ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Название кафедры»

Учебное пособие

по дисциплине

«Пределы и производные»

«Математический анализ»

Авторы

Ермилова О.В.

Ростов-на-Дону, 2023

Аннотация

Учебное пособие предназначено для аудиторной и самостоятельной работы по теме «Пределы и производные», дисциплина «Математический анализ» при различных формах обучения: очном, заочном и дистанционном для студентов технических направлений и специальностей.

Автор

Старший преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Ермилова О.В.

Оглавление

ГЛАВА 1. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ.

1.1. Числовые последовательности, основные определения.

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число a_n , $n \epsilon N$, то говорят, что задана бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$:

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \epsilon R$.

Таким образом, числовая последовательность – это функция натурального аргумента:

$$\boldsymbol{a_n = f(n)} \quad \textbf{(1.1)}$$

Другими словами, множество занумерованных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью** или просто последовательностью.

Обозначение:$\{\boldsymbol{a_n}\}$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$будем называть **элементами последовательности** или членами последовательности, таким образом a_1 –первый член (элемент) последовательности,a_2-второй, ...,элемент a_n –общий или n –ый член последовательности.

Чаще всего последовательность задается формулой её общего члена $a_n = f(n)$, данная формула позволяет вычислить любой член последовательности по номеру n .

Последовательность, все члены которой равны одному и тому же числу, называется **постоянной,** то есть $a_n = c = const$ $(a_1 = a_2 = \cdots = a_n = c$).

Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого её элемента.

Способы задания последовательностей.

1)Аналитический способ — это когда последовательность задается формулой её общего члена $a_n = f(n)$, которая позволяет вычислить любой член последовательности.

Так, равенства $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n+1$, $z_n = (-1)^n$,$a_n = \frac{n}{n+1}$ задают соответственно последовательности:

x_n: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$
y_n: $2,3,4, \dots, n+1, \dots;$
z_n: $-1,1,-1, \dots, (-1)^n, \dots;$
a_n: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots.$

Пример 1.1. Последовательность задана формулой её общего члена $a_n = 3^n$. Найти первые три члена последовательности.

Решение.

При $n = 1$ получим первый член последовательности $a_1 = 3^1 = 3;$

При $n = 2$ второй $a_2 = 3^2 = 9;$

При $n = 3$ третий $a_3 = 3^3 = 27.$

2)Рекуррентный способ-такой способ при котором любой член последовательности, начиная с некоторого номера, выражают через предыдущие члены. Например, если $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1}$, тогда $a_2 = -\frac{1}{2}a_1$,при этом если $a_1 = 3$,то $a_2 = -\frac{3}{2}$, и так далее.

Числовая последовательность называется **ограниченной сверху (снизу)**, если существует число M такое, что любой элемент a_nэтой последовательности удовлетворяет неравенству$a_n \le M$ $(a_n \ge M)$.

Например, последовательность $v_n = n$ ограничена снизу, так как $v_n \ge 1$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу, то есть если выполняется неравенство $|a_n| < M$ или, что тоже самое $-M < a_n < M$,другими словами все члены последовательности принадлежат промежутку$(-M; M)$.

В противном случае последовательность называется **неограниченной**, то есть$|a_n| > M$.

Числовая последовательность называется **возрастающей(убывающей)**, если $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$,($a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$).

Все такие последовательности объединяют общим названием **монотонные последовательности**.

Таким образом, если $a_{n+1} - a_n < 0$,то последовательность $\{a_n\}$монотонно убывает; если $a_{n+1} - a_n > 0$,

то последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает.

Так, последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$,$\{a_n\}$из примера выше монотонные, а $\{z_n\}$- не монотонная.

В частности, $\{x_n\}$-убывающая последовательность, $\{a_n\}$, $\{y_n\}$- возрастающие последовательности.

Пример 1.2. Выяснить какой является последовательность возрастающей или убывающей: **а)**$y_n = \frac{n}{3^n}$;

б) $x_n = \frac{n}{2n+1}$.

Решение

а) Найдем $y_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$. Найдем разность $y_{n+1} - y_n$:

$y_{n+1} - y_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3 \cdot 3^n} - \frac{n}{3^n} = \frac{1-2n}{3 \cdot 3^n} < 0$,

так как $1 - 2n < 0, n \epsilon N$,то есть$y_{n+1} < y_n$.

Таким образом, последовательность $y_n = \frac{n}{3^n}$ монотонно убывает;

б) Найдём $x_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$.

Найдем разность $x_{n+1} - x_n$:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{n+1}{2n+3}-\frac{n}{2n+1}=\frac{(n+1)(2n+1)-n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}=$$
$$=\frac{2n^2+n+2n+1-2n^2-3n}{(2n+3)(2n+1)}=\frac{1}{(2n+3)(2n+1)}>0$$

Следовательно, $x_{n+1}-x_n>0$,то есть $x_n<x_{n+1}$.Таким образом, последовательность $x_n=\frac{n}{2n+1}$-возрастающая.

1.2. Предел числовой последовательности.

Определение предела последовательности.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$, как бы мало оно ни было, существует такой номер $N=N(\varepsilon)$, что для всех $n>N$ выполняется неравенство:$|x_n-a|<\varepsilon$.

Коротко определение предела можно записать так:

$(\forall\boldsymbol{\varepsilon}>\mathbf{0},\exists\boldsymbol{N}:\forall\boldsymbol{n}>\boldsymbol{N},|\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{a}|<\boldsymbol{\varepsilon})\Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x_n}=\boldsymbol{a}$ **(1.2)**

Последовательность, пределом которой является конечное число a называется **сходящейся**. В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a при $n\to\infty$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

Если предел последовательности не существует или бесконечен, то последовательность называется **расходящейся**.

Геометрический смысл предела последовательности.

Неравенство$|x_n-a|<\varepsilon$ эквивалентное неравенствам$-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon$ или $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$, показывает, что элемент x_n находится в ε -окрестности точки

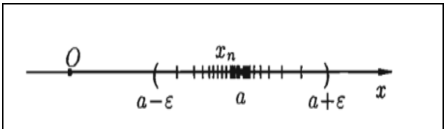


Рис.1

a(см.рис.1).

Если число a является пределом последовательности$\{x_n\}$,то геометрически это означает, что начиная с некоторого номера все точки $\{x_n\}$ попадут внутрь интервала$(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$,где ε −произвольно взятое положительное число, а за пределами интервала лежит конечное число элементов последовательности. Можно заметить, что точка a-точка сгущения (см.рис.1), то есть члены последовательности по мере увеличения номера n неограниченно приближаются к числу a.

Замечание: число a не является пределом последовательности, если можно выбрать такую ε - окрестность точки a за пределами которой будет находиться бесконечное число элементов последовательности.

Например, последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ - сходящаяся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$,так как по мере увеличения n все

элементы приближаются к единице; последовательность $b_n = (-7)^n$ -расходящаяся, так как элементы последовательности при $n \to \infty$ не стремятся ни к одному определённому значению ($(-7)^1 = -7$, $(-7)^2 = 49, (-7)^3 = -343$,...- значения прыгают), то есть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \nexists$.

Замечание: операция $[a]$,которую в скором времени мы будем рассматривать, означает выделение целой части числа a,не превышающей самого числа a.

Например, $[2{,}47] = 2, [-5{,}23] = -6, [7] = 7$ и так далее.

Пример 1.3. Используя определения предела последовательности, доказать, что: **а)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

Решение.

а) Используя определение предела последовательности (1.2), покажем, что для произвольного сколь угодно малого действительного числа $\varepsilon>0$ можно указать порядковый номер N элемента последовательности $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$,начиная с которого выполняется условие

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon \text{ или } \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|<\varepsilon,$$

то есть

$$(\forall\varepsilon>0,\exists N:\forall n>N,\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|<\varepsilon\,)\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0.$$

Рассмотрим неравенство:

$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|<\varepsilon$,

$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}$, так как $n>0$, а$|(-1)^n|=1$,то $\frac{1}{n}<\varepsilon$,

следовательно, $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

Таким образом, для всех $n>N$,где $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, выполняется условие $\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon$,а это по определению предела числовой последовательности означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$.

Итак, $\forall\varepsilon>0$ указано соответствующее значение N. Это и доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$.

Проанализируем ситуацию и заметим, что число N зависит от ε ,то есть $N=N(\varepsilon)$. Так, если $\varepsilon=0{,}01$, $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=\left[\frac{1}{0{,}01}\right]=[100]=100$,то есть, начиная с a_{100},все члены последовательности отличаются от 0 меньше, чем на 0,01.

При $\varepsilon = 0{,}001$, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = \left[\frac{1}{0{,}001}\right] = [1000] = 1000$,то есть, начиная с a_{1000},все члены последовательности отличаются от 0 меньше, чем на 0,001.

б) Покажем, что для произвольного сколь угодно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать порядковый номер N элемента последовательности

$x_n = \frac{n+2}{2n+1}$, начиная с которого выполняется условие

$$\left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\ ,$$

то есть

$$(\forall\varepsilon > 0, \exists N{:}\, \forall n > N, \left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\ ) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2};$$

Рассмотрим неравенство:

$$\left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{2n+4-2n-1}{2(2n+1)}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{3}{4n+2}\right| < \varepsilon,$$

поскольку $n > 0$ и $\frac{3}{4n+2} > 0,$

то$\left|\frac{3}{4n+2}\right| = \frac{3}{4n+2}$, то есть $\frac{3}{4n+2} < \varepsilon,$

$$3 < \varepsilon(4n+2),$$

$$\frac{3}{\varepsilon} < 4n+2,$$

$$4n > \frac{3}{\varepsilon} - 2,$$

$$4n > \frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon},$$

$$n > \frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon} (= N).$$

Таким образом, для всех $n > N$,где $N = \left[\frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right]$, выполняется условие $\left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$,а это по определению предела числовой последовательности означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Последовательность$\{\alpha_n\}$, предел которой равен нулю$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, называется **бесконечно малой**.

Например, последовательность $\alpha_n = \frac{2}{n+1}$бесконечно малая, так как$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Последовательность $\{\beta_n\}$называется **бесконечно большой**, если $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$.

Например, последовательность $\beta_n = n$ бесконечно большая, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$.

Предельный переход в неравенствах.

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$и $\{z_n\}$.

Теорема 1.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \le y_n$,то $a \le b$.

Доказательство.

Допустим, что $a > b$. Из равенств $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ будут выполняться неравенство$|x_n - a| < \varepsilon$ и$|y_n - b| < \varepsilon$,то есть $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ и $b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Тогда: $x_n > a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$,то есть $x_n > \frac{a+b}{2}$ и

$y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, то есть$y_n < \frac{a+b}{2}$.

Теорема 1.2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и справедливо неравенство $x_n \le z_n \le y_n$ (начиная с некоторого номера), то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

(Примем без доказательства.)

Свойства пределов последовательностей.

Пусть существуют конечные пределы последовательностей $\{a_n\}, \{b_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

1. Если последовательность имеет предел, то он единственный.

2. Если последовательность имеет предел, то она является ограниченной.

3. Предел суммы(разности) последовательностей равен сумме (разности) пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b;$$

4. Предел произведения последовательностей равен произведению пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b.$$

В частности, для постоянной последовательность $\{a_n\}$, имеем:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} C = C$-предел постоянной последовательности равен постоянной,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n =$

$= C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = C \cdot b$ -постоянный множитель можно выносить за знак предела.

5. Предел частного последовательностей равен частному пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, b \ne 0.$$

Все свойства пределов вытекают из определения предела последовательности, докажем, например 3) свойство: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

Доказательство.

Как $\forall\varepsilon > 0$ так и для $\forall\frac{\varepsilon}{2} > 0\ \exists N_1: \forall n > N_1, |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}(1)$

$\exists N_2: \forall n > N_2, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}(2)$.

Оценим $|(a_n + b_n) - (a + b)|$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le$$

$$\le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $a + b$-является пределом последовательности$\{a_n + b_n\}$.

Замечание: если у последовательности добавить, отбросить или изменить первые k элементов, то это не повлияет на ее сходимость.

1.3. Предел функции.

Пусть функция $y = f(x)$определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0.Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при$x \to x_0$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \ne x_0$, удовлетворяющих условию$|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство$|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Краткая запись определения предела функции на языке ε, δ:

$$(\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x \ne x_0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Геометрический смысл предел функции.

Неравенство $|x - x_0| < \delta$ эквивалентно неравенству $-\delta < x - x_0 < \delta$ или $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, а неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ эквивалентно неравенству $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$, или $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если по мере того, как x приближается к x_0 (то есть x попадает в интервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, значение функции $f(x)$ неограниченно приближается к A, то есть $f(x)$ попадает в интервал $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$. Иными словами, точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$ (см.рис.2).

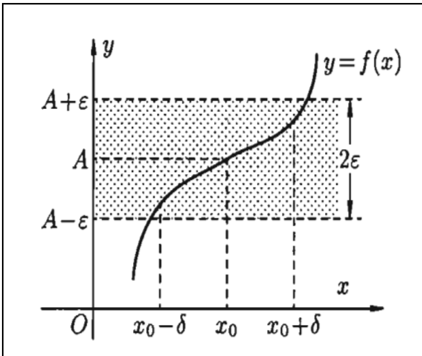


Рис.2

Замечание: величина δ зависит от выбора ε, поэтому пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$, при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ и наоборот $\delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Пример 1.4. Показать, что функция $f(x) = 3x - 5$ имеет в точке $x = 2$ предел равный единице. Каково должно быть δ, если $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{100}$.

Решение.

Фиксируем любое $\varepsilon > 0$. Поэтому ε находим такие $\delta > 0$ при котором из неравенства $|x - 2| < \delta$ следовало бы неравенство $|(3x - 5) - 1| < \varepsilon$.

Решаем неравенство $|(3x - 5) - 1| < \varepsilon$,

$$|3x - 6| < \varepsilon,$$

$$|3(x - 2)| < \varepsilon,$$

$$3\,|x - 2| < \varepsilon,$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3},$$

взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ видим, что для всех x удовлетворяющих неравенству $|x - 2| < \delta \left(= \frac{\varepsilon}{3}\right)$ выполняется неравенство:

$|(3x-5)-1| < \varepsilon$,

следовательно, $\lim\limits_{x \to 1}(3x-5) = 1$.

Если $\varepsilon = 1$,то $\delta = \frac{\varepsilon}{3} = \frac{1}{3}$;

$\varepsilon = \frac{1}{2}$,то $\delta = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$;

$\varepsilon = \frac{1}{100}$,то $\delta = \frac{\frac{1}{100}}{3} = \frac{1}{300}$.

1.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой (б.м.)** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ ($f(x)$ неограниченно уменьшается, когда $x \to x_0$),из определения предела следует, что

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \; \forall x \neq x_0 \colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или бесконечно малыми; обозначают обычно греческими буквами α, β и так далее.

Примерами бесконечно малых функций являются, например, функция $y = x$ при $x \to 0$(см. рис.3);

Действительно, по мере того как $x \to 0$, $y = x \to 0$,то есть $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$;

Аналогично,$y = sinx$,при $x \to 0$ и при $x \to \pi$ является бесконечно малой функцией.

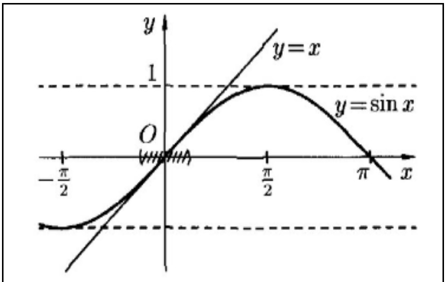


Рис.3

Функция $y = f(x)$называется **бесконечно большой (б.б.)** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ($f(x)$неограниченно растёт, когда

$x \to x_0$),то есть
$\forall \varepsilon > 0 \exists\, \delta > 0\, \forall x \neq x_0 : |\, x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$.

Бесконечно большие функции часто называют бесконечно большими величинами.

Замечание: нужно иметь в виду, что ∞ это только символ для обозначения бесконечно большой величины, в частности, если $f(x)$стремится к бесконечности и принимает лишь положительные значения (уходит вверх), то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$,если лишь отрицательные (уходит вниз), то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

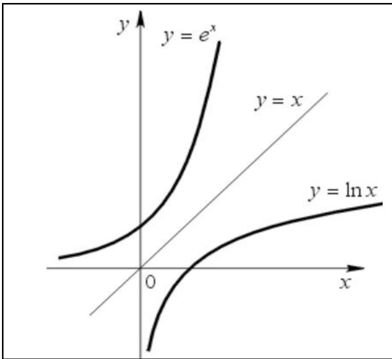


Рис.4

Примерами бесконечно больших функций служат функции $y = x$, при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$;

$y = lnx$ при $x \to 0 + 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0+0} lnx = -\infty$; $y = e^x$,при $x \to +\infty$,так как $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$(см.рис.4).

Свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций.

1.Если $\boldsymbol{f(x)}$ – бесконечно малая функция при $\boldsymbol{x \to x_0}$, то функция $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{f(x)}}$ является бесконечно большой при $\boldsymbol{x \to x_0}$ и наоборот: если $\boldsymbol{g(x)}$ –бесконечно большая функция при $\boldsymbol{x \to x_0}$, то функция $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{g(x)}}$ является бесконечно малой при $\boldsymbol{x \to x_0}$.

2.Сумма и разность конечного числа бесконечно малых функций при $\boldsymbol{x \to x_0}$является бесконечно малой функцией.

3.Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию является бесконечно малой функцией.
Следствие 1. Произведение двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.
Следствие 2. Произведение бесконечно малых функций на число есть функция бесконечно малая.
4.Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая,
то есть если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\neq 0$,то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{f(x)}=\frac{0}{a}=0$;
Свойства бесконечно малых и больших функций вытекают из определения предела функции, докажем, например 3) свойство:

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$- две б. м. функции при $x\to x_0$. Это значит, что $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то есть для любого $\varepsilon>0$, а значит, и $\frac{\varepsilon}{2}>0$ найдется число $\delta_1>0$ такое, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих неравенству$|x-x_0|<\delta_1$, выполняется неравенство

$$|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\ (1);$$

Аналогично,если $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$, то

$$(\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \forall x\neq x_0\colon |x-x_0|<\delta_2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}(2);$$

Пусть δ - наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняются оба неравенства (1) и (2). Следовательно, имеет место соотношение:

$$|\alpha(x)+\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Таким образом, $(\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \forall x\neq x_0\colon |x-x_0|<\delta)\Rightarrow$

$$\Rightarrow |\alpha(x)+\beta(x)| < \varepsilon.$$

Это значит, что $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha(x)+\beta(x)\right)=0$,то есть

$\alpha(x)+\beta(x)$ –б. м. ф.

Аналогично проводится доказательство для любого конечного числа б. м. функций.

Замечание: в дальнейшем будем использовать следующие очевидные соотношения

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\frac{C}{\infty}=0\\ \frac{C}{0}=\infty;\\ \frac{0}{C}=0\end{cases}$$

Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией.

Теорема 1.3. Если функция $f(x)$ имеет предел, равный A, то ее можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, то есть если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, то $f(x)=A+\alpha(x)$.

Доказательство.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.Следовательно,

$(\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \forall x\neq\ x_0: |\,x-x_0| < \delta\Rightarrow|f(x)-A| < \varepsilon)$,

то есть$|f(x)-A-0| < \varepsilon$.

Это означает, что функция $f(x)-A$ имеет предел, равный нулю, то есть является бесконечно малой функцией, которую обозначим через $\alpha(x)$: $f(x)-A=\alpha(x)$. Отсюда $f(x)=A+\alpha(x)$.

Заметим, что отыскание предела функции по определению – это довольно трудоемкий процесс. Поэтому на практике удобнее пользоваться следующими свойствами, которые могут быть доказанны с использованием определения предела функции.

Свойства пределов функций:

Пусть существуют конечные пределы функций $f(x), g(x)$ в точке x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, то

1. Предел постоянной функции равен самой постоянной:

   $$\lim_{x\to x_0} C = C;$$

2. Предел суммы (разности) конечного числа функций равен сумме (разности) пределов этих функций:

   $$\lim_{x\to x_0}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = A \pm B;$$

3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций:

   $$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = A\cdot B;$$

   Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

   $$\lim_{x\to x_0} C\cdot f(x) = \lim_{x\to x_0} C\cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = C\lim_{x\to x_0} f(x) = C\cdot A;$$

   Следствие 2. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

   $$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n.$$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций:

   $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B},\ (B \neq 0).$$

Все свойства пределов вытекают из определения предела функции, докажем, например 3) свойство, аналогично доказываются остальные свойства.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$.

Тогда по теореме 1.3 о связи функции, ее предела и б. м. ф. можно записать $f(x) = A + \alpha(x)$, и $g(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б. м. ф.

Следовательно,

$$f(x)\cdot g(x) = \big(A+\alpha(x)\big)\cdot\big(B+\beta(x)\big) =$$
$$= AB + \big(A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)\big),$$

Выражение в скобках есть б.м.ф., поэтому

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = AB.$$

Отметим, что теорема справедлива для произведения любого конечного числа функций.

Пример 1.5. Найти предел: **а)** $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2 - 3x + 4)$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-1}{3x^2-5x+1}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x^2+2x+1}$; **г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{-2}}{x^{-3}+3}$.

Решение

Чтобы вычислить предел любого типа и вида нужно подставить предельное значение x, в функцию, стоящую под знаком предела. Учитывая свойства пределов, имеем:

а) $$\lim_{x\to 2}(2x^2 - 3x + 4) = 2\lim_{x\to 2}x^2 - 3\lim_{x\to 2}x + \lim_{x\to 2}4 =$$
$$= 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 4 = 6;$$

б) $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-1}{3x^2-5x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-5x+1)} =$$
$$= \frac{(-1)^2 - (-1) - 1}{3(-1)^2 - 5(-1) + 1} = \frac{1}{9};$$

в) $$\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x^2+2x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(4-x^2)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2+2x+1)} =$$
$$= \frac{4-(-2)^2}{(-2)^2 + 2(-2) + 1} = \frac{0}{1} = 0;$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{-2}}{x^{-3}+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}+3} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+3} = \frac{0}{3} = 0.$

1.5. Практическое вычисление пределов.

При вычислении пределов часто сталкиваются с ситуациями, которые называются неопределенностями. Различают 7 основных видов неопределенностей:

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [\infty-\infty], [\infty\cdot 0], [1^{\infty}], [\infty^{0}], [0^{0}].$$

Для раскрытия неопределенностей используются специальные правила:

Правило I. Чтобы раскрыть **неопределенность вида** $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, возникающую в пределах $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $Q_m(x) = b_0x^m + +b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ – многочлены степени n, m соответственно, необходимо и числитель, и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень, после сокращения неопределённость уйдёт.

Пример 1.6. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-8}{4x+2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2-6x+1}{2x^3-5x^2+8}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+1}{2x-5}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-4}{4n^3+1}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; **е)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{4\cdot 5^n+2^n}$;

ё) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$; **ж)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n^3+3n^2+1}}{\sqrt[4]{2n^2-4n+2}}$; **з)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$; **й)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+2n-1}{1+2+\cdots+n}$.

Решение.

а) Предел частного найти не удаётся, так как предел числителя и знаменателя при $x\to\infty$ равны бесконечности, получим неопределённость вида бесконечность разделить на бесконечность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для избавления от неопределенности вынесем за скобки в числителе и знаменателе дроби переменную в старшей степени, то есть x,после сокращения в скобках останутся константы и слагаемые, которые стремятся к нулю:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x-8}{4x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x(5-\frac{8}{x})}{x(4+\frac{2}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{8}{x}}{4+\frac{2}{x}}=\frac{5}{4};$$

б) Рассуждая, аналогично имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-6x+1}{2x^3-5x^2+8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{7}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2-\frac{5}{x}+\frac{8}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{5}{x}+\frac{8}{x^3}}=\frac{0}{2}=0;$$

в) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+1}{2x-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}=\frac{1}{0}=\infty;$$

г) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-4}{4n^3+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(4+\frac{1}{n^3}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{4+\frac{1}{n^3}}=\frac{0}{4}=0;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=$$

д)

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2};$$

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{4\cdot5^n+2^n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(4+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{4+\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{1}{4};$$

ё)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3-\frac{2}{x^4}\right)}{\sqrt{x^8\left(1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3-\frac{2}{x^4}\right)}{x^4\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}} = \frac{3}{1} = 3;$$

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n^3+3n^2+1}}{\sqrt[4]{2n^2-4n+2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n^3\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}}{\sqrt[4]{n^2\left(2-\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt[6]{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt[4]{2\left(1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\right)}} = \frac{\sqrt[6]{1}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2};$$

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}\right)} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^4-\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^4}{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^4+\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^4}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^4-\left(1-\frac{1}{n}\right)^4\right)}{n^4\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^4+\left(1-\frac{1}{n}\right)^4\right)}=\frac{0}{2}=0;$

й) В числителе и знаменателе наблюдается арифметическая прогрессия, как известно, её сумма вычисляется по формуле:

$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$,тогда

$$1+3+5+\dots+2n-1\Rightarrow S_n=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2;$$

$$1+2+3\ldots+n\Rightarrow S_n=\frac{(1+n)n}{2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\dots+2n-1}{1+2+\dots+n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{(1+n)n}{2}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=2.$$

Правило II. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, возникающую в пределах $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$-многочлены, необходимо числитель и знаменатель разложить на множители, после сокращения неопределённость уйдёт.

Замечание: для того, чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, в которой числитель или знаменатель, или числитель и знаменатель иррациональны, следует числитель и знаменатель умножить на выражение, сопряженное иррациональному.

Пример 1.7. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$;**б)** $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$;**в)** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{6x^2+5x-1}{5x^2+3x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-8}$;**д)** $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;**е)** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$;

ё) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+3x+4}{x^3+1}$.

Решение.

а) Подставляя предельное значение, получим неопределённость$\left[\frac{0}{0}\right]$,чтобы устранить её, необходимо разложить числитель и знаменатель на множители, и после сокращения неопределённость уйдёт:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)x}=$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x}=\frac{6}{3}=2;$$

б) Подставляя предельное значение, получим неопределённость$\left[\frac{0}{0}\right]$, раскладывая числитель и знаменатель на множители имеем:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}=$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x-2}{x-5}=-\frac{1}{2};$$

в) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{6x^2+5x-1}{5x^2+3x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to-1}\frac{6\left(x-\frac{1}{6}\right)(x+1)}{5\left(x-\frac{2}{5}\right)(x+1)}=$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{6x-1}{5x-2}=\frac{-7}{-7}=1;$$

г) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{1}{12}$;

д)$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to2}\frac{x(x^2+3x+2)}{(x+2)(x-3)}=$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x(x+1)}{x-3} = \frac{6}{-1} = -6;$$

е) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)} =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0;$$

ё) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+3x+4}{x^3+1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+1+3x+3}{(x+1)(x^2-x+1)} =$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)+3(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+4)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+4}{x^2-x+1} = \frac{6}{3} = 2.$$

Пример 1.8. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$;**б)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

в)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; **г)**$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$.

Решение.

а) Подставляя предельное значение, получим неопределённость$\left[\frac{0}{0}\right]$, содержащую иррациональность в числителе, поэтому для начала избавляемся от иррациональности- числитель и знаменатель умножить на выражение, сопряженное числителю, то есть на$\sqrt{x-2}+2$, приводим подобные и после сокращения неопределённость уйдёт:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 6}\frac{(\sqrt{x-2}-2)(\sqrt{x-2}+2)}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-2^2}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)} = \lim_{x\to 6}\frac{x-2-4}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)} = \lim_{x\to 6}\frac{1}{\sqrt{x-2}+2} = \frac{1}{4};$$

б) Рассуждая, аналогично имеем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+13-4(x+1)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{16};$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2+1-1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(x^2+16-16)(\sqrt{x^2+1}+1)} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{8}{2} = 4;$$

г) Для того, чтобы исключить иррациональность в числителе воспользуемся формулой

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,учитывая, что $x-1=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3=\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)$ умножим и разделим исходную дробь на $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3}.$$

Правило III. Чтобы раскрыть неопределенности вида$[\infty-\infty]$,$[\infty\cdot 0]$ необходимо при помощи алгебраических преобразований перейти к пределам типа$\left[\frac{0}{0}\right]$или$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$,а далее воспользоваться правилом избавления от полученного вида неопределённости.

Пример 1.9. Вычислить: **а)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x-1}\cdot x^2;$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$; **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right)$;

г)$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$;**д)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x-3}\right)$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x-1}\cdot x^2=[\infty\cdot 0]=5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=5\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=5\cdot\frac{1}{0}=5\cdot(+\infty)=+\infty;$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x^2+1)}{x^2+1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=-\frac{1}{\infty}=0;$$

в) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{2}{x-2}-\frac{8}{x^2-4}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to2}\frac{2(x+2)-8}{x^2-4}=$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2x+4-8}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{2x-4}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{2}{x+2}=\frac{1}{2};$$

г) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x+1-3}{(1-x)(x^2+x+1)}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(x^2+x+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=-1;$$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)=[\infty-\infty]=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1-x^2+x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{x}{x^2}\right)}};$$

Поскольку, $\sqrt{t^2} = |t| = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases}$ и

$$\sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{x}{x^2}\right)} =$$

$$= |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}} =$$

$$= |x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right),$$ получим предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)};$$

Рассмотрим два случая: 1) поведение функции при $x \to +\infty$;2) при $x \to -\infty$;

1) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{2}{2} = 1;$$

2) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = -\frac{2}{2} = -1;$$

Таким образом,

при $x \to +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right) = 1;$

при $x \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right) = -1.$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x-3}\right) = [\infty-\infty] =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x-3}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x-3}\right)}{x+\sqrt{x^2+5x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+5x-3}\right)^2}{x+\sqrt{x^2+5x-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2-5x+3}{x+\sqrt{x^2+5x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-5x+3}{x+\sqrt{x^2+5x-3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right];$$

Поскольку $\sqrt{x^2+5x-3} = |x|\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)$,

рассмотрим два случая 1) поведение функции при $x \to +\infty$;2) при $x \to -\infty$:

$$1) \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x+3}{x+|x|\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-5+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-5+\frac{3}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \frac{-5}{2} = -2{,}5;$$

$$2)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{-5x+3}{x+|x|\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(-5+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1-\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{-5+\frac{3}{x}}{1-\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}}=\frac{-5}{0}=-\infty;$$

Таким образом,

при $x\to +\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x-3}\right)=-2{,}5;$

при $x\to -\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x-3}\right)=-\infty.$

ГЛАВА 2. ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛЫ И ИХ СЛЕДСТВИЯ.

2.1. Первый замечательный предел и его следствия.

Замечательных пределов существует несколько, но самыми известными являются первый и второй замечательные пределы. Замечательность этих пределов состоит в том, что они имеют широкое применение и с их помощью можно найти другие пределы, встречающиеся в многочисленных задачах. Этим мы и будем заниматься на практике, а сейчас рассмотрим первый замечательный предел.

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad (2.1)$$

Предел вида (2.1) называется **первым замечательным пределом.**

Особенности первого замечательного предела:

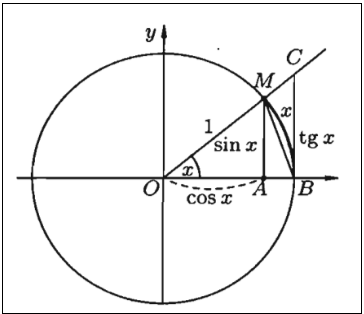


Рис.5

1) Так как $\sin x \to 0$ при $x \to 0$, то имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$;

2) В данном пределе рассматривается отношение синуса некоторого аргумента к этому аргументу (x – измеряется в радианах) при стремлении аргумента к нулю.

Рассмотрим, как выводится данная формула.

Возьмем круг радиуса 1, обозначим радианную меру $< MOB$ через x (см. рис. 5).

Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. На рисунке $\frac{|AM|}{|OM|} = \sin x$, то есть $\sin x = |AM|$, дуга $MB =< x$, $|BC| = \frac{\sin x}{\cos x} = tgx$,то есть $tgx = \frac{|AM|}{|OA|}$. Очевидно, что $S_{\Delta MOB} < S_{\text{сектора}MOB} < S_{\Delta COB}$.

Очевидно, что $S_{\Delta MOB} < S_{\text{сек.}MOB} < S_{\Delta COB}$. На основании соответствующих формул геометрии $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, $S_{\text{сектора}} = \frac{1}{2}R^2\alpha$, получаем:

$$S_{\Delta MOB} = \frac{1}{2}OM \cdot OB = \frac{1}{2}\sin x,$$

$$S_{\Delta COB} = \frac{1}{2}OB \cdot CB = \frac{1}{2}tgx,$$

$S_{\text{сек.}MOB} = \frac{1}{2}x$,следовательно, выполняется неравенство:

$$\frac{1}{2}sinx < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx \Big| \cdot \frac{2}{sinx},$$

$$1 < \frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx},$$

$$cosx < \frac{sinx}{x} < 1,$$

Переходя к пределу при $x \to 0$, учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0} cosx = 1, \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ по теореме (о пределе промежуточной функции) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1.$$

Следствия из первого замечательного предела.

Из первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$ несложно вывести следующие пределы:

$$\mathbf{1)}\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \mathbf{1};$$

$$\mathbf{2)}\ \lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \mathbf{1};$$

$$\mathbf{3)}\ \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \mathbf{1};$$

$$\mathbf{4)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1 - cosx}{\frac{x^2}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \mathbf{1}.$$

Опираясь на первый замечательный предел, докажем каждое из этих равенств:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{sinx}{cosx}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx} = 1;$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x} = \left|\begin{matrix} t = arcsinx \\ x = sint \\ \text{при} x \to 0, t \to 0 \end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{t}{sint} = 1;$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x} = \left|\begin{matrix} t = arctgx \\ x = tgt \\ \text{при} x \to 0, t \to 0 \end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{t}{tgt} = 1;$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1.$$

Пример 2.1. Вычислить предел: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin3x}{x}$;
б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{tg3x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin^2 3x}{5x^2}$;**г)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-cosx)x}{arctg5x}$.

Решение.

а) Подставляя предельное значение, получим неопределённость$\left[\frac{0}{0}\right]$,чтобы устранить её, учитывая, что в пределе находится тригонометрическая функция- $sin3x$, построим первый замечательный предел для этого числитель и знаменатель дроби умножим и разделим на 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=3\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{3x}=3;$$

б) Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{tg3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}\cdot\frac{tg5x}{5x}\cdot\frac{3x}{tg3x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{tg3x}=\frac{5}{3};$$

в) Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin^2 3x}{5x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{9}{5}\lim_{x\to 0}\frac{arcsin3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{arcsin3x}{3x}=\frac{9}{5};$$

г) Так как $1-cosx=2sin^2\frac{x}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1,$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{\frac{x^2}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-cosx)x}{arctg5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{5x}{arctg5x}\cdot$$
$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{\frac{x^2}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0.$$

Замечание: при расчете некоторых пределов $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,когда переменная в пределе не стремится к нулю, удобно переходить к новой переменной $t=x-x_0$.

Пример 2.2. Вычислить:

а)$\lim\limits_{x\to 2}\frac{sin(x-2)}{2x-4}$;**б)** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\frac{\pi x}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{arctg(x-2)}$; **г)**$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx.$

Решение.

а) Подставляем предельное значение, получаем неопределённость$\left[\frac{0}{0}\right]$,поскольку переменная, относительно которой вычисляется предел не стремится к нулю, для удобства сделаем подстановку $t=x-2\to 0$,предварительно преобразовав выражение под знаком предела, имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{sin(x-2)}{2x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x-2\to 0}\frac{sin(x-2)}{2(x-2)}=$$
$$=\left|\begin{matrix}t=x-2\\x=t+2\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{sint}{2t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{sint}{t}=\frac{1}{2};$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]$, поскольку мы имеем дело с неопределённость$[0\cdot\infty]$,то согласно правилу избавления от данного вида неопределённости, с помощью алгебраического преобразования перейдём к пределу вида$\left[\frac{0}{0}\right]$,далее сделав замену $t=x-1$, учитывая, что $ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$ получим:

$$\lim_{x\to1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{ctg\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=-\lim_{x-1\to0}\frac{x-1}{ctg\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}t=x-1\\x=t+1\end{matrix}\right|=$$

$$=-\lim_{t\to0}\frac{t}{ctg\frac{\pi(t+1)}{2}}=-\lim_{t\to0}\frac{t}{ctg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2}\right)}=$$

$$=-\lim_{t\to0}\frac{t}{-tg\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{tg\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi};$$

в) Сделаем подстановку $t=x-2\to0$, предварительно преобразовав выражение под знаком предела и учитывая, что $arctgt\sim t$,при $t\to0$ имеем:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{arctg(x-2)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{arctg(x-2)}=$$

$$=\left|\begin{matrix}t=x-2\\x=t+2\end{matrix}\right|=\lim_{t\to0}\frac{t((t+2)^2+2(t+2)+4)}{arctgt}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t((t+2)^2+2(t+2)+4)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to0}((t+2)^2+2(t+2)+4)=12;$$

г) Сделаем подстановку $t=x-\frac{\pi}{2}\to0$, предварительно преобразовав выражение под знаком предела и учитывая, что $tg\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-ctgt$ имеем:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx=[0\cdot\infty]=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot tgx=$$

$$=\left|\begin{matrix}t=x-\frac{\pi}{2}\to0\\x=t+\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=-\lim_{t\to0}t\cdot tg\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=-\lim_{t\to0}t\cdot(-ctgt)=\lim_{t\to0}t\cdot ctgt=$$

$$=[0\cdot\infty]=\lim_{t\to0}\frac{t}{tgt}=1.$$

2.2. Второй замечательный предел и его следствия.

Предел вида $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (2.2)

называется **вторым замечательным пределом.**

Особенности второго замечательного предела:

1) Так как $\frac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$, то имеем неопределенность вида $[1^\infty]$;

2) В показателе степени стоит бесконечно большая величина, второе слагаемое суммы в скобках – обратная ей величина – бесконечно малая;

3) $e = 2{,}71828\ldots$ – число Непера, основание натуральных логарифмов.

В силу громоздкости доказательства, примем эту формулу без доказательств.

Замечание: при $x\to 0$ формула второго замечательного предела принимает вид (2.3)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = e \ (2.3)$$

Пример 2.3. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$;**г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+8}\right)^{5x}$;

д)$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.

.

Решение.

а) Очевидно, что имеет место неопределённость

$[1^\infty]$, поэтому воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=[1^\infty]=e$ предварительно построив его- умножив и разделив показатель степени на 3 имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=[1^\infty]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=e^3;$$

б) Неопределённость вида $[1^\infty]$,при этом $x\to 0$.Построим второй замечательный предел, применяя формулу $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=[1^\infty]=e$:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+2x}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=[1^\infty]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2=e^2;$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=[1^\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(x-2)+3}{x-2}\right)^{2x-1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right]^{\frac{3(2x-1)}{x-2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2x-1)}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3\left(2-\frac{1}{x}\right)}{1-\frac{2}{x}}}=e^6;$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+8}\right)^{5x}=[1^\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(2x^2+8)-9}{2x^2+8}\right)^{5x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-9)}{2x^2+8}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{(-9)}{2x^2+8}\right)^{\frac{2x^2+8}{-9}}\right]^{\frac{-45x}{2x^2+8}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-45x}{2x^2+8}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-45x}{x^2\left(2+\frac{8}{x^2}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-45}{x\left(2+\frac{8}{x^2}\right)}}=$$
$$=e^0=1;$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 3x}}=[1^\infty]=$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+sin2x)^{\frac{1}{sin2x}}\right]^{\frac{sin2x}{sin3x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin2x}{sin3x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{sin3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}} = e^{\frac{2}{3}}.$$

Следствия из второго замечательного предела.

Разберём те формулы, которые можно получить, используя второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, а именно следующие пределы:

$$1)\ \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1;}$$
$$2)\ \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{1}{lna}; a>0; a\neq 1;}$$
$$3)\ \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1;}$$
$$4)\ \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = lna;}$$
$$5)\ \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x} = k; k\epsilon R.}$$

Докажем каждое из этих равенств:

1)Учитывая, что $lnx^p = plnx$ и $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot ln(1+x) =$$
$$= \lim_{x\to 0}ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = lne = 1;$$

2) Учитывая, что$log_a b = \frac{lnb}{lna}$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{lna\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{lna} = \frac{1}{lna};$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{matrix} t = e^x-1 \\ t+1 = e^x \\ ln(t+1) = lne^x \\ ln(t+1) = xlne \\ ln(t+1) = x \\ \text{при } x\to 0, t\to 0 \end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t}{ln(1+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{ln(1+t)}{t}} = 1;$$

4)Учитывая, что $a^{log_a b} = b$, то есть $e^{log_e a^x} = e^{lna^x} = a^x$, отсюда имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{lna^x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{xlna}-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{xlna}-1}{xlna}\cdot\lim_{x\to 0}lna = lna;$$

$$5)\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ln(1+x)^k}-1}{x} =$$

$$= k\lim_{x\to 0}\frac{e^{kln(1+x)}-1}{kln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = k.$$

Пример 2.4. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot ln(1+2x)$;**б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$.

Решение.

а) При подстановки предельного значения имеем дело с неопределённостью$[0\cdot\infty]$,с помощью алгебраических преобразований перейдём к пределу вида$\left[\frac{0}{0}\right]$ и учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$ получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot ln(1+2x) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+2x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+2x)}{2x} = 2;$$

б) Зная, что $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(e^x-1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = e^0\cdot 1 = 1;$$

в) Так как $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = lna$ получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)-(b^x-1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x} = lna - lnb = ln\frac{a}{b}.$$

2.3. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$,то есть $\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$ и $\lim_{x\to x_0}\beta(x) = 0$.

Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, то есть по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $\alpha(x) = x^5$ стремится к нулю быстрее, чем функция $\beta(x) = x$.

Запишем следующие определения:

1) Если $\boldsymbol{\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0}$, то функция $\boldsymbol{\alpha(x)}$ называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция $\beta(x)$.

Обозначение: $\boldsymbol{\alpha(x) = \bar{\bar{0}}(\beta(x))}$.

Например, если $\alpha(x) = x^5$,$\beta(x) = x$ бесконечно малые функции при $x \to 0$,то $\alpha(x) = x^5$ – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\beta(x)$,так как

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^5}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0$,то есть $\alpha(x)$ стремится к нулю быстрее, чем функция $\beta(x)$.

2) Если $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}} = \infty$, то **функция** $\boldsymbol{\alpha(x)}$ называется **бесконечно малой более низкого порядка**, чем функция $\beta(x)$.

Например, $\alpha(x) = tgx$,$\beta(x) = x^3$ **-**бесконечно малые функции при $x \to 0$,вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = 1\cdot\frac{1}{0} = \infty$,следовательно, $\alpha(x) = tgx$ бесконечно малая функция более низкого порядка, чем $\beta(x) = x^3$,то есть стремится к нулю медленнее, чем функция$\beta(x)$.

3) Если $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}} \neq \mathbf{0}$,то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми функциями одного порядка.**

Например, $\alpha(x) = x^3 - 2x$ и $\beta(x) = x^3 + 2x^2 + x$ **-**бесконечно малые функции при $x \to 0$,

вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3 - 2x}{x^3 + 2x^2 + x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x^3 - 2x}{x^3 + 2x^2 + x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3 - 2x}{x^3 + 2x^2 + x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x^2 - 2)}{x(x^2 + 2x + 1)} =$$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2}{x^2+2x+1} = -2 \neq 0$,следовательно, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми функциями одного порядка.

4)Если $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}} = \mathbf{1}$,то функции $\boldsymbol{\alpha(x)}$ и $\boldsymbol{\beta(x)}$ называются **эквивалентными бесконечно малыми функциями**.

Обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Например, $\alpha(x) = sinx,\beta(x) = x$ эквивалентные бесконечно малые функции, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1,$$

то есть $sinx \sim x$, при $x \to 0$.

Замечание: если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \nexists$,то $\alpha(x),\beta(x)$ называют несравнимыми бесконечно малыми функциями.

Пример 2.5. Сравнить порядок бесконечно малых функций:

а) $\alpha(x) = x^3,\beta(x) = x^2 - x, x \to 0$;

б)$\alpha(x) = sinx,\beta(x) = x^4, x \to 0$;

в) $\alpha(x) = sin^2x,\beta(x) = 2x^2, x \to 0$;

г) $\alpha(x) = tgx,\beta(x) = x, x \to 0$.

Решение.

а) Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-1} = \frac{0}{-1} = 0,$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$,следовательно, $\alpha(x) = x^3$ –бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\beta(x) = x^2 - x$,то есть стремится к нулю быстрее, чем функция$\beta(x)$;

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3} =$$

$$= 1\cdot\frac{1}{0} = \infty,$$ следовательно, $\alpha(x) = sinx$ –бесконечно малая функция более низкого порядка, чем $\beta(x) = x^4$,то есть стремится к нулю медленнее, чем функция$\beta(x)$;

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sin^2x}{2x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = \frac{1}{2} \neq 0,$$ следовательно,

$\alpha(x) = \ sin^2 x, \beta(x) = 2x^2$ –бесконечно малые функции одного порядка;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$,следовательно, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми функциями, то есть $tgx \sim x, x \to 0$.

Эквивалентные бесконечно малых функции.

Как мы заметили ранее, если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$,то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми функциями. Эквивалентные — значит равносильные

Приведём примеры эквивалентных бесконечно малых функций:

$sinx \sim x, x \to 0$, $tgx \sim x, x \to 0, arcsinx \sim x, x \to 0,$

$arctgx \sim x, x \to 0, 1 - cosx \sim \frac{x^2}{2}, x \to 0;$

Действительно, так как мы показывали ранее, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1, \lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1, \lim\limits_{x \to 0} \frac{arcsinx}{x} = 1,$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctgx}{x} = 1, \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{\frac{x^2}{2}} = 1$(см. первый замечательный предел и его следствия).

Теорема 2.1. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

Доказательство.

Пусть $\alpha \sim \alpha'$и $\beta \sim \beta'$ при $x \to x_0$.Тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta'} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\beta'}{\beta} \cdot$$

$$\cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$$,то

есть $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$.

Понятно, что $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha'}{\beta} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta'}$.

Теорема 2.2. Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них.

Доказательство.

Пусть $\alpha \sim \beta$ при $x \to x_0$.Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim_{x\to x_0} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 - \lim_{x\to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0,$$

аналогично, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha-\beta}{\beta} = 0.$

Заметим, что обратное утверждение так же верно.

Теорема 2.3. Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Доказательство.

Докажем теорему для двух функций.

Пусть $\alpha \to 0, \beta \to 0$ при $x \to x_0$, причем α - б.м.ф. высшего порядка, чем β, то есть

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} + 1 =$

$= 0 + 1 = 1.$

Следовательно, $\alpha + \beta \sim \beta$ при $x \to x_0$.

Слагаемое, эквивалентное сумме бесконечно малых, называется **главной частью этой суммы**. Замена суммы б.м.ф. ее главной частью называется отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка.

Пример 2.6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+4x^2}{sin4x}$.

Решение.

Учитывая, что $sin4x \sim 4x$,при $x \to 0$;

$x + 4x^2 \sim x$, при $x \to 0$,так как

x –б.м.ф. более низкого порядка, чем $4x^2$, действительно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{4x^2} = \frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$,
поэтому имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+4x^2}{sin4x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

2.5. Применение бесконечно малых функций к вычислению пределов.

Во многих задачах на вычисление пределов можно заменить некоторую бесконечно малую функцию, эквивалентной бесконечно малой функцией, так как предел их отношения при этом не изменится. Данное действие значительно упрощает решение задачи.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.Запишем основные эквивалентные бесконечно малые функции в таблицу, которой очень удобно пользоваться при нахождении пределов. Замена производится на основе таблицы.

$sin(\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$tg(\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$arctg(\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$arcsin(\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$1-cos(\alpha(x))$	$\sim$	$\frac{\alpha^2(x)}{2}$
$ln(1+\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$e^{\alpha(x)}-1$	$\sim$	$\alpha(x)$
$a^{\alpha(x)}-1$	$\sim$	$\alpha(x)lna$

$(1+\alpha(x))^k-1$	$\sim$	$k\alpha(x)$

Эквивалентность всех функций, указанных в таблице, доказывается, основываясь на равенстве $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Пример 2.7. Вычислить предел: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin7x}{x}$;
б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x}{arctg3x}$;**в)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{arcsin\frac{x}{5}}$;

Решение.

а)1 способ (строим первый замечательный предел)

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin7x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=7\lim_{x\to 0}\frac{sin7x}{7x}=7;$$

2 способ (используем таблицу эквивалентных бесконечно малых функций)

Учитывая, что $sin7x\sim 7x$, при $x\to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin7x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{x}=7.$$

б) 1 способ (воспользуемся следствием первого замечательного предела)

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg4x}{arctg3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{tg4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{arctg3x}=\frac{4}{3};$$

2 способ (используем таблицу эквивалентных бесконечно малых функций)

Учитывая, что $tg4x\sim 4x$, $arctg3x\sim 3x$при $x\to 0$ имеем:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x}{arctg3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}$.

в) <u>1 способ</u>

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=1$имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{arcsin\frac{x}{5}}=\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{3}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{5}}{arcsin\frac{x}{5}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3}\cdot\frac{5}{x}=\frac{5}{3};$$

<u>2 способ</u>

Учитывая, что $arcsin\frac{x}{5}\sim\frac{x}{5}, x\to 0$ $ln\left(1+\frac{x}{3}\right)\sim\frac{x}{3}$при $x\to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{arcsin\frac{x}{5}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3}}{\frac{x}{5}}=\frac{5}{3}.$$

2.6. Практическое вычисление пределов по теме: первый замечательный предел и его следствия.

Пример 2.8. Вычислить пределы от тригонометрических функций:

а)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 10x}$;**б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\frac{x}{2}}{x}$;**в)**$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$;**д)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$;

е)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos2x+tg^2x}{xsinx}$;**ё)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+sinx-cos2x}{sin^2x}$.

Решение.

а) Так как $sint\sim t$, при $t\to 0$,то

$sin10x\sim 10x, sin3x\sim 3x$, при $x\to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 10x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{10x}=\frac{3}{10};$$

б) Так как $tgt \sim t$, при $t \to 0$,то
$arctg\,\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$, при $x \to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,\frac{x}{2}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2};$$

в) Так как $1-cost \sim \frac{t^2}{2}$, при $t \to 0$,то
$1-\cos 3x \sim \frac{(3x)^2}{2}=\frac{9x^2}{2}$,
$1-\cos 5x \sim \frac{(5x)^2}{2}=\frac{25x^2}{2}$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{25x^2\cdot 2}{2\cdot 9x^2}=\frac{25}{9};$$

г) Так как $sint \sim t$, при $t \to 0$,то
$sin3x \sim 3x$, при $x \to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3-\sqrt{2x+9}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\left(3+\sqrt{2x+9}\right)}{\left(3-\sqrt{2x+9}\right)\left(3+\sqrt{2x+9}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x(3+\sqrt{2x+9})}{9-2x-9}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{3x(3+\sqrt{2x+9})}{2x}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\left(3+\sqrt{2x+9}\right)=-9;$$

д) Учитывая, что $cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,sin\frac{\alpha-\beta}{2}$,
$tg^2 2x \sim (2x)^2 = 4x^2$, при $x \to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-2sin\,\frac{4x}{2}\,sin\,\frac{2x}{2}}{4x^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{sin2xsinx}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=-1;$$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos2x+tg^2x}{xsinx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2sin^2x+tg^2x}{xsinx}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2x+\frac{sin^2x}{cos^2x}}{xsinx}=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x(2cos^2x+1)}{cos^2x\cdot xsinx}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2(2cos^2x+1)}{x^2cos^2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2cos^2x+1}{cos^2x} = 3;$$

ё) $\lim_{x\to 0}\frac{1+sinx-cos2x}{sin^2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{sin^2x+cos^2x+sinx-cos^2x+sin^2x}{sin^2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2sin^2x+sinx}{sin^2x} = \lim_{x\to 0}\left(2+\frac{1}{sinx}\right) = \infty.$$

Пример 2.9. Вычислить:

а) $\lim_{x\to 1}\frac{sin(x-1)}{x^2-3x+2}$; **б)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot ctg2x$;

в) $\lim_{x\to 1}\frac{sin\pi x}{sin3\pi x}$; **г)** $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{arcsin(x+1)}$;

д) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cosx-sinx}{x-\frac{\pi}{4}}$; **е)** $\lim_{\alpha\to\beta}\frac{sin^2\alpha-sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

Решение.

а) Подставляем предельное значение, получаем неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$,поскольку переменная относительно которой вычисляется предел, не стремится к нулю для удобства сделаем подстановку $t = x-1 \to 0$, предварительно преобразовав выражение под знаком предела имеем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{sin(x-1)}{x^2-3x+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x-1\to 0}\frac{sin(x-1)}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \left|\begin{matrix} t = x-1 \to 0 \\ x = t+1 \end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{sint}{t(t+1-2)} = \lim_{t\to 0}\frac{sint}{t(t-1)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{sint}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{t-1} = -1;$$

б) Так, как под знаком предела неопределённость $[0\cdot\infty]$,с помощью алгебраических преобразований перейдём к пределу вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и сделаем подстановку

$t = x - \frac{\pi}{2} \to 0$ учитывая, что $ctg(\pi + \alpha) = ctg\alpha$, и $tg2t \sim 2t$, при $t \to 0$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) ctg2x = [0 \cdot \infty] = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) ctg2x =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{tg2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \begin{vmatrix} t = x - \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + t \end{vmatrix} =$$

$$= -\lim_{t\to 0} \frac{t}{tg2\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} = -\lim_{t\to 0} \frac{t}{tg(\pi + 2t)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= -\lim_{t\to 0} \frac{t}{tg2t} == -\lim_{t\to 0} \frac{t}{2t} = -\frac{1}{2};$$

в) Преобразуем выражение под знаком предела и сделаем подстановку $t = x - 1$ и учитывая, что $sin(\pi + \alpha) = -sin\alpha;\ sin\pi t \sim \pi t, sin3\pi t \sim 3\pi t$, при $t \to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 1} \frac{sin\pi x}{sin3\pi x} = \lim_{x-1\to 0} \frac{sin\pi x}{sin3\pi x} = \begin{vmatrix} t = x - 1 \\ x = t + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{sin\pi(t+1)}{sin3\pi(t+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{sin(\pi t + \pi)}{sin(3\pi t + 3\pi)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-sin\pi t}{-sin3\pi t} = \lim_{t\to 0} \frac{sin\pi t}{sin3\pi t} = \lim_{t\to 0} \frac{\pi t}{3\pi t} = \frac{1}{3};$$

г) Преобразуем выражение под знаком предела и сделаем подстановку $t = x + 1$ и учитывая, что $arcsint \sim t, t \to 0$,и $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ имеем:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{arcsin(x+1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x+1\to 0} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{arcsin(x+1)} =$$

$$= \begin{vmatrix} t = x + 1 \to 0 \\ x = t - 1 \end{vmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{t((t-1)^2 - (t-1) + 1)}{arcsint} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t((t-1)^2 - (t-1) + 1)}{t} = \lim_{t\to 0}((t-1)^2 - (t-1) + 1) = 3;$$

д) Сделаем подстановку $t = x - \frac{\pi}{4}$ и учитывая, что

$$cos(\alpha+\beta)= cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta,$$
$sin(\alpha+\beta)= sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$, имеем:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cosx-sinx}{x-\frac{\pi}{4}}=\begin{vmatrix} t=x-\frac{\pi}{4} \\ x=t+\frac{\pi}{4}\end{vmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{costcos\frac{\pi}{4}-sintsin\frac{\pi}{4}-(sintcos\frac{\pi}{4}+costsin\frac{\pi}{4})}{t}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(cost-sint-sint-cost)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(-2sint)}{t}=$$
$$=-\sqrt{2}\lim_{t\to 0}\frac{sint}{t}=-\sqrt{2};$$

е) Преобразуем выражение под знаком предела и сделаем подстановку $t=\alpha-\beta$ и учитывая, что $sin\alpha-sin\beta=2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}$,
$sin\alpha+sin\beta=2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, а $sin\frac{t}{2}\sim\frac{t}{2}$, при $t\to 0$имеем:

$$\lim_{\alpha\to\beta}\frac{sin^2\alpha-sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\alpha-\beta\to 0}\frac{(sin\alpha-sin\beta)(sin\alpha+sin\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}=$$
$$=\lim_{\alpha-\beta\to 0}\frac{2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}=$$
$$=\begin{vmatrix} t=\alpha-\beta\to 0 \\ \alpha=t+\beta\end{vmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{2sin\frac{t}{2}cos\frac{t+2\beta}{2}\cdot 2sin\frac{t+2\beta}{2}cos\frac{t}{2}}{t\cdot(t+2\beta)}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{4\cdot\frac{t}{2}cos\frac{t+2\beta}{2}sin\frac{t+2\beta}{2}cos\frac{t}{2}}{t\cdot(t+2\beta)}=$$
$$=2\lim_{t\to 0}\frac{cos\frac{t+2\beta}{2}\cdot sin\frac{t+2\beta}{2}cos\frac{t}{2}}{t+2\beta}=$$
$$=\frac{2sin\beta cos\beta}{2\beta}=\frac{sin2\beta}{2\beta}.$$

2.7. Практическое вычисление пределов по теме: второй замечательный предел и его следствия.

Пример 2.10. Вычислить: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{ctg^2 x}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot ln\left(1-\frac{3}{x}\right) = [\infty\cdot 0]$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(x+4)-ln\,4}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2 3x}{ln^2(1+2x)}$; **ё)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(\cos x)}{ln(1+x^2)}$; **ж)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{sin^2\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)}{ln\left(\frac{n+10}{n}\right)}$.

Решение.

а) Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = e$ и $sin^2 x \sim x^2$, при $x\to 0$, имеем:

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{ctg^2 x} = [1^\infty] = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{cos^2 x}{sin^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{cos^2 x}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{cos^2 x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} cos^2 x} = e^0 = 1;$$

б) Учитывая, что $ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}$, при $x\to\infty$ имеем:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot ln\left(1-\frac{3}{x}\right) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty}\frac{ln\left(1+\left(-\frac{3}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} = -3;$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(x+4)-ln\,4}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\left(\frac{x+4}{4}\right)}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{ln\left(\frac{x}{4}+1\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{4}}{x} = \frac{1}{4};$$

г) Так как $e^x - 1 \sim x$,при $x \to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(e^x-1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\cdot x}{x} = \lim_{x\to 0} e^{2x} = 1;$$

д) Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = lna$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)-(b^x-1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x} = lna - lnb = ln\frac{a}{b};$$

е) Так как $ln^2(1+2x) \sim (2x)^2$,
$sin^2 3x \sim (3x)^2$ при $x \to 0$,имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 3x}{ln^2(1+2x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{4x^2} = \frac{9}{4};$$

ё) Так как $ln(1+(cosx-1)) \sim cosx - 1$,
$ln(1+x^2) \sim x^2$,при $x \to 0$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(cos\,x)}{ln(1+x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+(cosx-1))}{ln(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{cos\,x-1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2};$$

ж) Для начала избавимся от неопределённости $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ в аргументах синуса и логарифма, для этого вынесем старшие степени:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+10}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n}\right) = 1;$$

Таким образом,мы имеем дело с неопределённостью$\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)}{\ln\left(\frac{n+10}{n}\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)}{\ln\left(1+\frac{10}{n}\right)};$$

Так как

$\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)\sim\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^2$, при $n\to\infty$;

$\ln\left(1+\frac{10}{n}\right)\sim\frac{10}{n}$,при $n\to\infty$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)}{\ln\left(1+\frac{10}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^2}{\frac{10}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}}{\frac{10}{n}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot 10}=$$

$$=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{1}{10}.$$

Задания для самостоятельного решения.

1.Вычислить пределы:

1.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-x}$	**16.**	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^3-27}$
2.	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot 5^n-3^n}{2\cdot 5^n+2^n}$	**17.**	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$
3.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x-4}{2x-5}$	**18.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^4+n^3}-\sqrt[3]{n^4-n^3}\right)$

4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-x+1}{6x^5-5x-5}$	**19.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$
5.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x-1}{2^x+1}$	**20.**	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$
6.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{3x+5}$	**21.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$
7.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^3+x-4}{x^2-1}$	**22.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{x^2}{5x-3}\right)$
8.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^3-4x^2-5x+6}{x^3+x-2}$	**23.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$
9.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}{x^2-4}$	**24.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$
10.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+5}}{x^3-8}$	**25.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-3}-x\right)$
11.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-x^2}-3}{\sqrt{16-x^2}-4}$	**26.**	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$
12.	$\lim\limits_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{5-\sqrt{2x+7}}$	**27.**	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^3+x-4}{x^2-1}$
13.	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3-1}}$	**28.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x+1}+\sqrt{2x^3+1}}{5\cdot\sqrt[4]{x^6+x+2}-x}$
14.	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-10^n}{2+10^{n+1}}$	**29.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5\cdot 3^{2x}+1}{4-3^{2x}}$
15.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+6x-16}{x^2-4}$	**30.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

Ответы:1.1.1.**1.2.** $\frac{3}{2}$.**1.3.** ∞. **1.4.**0. **1.5.** при $x\to+\infty\Rightarrow 1$;

при $x \to -\infty \Rightarrow -1$. **1.6.** $\frac{1}{3}$. **1.7.**5. **1.8.** -1.**1.9.** $\frac{1}{8}$. **1.10.** $\frac{\sqrt{11}}{132}$.
1.11. $\frac{4}{3}$. **1.12.** $\frac{5}{6}$.**1.13.**2 . **1.14.**- $\frac{1}{10}$. **1.15.** $\frac{5}{2}$.
1.16. $\frac{1}{27}$. **1.17.**24. **1.18.** ∞.**1.19.**1. **1.20.** $\frac{1}{2}$**1.21.**1.
1.22. $-\frac{3}{25}$.**1.23.** 0. **1.24.**0.**1.25.**0.**1.26.** $\frac{1}{2}$.**1.27.**24.**1.28.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$.**1.29.** при $x \to +\infty \Rightarrow -5$; при $x \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{4}$.**1.30.** $\frac{1}{2}$.

2.Вычислить пределы от тригонометрических функций:

1.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2(3x)}{sin^2(2x)}$	**16.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x - sinx}{x^3}$
2.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}$	**17.**	$\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1-sin\frac{x}{2}}{\pi - x}$
3.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{sin\,(6\pi x)}{sin\,(\pi x)}$	**18.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,3x}{x^2}$
4.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{sin\,5x}$	**19.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2\frac{x}{2}}{1-cosx}$
5.	$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctgx$	**20.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos2x}{1-cos3x}$
6.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos5x - cos\,3x}{x^2}$	**21.**	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{sin\pi x}{sin5\pi x}$
7.	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{sin\,2x}{tg4x}$	**22.**	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{tg(x^2-9)}{x^3+2x^2-9x-18}$

8.	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$	**23.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+5x}{ctgx(1-\cos^2 4x)}$
9.	$\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}$	**24.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$
10.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{4x^2 tgx}$	**25.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin 3x}$
11.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,tg\,x-\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}$	**26.**	$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$
12.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x}{\sin x}$	**27.**	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}-2\cos x}{\cos 3x}$
13.	$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg5x$	**28.**	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$
14.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{1-\cos x}$	**29.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$
15.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{1-\cos 2x}$	**30.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^3+2x)}{2x-x^4}$

Ответы: 2.1.2,25.**2.2.** 0,5.**2.3.**-6.**2.4.** 0,4.**2.5.** 1. **2.6.** -8.**2.7.** – 0,5.**2.8.** $\frac{1}{2}$.**2.9.** $\frac{1}{2\pi}$.**2.10.** $\frac{1}{4}$.**2.11.**0.**2.12.**4 .**2.13.** $\frac{1}{5}$. **2.14.10** .**2.15.** ∞ .**2.16.** $\frac{1}{2}$. **2.17.**.0. **2.18.** $\frac{9}{2}$ . .**2.19.**$\frac{1}{2}$.**2.20.**$\frac{4}{9}$.**2.21.**$\frac{1}{5}$.**2.22.**$\frac{1}{5}$.**2.23.**$\frac{5}{16}$.**2.24.**4.**2.25.**$-\frac{5}{3}$.**2.26.**- $\frac{1}{2}$.**2.27.** $-\frac{1}{3}$. **2.28.** $\sqrt{2}$.**2.29.** $-\frac{1}{4}$.**2.30.**1.

3. Вычислить пределы:

1.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}$	**16.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{3x^2-2}\right)^{5x^2+1}$
2.	$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}$	**17.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n+1}$
3.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5-x}{6-x}\right)^{x+2}$	**18.**	$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 3x)^{ctg 2x}$
4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2}$	**19.**	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(3-x)}{x-2}$
5.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{x}$	**20.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1-x)}$
6.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n-1}$	**21.**	$\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$	**22.**	$\lim\limits_{x\to\infty}(4x+9)\ln\left(\frac{3x-5}{3x+2}\right)$
8.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x}\right)^{4x-1}$	**23.**	$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^3)^{\frac{1}{x^3}}$
9.	$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$	**24.**	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$
10.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-1}{4^x-1}$	**25.**	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$

11.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x}$	**26.**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(x+a)-ln\,a}{x}$
12.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+sin2x)^{\frac{1}{x}}$	**27.**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+x^2)}{tg^2 8x}$
13.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\ tgx)^{ctgx}$	**28.**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^{x}-1)}{1-cosx}$
14.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\,4x}{ln(1+3x)}$	**29.**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{ln(1-4x)}$
15.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{sin5x}-e^{sinx}}{ln(1+2x)}$	**30.**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin^2 5x}{xln(1+x)}$

Ответы: 3.1. e^5**.3.2.** e^5**.3.3.** e**.3.4.** e^4. **3.5.** e^{10}**3.6.** $\frac{1}{e^2}$**.3.7.** $\frac{1}{e^2}$**.3.8.** $\frac{1}{e^6}$. **3.9.** $\frac{1}{e}$ **.3.10.** $log_4 7$. **3.11.** 1**.3.12.** e^2 **.3.13** e. **3.14.** $\frac{4}{3}$**.3.15.**2 **.3.16.** e^5. **3.17.** e^2**.3.18.**$\frac{1}{e\sqrt{e}}$**.3.19.**-1**.3.20.**1**.3.21.**1**.3.22.**$-\frac{28}{3}$**.** **3.23.** e^{-2}**.3.24.**$\frac{1}{\sqrt{e}}$**.3.25.**$e^{\frac{3}{2}}$**.3.26.**$\frac{1}{a}$**.3.27.**$\frac{1}{64}$ **.3.28.**2. **3.29.** $-\frac{1}{2}$**. 3.30.**25.

ГЛАВА 3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ.

3.1. Односторонние пределы

Если $f(x)\to A_1$ при $x\to x_0$только при $x< x_0$ (рис.6), то $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_1$ называется пределом функции $f(x)$ в точке слева $x= x_0$;

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_1$

Если $f(x)\to A_2$ при $x\to x_0$только при $x> x_0$(рис.6), то $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_2$ называется пределом функции $f(x)$ в точке справа $x = x_0$;

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$

Таким образом, под односторонним пределом функции подразумевают «приближение» к предельной точке с одной стороны.

Пределы функции слева и справа называются также **односторонними пределами** функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

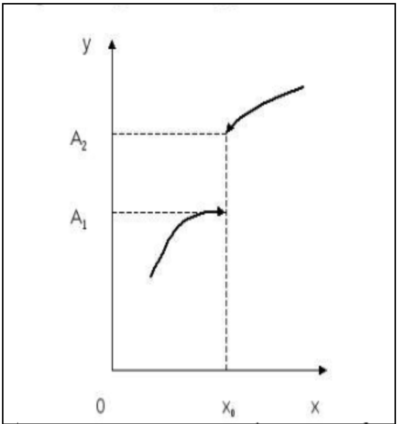


Рис.6

3.2. Непрерывность и точки разрыва функции.

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если она определена в некоторой двусторонней окрестности этой точки, включая и саму эту точку, и при этом

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) \quad (3.1)$$

Равенство (3.1) равносильно равенству (3.2)

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \quad (3.2)$$

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной на промежутке**, если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

Другими словами, когда мы слышим термин «непрерывная функция», мы представляют себе линию, которую можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги. Примером, может служить график обычной параболы.

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются **точками разрыва функции.**

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), то есть $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$.

При этом:

1)если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**, то есть функция имеет устранимый разрыв первого рода в точке x_0 , когда пределы справа и слева равны, но не равны значению функции в точке x_0. Например, парабола, но с выколотой точкой (см.рис.7).

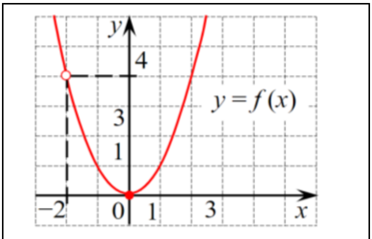


Рис.7.

2) если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то точка x_0 называется **точкой конечного разрыва,** то есть функция имеет неустранимый (конечный) разрыв I рода в точке x_0 , если пределы справа и слева не являются равными. Величину $|A_1 - A_2|$ называют

скачком функции в точке разрыва I рода.

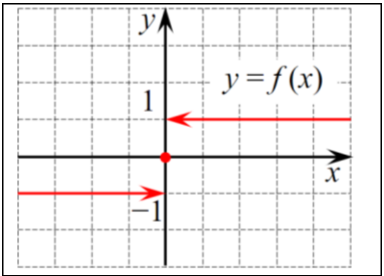


Рис.8

Например, функция может быть определена на всей числовой прямой — и всё равно иметь точку разрыва (см.рис.8), в точке $x_0 = 0$ происходит скачкообразное изменение, скачок функции равен 2.

Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности. Например, классическая гипербола $y = \dfrac{1}{x}$, которая не определена в точке $x_0 = 0$, а график «уходит» в бесконечность в окрестности этой точки (рис.9).

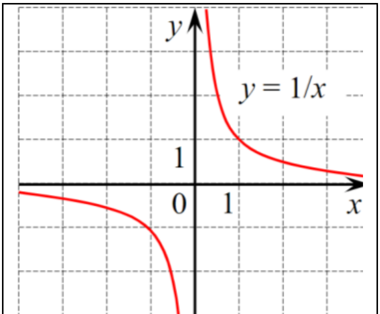


Рис.9

Таким образом, проблемы с непрерывностью возникают там, где функция «уходит» в бесконечность, либо меняется скачкообразно, либо вообще не определена.

Пример 3.1. Найти точки разрыва функций и исследовать их характер:

а) $f(x) = \begin{cases} x+4, & x \le -1 \\ x^2+2, & -1 < x < 1 \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$; **б)** $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-4}$;

в) $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение.

а) Для наглядности построим график заданной функции (см.рис.10):

По определению функции, непрерывной в точке:
$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$;
Функция непрерывна всюду, за исключением, возможно, точек $x = \pm 1$, в которых происходит смена значений функции.
Проверим на непрерывность точки $x = \pm 1$-точки предполагаемого разрыва.

1) $x = 1$;

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} (x^2 + 2) =$

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} 2x = 2$;

$f(1) = 2$;

$f(1-0) \neq f(1+0)$,следовательно,

$x = 1$ -точка разрыва I рода, точка скачка.

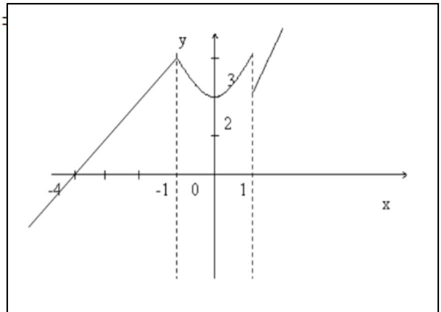


Рис.10

2) $x = -1$;

$\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1-0} (x + 4) = 3$;

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+0} (x^2 + 2) = 3$;

$f(-1) = 3$.

Таким образом,

$f(-1) = f(-1-0) = f(-1+0)$,следовательно,

функция непрерывна в точке $x = -1$.

б) Функция $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-4}$ не определена в точке $x = 4$.

Рассмотрим поведение функции в окрестности точки $x = 4$:

$$\lim_{x\to 4-0} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 4-0} \frac{(x-1)\cdot(x-4)}{x-4} =$$
$$= \lim_{x\to 4-0}(x-1) = 3, \text{то есть } f(4-0) = 3;$$
$$\lim_{x\to 4+0} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 4+0} \frac{(x-1)\cdot(x-4)}{x-4} =$$
$$= \lim_{x\to 4+0}(x-1) = 3, \text{то есть } f(4+0) = 3;$$

Таким образом, $f(4-0) = f(4+0) \neq f(4)$, следовательно, $x = 4$-точка разрыва I рода, точка устранимого разрыва.

в) Функция $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ не определена в точке $x = 1$.

Рассмотрим поведение функции в окрестности точки $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{1-0-1}} = e^{-\frac{1}{0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0;$$
$$\lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{1+0-1}} = e^{+\frac{1}{0}} = e^{+\infty} = +\infty;$$

Так как $f(1+0) = +\infty$, следовательно,

$x = 1$-точка разрыва II рода.

Пример 3.2. Найти, при каком значении A функция $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+x-1}{x+1}, & x \neq -1 \\ A, & x = -1 \end{cases}$ будет непрерывна?

Решение.

Функция непрерывна всюду, за исключением точки $x = -1$, в которой она не определена.

Рассмотрим поведение функции в окрестности точки $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{2x^2 + x - 1}{x + 1} = \left[\frac{0}{0}\right];$$

Поскольку, мы имеем дело с неопределённостью

$\left[\frac{0}{0}\right]$,то раскладываем числитель и знаменатель функции под знаком предела на множители:

$$2x^2 + x - 1 = 0, D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm 3}{4};$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -1;$$

$$2x^2 + x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x + 1) = (2x - 1) \cdot (x + 1);$$

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{2x^2 + x - 1}{x + 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -1-0} \frac{(2x - 1) \cdot (x + 1)}{x + 1} =$$

$= \lim\limits_{x \to -1-0} (2x - 1) = -3$,то есть $f(-1 - 0) = -3$;

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{2x^2 + x - 1}{x + 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -1+0} \frac{(2x - 1) \cdot (x + 1)}{x + 1} =$$

$= \lim\limits_{x \to -1+0} (2x - 1) = -3$, то есть $f(-1 - 0) = -3$;

Для того, чтобы функция была непрерывна необходимо, чтобы

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0);$$

$$f(-1 - 0) = f(-1 + 0) = f(-1) = A = -3.$$

Таким образом, при $A = -3$,функция непрерывна и имеет вид: $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+x-1}{x+1}, & x \neq -1 \\ -3, & x = -1 \end{cases}$.

Пример 3.3. Найти, при каком значении A, B функция $f(x) = \begin{cases} ln(x^2 + 1), & x \leq 0 \\ Asinx + B, 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -2, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$?

Решение.

Функция непрерывна при $x < 0$, $0 < x < \frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2}$.

Исследуем точки $x = 0$и $x = \frac{\pi}{2}$.

1) $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0-0} ln(x^2+1)=0;$

$\lim\limits_{x\to 0+0} (Asinx+B)=B;$

$f(0)=ln(0^2+1)=0,$ для того, чтобы исходная функции была непрерывности в точке $x=0$ должно выполняться равенство:

$f(0)=\ f(0-0)=\ f(0+0),$ следовательно, условие непрерывности функции в точке $x=0$ имеет вид: $\underline{B=0.}$

2) $x=\frac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (Asinx+B)=Asin\dfrac{\pi}{2}+B=A+B;$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} (-2)=-2;$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=Asin\dfrac{\pi}{2}+B=A+B;$

Для того, чтобы исходная функции была непрерывности в точке $x=0$ должно выполняться равенство:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\ f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)$,следовательно, условие непрерывности функции в точке $x=\frac{\pi}{2}$ имеет вид: $\underline{A+B=-2.}$

Получаем следующую систему: $\begin{cases}A+B=-2\\ \quad B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\ B=0\end{cases}.$

Таким образом, искомая функция имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}ln(x^2+1), & x\le 0\\ -2sinx, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2}.\\ \quad -2, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения.

4.Найти точки разрыва функций и исследовать их характер (1)-(10); найти, при каком выборе параметров функция $f(x)$ будет непрерывной

(10)-(15).

1.	$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$
2.	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2-2x, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$
3.	$f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$
4.	$f(x)=\dfrac{sinx}{x}$
5.	$f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$
6.	$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$
7.	$f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$
8.	$f(x)=3^{x+\frac{1}{x}}$
9.	$f(x)=3^{x-\frac{1}{x^2}}$
10.	$f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+x-2}$
11.	$f(x)=\begin{cases}cosx, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$
12.	$f(x)=\begin{cases}-2sinx, & x\le -\frac{\pi}{2}\\ Asinx+B, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ -2, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$

13.	$f(x)=\begin{cases} Ax, & x\epsilon[-1;2] \\ \frac{6}{x}, & x\epsilon(2;+\infty) \end{cases}$
14.	$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 1 \\ Ax^2-2, & x>1 \end{cases}$
15.	$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1}, & x\neq 1 \\ A, & x=1 \end{cases}$

Ответы:

4.1. $x=1$- точка разрыва II рода.**4.2.** $x=2$ - точка разрыва I рода, точка конечного разрыва.**4.3.** $x=0, x=1$- точки разрыва II рода . **4.4.** $x=0$-точка разрыва I рода, точка устранимого разрыва. **4.5.** $x=0$ -точка разрыва I рода, точка конечного разрыва. **4.6.** $x=0$ -точка разрыва I рода, точка конечного разрыва. **4.7.** $x=-1$- точка разрыва II рода. **4.8.** $x=0$- точка разрыва II рода.**4.9.** $x=0$-точка разрыва I рода, точка устранимого разрыва. **4.10.** $x=1$-точка разрыва I рода, точка устранимого разрыва; $x=-2$- точка разрыва II рода. **4.11.** $x=0$ -точка разрыва I рода, точка конечного разрыва. **4.12.** $A=-1, B=1$.**4.13.** $A=1{,}5$. **4.14.** $A=2$. **4.15.** $A=3$.

ГЛАВА 4. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ.

В дифференциальном исчислении изучаются понятия производной и дифференциала и способы их применения к исследованию функций. Развитие дифференциального исчисления тесно связано с развитием интегрального исчисления. Понятие производной широко используется при решении целого ряда задач физики, математики и других наук, в особенности при изучении скорости разных процессов.

4.1. Определение производной.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется конечный предел отношения приращения функции $\triangle y$ к приращению аргумента $\triangle x$, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю (см.рис.11), то есть

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \quad (4.1)$$

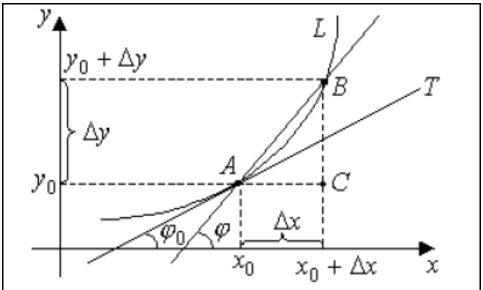


Рис.11

Обозначение: $f'(x)$

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной употребляются и другие обозначения, например, $y', y'_x, \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$.

Процесс нахождения производной будем называть **дифференцированием.**

Пример 4.1. Исходя из определения, найти производную функции $f(x) = x^2$.

Решение.

Функция $y = x^2$ определена и непрерывна в любой точке числовой прямой.

Придадим аргументу функции в точке x_0 приращение $\triangle x$. Тогда соответствующее приращение величины y имеет вид:

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = (x_0 + \triangle x)^2 - x_0^2 =$$

$$= x_0^2 + 2x_0 \triangle x + \triangle x^2 - x_0^2 = 2x_0 \triangle x + \triangle x^2,$$

то есть $\triangle y = 2x_0 \triangle x + \triangle x^2$,разделив обе части полученного равенства на$\triangle x$ и переходя к пределу при$\triangle x \to 0$,учитывая, что$f'(x_0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$ имеем:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{2x_0 \triangle x + \triangle x^2}{\triangle x} = 2x_0 + \triangle x,$$

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} (2x_0 + \triangle x) = 2x_0,$$

$$f'(x_0) = 2x_0.$$

Таким образом, $f'(x) = 2x$.

4.2. Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Если функция$y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , то есть если существует предел (1.1), то будем говорить, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Теорема 4.1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Доказательство

Пусть функция $y = f(x)$дифференцируема в некоторой точке x. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x)$.Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем:

$\frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x) + \alpha$,где $\alpha \to 0$ при $\triangle x \to 0$,
умножив обе части равенства на $\triangle x$ получим:

$$\triangle y = f'(x) \triangle x + \alpha \triangle x,$$

переходя к пределу в обеих частях равенства, при$\triangle x \to 0$, получаем:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle y = \lim_{\triangle x \to 0} f'(x) \triangle x + \lim_{\triangle x \to 0} \alpha \triangle x = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \triangle y = 0$. А это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x.

Замечание: обратная теорема неверна, то есть непрерывная функция может и не иметь производной в точке. Дифференцируемость сильнее свойства непрерывности. Рассмотрим эту ситуацию на примере 4.2.

Пример 4.2. Существует ли производная в точке$x_0 = 0$ для функции$y = |x|$,при $x \epsilon (-1; 1)$.

Решение.

Хорошо известно, что данная функция $y = |x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, \ \ x \geq 0 \end{cases}$ (см.рис.12) является непрерывной в точке $x_0 = 0, \lim\limits_{x \to 0} y = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$.

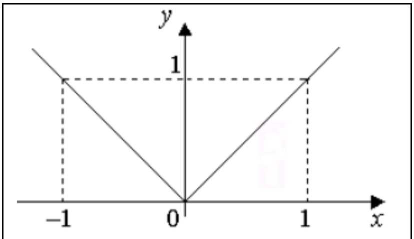


Рис.12

Вычислим левый и правый односторонний пределы данной функции при $x \to x_0, x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0-0} y = \lim_{x \to 0-0} (-x) = 0,$$

$$\lim_{x \to 0+0} y = \lim_{x \to 0+0} x = 0.$$

Так как

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0+0} y = \lim_{x \to 0-0} y = 0,$$

убеждаемся, что функция$y = |x|$ непрерывна в точке $x_0 = 0$.

Покажем, что в точке $x_0 = 0$ производная не существует:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(0 + \triangle x) - f(0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(\triangle x)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{|\triangle x|}{\triangle x} = \begin{cases} \dfrac{\triangle x}{\triangle x} = 1, & \triangle x > 0 \\ -\dfrac{\triangle x}{\triangle x} = -1, & \triangle x < 0 \end{cases};$$

Предел слева и справа различны, поэтому $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$ не существует, следовательно производная функции $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ не существует.

4.3. Основные правила дифференцирования.

Основные правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, тогда справедливы следующие утверждения:

1) Производная суммы(разности) двух функций равна сумме (разности) производных, то есть $(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \pm \boldsymbol{u}'$;

Замечание: правило справедливо для любого конечного числа слагаемых, то есть $(u_1 \pm u_2 \pm \ldots \pm u_n)' = u_1{}' \pm u_2{}' \pm \ldots \pm u_n{}'$

2) Производная произведения двух функций равна произведению первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, то есть

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{u};$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной, то есть $(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{u})' = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{u}'$.

Действительно, если $y = C \cdot u(x)$, где $C = const$, то учитывая, что $(C)' = 0$ и правило дифференцирования произведения функций имеем:

$$(C\cdot u)' = (C)'\cdot u(x) + C\cdot u'(x) = C\cdot u'(x);$$

3)Производная частного двух функций $\frac{u(x)}{v(x)}$, если $v(x) \neq 0$ равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат исходного знаменателя, то есть

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - v'\cdot u}{v^2}, v \neq 0;$$

Все эти правила вытекают из определения производной. Докажем, например, первое и второе утверждение.

Обозначим через $\triangle u, \triangle v$ приращение функции $u(x)$ и $v(x)$ при переходе от точки x к близкой точке $x + \triangle x$.

1) $(u+v)' = u' + v'$;

Если $y = u + v$,то значению x соответствует значение $y(x) = u(x) + v(x)$, а значению $x + \triangle x$ соответствует значение

$y(x+\triangle x) = u(x+\triangle x) + v(x+\triangle x)$, тогда

$$\triangle y = y(x+\triangle x) - y(x) = u(x+\triangle x) + v(x+\triangle x) -$$
$$-\big(u(x) + v(x)\big) = [u(x+\triangle x) - u(x)] +$$
$$+[v(x+\triangle x) - v(x)] = \triangle u + \triangle v.$$

Следовательно,

$$(u+v)' = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle u + \triangle v}{\triangle x} =$$
$$= \lim_{\triangle x\to 0}\left(\frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{\triangle v}{\triangle x}\right) = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle u}{\triangle x} + \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle v}{\triangle x} = u' + v'.$$

2)$(u\cdot v)' = u'\cdot v + v'\cdot u$;

$y(x) = u(x)\cdot v(x)$,

$y(x+\triangle x) = u(x+\triangle x)\cdot v(x+\triangle x)$,тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x)+\Delta u)\cdot(v(x)+\Delta v) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u\cdot\Delta v - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(v(x)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) =$$
$$= v(x)\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\Delta v\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} =$$
$$= u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x) + 0\cdot u'(x) = u'\cdot v + v'\cdot u.$$

Аналогично доказываются остальные утверждения.

4.4. Производная обратной функции.

Теорема 4.2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна (возрастает или убывает) на некотором множестве X. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x \in X$ отличную от нуля производную $f'(x) \neq 0$, то и обратная ей функция $x = x(y)$ имеет в соответствующей точке y производную $x'(y)$, причем:

$$\boldsymbol{y'_x = \frac{1}{x'_y}} \quad \textbf{(4.2)}$$

Доказательство

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна, то обратная ей функция $x = x(y)$ непрерывна и строго монотонна. Дадим переменной y приращение Δy. Соответствующее приращение Δx обратной функции также не равно нулю вследствие строгой монотонности и $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$.

В следствии чего, имеем:

$$x'(y) = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x)}, y'(x) \neq 0,$$

то есть $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$.

Данную формулу можно записать в вигде $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

Пример 4.3. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, показать, что: **а)**$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;**б)** $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Решение.

а) Разрешим данное равенство $y = arcsinx$ относительно x:

функция $x = siny$, где $y\epsilon\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$-является обратной функцией для функции $y = arcsinx$.

По теореме о производной обратной функции имеем:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(siny)'_y} = \frac{1}{cosy} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}};$$

Так как, $cosy > 0$,при $y\epsilon\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$,получим:

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

Таким образом,$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Аналогично доказывается, что$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

б) Разрешим данное равенство $y = arctgx$ относительно x:

функция $x = tgy$,где $y\epsilon\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$-является обратной функцией для функции $y = arctgx$.

По теореме о производной обратной функции имеем:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(tgy)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2y}} = cos^2y =$$

$$= \frac{1}{1+tg^2y} = \frac{1}{1+x^2};$$

Таким образом,$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Аналогично доказы- вается, что

$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Пример 4.4. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную y'_x для функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Решение.

Разрешим данное равенство относительно x:

$$y^3 = \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3;$$
$$y^3 = x - 1;$$
$$x = y^3 + 1;$$

По теореме о производной обратной функции имеем:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(y^3+1)'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2}.$$

4.5. Производные элементарных функций.

Запишем производные основных элементарных функций в таблицу.

Таблица основных элементарных функций

1.	$(C)' = 0$
2.	$(x^n)' = nx^{n-1}$
3.	$(a^x)' = a^x lna, a > 0$
4.	$(e^x)' = e^x$
5.	$(log_a x)' = \frac{1}{xlna}, a > 0,$ $a \neq 1, x > 0$
6.	$(lnx)' = \frac{1}{x}, x > 0$
7.	$(sinx)' = cosx$
8.	$(cosx)' = -sinx$
9.	$(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$

10.	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{sin^2u}$
11.	$(arcsinx)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12.	$(arccosx)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13.	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14.	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Используя определение производной, найдем производные некоторых элементарных функций из таблицы, например,1),6),7).

1)$(C)' = 0.$

Значениям аргументов x_0 и $x_0 + \triangle x$ соответствует одно и то же значение функции $y = C$.Поэтому

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \lim_{\triangle x \to 0} \frac{C - C}{\triangle x} = 0.$$

6) $(lnx)' = \frac{1}{x}$.

Покажем, что $(lnx)' = \frac{1}{x}$.Значениям аргументов x_0 и $x_0 + \triangle x$ соответствуют значение функции $y(x_0) = lnx_0$, $y(x_0 + \triangle x) = ln(x_0 + \triangle x)$, следовательно,

$$\triangle y = y(x_0 + \triangle x) - y(x_0) = ln(x_0 + \triangle x) - ln(x_0) =$$

$$= ln \frac{x_0 + \triangle x}{x_0} = ln\left(1 + \frac{\triangle x}{x_0}\right);$$

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{ln\left(1 + \frac{\triangle x}{x_0}\right)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{1}{\triangle x} ln\left(1 + \frac{\triangle x}{x_0}\right) =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} ln\left(1 + \frac{\triangle x}{x_0}\right)^{\frac{1}{\triangle x}} = ln \lim_{\triangle x \to 0} \left[\left(1 + \frac{\triangle x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\triangle x}}\right]^{\frac{1}{x_0}} =$$

$= lne^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} lne = \frac{1}{x_0}$, то есть$(lnx)' = \frac{1}{x}$.

7) $(sinx)' = cosx.$

Так как $y(x) = sinx$,то значениям аргументов x_0 и $x_0 + \triangle x$ соответствуют значение функций $y(x_0) = sinx_0$ и $y(x_0 + \triangle x) = sin(x_0 + \triangle x)$, соответственно, учитывая, что $sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ имеем:

$$\triangle y = y(x_0 + \triangle x) - y(x_0) = sin(x_0 + \triangle x) - sin(x_0) =$$
$$= 2sin\left(\frac{x_0 + \triangle x - x_0}{2}\right)cos\left(\frac{x_0 + \triangle x + x_0}{2}\right) =$$
$$= 2sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right);$$
$$y' = \lim_{\triangle x \to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0}\frac{2sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x} =$$
$$= \lim_{\triangle x \to 0}\frac{sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)}{\frac{\triangle x}{2}} \cdot \lim_{\triangle x \to 0} cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right) = cos(x_0),$$ то есть

$(sinx)' = cosx.$

Пример 4.5. Доказать, что $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2x}$ и $(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$.

Решение.

$$(ctgx)' = \left(\frac{cosx}{sinx}\right)' = \frac{(cosx)'sinx - (sinx)'cosx}{sin^2x} =$$
$$= \frac{-sinxsinx - cosxcosx}{sin^2x} = -\frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2x} = -\frac{1}{sin^2x};$$
$$(tgx)' = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{(sinx)'cosx - (cosx)'sinx}{cos^2x} =$$
$$= \frac{cosxcosx - (-sinx)sinx}{cos^2x} = \frac{sin^2x + cos^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}.$$

Пример 4.6. Доказать, что

$(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$.

Решение.

Переходя к новому основанию по формуле $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$ и учитывая, что $(lnx)' = \frac{1}{x}, x > 0$ имеем:

$$(log_a x)' = \left(\frac{log_e x}{log_e a}\right)' = \left(\frac{lnx}{lna}\right)' = \frac{1}{lna}(lnx)' = \frac{1}{xlna}.$$

Пример 4.7. Найти производную функции: **а)** $y = \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}$; **б)** $y = \frac{1+x+3x^2}{x}$; **в)** $y = x^4 \cdot lnx$; **г)** $y = \frac{5-x^2}{e^x}$; **д)** $y = sinx - \frac{x+1}{x-1}$.

Решение.

а) Функция представляет собой сумму функций, следовательно,

$$y' = \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}\right)' = (x^{-2})' + \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = -2x^{-3} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}};$$

б) Для упрощения решения преобразуем функцию:

$$y = \frac{1 + x + 3x^2}{x} = \frac{1}{x} + 1 + 3x;$$

Найдём производную:

$$y' = \left(\frac{1}{x} + 1 + 3x\right)' = (x^{-1})' + (1)' + 3(x)' = -x^{-2} + 3 = 3 - \frac{1}{x^2};$$

в) Функция представляет собой произведение двух элементарных функций, поэтому применяя формулу производной произведения имеем:

$$y' = (x^4 \cdot lnx)' = (x^4)' \cdot lnx + x^4 \cdot (lnx)' = 4x^3 \cdot lnx + x^4 \cdot \frac{1}{x} = x^3(4lnx + 1);$$

г) Функция представляет собой частное двух элементарных функций, поэтому:

$$y' = \left(\frac{5-x^2}{e^{\,x}}\right)' = \frac{(5-x^2)'\cdot e^{\,x} - (5-x^2)\cdot(e^{\,x})'}{(e^{\,x})^2} =$$

$$= \frac{-2x\cdot e^{\,x} - (5-x^2)\cdot e^{\,x}}{e^{\,2x}} = \frac{e^{\,x}(x^2-2x-5)}{e^{\,2x}} =$$

$$= \frac{x^2-2x-5}{e^{\,x}};$$

д) $y' = \left(sinx - \frac{x+1}{x-1}\right)' = (sinx)' - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' =$

$$= cosx - \frac{(x+1)'\cdot(x-1) - (x+1)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= cosx - \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = cosx + \frac{2}{(x-1)^2}.$$

4.6. Производная сложной функции.

Пусть функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u. Тогда сложная функция $y = f\big(\varphi(x)\big)$имеет конечную производную в точке x_0, которая равна

$$\boldsymbol{y'(x) = f'(u)\cdot\varphi'(x)} \quad \textbf{(4.3)}$$

Замечание: это правило может быть распространено на случай сложной функции, составленной из произвольного числа дифференцируемых функций.

Таблица производных сложных функций

Используя формулу (4.3), таблицу производных, полученную ранее, можно представить в более общем виде.

1.	$(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u'$
2.	$(a^u)' = a^u lna\cdot u', a > 0$

3.	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
4.	$(log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$
5.	$(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
6.	$(sinu)' = cosu \cdot u'$
7.	$(cosu)' = -sinu \cdot u'$
8.	$(tgu)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$
9.	$(ctgu)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot u'$
10.	$(arcsinu)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11.	$(arccosu)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12.	$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13.	$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Пример 4.8. Найти производную функции: **а)**$y = sin^3 x$;**б)**$y = sinx^3$;**в)**$y = 3^{\frac{4}{x^3}}$;**г)** $y = e^{-\sqrt{x}}$;

д) $y = ln\sqrt[4]{\frac{5-x}{5+x}}$.

Решение.

а) Функция $y = sin^3 x = (sinx)^3$ является сложной, воспользуемся формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$:

$$y' = (sin^3 x)' = ((sinx)^3)' = 3(sinx)^2 \cdot (sinx)' =$$
$$= 3sin^2 xcosx;$$

б) Функция сложная, воспользуемся формулой

$(sinu)' = cosu \cdot u'$:

$$y' = (sinx^3)' = \left(sin(x^3)\right)' = cosx^3 \cdot (x^3)' = 3x^2cosx^3;$$

в) Применяя правило нахождения производной сложной-показательной функции $(a^u)' = a^u lna \cdot u', a > 0$ имеем:

$$y' = \left(3^{\frac{4}{x^3}}\right)' = 3^{\frac{4}{x^3}} ln3 \cdot \left(\frac{4}{x^3}\right)' = 3^{\frac{4}{x^3}} ln3 \cdot 4(x^{-3})' =$$

$$= 3^{\frac{4}{x^3}} ln3 \cdot (-12)x^{-4} = -\frac{12ln3 \cdot 3^{\frac{4}{x^3}}}{x^4};$$

г) Воспользуемся формулой $(e^u)' = e^u \cdot u'$:

$$y' = \left(e^{-\sqrt{x}}\right)' = e^{-\sqrt{x}} \cdot \left(-\sqrt{x}\right)' = -e^{-\sqrt{x}} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= -e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}};$$

д) Для упрощения решения преобразуем функцию, используя свойства логарифмов $lna^\alpha = \alpha lna$ и $ln\frac{a}{b} = lna - lnb$:

$$y = ln\sqrt[4]{\frac{5-x}{5+x}} = ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(ln(5-x) - ln(5+x)\right);$$

Находим производную:

$$y' = \frac{1}{4}\left(\left(ln(5-x)\right)' - \left(ln(5+x)\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(5-x)'}{5-x} - \frac{(5+x)'}{5+x}\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{5-x} - \frac{1}{5+x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5-x} + \frac{1}{5+x}\right) = -\frac{10}{4(25-x^2)};$$

Пример 4.9. Найти производные первого порядка функций: **а)**$y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$;**б)**$z = \frac{1-3tg\,t}{arctg2t}$; **в)**$u = cos^3(3v+1)$;**г)** $y = arctg^2\frac{1}{x}$;**д)** $y = ctgln^4x$.

Решение.

а) $y' = \left(5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}\right)' = 5(x)' - 2(x^{-4})' +$

$+3\left(x^{\frac{6}{5}}\right)' = 5 + 8x^{-5} + \frac{18}{5}x^{\frac{1}{5}} = 5 + \frac{8}{x^5} + \frac{18\sqrt[5]{x}}{5};$

б)

$$z' = \frac{(1-3tg\ t)' \cdot arctg2t - (1-3tg\ t)\cdot(arctg2t)'}{(arctg2t)^2} =$$

$$= \frac{\frac{-3}{cos^2 t}\cdot arctg2t - (1-3tg\ t)\cdot\frac{2}{1+4t^2}}{arctg^2 2t} =$$

$$= \frac{-\frac{3\,arctg2t}{cos^2 t} - \frac{2-6tg\ t}{1+4t^2}}{arctg^2 2t} =$$

$$= -\frac{3}{cos^2 t arctg2t} - \frac{2-6tg\ t}{(1+4t^2)arctg^2 2t};$$

в) $u' = ((cos(3v+1))^3)' = 3cos^2(3v+1)\cdot$

$\cdot(cos(3v+1))' = -3cos^2(3v+1)\,sin(3v+1)\cdot$

$\cdot(3v+1)' = -9cos^2(3v+1)si\,n(3V+1).$

г) $y' = \left(arctg^2\frac{1}{x}\right)' = \left(\left(arctg\frac{1}{x}\right)^2\right)' =$

$$= 2arctg\frac{1}{x}\cdot\left(arctg\frac{1}{x}\right)' = 2arctg\frac{1}{x}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot(x^{-1})' = 2arctg\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2arctg\frac{1}{x}}{1+x^2};$$

д) $y' = (ctgln^4x)' = \left(ctg(ln^4x)\right)' =$

$$= -\frac{1}{sin^2 ln^4 x} \cdot ((lnx)^4)' = -\frac{1}{sin^2 ln^4 x} \cdot$$
$$\cdot 4ln^3 x \cdot (lnx)' = -\frac{4ln^3 x}{xsin^2 ln^4 x}.$$

4.7. Геометрический и физический смысл производной функции. Уравнение касательной и нормали к графику функции.

Геометрический смысл производной.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$,которая определена и непрерывна на некотором интервале, зафиксируем точку $A(x_0; f(x_0))$ (см.рис.11).

Зададим аргументу функции приращение $\triangle x$ в точке x_0, то есть $x_0 + \triangle x$,получим точку $B(x_0 + \triangle x; f(x_0 + \triangle x))$.

Приращение аргумента $\triangle x$ повлекло за собой приращение функции:

$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$, $\triangle y > 0$ (функция, возрастающая на данном промежутке). Через точки A , B проведём секущую AB,угол наклона секущей к оси Ox обозначим через φ:

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC и угол $\varphi =< BAC$,

$$tg\ \varphi = \frac{BC}{AC} = \frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

Если $\triangle x \to 0$ (медленно двигаемся к точке x_0, уменьшая приращение $\triangle x$,при этом$\triangle y \to 0$)точка B будет приближаться к точке A, в результате секущая AB будет стремится занять положение касательной AT , угол наклона φ секущей AB будет стремиться к углу наклона касательной φ_0,следовательно $\lim\limits_{\triangle x \to 0} tg\varphi = tg\varphi_0$.

Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} tg\varphi = tg\varphi_0 = k,$$

Итак, **производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0,** то есть

$\boldsymbol{f'(x_0) = tg\varphi_0 = k\ (4.4)}$

Равенство (4.4) отражает геометрический смысл производной.

Уравнение касательной и нормали к графику функции.

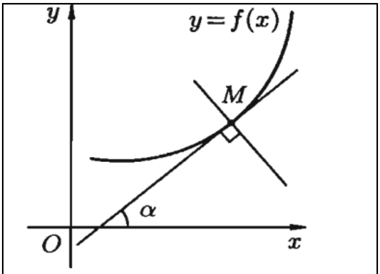


Рис.13

Напишем уравнение касательной:

Если точка касания M имеет координаты $M(x_0; y_0)$ (см. рис.13), то угловой коэффициент касательной равен $k = f'(x_0)$. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку $M(x_0; y_0)$ с угловым коэффициентом k($y - y_0 = k(x - x_0)$), можно записать уравнение касательной:

$\boldsymbol{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$**(4.5)**

Напишем уравнение нормали:

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется **нормалью.**

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент имеет вид:

$k_{\text{кас.}} \cdot k_{\text{норм.}} = -1;$

$$k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k_{\text{кас.}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Поэтому уравнение нормали имеет вид (4.6):

$\boldsymbol{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$**(4.6)**

Пример 4.10. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\sqrt{x}+2x$ в точке с абсциссой $x_0=4$.

Решение.

Чтобы справиться с поставленной задачей, найдём значение исходной функции и её производной в точке $x_0=4$:

$$y(4)=\sqrt{4}+2\cdot 4=10;$$

$$y'=\left(x^{\frac{1}{2}}+2x\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2;$$

$$y'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}+2=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4};$$

Уравнение касательной имеет вид: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$;

$$y=10+\frac{9}{4}(x-4)|\cdot 4;$$

$$4y=40+9x-36;$$

$$9x-4y+4=0.$$

Уравнение нормали имеет вид:

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0);$$

$$y=10-\frac{1}{\frac{9}{4}}(x-4);$$

$$y=10-\frac{4}{9}(x-4)|\cdot 9;$$

$$9y=90-4x+16;$$

$$4x+9y-106=0.$$

Физический смысл производной.

Рассмотрим задачу о скорости движения. Пусть точка движется вдоль прямой и известна зависимость $s=s(t)$ пройденного пути от времени t (рис. 14).

Средняя скорость движения на интервале времени$[t_0;\ t_0 + \Delta t]$, равна отношению пройденного за это время пути Δs к промежутку времени Δt:

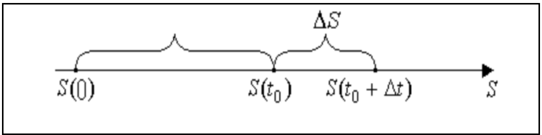


Рис. 14

$V_{cp.} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость характеризует движение. Мгновенной скоростью в момент времени t_0 называется предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$:

$$\boldsymbol{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)(4.7)}$$

Учитывая, что $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ равенство (4.7) можно записать в виде (4.8):

$$\boldsymbol{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}} \quad \boldsymbol{(4.8)}$$

Таким образом, скорость движения точки в момент времени t_0 – это предел отношения приращения пути Δs (функции) к приращению времениΔt (аргумента) при стремлении приращения времени Δt (аргумента) к нулю.

То есть, первая производная функции — это мгновенная скорость изменения любого процесса.

Замечание: выше было установлено, что если точка движется прямолинейно по закону $s = s(t)$, (где s – путь, t – время), то $s'(t_0)$ – скорость изменения пути в момент времени t_0. Следовательно, $s''(t) = (s'(t_0))' = (v(t_0))'$– скорость изменения скорости или ускорение точки в момент времени t_0.

Пример 4.11. Найти скорость движения точки в момент времени $t = 3$ при прямолинейном движении точки $S = (t^2 - 1)^2$.

Решение.

Исходя из физического смысла производной понимаем, что скорость движения точки в момент времени t равна производной от пути, то есть вычисляется по формуле:

$$V(t) = S'(t) = ((t^2 - 1)^2)' = 2(t^2 - 1)(t^2 - 1)' = $$
$$= 4t(t^2 - 1).$$

При $t = 3$ имеем:

$$V(3) = 4 \cdot 3(3^2 - 1) = 12 \cdot 8 = 96.$$

4.8. Логарифмическое дифференцирование.

В ряде случаев для нахождения производной необходимо заданную функцию сначала прологарифмировать, а затем продифференцировать-такую операцию называют **логарифмическим дифференцированием**. К числу функций, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием относятся степенно-показательные функции $y = u^v$,где $u = u(x), v = v(x)$,то есть функции основание и показатель степени которых зависят от x.Рассмотрим, как находить производную данной функции:

1)Логарифмируем обе части равенства $y = u^v$:

$$lny = lnu^v;$$
$$lny = vlnu.$$

2)Продифференцируем полученное равенство:

$$(lny)' = (vlnu)';$$
$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot lnu + \frac{v}{u} \cdot u';$$
$$y' = y\left(v'lnu + \frac{v}{u}u'\right),$$

учитывая, что $y = u^v$имеем:

$$y' = u^v\left(v'lnu + \frac{v}{u}u'\right).$$

Пример 4.12. Найти y' ,если:

а)$y=(sinx)^{tgx}$;**б)**$y=(x^3+2x^2)^{\frac{1}{x^2}}$;**в)** $y=\frac{\sqrt{x+1}(2x+1)^2}{x-1}$.

Решение

а) Основание и показатель степени функции $y=(sinx)^{tgx}$ зависят от x, поэтому применяем логарифмическое дифференцирование:

1)Прологарифмируем обе части равенства $y=(sinx)^{tgx}$:

$$lny=ln(sinx)^{tgx},$$

$$lny=tgxln(sinx);$$

2)Продифференцируем полученное равенство по x, учитывая, что $y=y(x)$, то есть lny – сложная функция:

$$\frac{y'}{y}=(tgx)'\cdot ln(sinx)+tgx\cdot\frac{1}{sinx}\cdot(sinx)',$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{cos^2x}\cdot ln(sinx)+tgx\cdot\frac{1}{sinx}\cdot cosx,$$

$$y'=y\left(\frac{ln(sinx)}{cos^2x}+\frac{sinx}{cosx}\cdot\frac{cosx}{sinx}\right),$$

$$y'=(sinx)^{tgx}\left(\frac{ln(sinx)}{cos^2x}+1\right),$$

$$y'=(sinx)^{tgx}\left(\frac{ln(sinx)}{cos^2x}+1\right);$$

б) $y=(x^3+2x^2)^{\frac{1}{x^2}}$-данная функция является степенно-показательной. Найдем ее производную.

Прологарифмируем обе части исходного равенства

$$lny=ln(x^3+2x^2)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$lny=\frac{1}{x^2}ln(x^3+2x^2);$$

Продифференцируем полученное равенство:

$$\frac{y'}{y}=(x^{-2})'ln(x^3+2x^2)+\frac{1}{x^2}\left(ln(x^3+2x^2)\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \left(-\frac{2}{x^3} ln(x^3+2x^2) + \frac{1}{x^2(x^3+2x^2)}(x^3+2x^2)'\right),$$

$$\frac{y'}{y} = \left(-\frac{2}{x^3} ln(x^3+2x^2) + \frac{3x^2+4x}{x^2(x^3+2x^2)}\right),$$

$$y' = y\left(-\frac{2}{x^3} ln(x^3+2x^2) + \frac{3x+4}{x(x^3+2x^2)}\right),$$

$$y' = (x^3+2x^2)^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3} ln(x^3+2x^2) + \frac{3x+4}{x^3(x+2)}\right);$$

Замечание: метод логарифмического дифференцирования полезно также применять в случаях, когда это приводит к упрощению вычислений, при нахождении производной функции.

в) Данную функцию (в силу громоздкости стандартного дифференцирования) удобно продифференцировать при помощи логарифмического - дифференцирования.

1) Логарифмируем исходное равенство:

$$lny = ln\frac{\sqrt{x+1}(2x+1)^2}{x-1};$$

Упростим правую часть полученного равенства, используя свойства логарифмов $ln\frac{a}{b} = lna - lnb, ln(ab) = lna - lnb, lna^\alpha = \alpha lna;$

$$ln\frac{\sqrt{x+1}(2x+1)^2}{x-1} = ln\left(\sqrt{x+1}(2x+1)^2\right) - ln(x-1) =$$

$$= ln(x+1)^{\frac{1}{2}} + ln(2x+1)^2 - ln(x-1) =$$

$= \frac{1}{2}ln(x+1) + 2ln(2x+1) - ln(x-1)$, то есть

$$lny = \frac{1}{2}ln(x+1) + 2ln(2x+1) - ln(x-1),$$

2) Продифференцируем полученное равенство по x:

$$(lny)' = \left(\frac{1}{2}ln(x+1) + 2ln(2x+1) - ln(x-1)\right)';$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{4}{2x+1} - \frac{1}{x-1};$$

$$y' = \frac{\sqrt{x+1}(2x+1)^2}{x-1}\cdot\left(\frac{1}{2(x+1)}+\frac{4}{2x+1}-\frac{1}{x-1}\right).$$

4.9. Дифференциал функции и его связь с производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0.Следовательно, существует$f'(x_0)$,

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, Δx – приращение аргумента; Δy – приращение функции в точке x_0, соответствующее приращению аргументаΔx:

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

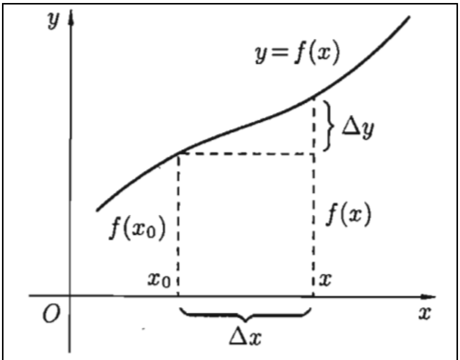


Рис.15

По теореме о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ –бесконечно малая функция при $x \to x_0$.Отсюда,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

$\alpha = \alpha(\Delta x) \to 0$ при$\Delta x \to 0$,следовательно,

$$\boldsymbol{\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\cdot\Delta x \quad (4.9)}$$

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x_0)\cdot\Delta x$ и $\alpha\cdot\Delta x$, являющихся бесконечно малыми при$\Delta x \to 0$. При этом первое слагаемое есть бесконечно малая функция одного порядка сΔx , так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0)\cdot\Delta x}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0$, а второе слагаемое $\alpha\cdot\Delta x$

есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\triangle x$,так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Поэтому первое слагаемое $f'(x_0) \cdot \triangle x$ называют **главной частью** приращения функции $\triangle y$.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента.

Обозначение: dy.

Таким образом, выражение для дифференциала имеет вид:

$$\boldsymbol{dy = f'(x) \cdot \triangle x} \quad \textbf{(4.10),}$$

где $dx = \triangle x$.

Поэтому формулу (4.10) можно записать в виде (4.11):

$$\boldsymbol{dy = f'(x)dx \ (4.11)}$$

Итак, задача вычисления дифференциала функции сводится к задаче вычисления производной этой функции.

Свойства дифференциалов.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x,то их дифференциалы обладают следующими свойствами:

1) $d(C) = 0, C = const$;

2) $d\big(Cf(x)\big) = Cd\big(f(x)\big)$;

3) $d\big(f(x) \pm g(x)\big) = d\big(f(x)\big) \pm d\big(g(x)\big)$;

4) $d\big(f(x) \cdot g(x)\big) = d\big(f(x)\big)g(x) + f(x)d\big(g(x)\big)$;

5) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{d(f(x))g(x) - f(x)d(g(x))}{g^2(x)}$.

Пример 4.13. Найти дифференциал dy функции: **а)** $y = x\sqrt{5-x}$;**б)** $y = 3^{ctg3x}$;**в)** $y = arctg\sqrt{x}$.

Решение.

а) Так как $dy = y'dx$ задача вычисления дифференциала функции сводится к вычислению y':

$$y' = \left(x\sqrt{5-x}\right)' = \left(\sqrt{5x^2-x^3}\right)' = \left((5x^2-x^3)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}(5x^2-x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (5x^2-x^3)' = \frac{10x-3x^2}{2\sqrt{5x^2-x^3}} =$$

$$= \frac{x(10-3x)}{2x\sqrt{5-x}} = \frac{10-3x}{2\sqrt{5-x}};$$

Таким образом, $dy = \frac{10-3x}{2\sqrt{5-x}}dx$.

б) $y' = (3^{ctg3x})' = 3^{ctg3x}ln3(ctg3x)' =$

$$= 3^{ctg3x}ln3 \cdot \left(-\frac{1}{sin^2(3x)}\right) \cdot (3x)' =$$

$= -\frac{3^{ctg3x+1}ln3}{sin^2(3x)}$, следовательно,

$$dy = -\frac{3^{ctg3x+1}ln3}{sin^2(3x)}dx.$$

в) $y' = \left(arctg\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{1+x} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' =$

$= \dfrac{1}{1+x} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$, следовательно,

$$dy = \frac{dx}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

Пример 4.14. Найти дифференциал функции $y = \sqrt{x^2+1}$. Вычислить dy при $x = 1, dx = 0{,}2$.

Решение.

$y' = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, тогда

$$dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Подставив $x = 1$ и $dx = 0{,}2$, получим:

$$dy|_{\substack{x=1 \\ dx=0{,}2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} \cdot 0{,}2 = \frac{1}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

4.10. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций.

Дифференцирование неявно заданных

функций.

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешённым относительно y,то мы имеем дело с функцией, заданной в явном виде (явной функцией).

Под неявным заданием функции $y = f(x)$ понимают задание функции уравнением

$$\boldsymbol{F(x; y) = 0 (4.12)},$$

то есть уравнением не разрешённым относительно y. Например, $y = x^3 + 1$-явно заданная функция,

$x^2 + y^2 = 4$-неявно заданная функция, где

$F(x; y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Замечание: всякую явно заданную функцию $y = f(x)$можно записать как неявную, с помощью уравнения $y - f(x) = 0$,но не всегда можно сделать обратное действие. Например, от явного задания функции $y = x^2$ можно перейти к неявному заданию функции $y - x^2 = 0$; Неявное уравнение $2^y - x + y = 0$ невозможно разрешить относительно y, то есть получить в явном виде.

Правило нахождения производной неявной функции.

Для нахождения производной неявной функции необходимо:

1)Продифференцировать уравнение $F(x; y) = 0$ по x,учитывая, что $y = y(x)$:

$$\left(F(x; y)\right)'_x = 0;$$

2) Выразить y' из полученного уравнения.

Пример 4.15. Найти y' для функций:

а) $x^3 + y^3 - 3xy = 7$;**б)** $e^{\frac{x}{y}} - yx + 1 = 0$;

в) $cos(x + y) - x + y = 0$.

Решение.

а) Функция задана неявно, уравнением $F(x; y) = x^3 + y^3 - 3xy - 7 = 0$, применяя правила нахождения производной неявной функции, имеем:

1)Дифференцируем обе части уравнения $F(x;y)$ по переменной x:

$$(x^3+y^3-3xy-7)'=0;$$

Учитывая, что $y=y(x)$, найдём производную y^3:

$$(y^3)'=\left(\left(y(x)\right)^3\right)'=3\left(y(x)\right)^2\cdot\left(y(x)\right)'=$$

$=3y^2(x)\cdot y'(x)=3y^2y'$,таким образом имеем:

$$3x^2+3y^2y'-3(x'y+xy')=0|:3;$$

$$x^2+y^2y'-y-xy'=0;$$

2) Разрешим полученное уравнение относительно y':

$$x^2+y^2y'-y-xy'=0;$$

$$y'(y^2-x)=y-x^2;$$

$$y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}.$$

б) Функция задана неявно, уравнением $F(x;y)=\ e^{\frac{x}{y}}-yx+1$.

1)Продифференцируем обе части уравнения $F(x;y)$ по переменной x:

$$\left(e^{\frac{x}{y}}-yx+1\right)'=0,$$

$$e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}\right)'-(y'x+x'y)=0,$$

$$e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{x'y-xy'}{y^2}-y'x-y=0,$$

$$e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}-y'x-y=0,$$

$$e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}y'\right)-y'x-y=0,$$

$$\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}-\frac{e^{\frac{x}{y}}x}{y^2}y'-y'x-y=0,$$

$$-y'\left(\frac{e^{\frac{x}{y}}x}{y^2}+x\right)=y-\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}|\cdot(-1),$$

$$y'\left(\frac{e^{\frac{x}{y}}x}{y^2}+x\right)=\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}-y,$$

$$y'=\frac{\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}-y}{\frac{e^{\frac{x}{y}}x}{y^2}+x},$$

$$y'=\frac{\frac{e^{\frac{x}{y}}-y^2}{y}}{\frac{e^{\frac{x}{y}}x+xy^2}{y^2}},$$

$$y'=\frac{\frac{e^{\frac{x}{y}}-y^2}{y}}{\frac{e^{\frac{x}{y}}x+xy^2}{y^2}},$$

$$y'=\frac{y\left(e^{\frac{x}{y}}-y^2\right)}{x\left(e^{\frac{x}{y}}+y^2\right)}$$

в) $(\,cos(x+y)-x+y)'=0,$
$-sin(x+y)(x+y)'-1+y'=0,$
$-(1+y')sin(x+y)-1+y'=0|\cdot(-1),$
$(1+y')sin(x+y)+1-y'=0,$
$sin(x+y)+y'sin(x+y)+1-y'=0,$
$y'(sin(x+y)-1)=-\big(1+sin(x+y)\big),$

$$y'=-\frac{1+sin(x+y)}{sin(x+y)-1},$$

$$y'=\frac{1+sin(x+y)}{1-sin(x+y)}.$$

Пример 4.16. Найти производную функции $\sqrt{x^2+y^2}=2y-x$ в точке $M_0(3;4)$.

Решение.

Для начала найдём y', поскольку исходная функция задана неявно, уравнением $F(x;y) = \sqrt{x^2+y^2} + x - 2y = 0$,воспользуемся правилом дифференцирования неявных функций:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)' = (2y-x)';$$
$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2)' = 2y' - 1;$$
$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x+2yy') \quad = 2y' - 1;$$
$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2y' - 1;$$
$$x + yy' = (2y'-1)\sqrt{x^2+y^2};$$
$$x + yy' = 2y'\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2+y^2};$$

$$yy' - 2y'\sqrt{x^2+y^2} = -\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right);$$
$$y'\left(y - 2\sqrt{x^2+y^2}\right) = -\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right);$$
$$y' = -\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y - 2\sqrt{x^2+y^2}};$$

Найдём значение производной функции в точке $M_0(3;4)$:

$$y'|_{M_0} = -\frac{3+\sqrt{3^2+4^2}}{4-2\sqrt{3^2+4^2}} = -\frac{3+5}{4-10} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Дифференцирование параметрически заданных функций.

Функция $y = f(x)$задана параметрически уравнениями $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$, $t \in R, t$ –вспомогательная переменная-параметр.

Например, для функции заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} y = t^2 - 5 \\ x = 1 - t \end{cases}$, найдём зависимость y от x. Из уравнения $x = 1 - t$, находим $t = 1 - x$, подставляем в уравнение $y = t^2 - 5$ получим $y = (1 - x)^2 - 5$.

Найдём производную функции заданной параметрически y'_x, считая , что функции $x = x(t), y = y(t)$ имеют производные и что $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi(x)$, как известно, производная обратной функции равна $t'_x = \frac{1}{x'_t}$.

Функция $y = f(x)$- сложная, так как $y = y(t), t = \varphi(x)$, поэтому $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}$,

то есть

$$\boldsymbol{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}} \quad \textbf{(4.13)}$$

Замечание: формула (4.13) позволяет находить y'_x от функции, заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

Пример 4.17. Найти производную для функций:

а) $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = ln^2 2t \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x = (t+1)^2 \\ y = \frac{t^3 + 2t^2}{t} \end{cases}$; **в)** $\begin{cases} x = cos^2 3t \\ y = sin^2 3t \end{cases}$.

Решение.

а) Функция задана параметрически, так как

$x = x(t), y = y(t)$, поэтому $y' = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$:

$$x'_t = \left(\frac{t+1}{t}\right)' = \left(1 + \frac{1}{t}\right)' = (t^{-1})' = -t^{-2} = -\frac{1}{t^2},$$

$$y'_t = ((ln2t)^2)' = 2ln2t(ln2t)' = 2ln2t\frac{1}{2t}(2t)' =$$

$= \frac{2ln2t}{t}$, следовательно,

$$y' = \frac{\frac{2ln2t}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -\frac{2ln2t \cdot t^2}{t} = -2tln2t;$$

б) Учитывая, что $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ имеем:

$x'_t = ((t+1)^2)' = 2(t+1)(t+1)' = 2(t+1),$

$y'_t = \left(\dfrac{t^3 + 2t^2}{t}\right)' = (t^2+2t)' = 2t + 2 = 2(t+1).$

Таким образом, $y' = \frac{2(t+1)}{2(t+1)} = 1;$

в) $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$:

$x'_t = (cos^2 3t)' = ((cos3t)^2)' = 2cos3t(cos3t)' =$
$= -2cos3tsin3t(3t)' = -3sin6t,$

$y'_t = (sin^2 3t)' = ((sin3t)^2)' = 2sin3t(sin3t)' =$
$= 2sin3tcos3t(3t)' = 3sin6t,$следовательно,

$$y'_x = \frac{3sin6t}{-3sin6t} = -1.$$

Задания для самостоятельного решения.

5.Вычислить производную функции:

1.	$y = 2x^2 - \frac{3}{x} + \sqrt[4]{x^3}$	**11.**	$y = ln(1+e^{10x}) + \sqrt{x^2+1}$
2.	$y = \dfrac{\left(\sqrt[5]{x} - \sqrt{x}\right)^3}{x}$	**12.**	$y = e^{-\sqrt{x^2+1}}$
3.	$y = x^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot sinx$	**13.**	$y = (sinx)^{x^2+1}$
4.	$y = ctg^3 lnx$	**14.**	$y = x^{x^2}$
5.	$y = tgln^3 x$	**15.**	$y = (2x)^{sin3x}$
6.	$y = xln^2 x$	**16.**	$y = x^{lnx}$
7.	$y = arctg^9(x^3+2x)$	**17.**	$y = x^{\sqrt{x}}$
8.	$y = ln(x^4+2x)$	**18.**	$y = ln\sqrt{\dfrac{1-sinx}{1+sinx}}$
9.	$y = 3^{\frac{4}{x^2}}$	**19.**	$y = (sinx - 2cosx)^3$

10.	$y = ln\left(\sqrt[4]{\dfrac{3x+1}{x^3+1}}\right)$	**20.**	$y = cos(x^3 - 3)$

Ответы:

5.1. $y' = 4x + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$. **5.2.** $y' = -\frac{2}{5x\sqrt[5]{x^2}} + \frac{3}{10x\sqrt[10]{x}} + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^4}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **5.3.** $y' = sinx + xcosx$. **5.4.** $y' = -\frac{3ctg^2 lnx}{xsin^2 lnx}$.
5.5. $y' = \frac{3\,ln^2 x}{xcos^2 ln^3 x}$. **5.6.** $y' = lnx(lnx + 2)$.
5.7. $y' = \frac{9(3x^2+2)arctg^8(x^3+2x)}{1+(x^3+2x)^2}$. **5.8.** $y' = \frac{4x^3+2}{x^4+2x}$.
5.9. $y' = -\frac{8}{x^3}3^{\frac{4}{x^2}}ln3$. **5.10.** $y' = \frac{3(1-x^2-2x^3)}{4(3x+1)(x^3+1)}$.
5.11. $y' = \frac{10e^{10x}}{1+e^{10x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. **5.12.** $y' = -\frac{xe^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$.
5.13. $y' = (sinx)^{x^2+1}(2xln(sinx) + (x^2+1)ctgx)$.
5.14. $y' = x^{x^2+1}(2lnx + 1)$.
5.15. $y' = (2x)^{sin3x}\left(3cos3xln2x + \frac{1}{x}sin3x\right)$.
5.16. $y' = 2x^{lnx-1}lnx$. **1.17.** $y' = \frac{(lnx+2)x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.
5.18. $y' = -\frac{1}{cosx}$. **5.19.** $y' = 3(sinx - 2cosx)^2(cosx + 2sinx)$.
5.20. $y' = -3x^2 sin\,(x^3 - 3)$.

6. Вычислить производную функции:

1.	$x^2 + y^2 - 4xy = 0$	**11.**	$arcsin\frac{x}{y} = ylnx$
2.	$arctg\frac{y}{x} - xy = 0$	**12.**	$\begin{cases} x = e^t sint \\ y = e^t cost \end{cases}$
3.	$e^{xy} + y - 3 = 0$	**13.**	$\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}$

4.	$x^2+y^2-2axy=0$	**14.**	$\begin{cases} x=\dfrac{1+t}{t^3} \\ y=\dfrac{1}{2t}+\dfrac{3}{2t^2} \end{cases}$
5.	$e^{x+y}+xy+5=0$	**15.**	$\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=t^2-2t^3 \end{cases}$
6.	$sin(xy)=-x^3y^2$	**16.**	$\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t} \\ y=\dfrac{t-1}{t} \end{cases}$
7.	$3x^2y^2-5x=3y-1$	**17.**	$\begin{cases} x=t-arctgt \\ y=\dfrac{t^3}{3}+1 \end{cases}$
8.	$xy=e^x siny$	**18.**	$\begin{cases} x=t-4 \\ y=t^2-16 \end{cases}$
9.	$sin(x^2-y)-y^2=0$	**19.**	$\begin{cases} x=3sint \\ y=2cost \end{cases}$
10.	$x^3+y^3=sin(x-2y)$	**20.**	$\begin{cases} x=cos^2t \\ y=sin^2t \end{cases}.$

Ответы:

6.1. $y'=\frac{2y-x}{y-2x}$. **6.2.** $y'=\dfrac{y(1+x^2+y^2)}{x(1-x^2-y^2)}$.

6.3. $y'=\frac{y^2-3y}{x(3-y)+1}$. **6.4.** $y'=\frac{ay-x}{y-ax}$.

6.5. $y'=-\frac{e^{x+y}+y}{e^{x+y}+x}$. **6.6.** $y'=-\frac{ycos(xy)+3x^2y^2}{xcos(xy)+2x^3y}$.

6.7. $y'=\frac{6xy^2-5}{3-6x^2y}$. **6.8.** $y'=\frac{e^x siny-y}{x-e^x cosy}$.

6.9. $y'=\frac{2xcos(x^2-y)}{cos(x^2-y)+2y}$. **6.10.** $y'=\frac{cos(x-2y)-3x^2}{3y^2+2cos(x-2y)}$.

6.11. $y'=\frac{y\left(x-y\sqrt{y^2-x^2}\right)}{x\left(ylnx\sqrt{y^2-x^2}+x\right)}$. **6.12.** $y'=\frac{cost-sint}{sint+cost}$.

6.13. $y' = ctg\frac{t}{2}$. **6.14.** $y' = \frac{t(t+6)}{2(2t+3)}$. **6.15.** $y' = \frac{t(1-3t)}{1+t}$.

6.16. $y' = -1$. **6.17.** $y' = t^2 + 1$. **6.18.** $y' = 2t$.

6.19. $y' = -\frac{2}{3}tgt$. **6.20.** $y' = -1$.

ГЛАВА 5. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

Производные высших порядков — это производные порядка выше первого. Чтобы найти производные высших порядков, необходимо выполнять дифференцирование несколько раз.

5.1. Производные и дифференциалы высших порядков явно заданной функции.

Функция $y = f(x)$,x-независимая переменная,
$y' = f'(x)$-производная первого порядка или $\frac{dy}{dx}$;
$dy = f'(x)dx$ –дифференциал первого порядка;
$y'' = (y')'$ –производная второго порядка или $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$;
$d^2y = f''(x)dx^2$ –дифференциал второго порядка.
Действительно,
$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d\big(f'(x)\big)dx =$
$= f''(x)dxdx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2$.
Аналогично рассуждая, получим:
$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$ - производная n –го порядка или $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{dx}$;
$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$ – дифференциал n –го порядка.

Пример 5.1. Для следующих функций найти производные и дифференциалы первого и второго порядка: **а)** $y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$;**б)** $y = (2x+5)^6$;

в) $y = arcsin\frac{1}{x}$;**г)**$y = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Решение.

а) Первую производную функции
$y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$ мы уже находили (см. пример 1.9)

$y' = 5 + \frac{8}{x^5} + \frac{18\sqrt[5]{x}}{5}$.

Подставляя $y' = f'(x) = 5 + \frac{8}{x^5} + \frac{18\sqrt[5]{x}}{5}$ в формулу для вычисления дифференциала $dy = f'(x)dx$ первого порядка, получим:

$dy = \left(5 + \frac{8}{x^5} + \frac{18\sqrt[5]{x}}{5}\right)dx$ – дифференциал первого порядка функции $y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$.

Найдём y'':

$y'' = \left(5 + \frac{8}{x^5} + \frac{18\sqrt[5]{x}}{5}\right)' = -\frac{40}{x^6} + \frac{18}{25\sqrt[5]{x^4}}$.

Подставляя $y'' = f''(x) = -\frac{40}{x^6} + \frac{18}{25\sqrt[5]{x^4}}$
в формулу $d^2y = f''(x)dx^2$ имеем:

$d^2y = \left(-\frac{40}{x^6} + \frac{18}{25\sqrt[5]{x^4}}\right)dx^2$- дифференциал второго порядка исходной функции.

б) Найдём y':

$y' = ((2x+5)^6)' = 6(2x+5)^5 \cdot (2x+5)' =$
$= 12(2x+5)^5$;

Подставляя $y' = f'(x) = 12(2x+5)^5$ в формулу для вычисления дифференциала $dy = f'(x)dx$ получим:
$dy = 12(2x+5)^5dx$ –дифференциал первого порядка функции $y = (2x+5)^6$.

Найдём y'':

$y'' = 12((2x+5)^5)' = 60(2x+5)^4 \cdot (2x+5)' =$
$= 120(2x+5)^4$.

Подставляя $y'' = f''(x) = 120(2x+5)^4$
в формулу $d^2y = f''(x)dx^2$ имеем:

$d^2y = 120(2x+5)^4dx^2$ - дифференциал второго порядка исходной функции.

в) Найдём y' и dy:

$$y' = \left(arcsin\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} \cdot (x^{-1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (-x^{-2}) =$$

$$= -\frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$ следовательно,

$dy = y'dx = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.

Для того, чтобы упростить вычисление второй производной преобразуем полученную производную первого порядка:

$$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}} = -(x^4-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$y'' = -\left((x^4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(x^4-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x^4-x^2)' =$$

$$= \frac{4x^3-2x}{2(x^4-x^2)\sqrt{x^4-x^2}} = \frac{2x(2x^2-1)}{2x^2(x^2-1)x\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}},$$ следовательно,

$$d^2y = y''dx^2 = \frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}\,dx^2.$$

г) $y' = \left(ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(\left(x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)\right)' =$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\left(x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\cdot\left(1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)'\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$
$$dy=y'dx=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}};$$
$$y''=\left((x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x^2+1)'=$$
$$=-\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}};$$
$$d^2y=y''dx^2=-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx^2.$$

Пример 5.2. Для следующих функций найти производные и дифференциалы n –го порядка $y^{(n)}$:
а) $y=\frac{x^3}{3}+2x^2+5$;**б)** $y=2^x+2^{-x}$;**в)**$y=\frac{1}{x+1}$.

Решение.

а) $y'=\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+5\right)'=x^2+4x;$
$y''=(x^2+4x)'=2x+4;$
$y'''=(2x+4)'=2;$
$y^{(4)}=y^{(5)}=\dots=y^{(n)}=0;$
Следовательно, $d^ny=y^{(n)}(x)dx^n=0dx^n$.
б)$y'=(2^x+2^{-x})'=2^x ln2-2^{-x}ln2=$
$=ln2(2^x-2^{-x});$
$y''=\left(ln2(2^x-2^{-x})\right)'=ln2(2^x-2^{-x})'=$
$=ln2(2^x ln2-2^{-x}ln2(-x)')=ln2(2^x ln2+2^{-x}ln2)=$
$=ln^2 2(2^x+2^{-x});$
$y'''=ln^2 2(2^x+2^{-x})'=ln^2 2(2^x ln2+2^{-x}ln2(-x)')=$
$=ln^2 2(2^x ln2-2^{-x}ln2)=ln^3 2(2^x-2^{-x}).$

Остановимся на вычислении трёх производных, так как уже можно выявить некоторую закономерность.

Таким образом,

$$y^{(n)} = ln^n 2(2^x + (-1)^n \cdot 2^{-x});$$

Следовательно,

$d^n y = y^{(n)}(x)dx^n = ln^n 2(2^x + (-1)^n \cdot 2^{-x})dx^n.$

Проверим правильность полученной формулы:

при $n = 1$, получим $dy = ln2(2^x - 2^{-x})dx$;

при $n = 2$,имеем $d^2 y = ln^2 2(2^x + 2^{-x})dx^2$ –верно! и так далее.

в) $y' = \left(\frac{1}{x+1}\right)' = ((x+1)^{-1})' = -(x+1)^{-2}(x+1)' =$

$= -(x+1)^{-2} = -\dfrac{1}{(x+1)^2};$

$y'' = -((x+1)^{-2})' = 2(x+1)^{-3}(x+1)' = \dfrac{2}{(x+1)^3};$

$y''' = 2((x+1)^{-3})' = -\dfrac{6}{(x+1)^4};$

Учитывая, что $1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, имеем:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} .$$

Следовательно, $d^n y = y^{(n)}(x)dx^n = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} dx^n.$

Правильность полученной формулы проверьте самостоятельно.

5.2. Производные высших порядков неявно заданной функции.

Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В неё войдут x, y и y'.Подставляя найденное значение y' в выражение второй производной, находим выражение y'' через x, y.

Аналогично, находится третья производная и так далее.

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно равенством $F(x; y) = 0$. Чтобы найти производную, продифференцируем обе части этого равенства:

$\left(F(x;y)\right)'_x = (0)'_x$, считая, что y есть функция от x, используя правило дифференцирования сложной функции. Затем из получившегося равенства выразим производную $y' = y'(x) = f(x;y)$.

Для того, чтобы найти производную второго порядка, продифференцируем равенство $y' = f(x;y)$,

считая, что y есть функция, зависящая от переменной x ,получим $y'' = g(x;y;y')$.

Подставляя найденную ранее производную первого порядка$y' = f(x;y)$,в полученное равенство окончательно имеем:

$y'' = g\left(x;y;f(x;y)\right).$

Аналогично, находится третья производная и так далее.

Пример 5.3. Найти первую и вторую производную функции: **а)**$x^2 + y^2 = 4y$;**б)** $ln(x + 2y) - y + 1 = 0$;

в) $arctgy = x + y$.

Решение

а) Функция задана неявно, уравнением $F(x;y) = x^2 + y^2 - 4y$.

Продифференцируем обе части уравнения $F(x;y) = 0$ по переменной x и найдём y':

$$(x^2 + y^2)' = (4y)',$$
$$2x + 2yy' - 4y' = 0| : 2,$$
$$x + yy' - 2y' = 0,$$
$$y'(y - 2) = -x,$$
$$y' = -\frac{x}{y-2},$$
$$y' = \frac{x}{2-y}.$$

Для нахождения второй производной продифференцируем полученное равенство по x:

$$y'' = \left(\frac{x}{2-y}\right)',$$

$$y'' = \frac{2 - y + xy'}{(2-y)^2},$$

исключая$y' = \frac{x}{2-y}$ из данного равенства,получим:

$$y'' = \frac{2 - y + \frac{x^2}{2-y}}{(2-y)^2} = \frac{(2-y)^2 - x^2}{(2-y)^3};$$

Таким образом, $y'' = \frac{(2-y)^2 - x^2}{(2-y)^3}$;

б) Продифференцируем обе части уравнения $F(x; y) = 0$ по переменной x:

$$(ln(x + 2y) - y + 1)' = 0,$$

$$\frac{1+2y'}{x+2y} - y' = 0,$$

$$\frac{1 + 2y'}{x + 2y} = y',$$

$$1 + 2y' = y'(x + 2y)\ ,$$

$$1 + 2y' = xy' + 2y'y,$$

$$y'(2 - x - 2y) = 1,$$

$$y' = \frac{1}{2 - x - 2y},$$

$$y'' = \left(\frac{1}{2 - x - 2y}\right)',$$

$$y'' = ((2 - x - 2y)^{-1})' = -\frac{(2 - x - 2y)'}{(2 - x - 2y)^2} =$$

$= -\frac{-1-2y'}{(2-x-2y)^2} = \frac{1+2y'}{(2-x-2y)^2}$,учитывая, что $y' = \frac{1}{2-x-2y}$ имеем:

$$y'' = \frac{1 + \frac{2}{2 - x - 2y}}{(2 - x - 2y)^2} = \frac{2 - x - 2y + 2}{(2 - x - 2y)^3} =$$

$$= \frac{4 - x - 2y}{(2 - x - 2y)^3}.$$

в) $arctgy = x + y,$
$(arctgy)' = (x + y)',$
$\frac{y'}{1 + y^2} = 1 + y',$
$y' = (1 + y')(1 + y^2),$
$y' = 1 + y^2 + y' + y'y^2,$
$y'y^2 = -(1 + y^2),$
$y' = -\frac{1+y^2}{y^2},$
$y' = -\left(\frac{1}{y^2} + 1\right),$
$y'' = -\left(\frac{1}{y^2} + 1\right)',$
$y'' = -(y^{-2})' = 2y^{-3} \cdot y' = \frac{2y'}{y^3},$

$$y'' = \frac{2y'}{y^3} = \frac{2\left(-\frac{1 + y^2}{y^2}\right)}{y^3} = -\frac{2(1 + y^2)}{y^5}.$$

5.3. Производные высших порядков параметрически заданных функций.

Пусть функция $y = f(x)$задана параметрически уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,нам известно, что $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Найдем её производную, то есть вторую производную от функции, заданной параметрически, применяя правила дифференцирования сложной и обратной функций имеем:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \frac{1}{x'_t}(y'_x)'_t = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Аналогично, находится третья производная и так далее, то есть

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \ldots,$$

$$y^{(n)}_x = \frac{(y^{(n-1)}_x)'_t}{x'_t}.$$

Пример 5.4. Найти первую, вторую и третью производную параметрически заданной функции:
$\begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = lnt \end{cases}.$

Решение.

Функция задана параметрически, поэтому y' находим по соответствующей формуле $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$:

$$x'_t = \left(\frac{1}{t}\right)' = (t^{-1})' = -t^{-2} = -\frac{1}{t^2},$$

$y'_t = (lnt)' = \frac{1}{t}$, следовательно, $y'_x = \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -t;$

Найдём вторую производную:

$$y'' = y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-t)'_t}{-\frac{1}{t^2}} = t^2;$$

Найдём третью производную:

$$y''' = y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = \frac{(t^2)'_t}{-\frac{1}{t^2}} = \frac{2t}{-\frac{1}{t^2}} = -2t^3.$$

Пример 5.5. Найти первую, вторую производную параметрически заданной функции:

а) $\begin{cases} x = 2t^2 + 2t + 8 \\ y = ln4t + 2t + 4 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x = acos^3t \\ y = asin^3t \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2} \\ y = arcsin(1 - t) \end{cases}.$

Решение.

а) Функция задана параметрически, y' вычислим по формуле $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$:

$x'_t = (2t^2 + 2t + 8)' = 4t + 2 = 2(2t + 1)$;

$y'_t = (ln4t + 2t + 4)' = \dfrac{1}{4t}(4t)' + 2 =$

$= \frac{1}{t} + 2 = \frac{2t+1}{t}$.

Таким образом,

$y' = y'_x = \frac{\frac{2t+1}{t}}{2(2t+1)} = \frac{1}{2t}$;

Найдём вторую производную $y'' = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$:

$(y'_x)'_t = \left(\dfrac{1}{2t}\right)' = \dfrac{1}{2}(t^{-1})' = -\dfrac{1}{2t^2}$;

$y'' = \dfrac{-\dfrac{1}{2t^2}}{2(2t+1)} = -\dfrac{1}{4t^2(2t+1)}$;

б) Вычислим y' :

$x'_t = (acos^3t)' = a((cost)^3)' = 3acos^2t(cost)' =$

$= -3acos^2tsint$;

$y'_t = (asin^3t)' = a((sint)^3)' = 3asin^2t(sint)' =$

$= 3asin^2tcost$.

Таким образом,

$y' = \frac{3asin^2tcost}{-3acos^2tsint} = -\frac{sint}{cost} = -tgt$;

Найдём вторую производную:

$y'' = y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \dfrac{(-tgt)'_t}{-3acos^2tsint} =$

$= \dfrac{\dfrac{1}{cos^2t}}{3acos^2tsint} = \dfrac{1}{3acos^4tsint}$;

в) Найдём y':

$$x'_t = \left(\sqrt{2t - t^2}\right)' = \left((2t - t^2)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$
$$= \frac{1}{2}(2t - t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2t - t^2)' = \frac{2 - 2t}{2\sqrt{2t - t^2}} =$$
$$= \frac{1 - t}{\sqrt{2t - t^2}};$$
$$y'_t = \left(arcsin(1 - t)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - t)^2}}(1 - t)' =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2t - t^2}}.$$

Таким образом,

$$y' = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2t - t^2}}}{\frac{1 - t}{\sqrt{2t - t^2}}} = -\frac{1}{1 - t} = \frac{1}{t - 1}.$$

Найдём вторую производную $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$, так как

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{1}{t - 1}\right)' = ((t - 1)^{-1})' =$$
$$= -(t - 1)^{-2} = -\frac{1}{(t - 1)^2},$$

имеем:

$$y'' = \frac{-\frac{1}{(t - 1)^2}}{\frac{1 - t}{\sqrt{2t - t^2}}} = -\frac{1}{(t - 1)^2} \cdot \frac{\sqrt{2t - t^2}}{1 - t} = \frac{\sqrt{2t - t^2}}{(t - 1)^3}.$$

Задания для самостоятельного решения.

7.(1)-(7) Найти первую и вторую производные и дифференциалы данных функций;(8) -(10) Найти производную n –го порядка;

(11) -(20) Найти первую и вторую производные данных функций:

1.	$y=(x^2+1)^3$	**11.**	$y^2=x$
2.	$y=sin^2x$	**12.**	$2x^2+3y^2-7=0$
3.	$y=e^{-x}cosx$	**13.**	$y=e^y+4x$
4.	$y=\dfrac{x^2}{x+1}$	**14.**	$\sqrt{x^2+y^2}=e^{arctg\frac{y}{x}}$
5.	$y=\sqrt[3]{x+3}$	**15.**	$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{t}} \\ y=\sqrt[3]{t} \end{cases}$
6.	$y=x(lnx-1)$	**16.**	$\begin{cases} x=t^3+3t^2+4 \\ y=sin^2t \end{cases}$
7.	$y=arctgx^2$	**17.**	$\begin{cases} x=\sqrt{t^3} \\ y=arctg\sqrt{t} \end{cases}$
8.	$y=ln(2x-1)$	**18.**	$\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=t^3 \end{cases}$
9.	$y=cos3x$	**19.**	$\begin{cases} x=t^2 \\ y=2cost \end{cases}$
10.	$y=a^{5x}$	**20.**	$\begin{cases} x=cos2t \\ y=t^2 \end{cases}$.

Ответы:

7.1. $y'=6x(x^2+1)^2$,$dy=6x(x^2+1)^2dx$;

$y''=6(5x^2+1)(x^2+1), d^2y=6(5x^2+1)(x^2+1)dx^2$.

7.2. $y'=sin2x$, $dy=sin2xdx$; $y''=2cos2x, d^2y=2cos2xdx^2$.

7.3.$y'=-e^{-x}(sinx+cosx)$,$dy=-e^{-x}(sinx+cosx)dx$;

$y''=2e^{-x}cosx, d^2y=2e^{-x}cosxdx^2$.**7.4.**$y'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$,

$dy=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}dx$; $y''=\frac{2}{(x+1)^3}$,$d^2y=\frac{2}{(x+1)^3}dx^2$.

7.5. $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}$, $dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}dx$; $y'' = -\frac{2}{9(x+3)\sqrt[3]{(x+3)^2}}$,

$d^2y = -\frac{2}{9(x+3)\sqrt[3]{(x+3)^2}}dx^2$. **7.6.** $y' = lnx$, $dy = lnxdx$;

$y'' = \frac{1}{x}$, $d^2y = \frac{1}{x}dx^2$. **7.7.** $y' = \frac{2x}{1+x^4}$, $dy = \frac{2x}{1+x^4}dx$

$y'' = \frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}$, $d^2y = \frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}dx^2$.

7.8. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!2^n}{(2x-1)^n}$. **7.9.** $y^{(n)} = 3^n cos\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right)$.

7.10. $y^{(n)} = a^{5x}ln^n a5^n$. **7.11.** $y' = \frac{1}{2y}$, $y'' = -\frac{1}{4y^3}$.

7.12. $y' = -\frac{2x}{3y}$, $y'' = -\frac{4x^2+6y^2}{9y^3}$. **7.13.** $y' = \frac{4}{1-e^y}$,

$y'' = \frac{16e^y}{(1-e^y)^3}$. **7.14.** $y' = \frac{x+y}{x-y}$, $y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

7.15. $y' = -\frac{2}{3}t^{\frac{5}{6}}$, $y'' = \frac{10}{9}t\sqrt[3]{t}$. **7.16.** $y' = \frac{sint}{3t^2+6t}$,

$y'' = \frac{6\left(cos2t(t^2+2t)-sin2t(t+1)\right)}{(3t^2+6t)^2}$. **7.17.** $y' = \frac{1}{3t(1+t)}$,

$y'' = -\frac{2(2t+1)}{9t^2\sqrt{t}(1+t)^2}$. **7.18.** $y' = -\frac{3t^2}{e^{-t}}$, $y'' = 3e^{2t}t(2+t)$.

7.19. $y' = -\frac{sint}{t}$, $y'' = \frac{sint-tcost}{2t^3}$.

7.20. $y' = -\frac{t}{sin2t}$, $y'' = \frac{sin2t-2tcos2t}{2sin^3 2t}$.

ГЛАВА 6. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ.

6.1. Теорема Ферма, Роля, Лагранжа и Коши.

Теорема Ферма.

Теорема 6.1. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке X и во внутренней точке x_0 этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Тогда если в точке x_0 существует производная этой функции, то она равна нулю, то есть $f'(x_0)=0$.

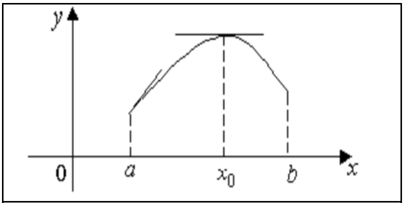


Рис.16

Теорема Ферма имеет следующий геометрический смысл (см. рис.16): если во внутренней точке промежутка функция принимает наибольшее (наименьшее) значение и в этой точке существует касательная, то эта касательная параллельна оси Ox. В теореме существенным является то, что x_0 – внутренняя точка. Действительно, если наибольшее (наименьшее) значение достигается функцией на границе промежутка, то производная в этой точке может быть не равна нулю. Обратите внимание на рис.3.1 наименьшее значение функции достигается в точке a . Однако касательная в этой точке не параллельна оси Ox, то есть$f'(a)\neq 0$.

Теорема Ролля.

Теорема 6.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и принимает на концах отрезка равные значения: $f(a)=f(b)$. Тогда найдется точка $c\epsilon(a;b)$, в которой $f'(c)=0$.

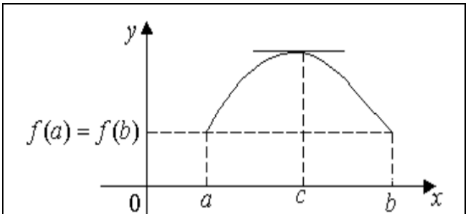


Рис.17

Теорема Ролля имеет следующий геометрический смысл (см.рис.17): на графике функции, удовлетворяющей условиям теоремы, найдется точка, в которой касательная параллельна оси Ox.

Теорема Лагранжа.

Теорема 6.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в интервале $(a;b)$. Тогда найдется точка $c\epsilon(a;b)$, в которой

$$\boldsymbol{f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} \quad (6.1)$$

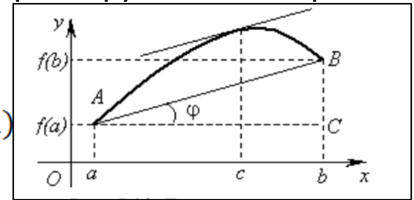


Рис.18

Теорема Лагранжа имеет следующий геометрический смысл (рис.18): на графике дифференцируемой функции найдется точка, в которой касательная параллельна хорде AB. Действительно, которой $f'(c)$ – угловой коэффициент касательной,

$k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{BC}{AC}$ – угловой коэффициент хорды AB. По теореме Лагранжа имеет место формула:

$\boldsymbol{f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)(6.2)}$, которая так же, как и формула (6.1), называется формулой Лагранжа, или формулой конечных приращений.

Теорема Коши.

Теорема 6.4. Пусть функция f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы в интервале $(a;b)$. Тогда найдется точка $c\epsilon(a;b)$, для которой

$$\boldsymbol{\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}} \quad \textbf{(6.3)}$$

Формула (6.3) называется формулой Коши.

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши при $g(x)=x$.

Чтобы пояснить геометрический смысл теоремы Коши, рассмотрим кривую, заданную параметрически: $x=g(t)$, $y=f(t)$, $t\epsilon(a;b)$. Тогда левая часть формулы (6.3) – угловой коэффициент касательной, проведенной в некоторой внутренней точке дуги, при $t=c$, а правая часть – угловой коэффициент хорды, соединяющей точки A ($f(a)$; $g(a)$) и B ($f(b)$; $g(b)$)).

6.2. Правило Лопиталя.

Правило Лопиталя применяется для раскрытия основных неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при вычислении пределов.

Теорема 6.5. (Теорема Лопиталя). Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0(\infty)$, причем, $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то и $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$,то есть

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (6.4)$$

Доказательство.

Рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

Доопределим функции f и g в точке x_0: $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тогда эти функции будут непрерывны в точке x_0 . Применяя теорему Коши, получим: $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, где c – промежуточная точка между x_0 и x .

Учитывая, что $f(x_0) = g(x_0) = 0$,то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)};$$

Пусть при $x \to x_0$ отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ стремится к некоторому пределу. Так как точка c лежит между точками x_0 и x , то при $x \to x_0$, очевидно, и $c \to x_0$,поэтому, и отношение $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ стремится к тому же пределу. Таким образом, равенство можно записать:

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Теорема доказана.

Эту теорему обычно называют правилом Лопиталя.

Замечание: если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и так далее пока неопределенность не уйдёт. Понятно, что правило Лопиталя можно применять повторно, если функции, полученные после дифференцирования, удовлетворяют тем же требованиям, что и исходные функции f и g.

Пример 6.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+x+2}{2x^3-3x^2+x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$;**г)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$;**д)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{ctg}2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{16x^2}-\cos x}{\sin x\cdot\operatorname{arctg}4x}$.

Решение.

а) Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Функции $f(x)=4x^3+x+2$,

$g(x)=2x^3-3x^2+x$ входящие в числитель и знаменатель дроби соответственно удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя: $f'(x)=12x^2+1$,

$g'(x)=6x^2-6x+1$.

Применяя правило Лопиталя, имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x+2}{2x^3-3x^2+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^3+x+2)'}{(2x^3-3x^2+x)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+1}{6x^2-6x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(12x^2+1)'}{(6x^2-6x+1)'}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{24x}{12x-6} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(24x)'}{(12x-6)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{24}{12} = 2.$$

б) Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Функции $f(x) = lnx$, $g(x) = x$ входящие в числитель и знаменатель дроби соответственно удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя: $f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = 1$.

Применяя правило Лопиталя имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(lnx)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0;$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\pi-2arctgx)'}{\left(e^{\frac{3}{x}}-1\right)'} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2}{1+x^2}}{-\frac{3e^{\frac{3}{x}}}{x^2}} = \frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)e^{\frac{3}{x}}} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{3}{x}}} = \frac{2}{3};$$

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sinx-xcosx}{sin^3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to0}\frac{(sinx-xcosx)'}{(sin^3x)'} =$

$$= \lim_{x\to0}\frac{cosx-cosx+xsinx}{3sin^2xcosx} = \lim_{x\to0}\frac{xsinx}{3sin^2xcosx} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{x}{2sinxcosx} = \frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{x}{sin2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{(x)'}{(sin2x)'} = \frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{1}{2cos2x} = \frac{1}{3};$$

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln(tgx)}{ctg2x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln(tgx)}{ctg2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(ln(tgx)\right)'}{(ctg2x)'} =$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2}{\sin^2 2x}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2\sin x}\cdot\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 x} =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2x}{2\sin x\cos x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2x}{\sin 2x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin 2x = 0;$$

е) Непосредственное использование правило Лопиталя привело бы к громоздким вычислениям, так как в знаменателе надо находить производную произведения. Значительно проще заменить бесконечно малые функции на эквивалентные (при $x \to 0$) $\sin x \sim x, arctg4x \sim 4x$ и уже затем применять правило Лопиталя, в результате получим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{16x^2} - \cos x}{\sin x \cdot arctg4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{16x^2} - \cos x\right)'}{(4x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{32xe^{16x^2} + \sin x}{8x} = \frac{1}{8}\left(32\lim_{x\to 0} e^{16x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{33}{8}.$$

Замечание:

1) В случае неопределённости вида $0 \cdot \infty$ или $\infty - \infty$ необходимо с помощью тождественных преобразований перейти к пределам вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и только потом применять правило Лопиталя;

2) В случае неопределённостей вида $1^{\infty}, \infty^0, 0^0$, следует учитывая, что $f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}}$,

перейти от предела вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ к пределу $\lim\limits_{x\to x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}}$, и найти предел логарифма $\ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$, то есть

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}.$$

Пример 6.2.а) $\lim\limits_{x\to +0} \sqrt[3]{x}\ln x;$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\pi - 2arctgx)$;**в)** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2} - ctg^2x\right)$;**д)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(sinx)^{tgx}$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{6}{1+2lnx}}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[3]{x}lnx = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{3}}lnx =$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{lnx}{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to+0}\frac{(lnx)'}{\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}} =$$

$$= -3\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^{-\frac{1}{3}}} = -3\lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x} = 0;$$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\pi - 2arctgx) = [\infty\cdot0] =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi - 2arctgx}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\pi - 2arctgx)'}{(x^{-1})'} =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{x^{-2}} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(1+x^2)'} =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x} = 2;$$

в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(e^x - 1 - x)'}{\left(x(e^x - 1)\right)'} = \lim_{x\to0}\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(e^x - 1)'}{(e^x - 1 + xe^x)'} = \lim_{x\to0}\frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{2};$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - ctgx\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{cosx}{sinx}\right) =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{sinx - xcosx}{xsinx} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(sinx - xcosx)'}{(xsinx)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{cosx - cosx + xsinx}{sinx + xcosx} = \lim_{x\to 0}\frac{xsinx}{sinx + xcosx} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(xsinx)'}{(sinx + xcosx)'} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx + xcosx}{cosx + cosx - xsinx} = \frac{0}{2} = 0;$$

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(sinx)^{tgx} = [1^\infty] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{ln(sinx)^{tgx}} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} ln(sinx)^{tgx}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx ln(sinx)},$$

найдём предел степени:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx ln(sinx) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln(sinx)}{\frac{1}{tgx}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln(sinx)}{ctgx} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(ln(sinx)\right)'}{(ctgx)'} =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{cosx}{sinx}}{\frac{1}{sin^2x}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{sinx}\cdot sin^2x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} cosxsinx = 0;$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(sinx)^{tgx} = e^0 = 1;$

е) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{6}{1+2lnx}} = [\infty^0] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{lnx^{\frac{6}{1+2lnx}}};$

Найдем предел степени:

$$\lim_{x\to+\infty} lnx^{\frac{6}{1+2lnx}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6lnx}{1+2lnx} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= 6\lim_{x\to+\infty}\frac{(lnx)'}{(1+2lnx)'} = 6\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}} = 6\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2} = 3;$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{6}{1+2\ln x}} = e^3$.

6.3. Формула Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a;b)$ и имеет в точке $x_0\epsilon(a;b)$ производные до порядка n включительно, тогда при $x\to x_0$ имеем:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \dots +$$

$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + 0((x-x_0)^n)$ или кратко

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k + 0((x-x_0)^n)\ (6.5)}$$

Формулу (6.5) называют **формулой Тейлора n - го порядка с остаточным членом в форме Пеано.**

Если в формуле (6.5) положить $x_0 = 0$,то получим **формулу Маклорена** (6.6):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \dots +$$

$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + 0(x^n)$ или кратко

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k + 0(x^n)\ (6.6)}$$

Приведем разложения в ряды Маклорена (степенные ряды) элементарных функций с указанием области сходимости соответствующих рядов.

$$\mathbf{1)}\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + 0(x^n), x \epsilon(-\infty; +\infty);$$

Действительно, для функции $f(x) = e^x$имеем:

$f(0) = e^0 = 1;$

$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x;$

$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1;$

Поэтому по формуле Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + 0(x^n)$$

имеем: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n);$

$$\mathbf{2)}\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+2}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + 0(x^{2n+2}), x \epsilon(-\infty; +\infty);$$

Действительно, для функции $f(x) = \sin x$:

$f(0) = \sin 0 = 0;$

$f'(x) = \cos x, f'(0) = \cos 0 = 1;$

$f''(x) = -\sin x, f''(0) = -\sin 0 = 0;$

$f'''(x) = -\cos x, f'''(0) = -\cos 0 = -1;$

Заметим, что при четных $k = 2n + 2$ производная$f^{(k)}(0) = 0$, а при нечетных $k = 2n + 1$,

$f^{(k)}(0) = (-1)^n$.

Следовательно, положив в формуле (3.6), получим:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+2});$$

Аналогично выводятся формулы, представленные ниже.

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + 0(x^{2n+1}), x \epsilon (-\infty; +\infty);$$

$$4) \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + 0(x^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k + 0(x^n), x \epsilon (-1; 1);$$

$$5) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + 0(x^n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + 0(x^n), x \epsilon (-1; 1];$$

$$6) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 +$$

$$+ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + 0(x^n) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} x^k + 0(x^n), x \epsilon (-1; 1);$$

$$7) \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} +$$

$$+ 0(x^{2n+2}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + 0(x^{2n+2}), x \epsilon [-1; 1].$$

Формула Тейлора и Маклорена имеют разнообразные приложения. Ограничимся применением их для раскрытия неопределённостей при вычислении пределов и приближённого расчёта значений функций.

Пример 6.3. Разложить функцию $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - x + 1$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$.

Решение.

Формула Тейлора имеет вид:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\cdots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+0((x-x_0)^n);$$

В нашем случае $x_0=-1$,для функции $f(x)=-3x^3+2x^2-x+1$имеем:

$f(-1)=-3(-1)^3+2(-1)^2-(-1)+1=7;$

$f'(x)=-9x^2+4x-1;\qquad f'(-1)=-14;$

$f''(x)=-18x+4;\qquad f''(-1)=22;$

$f'''(x)=-18;\qquad f'''(-1)=-18;$

$f^{(n)}(x)=0, n\geq 4$,подставляя полученные значения в формулу Тейлора

$$f(x)=f(-1)+\frac{f'(-1)}{1!}\cdot(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}\cdot(x+1)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}\cdot(x+1)^n+0((x+1)^n),$$ имеем:

$$-3x^3+2x^2-x+1=7+\frac{-14}{1!}\cdot(x+1)+\frac{22}{2!}\cdot(x+1)^2+$$
$$+\frac{-18}{3!}\cdot(x+1)^3;$$

Итак, разложение исходной функции в ряд Тейлора по степеням $x_0=-1$ имеет вид:

$$-3x^3+2x^2-x+1=7-14(x+1)+11(x+1)^2-3(x+1)^3.$$

Пример 6.4. Вычислить пределы, используя разложение в ряды Тейлора и Маклорена: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx-x}{x^3}$;**в)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^{3x}}{arctgx}$.

Решение.

а) Воспользуемся следующим разложением:

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+0(x^3)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+0(x^2)\right)=1;$$

б) Воспользуемся разложением:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+0(x^5)-x}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+0(x^5)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{x^3}{120}+0(x^2)\right)=-\frac{1}{6};$$

в) $\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots;$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$, следовательно,

$$e^{3x}=1+3x+\frac{(3x)^2}{2}+\cdots,$$

$$xe^{3x}=x+3x^2+\frac{9x^3}{2}+\cdots,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{3x}}{\operatorname{arctg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+3x^2+\frac{9x^3}{2}+0(x^3)}{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+0(x^5)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+3x+\frac{9x^2}{2}+0(x^2)\right)}{x\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+0(x^4)\right)}=1.$$

Пример 6.5. Найти число e с точностью до 0,001.

Решение.

Выпишем формулу Маклорена для функции $f(x)=e^x$,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

Положим $x=1$:

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^6}{6!} + \frac{1^7}{7!} + \cdots =$$
$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \cdots;$$

Для нахождения e с точностью 0,001 определим количество слагаемых из условия, что остаточный член меньше 0,001, поскольку $\frac{1}{5040} < 0{,}001$,то

$$e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2 + 0{,}5 + 0{,}1667 +$$
$$+0{,}0417 + 0{,}0083 + 0{,}0014 = 2{,}7181 \approx 2{,}718.$$

6.4. Исследование функций и построение графиков.

Монотонность функции. Признаки монотонности.

Напомним определения монотонных функций.

Функция $y = f(x)$называется **возрастающей (убывающей)** на отрезке $[a; b]$, если для любых x_1 , $x_2 \epsilon [a; b]$,удовлетворяющих условию$x_1 > x_2$,справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$.

Возрастающие, убывающие функции называются **монотонными.**

Замечание: в определении возрастающей и убывающей знаки неравенства между значениями функции могут быть нестрогими. При этом:

1)если при $x_1 > x_2$справедливо $f(x_1) \geq f(x_2)$,то функция $f(x)$называется неубывающей;

2) если при $x_1 > x_2$справедливо $f(x_1) \leq f(x_2)$,то функция $f(x)$называется невозрастающей.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$. В этом случае:

1)если $f'(x) > 0$ для всех значений $x \epsilon [a;b]$,то функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a;b]$;

2) если $f'(x) < 0$ для всех значений $x \epsilon [a;b]$,то функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a;b]$.

Замечание:

1)если $f'(x) \geq 0$ для всех значений $x \epsilon [a;b]$,то $f(x) -$ неубывающая функция на отрезке $[a;b]$;

2)если $f'(x) \leq 0$ для всех значений $x \epsilon [a;b]$,то $f(x) -$ невозрастающая функция на отрезке $[a;b]$.

Исследование функций с помощью первой производной. Экстремумы функции

Функция $f(x)$ имеет в точке максимум (минимум), если она определена в интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ и для всех $x \epsilon (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ выполнено неравенство $f(x) < f(x_0)\big(f(x) > f(x_0)\big)$.

Максимумы или минимумы функции называются **экстремумами** или экстремальными значениями.

Значения аргумента, при которых производная функции $f(x)$ обращается в нуль или не существует, называются **критическими точками**.

Теорема 6.6.(Необходимое условие экстремума) В точке экстремума производная $f'(x_0)$ равна нулю или не существует, то есть x_0 является критической точкой функции $f(x)$.

Теорема 6.7.(Достаточное условие экстремума) Пусть функция определена и непрерывна в некоторой окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, критической точки x_0 и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 –точка максимума, если меняет знак с минуса на плюс, то x_0 –точка минимума.

Алгоритм исследование функций с помощью первой производной.

Для того, чтобы найти интервалы монотонности и экстремумы функции, необходимо:

1)вычислить производную заданной функции;

2)найти критические функции (нули производной $f'(x) = 0$ -стационарные точки и точки, в которых производная не существует $f'(x)\nexists$);

3)нанести эти точки, а также точки разрыва функции на числовую ось;

4)определить знак производной на каждом из полученных интервалов;

5)по знаку производной определить характер монотонности функции, определить наличие экстремума и его характер в каждой критической точке, исключая точки разрыва функции.

Пример 6.6. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции: **а)**$y = 3x^5 - 5x^3$;

б) $y = \sqrt[3]{(x-1)(x-3)}$;**в)** $y = \frac{x^2+3}{x-1}$.

Решение

а) Область определения функции: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$.

Найдем критические точки:

$f'(x) = 0$,

$15x^2(x^2 - 1) = 0$,

$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$;

$f'(x)\nexists$ таких точек нет, так как $f'(x)$ существует на всей числовой оси.

Исследуем методом интервалов знак производной функции и заносим данные в таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$
	ф-я возр.	$(\cdot)$ка max	ф-я убыв.	$(\cdot)$ка min	ф-я возр.

Определяем промежутки монотонности и экстремумы функции:

$y'>0$,функция y возрастает$\nearrow$,при $x\epsilon(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$;

$y'<0$,функцияy убывает$\searrow$,при$x\epsilon(-1;1)$.

$x=-1$ –точка максимума,$y_{max}(-1)=2$,так как производная при переходе через эту точку меняет знак «+» на «-»;

$x=1$ –точка минимума,$y_{min}(1)=-2$,так как производная при переходе через эту точку меняет знак «-» на «+».

б) Область определения функции: $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

Преобразуем исходную функцию, для упрощения нахождения производной

$$f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x-3)}=\sqrt[3]{x^2-4x+3}=(x^2-4x+3)^{\frac{1}{3}};$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x^2-4x+3)^{-\frac{2}{3}}(x^2-4x+3)'=$$

$$=\frac{2x-4}{3\sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}}=\frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-3)^2}};$$

$f'(x)=0$, при $2(x-2)=0$,то есть$x_1=2$;

$f'(x)\nexists$, при $x_2=1, x_3=3$.

Исследуем методом интервалов знак производной функции и заносим данные в таблицу:

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	$-$	не сущ.	$-$	0	$+$	не сущ.	$+$
y	↘	2	↘	-1	↗	0	↗
	ф-я убыв.	0	ф-я убыв.	$(\cdot)$ка min	ф-я возр.	0	ф-я возр.

Определяем промежутки монотонности и экстремумы функции:

$y' > 0$,функцияy возрастает↗,при$x\epsilon(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$;

$y' < 0$,функция y убывает↘,при$x\epsilon(-\infty;2)$.

$x=2$ –точка минимума,$y_{min}(2)=-1$,так как производная при переходе через эту точку меняет знак «-» на «+».

в) $f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$;

$f'(x)=0, \qquad (x+1)(x-3)=0,$

$x_1=-1, x_2=3,$

$f'(x)\nexists$ при $x_3=1.$

Методом интервалов исследуем знак производной и данные заносим в таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	не сущ.	$-$	0	$+$
y	↗	-2	↘	не сущ.	↘	6	↗
	ф-я возр.	$(\cdot)$ка max	ф-я убыв.	не сущ.	ф-я убыв.	точка min	ф-я возр.

Таким образом, $y' > 0$,функцияy возрастает↗,при$x\epsilon(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$;

$y' < 0$,функцияy убывает↘,при $x\epsilon(-1;1)\cup(1;3)$.

$x=-1$ –точка максимума,$y_{max}(-1)=-2$;

$x=3$ –точка минимума,$y_{min}(3)=6$.

Исследование функций с помощью второй производной. Выпуклость, вогнутость функции. Точки перегиба.

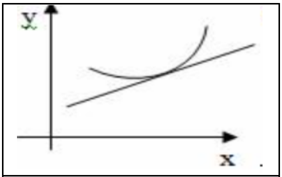


Рис.19

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вниз(вогнутой)** на интервале $(a;b)$,если её график лежит выше касательной к ней, проведённой в любой точке с абсциссой $x\epsilon(a;b)$(см.рис.19)

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вверх(выпуклой)** на интервале$(a;b)$,если её график лежит ниже касательной к ней, проведённой в любой точке с абсциссой $x\epsilon(a;b)$(см.рис.20)

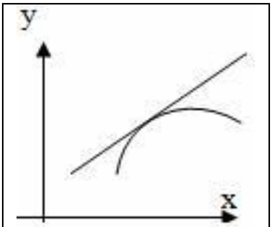


Рис.20

Теорема 6.8. (Достаточные условия вогнутости и выпуклости).

Если функция $f(x)$дважды непрерывно дифференцируема на $(a;b)$ и $f''(x_0) > 0$для всех $x\epsilon(a;b)$, то график функции на этом интервале вогнутый.

Если$f''(x_0) < 0$для всех $x\epsilon(a;b)$, то график на этом интервале выпуклый.

Утверждение теоремы сохраняется, если вторая производная обращается в ноль $f''(x) = 0$ или $f''(x)\nexists$ не существует.

Точки, в которых меняется направление выпуклости графика функции, называются **точками перегиба.** (см.рис.21)

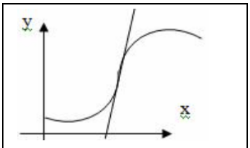


Рис.21

Теорема 6.9. (Достаточное условие перегиба). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой двусторонней окрестности точки x_0, включая и саму эту точку, и дважды непрерывно дифференцируема во всех точках этой окрестности, за исключением, быть может, самой точки x_0. Если $f''(x_0)$ меняет свой знак при переходе через x_0 , то x_0 – точка перегиба.

Алгоритм исследование функций с помощью второй производной.

Для того, чтобы найти интервалы выпуклости, вогнутости функции, необходимо:

1)вычислить вторую производную заданной функции;

2) найти нули и точки разрыва второй производной: $f''(x) = 0, f''(x)\nexists$;

3)нанести эти точки, а также точки разрыва функции на числовую ось;

4)определить знак второй производной на каждом из полученных интервалов;

5)по знаку второй производной определить характер выпуклости функции и найти точки перегиба (при переходе через точку перегиба вторая производная меняет знак).

Пример 6.7. Найти промежутки выпуклости вогнутости и точки перегиба функции:

а) $y = \sqrt[3]{x^5}$;**б)** $y = ln(1 + x^2)$;**в)** $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

Решение.

а) Область определения функции: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}};$$

$$y'' = \left(\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{5}{3}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}};$$

$y'' = 0$,таких точек нет;

$y''\nexists$,при $x = 0$.

Методом интервалов исследуем знак второй производной, данные заносим в таблицу.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y''	$-$	не сущ.	$+$
y	$\cap$	0	$\cup$
	ф-я выпукла	$(\cdot)$ка перегиба	ф-я вогнута

Определяем промежутки выпуклости, вогнутости и точки:
$y'' > 0$,функцияy выпукла $\cap$,при $x\epsilon(-\infty; 0)$;
$y'' < 0$,функцияy вогнута $\cup$,при$x\epsilon(0; +\infty)$.
$x = 0$ –точка перегиба,$y(0) = 0$,так как вторая производная при переходе через эту точку меняет направление выпуклости.

б) Область определения функции: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

$$y' = \left(ln(1 + x^2)\right)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot (1 + x^2)' = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$y'' = \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)' = \frac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2};$$

$$y'' = 0, \quad 2(1 - x)(1 + x) = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1;$$

$y''\nexists$, таких точек нет.

Методом интервалов исследуем знак второй производной, данные заносим в таблицу.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\cap$	$ln2$	$\cup$	$ln2$	$\cap$
	ф-я выпукла	$(\cdot)$ка перегиба	ф-я вогнута	$(\cdot)$ка перегиба	ф-я выпукла

Определяем промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба:
$y'' > 0$,функцияy выпукла $\cap$,при $x\epsilon(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;
$y'' < 0$,функцияy вогнута $\cup$,при $x\epsilon(-1; 1)$.

$x = \pm 1$ –точки перегиба, $y(\pm 1) = ln2$.
в) Область определения функции:

Область определения функции: $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

$$y' = \left(\frac{x^4}{(1+x)^3}\right)' = \frac{4x^3(1+x)^3 - x^4 \cdot 3(1+x)^2}{(1+x)^6} =$$

$$= \frac{x^3(1+x)^2(4(1+x) - 3x)}{(1+x)^6} = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4} = \frac{x^4 + 4x^3}{(1+x)^4};$$

$$y'' = \left(\frac{x^4 + 4x^3}{(1+x)^4}\right)' =$$

$$= \frac{(4x^3 + 12x^2)(1+x)^4 - (x^4 + 4x^3)4(1+x)^3}{(1+x)^8} =$$

$$= \frac{4x^2(1+x)^3\big((x+3)(1+x) - (x^2 + 4x)\big)}{(1+x)^8} =$$

$$= \frac{4x^2(x^2 + 4x + 3 - x^2 - 4x)}{(1+x)^5} = \frac{12x^2}{(1+x)^5};$$

$$y'' = 0, \quad 12x^2 = 0,$$

$$x = 0;$$

$$y'' \nexists, \quad x = -1.$$

Методом интервалов исследуем знак второй производной, данные заносим в таблицу.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; +\infty)$
y''	$-$	не сущ.	$+$
y	$\cap$	не сущ.	$\cup$
	ф-я выпукла		ф-я вогнута

Определяем промежутки выпуклости, вогнутости и экстремумы:
$y'' > 0$,функция y выпукла $\cap$,при $x \epsilon (-\infty; -1)$;
$y'' < 0$,функцияy вогнута $\cup$,при $x \epsilon (-1; +\infty)$.

Точек перегиба нет, так как точка $x=-1$ не входит в область определения функции.

Асимптоты графика функции.

Построение графика значительно облегчается, если знать его асимптоты.

Асимптота — это прямая к которой неограниченно близко приближается график функции при удалении его переменной точки в бесконечность. Различают вертикальные, наклонные и горизонтальные асимптоты:

1)прямая $x=a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$. Вертикальные асимптоты проходят через точки бесконечного разрыва. Непрерывные функции вертикальных асимптот не имеют;

2)прямая $y=kx+b$ является **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$,если

существуют конечные пределы:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b,$$

При $x\to+\infty$ получают правостороннюю асимптоту, при $x\to-\infty$получают левостороннюю асимптоту.

Замечание: если $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k=0$, то уравнение наклонной асимптоты принимает вид $y=b$.Такая асимптота называется **горизонтальной.**

Пример 6.8. Найти асимптоты графика функции:
а) $y=\frac{x+5}{x-3}$; **б)** $y=\frac{x^3}{2x^2+3}$; **в)** $y=\sqrt{x^2-1}$.

Решение.

а) Область определения функции:
$D(f)=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$;

1) Вертикальные асимптоты:

$x=3$ – является точкой разрыва, так как в ней обращается в ноль знаменатель дроби.

Действительно, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+5}{x-3}=\pm\frac{8}{0}=\pm\infty$,тогда $x=3$ –вертикальная асимптота;

2) Горизонтальные и наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+5}{x-3}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+5}{x^2-3x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}=$$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=\frac{0}{1}=0$,так как $k=0$ наклонных асимптот нет.

Найдём горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+5}{x-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}=$$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}}=1$,следовательно,

$y=1$ – горизонтальная асимптота.

б) Область определения функции: $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

1) Вертикальные асимптот, так как нет точек разрыва.

2) Горизонтальные и наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{2x^2+3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2x^3+3x}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2+\frac{3}{x^2}}=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2+3}-\frac{x}{2}\right)=$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3 - x(2x^2+3)}{2(2x^2+3)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x}{2(2x^2+3)} =$$

$$= -\frac{3}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{3}{x^2}\right)} = -\frac{3}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x^2}} = 0,$$ тогда

$y = \frac{x}{2}$ – наклонная асимптота.

в) Область определения функции: $x^2 - 1 \geq 0$,то есть $D(f) = (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$;

1) Вертикальные асимптоты нет, так как нет точек бесконечного разрыва.

2) Горизонтальные и наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x};$$

Учитывая, что $|x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, \ x \geq 0 \end{cases}$ имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1,$$ то

есть при $x \to +\infty, k = 1$;

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = -1,$$

то есть при $x \to -\infty, k = -1$;

Найдём b:

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1} - x\right) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} =$$

$$= -\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0;$$

Таким образом,

$y = x$ – правосторонняя наклонная асимптота,

$y = -x$ – левосторонняя наклонная асимптота.

Горизонтальные асимптот нет, так как $k \neq 0$.

Общая схема анализа свойств функции и построения ее графика

Рекомендуем следующую последовательность анализа свойств функции.

1)Область определения функции-множество значений аргумента x,при котором задана функция.

2)Координаты точек пересечения с осями координат:

с осью Ox: $\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$ и Oy: $\begin{cases} x = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$.

3)Исследование функции на четность, нечетность:

$f(-x) = f(x)$ –чётная функция, график функции симметричен относительно оси Oy;

$f(-x) = -f(x)$ –нечётная функция, график функции симметричен относительно оси Ox;

$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$ – функция общего вида.

4)Исследование функции на периодичность:

$f(x \pm T) = f(x)$ –периодическая функция, где T –период функции.

5)Исследование функции по первой производной:

— промежутки монотонности $y' > 0$ ⇒функция возрастает↗;

$y' < 0$ ⇒функция убывает;

—экстремумы функции⇒ y' $\begin{cases} (\cdot)min \text{ "} - \text{" } \Rightarrow \text{ "} + \text{"} \\ (\cdot)max \text{ "} + \text{" } \Rightarrow \text{ "} - \text{"} \end{cases}$.

6)Исследование функции по второй производной:

$-y'' < 0$промежутки выпуклости вверх ∩ (выпуклости) ;

$-y'' > 0$ проме- жутки выпуклости вниз ∪

(вогнутости);

- точки перегиба- точки, в которых происходит смена направления выпуклости функции.

7) Анализ области непрерывности. Анализ точек разрыва. Асимптоты графика функции:

прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$;

прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$;

прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой, если существуют конечные пределы:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b;$$

8) Построение графика функции.

Расчет координат дополнительных точек для уточнения графика (если это необходимо).

Алгоритм построения графика исследованной функции.

Для того, чтобы построить график исследованной функции, необходимо:

1)ввести прямоугольную систему координат;

2)провести асимптоты (если они имеются);

3)отметить все характерные точки (точки экстремума, точки перегиба).

4)соединить характерные точки кривыми в соответствии с исследованием функции.

Пример 6.9. Провести полное исследование и построить график функции:

а)$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 1$;**б)** $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение.

а)1) Область определения функции: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 1$

Координаты точек пересечения с осями координат:

с осью Oy: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1,$

то есть $A(0;1)$ – точка пересечения с осью Oy;

с осью Ox: $\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 1 \end{cases};$

$2x^3 - 15x^2 + 24x + 1 = 0$,поскольку уравнение не имеет целых корней, воспользуемся специальным сервисом для решения кубического уравнения, получим:

$x_1 = -0{,}4,\ x_2 = 5{,}15,\ x_3 = 2{,}39.$

Таким образом, $B(-0{,}4;0), C(5{,}15;0), D(2{,}39;0)$- точки пересечения с осью Ox.

3)$f(-x) = 2(-x)^3 - 15(-x)^2 + 24(-x) + 1 =$
$= -2x^3 - 15x^2 - 24x + 1 = -(2x^3 + 15x^2 + 24x - 1) \neq$
$\neq f(x) \neq -f(x)$ – функция не является ни четной, ни нечетной;

4)Функция не периодична.

5)Промежутки убывания и возрастания функции, экстремумы.

Найдем первую производную функции:

$y' = (2x^3 - 15x^2 + 24x + 1)' = 6x^2 - 30x + 24.$

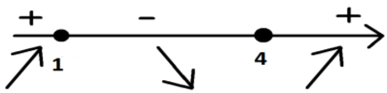
Найдем критические точки функции:

$y' = 0,\quad 6x^2 - 30x + 24 = 0|:6;$

$x^2 - 5x + 4 = 0;$

$x_1 = 1,\ x_2 = 4.\qquad y'\nexists,$ таких точек нет.

Отметим точки на числовой прямой и исследуем знак первой производной при переходе через эти точки:



$x_1 = 1$ –точка максимума функции, $x_2 = 4$ – точка минимума функции.

Поставим значения x в исходное уравнение функции

для получения значения функции в точках максимума и минимума:

$y_{max}(1) = 2 - 15 + 24 + 1 = 12$;

$y_{min}(4) = 2 \cdot 64 - 15 \cdot 16 + 24 \cdot 4 + 1 = -15$.

Полученные данные занесём в таблицу:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	12	↘	-15	↗
	ф-я возр.	$(\cdot)$ка max	ф-я убыв.	$(\cdot)$ка min	ф-я возр.

6)Интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

Найдем вторую производную:

$$y'' = (6x^2 - 30x + 24)' = 12x - 30.$$

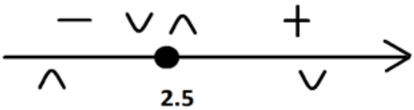
$y'' = 0$;

$12x - 30 = 0$;

$x = 2{,}5$.

$y'' \nexists$, таких точек нет.

Нанесём полученные значения на числовую ось и исследуем знак второй производной функции:



$x = 2{,}5$ –точка перегиба.

Поставим значения x в исходное уравнение функции для получения значения функции в точке перегиба и все данные занесём в таблицу:
$y(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5^3 - 15 \cdot 2{,}5^2 + 24 \cdot 2{,}5 + 1 = -5{,}5.$

x	$(-\infty; 2{,}5)$	$2{,}5$	$(0; +\infty)$
y''	$-$	0	$-$
y	∩	$-5{,}5$	∪
	ф-я выпукла	точка перегиба	ф-я вогнута

7) Асимптоты графика функции.
Так как функция не имеет точек разрыва, то вертикальных асимптот у графика функции нет.

Найдём наклонные, горизонтальные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 15x^2 + 24x + 1}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^2 - 15x + 24 + \frac{1}{x}\right) = \infty$, наклонных и горизонтальных асимптот нет.

8) Построение графика функции:

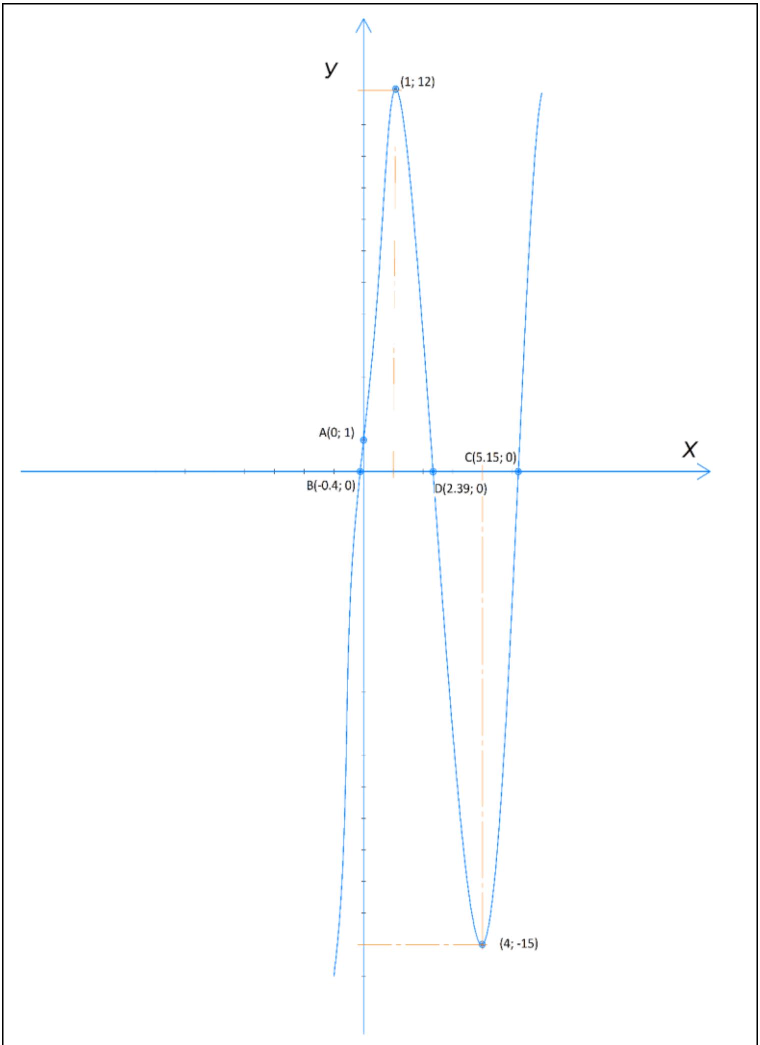


Рис.22

б)1) Область определения – вся числовая ось, кроме точки $x = -1$, в которой функция терпит разрыв, то есть $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;
2) Координаты точек пересечения с осями координат:

с осью Ox: $\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x^3}{2(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^3}{2(x+1)^2} = 0$, при $x = 0$,то есть$(0; 0)$ – точка пересечения с осью Ox;

с осью Oy: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^3}{2(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow y = 0$, то есть

$(0; 0)$ – точка пересечения с осью Oy;

3) $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{2(-x+1)^2} = -\dfrac{x^3}{2(x-1)^2} \neq$

$\neq f(x) \neq -f(x)$ – функция не является ни четной, ни нечетной;

4)Функция не периодична.

5)Промежутки убывания и возрастания функции, экстремумы.

Найдем первую производную функции:

$$y' = \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{3x^2(x+1)^2 - 2x^3(x+1)}{(x+1)^4}\right) =$$
$$= \frac{x^2(x+1)(3(x+1)-2x)}{2(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} = \frac{x^3+3x^2}{2(x+1)^3};$$

Найдем критические точки функции:

$y' = 0, \qquad x^2(x+3) = 0,$

$x_1 = 0, x_2 = -3;$

$y' \nexists, \qquad x_3 = -1;$

Отметим точки на числовой прямой и исследуем знак первой производной при переходе через эти точки.

При $x \epsilon (-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$ функция возрастает, на интервале $(-3; -1)$убывает. Следовательно, функция имеет максимум в точке

$x = -3, y_{max}(-3) = -3\frac{3}{8}.$

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	не сущ.	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$	$-3\frac{3}{8}$	$\searrow$	не сущ.	$\nearrow$	0	$\nearrow$
	ф-я возр.	$(\cdot)$ка max	ф-я убыв.	раз-рыва	ф-я возр.	экстр. нет	ф-я возр.

6)Интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^3+3x^2}{2(x+1)^3}\right)' = \frac{(3x^2+6x)(x+1)^3 - 3(x^3+3x^2)(x+1)^2}{2(x+1)^6} =$$

$$= \frac{3x(x+1)^2\big((x+2)(x+1) - x^2 - 3x\big)}{2(x+1)^6} =$$

$$= \frac{3x(x^2+3x+2-x^2-3x)}{2(x+1)^4} = \frac{3x}{(x+1)^4};$$

$y'' = 0,$ при $x = 0;$

$y'' \nexists,$ при $x = -1.$

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y''	$-$	не сущ.	$-$	0	$+$
y	$\cap$	не сущ.	$\cap$	0	$\cup$
	ф-я выпукла	точка разрыва	ф-я выпукла	точка перегиба	ф-я вогнута

На интервалах $(-\infty;-1) \cup (-1;0)$ кривая выпукла, на интервале $(0;+\infty)$функция вогнута.
$x = 0$ -является точкой перегиба графика функции.
Найдем ординату этой точки:$y(0) = 0$.

7)Вертикальные асимптоты:

Так как, $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\frac{1}{0} = -\infty$,то

$x = -1$ – вертикальная асимптота.

Горизонтальные и наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{2(x+1)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{2x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2};$$

$k \neq 0$,следовательно, горизонтальных асимптот нет;

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - (x^3 + 2x^2 + x)}{2(x^2 + 2x + 1)} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x}{x^2+2x+1} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1,$$

тогда $y = \frac{x}{2} - 1$ – наклонная асимптота.

8) Построение графика функции:

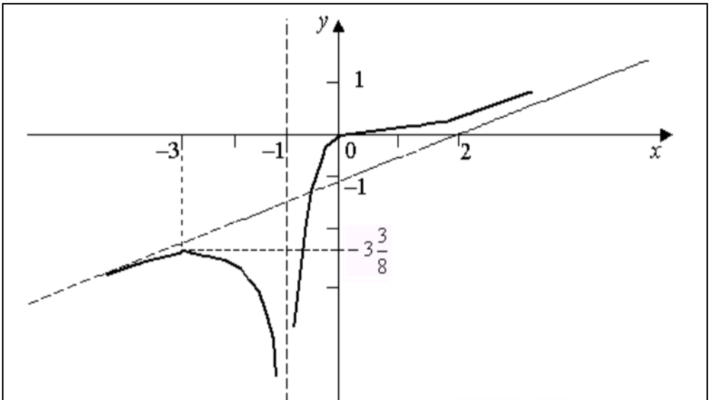


Рис. 23

Задания для самостоятельного решения.

8.Используя правило Лопиталя вычислить пределы:

1.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+e^{-x}-1}{x^2}$	**11.**	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2xtgx}\right)$
2.	$\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot \ln x$	**12.**	$\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)\cdot tg\dfrac{x}{2}$
3.	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+3^x)}$	**13.**	$\lim\limits_{x\to 0+0} \sin x\cdot \ln x$
4.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$	**14.**	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctgx}$
5.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$	**15.**	$\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$
6.	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\ln^3 x}$	**16.**	$\lim\limits_{x\to 0} x^x$
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}$	**17.**	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$
8.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$	**18.**	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(tgx)^{\sin 2x}$
9.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$	**19.**	$\lim\limits_{x\to +0}(1+x)^{\ln x}$
10.	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$	**20.**	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

Ответы:

8.1.$\frac{1}{2}$.**8.2.**0.**8.3.**$\frac{\ln 3}{\ln 2}$.**8.4.**1.**8.5.**2.**8.6.** $+\infty$.

8.7.2.**8.8.**1.**8.9.**0.**8.10.**$\frac{1}{2}$.**8.11.**$\frac{1}{6}$.**8.12.**2.**8.13.**0.**8.14.**1.**8.15.**$\frac{1}{e}$.**8.16.**0.**8.17.**1.**8.18.** 1.**8.19.**1.**8.20.**0.

9. (1), (2) Разложить функцию по формулам Тейлора в окрестности заданных точек;(3)-(6) Вычислить используя разложение в ряды Тей-

лора и Маклорена;(8)-(10). Найти экстремумы функций; (11)-(16) Найти точки перегиба иинтервалы выпуклости функций;
(17)-(20) Найти асимптоты графиков функций.

1.	$f(x) = x^3 + 3x^2 + x - -6, x_0 = -1$	**11.**	$y = \frac{2x-1}{x+2}$
2.	$f(x) = ln(2x-1), x_0 = 1$	**12.**	$y = x^4 - 6x^2 + 4$
3.	$sin1^0$ с точностью до 0,0001	**13.**	$y = (x+1)^2 \cdot (x-2)$
4.	$cos10^0$ с точностью до 0,001	**14.**	$y = xarctgx$
5.	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - sinx}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$	**15.**	$y = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$
6.	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x) - x}{x^2}$	**16.**	$y = \frac{4x}{4+x}$
7.	$y = (x-5)^2 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}$	**17.**	$y = \frac{x^2+3}{x^2-9}$
8.	$y = \frac{x^3}{x^2-4}$	**18.**	$y = \frac{x^2-2x-2}{1+3x}$
9.	$y = x - e^x$	**19.**	$y = \frac{x^2}{x^2+1}$
10.	$y = \frac{x^2+1}{x}$	**20.**	$y = x + \frac{1}{x}$

Ответы:

9.1.$(x+1)^3 - 2(x+1) - 5.$

9.2.$2(x-1) - \frac{2^2(x-1)^2}{2} + \frac{2^3(x-1)^3}{3} + \dots +$

$+ \frac{(-1)^{n+1}2^n(x-1)^3}{n} + 0((x-1)^n)$.**9.3.**0,0175 .**9.4.**0,985.

9.5.1.**9.6.**$-\frac{1}{2}$.**9.7.**2.**9.8.**на интервале

$(-\infty; -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}; +\infty)$ функция возрастает; на интервале $\left(-\sqrt{12};-2\right)\cup(-2;2)\cup\left(2;\sqrt{12}\right)$ функция убывает,$x_{max}=-\sqrt{12}$, $y_{max}(-\sqrt{12})=-\frac{13\sqrt{12}}{12}$, $x_{min}=\sqrt{12}$, $y_{min}\left(\sqrt{12}\right)=\frac{13\sqrt{12}}{12}$.**9.9.** на интервале $(-\infty;0)$ функция возрастает; на интервале $(0;+\infty)$ функция убывает,$x=0$ –точка максимума, $y_{max}(0)=-1$.**9.10.** на интервале $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ функция возрастает; на интервале$(-1;0)\cup(0;1)$ функция убывает,$x_{max}=-1$, $y_{max}(-1)=-2$, $x_{min}=1$, $y_{min}(1)=2$.**9.11.** на интервале $(-\infty;-2)$функция выпукла; на интервале $(-2;+\infty)$ функция вогнута; точек перегиба нет.**9.12.** на интервале $(-1;1)$функция выпукла; на интервале $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ функция вогнута; $(1;-4)$, $(-1;-4)$ –точки перегиба.**9.13.** на интервале $(-\infty;0)$функция выпукла; на интервале $(0;+\infty)$ функция вогнута; $(0;-2)$ –точка перегиба.**9.14.** на интервале $(-\infty;+\infty)$ функция вогнута; точек перегиба нет .**9.15.** на интервале $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$функция выпукла; на интервале $\left(\frac{1}{2};2\right)\cup(2;+\infty)$ функция вогнута; $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{9}\right)$ –точка перегиба.**9.16.** на интервале $(-4;+\infty)$функция выпукла; на интервале $(-\infty;4)$ функция вогнута; точек перегиба нет.

9.17. $x = \pm 3$ –вертикальные асимптоты; $y = 1$ –горизонтальная асимптота.**9.18.**$x = -\frac{1}{3}$ –вертикальная асимптота; $y = \frac{x}{3} - \frac{7}{9}$ –наклонная асимптота.

9.19. $y = 1$ -горизонтальная асимптота.**9.20.** $x = 0$ –вертикальная асимптота; $y = x$ –наклонная асимптота.

10.Типовой расчёт: провести полное исследование и построить график функции.

1.	$y = \frac{2x+1}{x^2}$	**11.**	$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
2.	$y = \frac{1}{x^2-9}$	**12.**	$y = \frac{1-x^3}{x^2}$
3.	$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$	**13.**	$y = \frac{x^2-x-6}{x-2}$
4.	$y = \frac{x^2+5}{x+2}$	**14.**	$y = \frac{16-x^2}{16+x^2}$
5.	$y = \frac{x^2}{x^2+1}$	**15.**	$y = x + \frac{4}{2+x}$
6.	$y = \frac{2}{x^2+2x}$	**16.**	$y = x - \frac{1}{x^3}$
7.	$y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$	**17.**	$y = \frac{x^2+8}{4-x^2}$
8.	$y = \frac{2}{x^2-1}$	**18.**	$y = \frac{3}{x^2+9}$
9.	$y = \frac{x-1}{x^2-2x}$	**19.**	$y = \frac{1}{x(x-8)}$
10.	$y = \frac{x}{(x-1)^2}$	**20.**	$y = x + \frac{1}{x}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. Изд. 3-е. — Ростов н/Д, 2006. — 640 с.
2. Виленкин И.В., Гробер В.М. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов. Издательство «Феникс» — Ростов н/Д, 2004. — 415 с.
3. Письменный Д.Т., Конспект лекций по высшей математике (полный курс). 2-е изд. Москва: «Айриспресс», 2014.
4. Данко П.Е., Попов, А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах (1 том). — М.: Высш. шк., 2002.