\ z = k \cdot h,\quad i, j, k \in \mathbf{Z},\ h := 2^{-N}$, на сеть кубиков. С их помощью определяем нижнюю и верхнюю меры Жордана $v_i(G) \le v_e(G)$ множества G так же, как мы делали это в плоском случае. Множество G измеримо, если $v_i(G) = v_e(G)$. Это число назовем мерой Жордана (объемом) G.
Кпр. Гребешок Дирихле не измерим по Жордану.
ЗАМЕЧАНИЕ Цилиндрическое тело $G_{g,f}(D)$ измеримо, если замкнутое ограниченное плоское множество D измеримо, и функции $f(x, y) \ge g(x, y)$ непрерывны на нем.

Опр. Диаметром множества $G \subset \tilde{\mathrm{R}}^3$ естественно назвать число $d(G) := \sup\{\rho(M_1, M_2) : M_1, M_2 \in G\}$. Диаметром разбиения $T := \{G_1, ..., G_n\}$ множества $G \subset \tilde{\mathrm{R}}^3$ на подмножества $G_1, ..., G_n$, называется число $d(T) := \max\{d(G_1), ..., d(G_n)\}$.

Опр. Пусть на ограниченном измеримом множестве G евклидова пространства $\tilde{\mathrm{R}}^3$ задана функция $f(M)$. Разобьем G на измеримые попарно непересекающиеся подмножества: $T := \{G_1, ..., G_n\}$. Выберем точки $M_k \in G_k$, $E := \{M_1, ..., M_n\}$, и образуем интегральную сумму $S_f(T, E) := \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \cdot v(G_k)$. Если для некоторого числа v $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall T, d(T) < \delta,\ \forall E \quad |S_f(T, E) - v| < \varepsilon$, то это число $v = \iiint\limits_G f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_G f(M) dv$ называется тройным интегралом (Римана) функции $f(x, y, z)$ на множестве G. При этом функция называется интегрируемой (по Риману) на множестве G (Лагранж).

ТЕОРЕМА 8.4 1) (*формула сведения вычисления тройного интеграла к повторному*)
Обозначим $D = \{(x.y) : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ криволинейную трапецию, где функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Пусть функции $\psi_1(x, y) \le \psi_2(x, y)$ непрерывны на D, а функция $f(x, y, z)$ в свою очередь непрерывна на измеримом цилиндрическом теле $G = G_{\psi_1,\psi_2}(D)$. Тогда тройной интеграл $f(M)$ на G существует и выражается через повторный по формуле $\iiint\limits_G f(M) dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz := \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$.

2) (*формула замены переменных*) Пусть непрерывно дифференцируемое отображение $f(M) = (\varphi(M), \psi(M), \chi(M)) : G' \to G,\ M = (u, v, w)$, отображает взаимно однозначно замкнутую ограниченную область $G' \subset \tilde{\mathrm{R}}^3$ с кусочно гладкой границей на замкнутую ограниченную область G с кусочно гладкой границей. Пусть якобиан отображения

$\frac{\partial(\varphi,\psi,\chi)}{\partial(u,v,w)}$ имеет постоянный знак на G' и функция $f(M)$ непрерывна на G. Тогда имеет место такая формула замены переменных в тройном интеграле

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(\varphi(M),\psi(M),\chi(M))\left|\frac{\partial(\varphi,\psi,\chi)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw \quad \text{(Лагранж, 1773).}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 Масса измеримого тела G с непрерывной плотностью $\rho(M)$ вычисляется по формуле $M(G)=\iiint\limits_G \rho(M)dv$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 Формулы координат центра масс тела аналогичны соответствующим формулам для пластинки.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3 (*момент инерции тела относительно оси*) Найдем момент инерции измеримого тела G с непрерывной плотностью $\rho(M)$ относительно оси l. С этой целью разобьем его на малые области $G_1,...,G_n$ и выберем точки $M_k=(x_k,y_k,z_k)\in G_k$. Плотность области G_k будем считать постоянной и равной $\rho(M_k)$, $k=1,...,n$. Заменим области G_k на материальные точки M_k с массами $m_k=\rho(M_k)\cdot v(G_k)$ соответственно. Так как момент инерции материальной точки M_k относительно оси l определяется величиной $J_l(M_k):=d^2(M_k,l)\cdot m_k=d^2(M_k,l)\rho(M_k)\cdot v(G_k)$, то момент инерции системы материальных точек $M_1,...,M_k$ равен $S(T,E):=\sum_{k=1}^{n}J_l(M_k)=\sum_{k=1}^{n}d^2(M_k,l)\,\rho(M_k)v(G_k)$. Предельное значение этой интегральной суммы $J_l(G):=\iiint\limits_G d^2(M,l)\,\rho(M)\,dv$ называют моментом инерции тела G относительно оси l.

§ 8.4 Поверхностный интеграл.

Опр. Векторным полем на множестве $G\subseteq\tilde{\mathrm{R}}^n$ называется отображение G в какое-либо векторное пространство E (field – от *англ*. поле. Кельвин, 1951)

ЗАМЕЧАНИЕ Всюду ниже $G\subseteq\tilde{\mathrm{R}}^3, E=\mathrm{R}^3$ и поле обозначаем $\bar{F}(M)=\{f(M),g(M),r(M)\}:G\to\mathrm{R}^3$

Опр. Скалярным полем называется функция $f(M):G\to\mathrm{R}$ (Ламе, 1834).

ЗАМЕЧАНИЕ Оно изображается линиями уровня $\Gamma_f(C):=\{M : f(M)=C\}$.

Опр. Пусть в каждой точке поверхности $\mathrm{L}\subset\tilde{\mathrm{R}}^3$ определен вектор нормали, и пусть при непрерывном движении точки по поверхности этот век- тор непрерывно изменяет свое направление. Поверхность L называется двусторонней, если при непрерывном движении точки вдоль любой замкнутой кривой вектор нормали возвра щается в исходную точку с со хранением направления. В противном случае поверхность L называется односторонней.

Кпр. Лист Мебиуса.

Опр. Двусторонняя поверхность L называется ориентируемой, а выбор стороны, то есть фиксация единичного вектора нормали $\bar{N}(M)$ в какой-либо точке $M \in \mathrm{L}$ - ориентацией поверхности. Такая поверхность определяет два непрерывных векторных поля нормалей $\bar{N}(M): \mathrm{L} \to \mathrm{R}^3$, $\bar{N}(M) = \frac{\{A, B, C,\}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{\|[\bar{r}'_u, \bar{r}'_v]\|}[\bar{r}'_u, \bar{r}'_v] =: \{\cos\alpha(M), \cos\beta(M), \cos\gamma(M)\}$

Опр. Пусть на двусторонней гладкой поверхности L фиксирована ориентация $\bar{N}(M)$ и задано векторное поле $\bar{F}(M) = \{f(M), g(M), r(M)\}: G \to \mathrm{R}^3$. Разобьем D на куски $D_1, ..., D_n$ с кусочно гладкой границей. На измеримых частях $\mathrm{L}_k = F(D_k)$ поверхности с площадью $s_k := s(\mathrm{L}_k)$ выберем точки M_k, и образуем интегральную сумму $S(T, E) = \sum_{k=1}^{n} \left(\bar{F}(M_k), \bar{N}(M_k)\right) s_k$

Предельное значение $s = \iint\limits_{\mathrm{L}} \left(\bar{F}(M), \bar{N}(M)\right) ds := \iint\limits_{\mathrm{L}} f(M) dydz + g(M) dzdx + r(M) dxdy$

интегральных сумм, если оно существует при $d(T) \to 0$, называется поверхностным интегралом второго рода (ПИВР) на поверхности L или потоком векторного поля $\bar{F}(M)$ через поверхность L (Лагранж, 1788, Гаусс, 1813; термин «поток» - Максвелл).

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Например, $\cos\alpha(M)\, ds$ есть площадь проекции элемента поверхности с площадью ds на координатную плоскость YOZ, и потому естественно обозначение $\cos\alpha(M)\, ds =: dydz$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Обозначим одну сторону ориентируемой поверхности L^+, а вторую - L^-. Тогда ПИВРы по этим сторонам связаны, очевидно, равенством

$$\iint\limits_{\mathrm{L}^-} \left(\bar{F}(M), \bar{N}(M)\right) ds = -\iint\limits_{\mathrm{L}^+} \left(\bar{F}(M), \bar{N}(M)\right) ds .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3 Если векторное поле $\bar{F}(M)$ непрерывно на гладкой поверхности $\mathrm{L} \subset G$, то ПИВР существует и вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{\mathrm{L}} \left(\bar{F}(M), \bar{N}(M)\right) ds := \iint\limits_{\mathrm{L}} \left(\bar{F}(M), \bar{r}'_u, \bar{r}'_v\right) \frac{ds}{\|[\bar{r}'_u, \bar{r}'_v]\|} = \iint\limits_{D} \left(\bar{F}(M), \bar{r}'_u, \bar{r}'_v\right) du\, dv, \text{ так как } ds = \|[\bar{r}'_u, \bar{r}'_v]\|\, dudv .$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Пусть жидкость стационарно движется в пространственной области G, то есть вектор скорости $\bar{v}(M)$ частицы жидкости не зависит от времени t и вполне определяется координатами $M(x, y, z)$ этой частицы. Тем самым, движение жидкости в G определяется полем скоростей $\bar{v}(M): G \to \mathrm{R}^3$. Важной характеристикой последнего является поток жидкости через поверхность $\iint\limits_{\mathrm{L}} \left(\bar{v}(M), \bar{N}(M)\right) ds$, который совпадает с объемом жидкости, протекшей через поверхность $\mathrm{L} \subset G$ за единицу времени.

Пр.

§ 8.5 Элементы теории поля.

Опр. Векторное поле $\bar{F}: G \to \mathrm{R}^3$ называется непрерывным (дифференцируемым), если его координатные функции непрерывны (дифференцируемы).

Опр. Дивергенцией (расходимостью) дифференцируемого векторного поля $\bar{F}: G \to \mathrm{R}^3$ называется скалярное поле $div\,\bar{F}: G \to \mathrm{R}$, определяемое формулой

$div\,\bar{F}(M) := \frac{\partial f}{\partial x}(M) + \frac{\partial g}{\partial y}(M) + \frac{\partial r}{\partial z}(M)$ (обозначение и название – Клиффорд, 1878).

ЗАМЕЧАНИЕ (*формула Гаусса-Остроградского*, 1828)   Пусть G есть область в $\tilde{\mathrm{R}}^3$ с гладкой границей L. Пусть поле $\bar{F} = \{f, g, r\}$ непрерывно дифференцируемо на замыкании области G. Тогда имеет место формула $\iint\limits_{\mathrm{L}} \left(\bar{F}(M), \bar{N}(M)\right) ds = \iiint\limits_{G} div\,\bar{F}(M)\,dv$.

СЛЕДСТВИЕ (*физический смысл дивергенции и формулы*) Поток векторного поля через замкнутую поверхность совпадет с суммарной мощностью всех источников и стоков, которые находятся внутри поверхности.

Михаил Васильевич Остроградский (1801- 1862) - выдающийся российский математик, механик, педагог. В 1822 г. в Париже слушал лекции Коши, Ампера, Лапласа, Пуассона, Фурье.
Результаты в механике и различных разделах математики. Преподавал в различных вузах Петербурга. Долгое время был главным наблюдате лем за преподаванием математики в кадетских корпусах.
Ученики - В.Я. Буняковский, И.А. Вышнеградский и др.

Опр. Ротором (вихрем) дифференцируемого векторного поля $\bar{F}: G \to \mathrm{R}^3$ называется векторное поле $\bar{F}_1 = rot\,\bar{F}: G \to \mathrm{R}^3$, где $rot\,\bar{F} := \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & r \end{vmatrix} := \left\{ \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ Обозначение $rot\,\bar{F}$ и название – Клиффорд, 1878.
Пр.

Опр. Пусть в области $G \subset \tilde{\mathrm{R}}^3$ задана измеримая кривая l и непрерывное векторное поле $\bar{F}: G \to \tilde{\mathrm{R}}^3$. Тогда КИВР $\int\limits_l f(M)dx + g(M)dy + r(M)dz = \int\limits_l \bar{F}(M)d\bar{r}$ называется циркуляцией векторного поля $\bar{F}(M)$ вдоль кривой l.

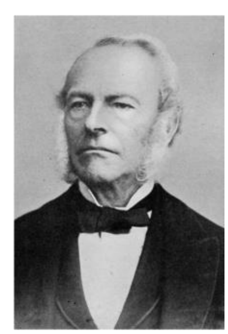
ЗАМЕЧАНИЕ 1 (*физический смысл циркуляции*) Если $\bar{F}(M)$ есть силовое поле, то циркуляция его вдоль кривой AB совпадает с работой поля по перемещению материальной точки единичной массы из A в B вдоль этой кривой.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 (*формула Стокса*, 1849)   Пусть в области $G \subset \tilde{\mathrm{R}}^3$ задана гладкая поверхность L с кусочно гладкой границей l. Пусть поле $\bar{F} = \{f, g, r\}$ непрерывно дифференцируемо на G. Тогда имеет место формула

$$\int\limits_l f(M)dx + g(M)dy + r(M)dz = \iint\limits_{\mathrm{L}} \left(rot\,\bar{F}(M), \bar{N}(M)\right) ds = \iint\limits_{D} \left(rot\,(\bar{F} \circ R), \bar{r}'_u, \bar{r}'_v\right) dudv,$$

где $R(u,v) := (\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))$.

Стокс Джордж Габриель (1819- 1903), английский физик, член Военно-медицинской академии в Петербурге.



Изучал стационарное движение несжимаемой жидкости с учётом трения (Навье-Стокса уравнение). Описал явление флуоресценции.
Известны работы С. по акустике, теплопроводности в кристаллах, гравита ции, по векторному анализу (Стокса формула), теории рядов и определён ных интегралов и др.
Единица кинематической вязкости =1 стокс.
ЗАМЕЧАНИЕ 3 (*физический смысл формулы и ротора*) Работа (циркуляция) силового поля вдоль любого замкнутого пути вполне определяется не самим полем, а его вихрем.

Опр. Векторное поле $\bar{F}: G \to \tilde{R}^3$ называется соленоидальным (трубчатым), если на G существует дифференцируемое векторное поле $\bar{F}_0$ со свойством $\forall M \in G \quad rot\,\bar{F}_0(M) = \bar{F}(M)$
Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Дважды непрерывно дифференцируемое на области G векторное поле $\bar{F}(M)$ соленоидально $\Leftrightarrow$ $\forall M \in G \;\; div\,\bar{F}(M) = 0$.
ЗАМЕЧАНИЕ 2 (*физический смысл соленоидальности*) Рассмотрим трубообразную область (трубку) $G_1 \subset G$ (вообще говоря, изгибающуюся и переменного сечения), боковая поверхность которой S является касательной к соленоидальному полю $\bar{F}: G \to \tilde{R}^3$, то есть $\forall M \in S \;\; \bar{N}(M) \perp \bar{F}(M)$. Обозначая S_1, S_2 "основания" G_1, по формуле Гаусса-Остроградского имеем $\iint\limits_{S_1}\left(\bar{F}(M), \bar{N}(M)\right) ds + \iint\limits_{S_2}\left(\bar{F}(M), \bar{N}(M)\right) ds =$

$= \iint\limits_{S_1 \cup S \cup S_2}\left(\bar{F}(M), \bar{N}(M)\right) ds = \iiint\limits_{G} div\,\bar{F}(M)\, dv = 0$, откуда $\iint\limits_{S_1}\left(\bar{F}(M), \bar{N}(M)\right) ds = \iint\limits_{S_2}\left(\bar{F}(M), \bar{N}(M)\right) ds$.

Это равенство можно трактовать так. Если поле скоростей $\bar{v}(M): G \to \tilde{R}^3$ движущейся жидкости стационарное и соленоидальное, то за единицу времени объем жидкости, вошедший в "трубку" G_1 через основание S_1, совпадает с объемом, вышедшим из G_1 через основание S_2. При этом движения частиц через боковую поверхность S нет. Поэтому говорят о трубообразном (соленоидальном) движении жидкости.

Опр. Векторное поле $\bar{F}: G \to R^3$ называется потенциальным, если на G существует дифференцируемое скалярное поле $U(M)$ со свойством $\forall M \in G \;\; grad\,U(M) = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right\} = \bar{F}(M)$. В этом случае $U(M)$ называется потенциалом поля $\bar{F}(M)$.
Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть $\bar{F}(M)$ есть дважды непрерывно дифференцируемое векторное поле на односвязной области G (то есть любую замкнутую кривую в G можно непрерывным образом стянуть в этой области в точку). Тогда равносильны следующие утверждения.
1) $\bar{F}(M)$ является потенциальным полем на G.
2) $\forall M \in G \;\; rot\,\bar{F}(M) = 0$.
3) КИВР $\int\limits_{l} \bar{F}(M) d\bar{r}$ не зависит от пути интегрирования, а только от его концов.

СЛЕДСТВИЕ (*физический смысл*) Силовое поле $\bar{F}: G \to \mathrm{R}^3$ является потенциальным $\Leftrightarrow$ его работа по перемещению материальной точки вдоль любого замкнутого контура $l \subset G$ равна нулю. В физике экспериментально устанавливается, что таким свойством обладает, например, электрическое поле, созданное неподвижными зарядами (электростатическое поле).

Опр. Векторное поле называется гармоническим, если оно одновременно и потенциальное и соленоидальное.

ЗАМЕЧАНИЕ Дважды непрерывно дифференцируемое потенциальное поле на односвязной области G является гармоническим тогда и только тогда, когда его потенциал является решением уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$.

СЛЕДСТВИЕ Векторные поля $\bar{F}_1(M), \bar{F}_2(M)$ имеют одинаковые вихри и одинаковые расходимости: $rot\,\bar{F}_1(M) = rot\,\bar{F}_2(M)$, $div\,\bar{F}_1(M) = div\,\bar{F}_2(M)$, тогда и только тогда, когда их разность $\bar{F}_2(M) - \bar{F}_1(M)$ есть гармоническое поле.

ТЕОРЕМА 8.5 (*Гельмгольца*) Всякое непрерывно дифференцируемое в односвязной области поле $\bar{F}: G \to \mathrm{R}^3$ представимо в виде суммы соленоидального $\bar{F}_s$ и потенциального $\bar{F}_p$ полей: $\bar{F}(M) = \bar{F}_s(M) + \bar{F}_p(M)$.

Людвиг Гельмгольц (1821-1894) - немецкий физик, математик, физио лог и психолог. Впервые дал математическое обоснование закона сохра нения энергии, показал, что происходящие в живых организмах процес сы как же подчиняются этому закону («О сохранении силы», 1847). Заложил основы теории вихревого движения жидкости (1858), исследо вал разрывные движения жидкости (1868). Разработал принцип механи ческого подобия. Высказал идею об атомарном строении электричества

СЛЕДСТВИЕ Из определений следует, что линейная комбинация соленоидальных (потенциальных) полей есть поле соленоидальное (потенциальное). Это позволяет получить общей вид разложения в теореме.

Пр.

ИСТОЧНИКИ

Опорный конспект лекций на сайте сайте skif@donstu.ru $\Longrightarrow$ *библиотека электронных ресурсов ДГТУ* $\Longrightarrow$ *факультет ИВТ* $\Longrightarrow$ *кафедра прикладной математики*

Учебники:

Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2.

Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Т.3.

Задачники:

Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.

Решебники:

Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1,2.

Взять на абонементе или скачать на сайте www. techlibrary

СПИСОК ВОПРОСОВ К ПЕРВОМУ РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ

1. Опр. шара, луча и открытого множества в $\tilde{R}^n$. Пр. 2. Опр. граничной точки, границы и замкнутого множества замкнутого в $\tilde{R}^n$. Пр. 3. Опр. отображения, функции n перемен ных и координатных функций. Пр. 4. Опр. С-линии и С-поверхности уровня. Пр. 5. Опр. предела и предела по направлению. КПР. 6. Опр. полного, частичного приращений и непрерывного отображения. Пр. 7. Опр. дифференцируемого отображения, производной и дифференциала отображения в точке. 8. Опр. производной по направлению, частной производной и градиента функции. Связь понятий. 9. Опр. матриц Якоби отображения. Пр. $F(x,y)=(xy,x^2+y^2)$. Опр. матрицы Гессе функции. Пр. $f(x,y)=x^2+xy+y^2$. 10. Опр. касательной плоскости и геом. смысл дифференци руемости функции. Пр. 11. Опр. сме шанной производной, производной второго порядка и заме чания. 12. Матрица Якоби сложного отображения и формула полной производной. Пр. 13. Опр. многочлена Тейло ра и аппроксимации функции. Остаточный член формулы Тейлора. 14. Опр. положитель но определенной, полуопределенной и неопределенной квадратичных форм. Пр. 15. Опр. главных миноров матрицы, точек локального минимума и седловой. Пр. 16. Формулиров ка необходимых и достаточных условий локального экстремума. 17. Опр. ДУ, ОДУ. Пр. 18. Опр. ОДУ n-го порядка, разрешенного (не разрешенного) относительно производ ной. Пр. 19. Опр. решения ОДУ и интегральной кривой. Пр. 20. Опр. задачи Коши, усло вий и данных Коши. Пр. 21. Опр. общего, частного и особого решений. Пр. 22. Что зна чит проинтегрировать в явном виде и в квадратурах? Пр. 23. Опр. НСОДУ, его порядка и задачи Коши. 24. Опр. НСЛДУ, однородной и неоднородной НСЛДУ. Пр. 25. Опр. фун даментальной системы решений, фундаментальной матрицы и вронскиана. 26. Свойства НСЛДУ и переходная матрица. 27. Опр. ЛДУ n-го порядка и его свойства. 28. Опр. подобных матриц, матрицы перехода и характеристического многочлена матрицы.

СПИСОК ВОПРОСОВ КО ВТОРОМУ РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ

1. Опр. задачи простой интерполяции и формула Лагранжа. Пр. 2. Опр. сплайна, кубиче ского, естественного и периодического сплайнов. 3. Опр. сетки и сеточной функции и ме тода Эйлера решения ОДУ. 4. Опр. ДС, траекторий, фазовых портрета и пространства. Пр. 5. Опр. положения равновесия периодической траектории и цикла. Зам. 6. Опр. устойчивого и неустойчивого узлов. Рис. 7. Опр. устойчивого и неустойчивого фокусов. Рис. 8. Опр. седла и центра. Рис. 9. Опр. устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости. Зам. 10. Опр. линеаризации НСОДУ. 11. Опр. меры Лебега и измеримой функции. Пр. 12. Опр. и свойства интеграла Лебега и пространства $L_p(\alpha,\beta)$. 13. Опр. ком плексного евклидова пространства и гильбертова пространства. Пр. 14. Опр. ортонорми рованной системы, коэффициентов и ряда Фурье. Пр. 15. Опр. тригонометрического ря-да, ряда Фурье в комплексной форме и k-ой гармоники. 16. Опр. спектра периодической

функции, амплитуд, фаз, гармонических и круговых частот. 17. Опр. меры Жордана (пло щади) множества. Пр. 18. Опр. диаметра множества, интегральной суммы и двойного интеграла функции. Пр. 19. Геометрический смысл двойного интеграла. Приложения. 20. Опр. интеграла с переменным верхним пределом, повторного и несобственного инте гралов. 21. Опр. КИВР. Приложение. 22. Опр. области и формула Грина. Приложение. 23. Опр. тройного интеграла. Приложения. 24. Опр. двусторонней поверхности и ориен тации. Кпр. 25. Опр. векторного и скалярного и дифференцируемого полей. Пр. 26. Опр. ПИВР. Приложение. 27. Опр. дивергенции поля и соленоидального поля. Связь. 28. Опр. ротора поля и потенциального поля. Связь. 29. Физический смысл соленоидаль ного и потенциального полей. 30. Опр. гармонического поля и теорема Гельмгольца.

СПИСОК ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ ВТОРОГО СЕМЕСТРА

1. Опр. шара, луча и открытого множества в $\tilde{R}^n$. Пр. **2**. Опр. граничной точки, грани цы множества и замкнутого множества в $\tilde{R}^n$. Пр. **3***. Опр. отображения, функции n переменных и координатных функций. Пр. **4***. Опр. С-линии и С-поверхности уровня. Пр. **5.** Опр. предела и предела по направлению. Кпр. **6**. Опр. полного, частичного приращений и непрерывного отображения. Пр. **7***. Опр. дифференцируемого отображения, производной и дифференциала отображения в точке. **8***. Опр. производной по направлению, частной производной и градиента функции. Связь понятий. **9***. Опр. матрицы Якоби отображения и Гессе функции. Пр. **10**. Опр. касательной плоскости и геом. смысл дифференцируемости функции. Пр. **11**. Опр. смешанной производной, произ водной второго порядка и замечания. Пр. **12***. Опр. многочлена Тейлора и аппроксимации функции. Остаточный член формулы Тейлора. **13**. Опр. положительно определенной, полуопределенной и неопределенной квадратичных форм. Пр. **14.** Опр. главных миноров матрицы, точек локального минимума и седловой. Пр.

15*. Опр. ДУ и ОДУ n-го порядка, разрешенного относительно производной. Пр. **16**. Опр. решения ОДУ и интегральной кривой. Пр. **17***. Опр. задачи Коши, условий и данных Коши. Пр. **18**. Опр. общего, частного и особого решений. Пр. **19***. Опр. НСОДУ, его порядка и задачи Коши. **20**. Опр. фундаментальной системы решений, фундаменталь ной матрицы и вронскиана НСЛДУ. **21*.** Опр. задачи простой интерполяции и формула Лагранжа. Пр. **22**. Опр. сетки и сеточной функции и метода Эйлера решения ОДУ. **23***. Опр. ДС, траекторий, фазовых портрета и пространства. Пр. **24**. Опр. положения равно весия и цикла. Зам. **25*.** Опр. устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчи вости. Зам.

26. Опр. меры Лебега и измеримой функции. Пр. **27.** Опр. суммируемой функции и суммируемой в квадрате функции. Кпр. **28***. Опр. тригонометрического ряда, ряда Фурье в комплексной форме и k-ой гармоники. **29***. Опр. спектра периодической функции, амплитуд, фаз, гармонических и круговых частот.

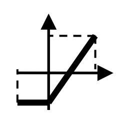
30. Опр. меры Жордана (площади) множества. Пр. **31***. Опр. диаметра множества, интегральной суммы и двойного интеграла функции. Пр. **32***. Геометрический смысл двойного интеграла. Приложения. **33**. Опр. интеграла с переменным верхним пределом, повторного и несобственного интегралов. **34***. Опр. КИВР. Приложение. **35**. Опр.

тройного интеграла. Приложения. **36**. Опр. двусторонней поверхности и ориентации. Кпр. **37***. Опр. векторного и скалярного и дифференцируемого полей. Пр. **38**. Опр. ПИВР. Приложение. **39*.** Опр. дивергенции поля и соленоидального поля. Связь. **40***. Опр. ротора поля и потенциального поля. Связь.

СПИСОК ТЕОРЕМ К ЭКЗАМЕНУ ВТОРОГО СЕМЕСТРА

1. Т. 5.5 о формуле Тейлора.
2. Т. 5.6 о локальном экстремуме.
3. Вывести уравнение фильтра нижних частот.
4. Т. 6.2 о свойствах НСЛДУ.
5. Т. 6.3 о свойствах ЛДУ n-го порядка.
6. Т. 6.5 об устойчивости ДУ.
7. Т. 7.3 о свойствах тригонометрического ряда Фурье.
8. Т. 8.2 о формулах вычисления двойного интеграла.
9. Т. 8.3 о формуле Грина.
10. Вывести формулу потенциала однородного шара.
11. Т. 8.5 Гельмгольца.

СПИСОК ТИПОВ ЗАДАЧ К ЭКЗАМЕНУ ВТОРОГО СЕМЕСТРА

1. Найти линию уровня $z=1$ функции $z=f(x,y)$. 2. Вычислить $grad\ f(x,y,z)$ в точке M_0. 3. Найти уравнение касательной плоскость к поверхности. 4. Найти точки экстремума функции $f(x,y)$. 5. Методом МНК найти уравнение прямой, наименее уклоняющееся от заданного массива точек. 6. Найти общий интеграл $\sqrt{1+x^2}yy'-\sqrt{4-y^2}=0,\ y'=\dfrac{y^2}{x^2}-2+6\dfrac{y}{x}$. 7. Решить задачу Коши $y'-\dfrac{y}{x+2}=x^2+2x,\ y(-1)=1{,}5\quad y''+2y'+2y=x^2+1,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$. 8. Решить интерполяционную задачу $p(\lambda_k)=a_k,\ k=1,\dots,n$. 9. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения ДУ $y^{iv}+3y'''+5y''+y'+y=0$. 10. Исследовать на устойчивость положение равновесия $(0,0)$ системы $\begin{cases} x_t'=\sin(2y-x)+\lg(1-x)+xy^2 \\ y_t'=3e^{x-y}-2\arcsin y-3 \end{cases}$. 11. Решить задачу Коши $\begin{cases} x'=2x-2y \\ y'=x+5y \end{cases},\ \begin{cases} x(1)=1 \\ y(1)=0 \end{cases}$. 12. Разложить  функцию, заданную графически, в тригонометрический ряд (по sin или cos). 13. Вычислить момент инерции пластинки. 14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=f(x)$, $y=g(x)$. 15. Найти работу силового поля $\bar{F}(x,y)$ вдоль кривой l. 16. Найти объем тела.