ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Название кафедры»

Учебное пособие

по дисциплине

«Пределы»

«Математический анализ»

Авторы

Ермилова О.В.

Ростов-на-Дону, 2023

Аннотация

Учебное пособие предназначено для аудиторной и самостоятельной работы по теме «Пределы», дисциплина «Математический анализ» при различных формах обучения: очном, заочном и дистанционном для студентов технических направлений и специальностей.

Автор

Старший преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Ермилова О.В.

Оглавление

ГЛАВА 1. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ.

1.1. Числовые последовательности, основные определения.

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число a_n , $n \epsilon N$, то говорят, что задана бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$:

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \epsilon R$.

Таким образом, числовая последовательность – это функция натурального аргумента:

$$\boldsymbol{a_n = f(n)}\ \textbf{(1.1)}$$

Другими словами, множество занумерованных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называется **числовой последовательностью** или просто последовательностью.

Обозначение:$\{\boldsymbol{a_n}\}$

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$будем называть **элементами последовательности** или членами последовательности, таким образом a_1 –первый член (элемент) последовательности,a_2-второй, …,элемент a_n –общий или n –ый член последовательности.

Чаще всего последовательность задается формулой её общего члена $a_n = f(n)$, данная формула позволяет вычислить любой член последовательности по номеру n .

Последовательность, все члены которой равны одному и тому же числу, называется **постоянной,** то есть $a_n = c = const$ $(a_1 = a_2 = \cdots = a_n = c$).

Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого её элемента.

Способы задания последовательностей.

1)Аналитический способ — это когда последовательность задается формулой её общего члена $a_n = f(n)$, которая позволяет вычислить любой член последовательности.

Так, равенства $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n + 1$,

$z_n = (-1)^n$,$a_n = \frac{n}{n+1}$ задают соответственно последовательности:

x_n: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots;$

y_n: $2,3,4, \dots, n + 1, \dots;$

z_n: $-1,1,-1, \dots, (-1)^n, \dots;$

a_n: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots.$

Пример 1.1. Последовательность задана формулой её общего члена$a_n = 3^n$. Найти первые три члена последовательности.

Решение.

При $n = 1$ получим первый член последовательности $a_1 = 3^1 = 3;$

При $n = 2$ второй $a_2 = 3^2 = 9;$

При $n = 3$ третий $a_3 = 3^3 = 27.$

2)Рекуррентный способ-такой способ при котором любой член последовательности, начиная с некоторого номера, выражают через предыдущие члены. Например, если $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1}$, тогда $a_2 = -\frac{1}{2}a_1$,при этом если $a_1 = 3$,то $a_2 = -\frac{3}{2}$, и так далее.

Числовая последовательность называется **ограниченной сверху (снизу)**, если существует число M такое, что любой элемент a_nэтой последовательности удовлетворяет неравенству$a_n \leq M$ $(a_n \geq M)$.

Например, последовательность v_n= n ограничена снизу, так как $v_n \geq 1$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу, то есть если выполняется неравенство $|a_n| < M$ или, что тоже самое $-M < a_n < M$,другими словами все члены последовательности принадлежат промежутку $(-M; M)$.

В противном случае последовательность называется **неограниченной**, то есть $|a_n| > M$.

Числовая последовательность называется **возрастающей(убывающей)**, если $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$, $(a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots)$.

Все такие последовательности объединяют общим названием **монотонные последовательности**.

Таким образом, если $a_{n+1} - a_n < 0$, то последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает; если $a_{n+1} - a_n > 0$,

то последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает.

Так, последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{a_n\}$ из примера выше монотонные, а $\{z_n\}$- не монотонная.

В частности, $\{x_n\}$-убывающая последовательность, $\{a_n\}$, $\{y_n\}$- возрастающие последовательности.

Пример 1.2. Выяснить какой является последовательность возрастающей или убывающей: **а)** $y_n = \frac{n}{3^n}$;

б) $x_n = \frac{n}{2n+1}$.

Решение

а) Найдем $y_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$. Найдем разность $y_{n+1} - y_n$:

$y_{n+1} - y_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3 \cdot 3^n} - \frac{n}{3^n} = \frac{1-2n}{3 \cdot 3^n} < 0$,

так как $1 - 2n < 0, n \epsilon N$, то есть $y_{n+1} < y_n$.

Таким образом, последовательность $y_n = \frac{n}{3^n}$ монотонно убывает;

б) Найдём $x_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$.

Найдем разность $x_{n+1} - x_n$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} = \frac{(n+1)(2n+1) - n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} =$$

$$= \frac{2n^2 + n + 2n + 1 - 2n^2 - 3n}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0$$

Следовательно, $x_{n+1} - x_n > 0$,то есть $x_n < x_{n+1}$.Таким образом, последовательность $x_n = \frac{n}{2n+1}$-возрастающая.

1.2. Предел числовой последовательности.

Определение предела последовательности.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство:$|x_n - a| < \varepsilon$.

Коротко определение предела можно записать так:

$$(\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}, \exists \boldsymbol{N}: \forall \boldsymbol{n} > \boldsymbol{N}, |\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{a}| < \boldsymbol{\varepsilon}) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{a} \quad \textbf{(1.2)}$$

Последовательность, пределом которой является конечное число a называется **сходящейся**. В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a при $n \to \infty$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Если предел последовательности не существует или бесконечен, то последовательность называется **расходящейся**.

Геометрический смысл предела последовательности.

Неравенство$|x_n - a| < \varepsilon$ эквивалентное неравенствам$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, показывает, что элемент x_n находится в ε -окрестности точки a(см.рис.1).

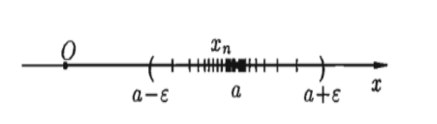

Рис.1

Если число a является пределом последовательности$\{x_n\}$,то геометрически это означает, что начиная с некоторого номера все точки $\{x_n\}$ попадут внутрь интервала$(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$,где ε –произвольно взятое положительное число, а за пределами интервала лежит конечное число элементов последовательности. Можно заметить, что точка a-точка сгущения (см.рис.1), то есть члены последовательности по мере увеличения номера n неограниченно приближаются к числу a.

Замечание: число a не является пределом последовательности, если можно выбрать такую ε -окрестность точки a за пределами которой будет находиться бесконечное число элементов последовательности.

Например, последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ - сходящаяся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$,так как по мере увеличения n все элементы приближаются к единице; последовательность $b_n = (-7)^n$ -расходящаяся, так как элементы последовательности при $n \to \infty$ не стремятся ни к одному определённому значению ($(-7)^1 = -7$, $(-7)^2 = 49, (-7)^3 = -343$,…- значения прыгают), то есть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \nexists$.

Замечание: операция $[a]$,которую в скором времени мы будем рассматривать, означает выделение целой части числа a,не превышающей самого числа a.

Например, $[2{,}47] = 2, [-5{,}23] = -6, [7] = 7$ и так далее.

Пример 1.3. Используя определения предела последовательности, доказать, что: **а)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Решение.

а) Используя определение предела последовательности (1.2), покажем, что для произвольного сколь угодно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать порядковый номер N элемента последовательности $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$,начиная с которого выполняется условие

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon,$$

то есть

$$(\forall\varepsilon > 0, \exists N: \forall n > N, \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon\,) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Рассмотрим неравенство:

$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$,

$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$, так как $n > 0$, а$|(-1)^n| = 1$,то $\frac{1}{n} < \varepsilon$,

следовательно, $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Таким образом, для всех $n > N$,где $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, выполняется условие $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$,а это по определению предела числовой последовательности означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Итак, $\forall\varepsilon > 0$ указано соответствующее значение N. Это и доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Проанализируем ситуацию и заметим, что число N зависит от ε ,то есть $N = N(\varepsilon)$. Так, если $\varepsilon = 0{,}01$, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = \left[\frac{1}{0{,}01}\right] = [100] = 100$,то есть, начиная с a_{100},все члены последовательности отличаются от 0 меньше, чем на 0,01.

При $\varepsilon = 0{,}001$, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = \left[\frac{1}{0{,}001}\right] = [1000] = 1000$,то есть, начиная с a_{1000},все члены последовательности отличаются от 0 меньше, чем на 0,001.

б) Покажем, что для произвольного сколь угодно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать порядковый номер N элемента последовательности

$x_n = \frac{n+2}{2n+1}$, начиная с которого выполняется условие

$$\left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\,,$$

то есть

$$(\forall\varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n > N, \left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\,) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2};$$

Рассмотрим неравенство:

$$\left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{2n+4-2n-1}{2(2n+1)}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{3}{4n+2}\right| < \varepsilon,$$

поскольку $n > 0$ и $\frac{3}{4n+2} > 0$,

то $\left|\frac{3}{4n+2}\right| = \frac{3}{4n+2}$, то есть $\frac{3}{4n+2} < \varepsilon,$

$$3 < \varepsilon(4n+2),$$

$$\frac{3}{\varepsilon} < 4n+2,$$

$$4n > \frac{3}{\varepsilon} - 2,$$

$$4n > \frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon},$$

$$n > \frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}(= N).$$

Таким образом, для всех $n > N$,где $N = \left[\frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right]$, выполняется условие $\left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$,а это по определению предела числовой последовательности означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

Последовательность$\{\alpha_n\}$, предел которой равен нулю$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, называется **бесконечно малой**.

Например, последовательность $\alpha_n=\frac{2}{n+1}$бесконечно малая, так как$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

Последовательность $\{\beta_n\}$называется **бесконечно большой**, если $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\infty$.

Например, последовательность $\beta_n=n$ бесконечно большая, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\infty$.

Предельный переход в неравенствах.

Рассмотрим последовательности $\{x_n\},\{y_n\}$и $\{z_n\}$.

Теорема 1.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n\le y_n$,то $a\le b$.

Доказательство.

Допустим, что $a>b$. Из равенств $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ и$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер $N=N(\varepsilon)$, что для всех $n>N$ будут выполняться неравенство$|x_n-a|<\varepsilon$ и$|y_n-b|<\varepsilon$,то есть $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ и $b-\varepsilon<y_n<b+\varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon=\frac{a-b}{2}$. Тогда: $x_n>a-\varepsilon=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$,то есть $x_n>\frac{a+b}{2}$ и

$y_n<b+\varepsilon=b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$, то есть$y_n<\frac{a+b}{2}$.

Теорема 1.2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ и справедливо неравенство$x_n\le z_n\le y_n$(начиная с некоторого номера), то$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

(Примем без доказательства.)

Свойства пределов последовательностей.

Пусть существуют конечные пределы последовательностей $\{a_n\}, \{b_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

1. Если последовательность имеет предел, то он единственный.

2. Если последовательность имеет предел, то она является ограниченной.

3. Предел суммы(разности) последовательностей равен сумме (разности) пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b;$$

4. Предел произведения последовательностей равен произведению пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b.$$

В частности, для постоянной последовательность $\{a_n\}$, имеем:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} C = C$-предел постоянной последовательности равен постоянной,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n =$

$= C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = C \cdot b$ -постоянный множитель можно выносить за знак предела.

5. Предел частного последовательностей равен частному пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, b \neq 0.$$

Все свойства пределов вытекают из определения предела последовательности, докажем, например 3) свойство: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

Доказательство.

Как $\forall \varepsilon > 0$ так и

для $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \, \exists N_1 \colon \forall n > N_1, |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} (1)$

$\exists N_2 \colon \forall n > N_2, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} (2)$.

Оценим $|(a_n + b_n) - (a + b)|$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le$$

$$\le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $a + b$-является пределом последовательности $\{a_n + b_n\}$.

Замечание: если у последовательности добавить, отбросить или изменить первые k элементов, то это не повлияет на ее сходимость.

1.3. Предел функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Краткая запись определения предела функции на языке ε, δ:

$$(\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall x \neq x_0 \colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Геометрический смысл предел функции.

Неравенство $|x - x_0| < \delta$ эквивалентно неравенству $-\delta < x - x_0 < \delta$ или $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, а неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ эквивалентно неравенству $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$, или $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если по мере того, как x приближается к x_0 (то есть x попадает в интервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, значение функции $f(x)$ неограниченно приближается к A, то есть $f(x)$ попадает в интервал $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$. Иными словами, точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon, y = A + \varepsilon$ (см.рис.2).

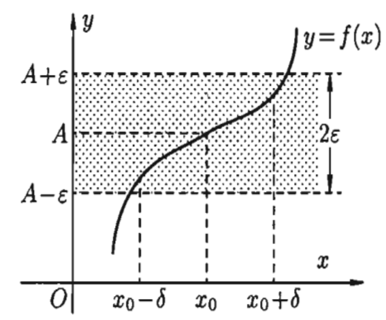

Рис.2

Замечание: величина δ зависит от выбора ε, поэтому пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$,

при $\varepsilon \to 0, \delta \to 0$ и наоборот $\delta \to 0, \varepsilon \to 0$.

Пример 1.4. Показать, что функция $f(x) = 3x - 5$ имеет в точке $x = 2$ предел равный единице. Каково должно быть δ, если $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{100}$.

Решение.

Фиксируем любое $\varepsilon > 0$. Поэтому ε находим такие $\delta > 0$ при котором из неравенства $|x - 2| < \delta$ следовало бы неравенство $|(3x - 5) - 1| < \varepsilon$.

Решаем неравенство $|(3x - 5) - 1| < \varepsilon$,

$$|3x - 6| < \varepsilon,$$

$$|3(x - 2)| < \varepsilon,$$

$$3\,|x - 2| < \varepsilon,$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3},$$

взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ видим, что для всех x удовлетворяющих неравенству $|x - 2| < \delta \left(= \frac{\varepsilon}{3}\right)$ выполняется неравенство:

$|(3x-5)-1|<\varepsilon$,

следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}(3x-5)=1$.

Если $\varepsilon=1$,то $\delta=\frac{\varepsilon}{3}=\frac{1}{3}$;

$\varepsilon=\frac{1}{2}$,то $\delta=\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{6}$;

$\varepsilon=\frac{1}{100}$,то $\delta=\frac{\frac{1}{100}}{3}=\frac{1}{300}$.

1.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Функция $y=f(x)$ называется **бесконечно малой (б.м.)** при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ ($f(x)$ неограниченно уменьшается, когда $x\to x_0$),из определения предела следует, что

$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \forall x\neq x_0{:}\ |x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$.

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или бесконечно малыми; обозначают обычно греческими буквами α,β и так далее.

Примерами бесконечно малых функций являются, например, функция $y=x$ при $x\to 0$(см. рис.3);

Действительно, по мере того как $x\to 0$, $y=x\to 0$,то есть $\lim\limits_{x\to 0}x=0$;

Аналогично,$y=sinx$,при $x\to 0$ и при $x\to\pi$ является бесконечно малой функцией.

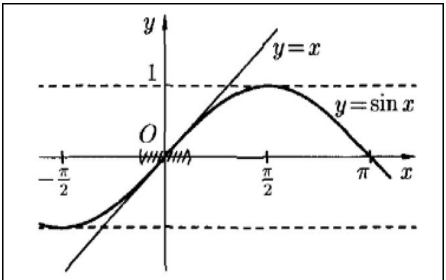

Рис.3

Функция $y=f(x)$называется **бесконечно большой (б.б.)** при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ ($f(x)$неограниченно растёт, когда

$x \to x_0$),то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists\, \delta > 0\ \forall x \neq x_0 : |\, x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon.$$

Бесконечно большие функции часто называют бесконечно большими величинами.

Замечание: нужно иметь в виду, что ∞ это только символ для обозначения бесконечно большой величины, в частности, если $f(x)$стремится к бесконечности и принимает лишь положительные значения (уходит вверх), то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$,если лишь отрицательные (уходит вниз), то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

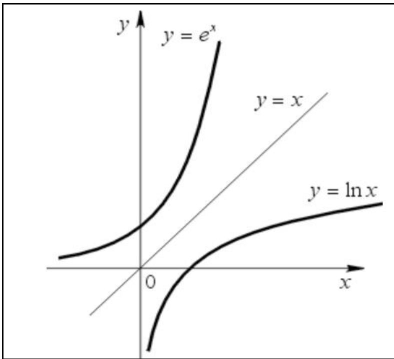

Рис.4

Примерами бесконечно больших функций служат функции $y = x$, при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$;

$y = lnx$ при $x \to 0+0$, так как $\lim\limits_{x\to0+0} lnx = -\infty$; $y = e^x$,при $x \to +\infty$,так как $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$(см.рис.4).

Свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций.

1.Если $f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$, то функция $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ является бесконечно большой при $x \to x_0$ и наоборот: если $g(x)$ –бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то функция $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

2.Сумма и разность конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$является бесконечно малой функцией.

3.Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию является бесконечно малой функцией.
Следствие 1. Произведение двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.
Следствие 2. Произведение бесконечно малых функций на число есть функция бесконечно малая.
4.Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая,
то есть если $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0$,то $\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = \frac{0}{a} = 0$;
Свойства бесконечно малых и больших функций вытекают из определения предела функции, докажем, например 3) свойство:

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$- две б. м. функции при $x \to x_0$. Это значит, что $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, то есть для любого $\varepsilon > 0$, а значит, и $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ найдется число $\delta_1 > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству$|x - x_0| < \delta_1$, выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \; (1);$$

Аналогично,если $\lim_{x\to x_0} \beta(x) = 0$, то

$$(\forall\varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \,\forall x \neq x_0\colon |x - x_0| < \delta_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} (2);$$

Пусть δ - наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняются оба неравенства (1) и (2). Следовательно, имеет место соотношение:

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, $(\forall\varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \,\forall x \neq x_0\colon |x - x_0| < \delta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\alpha(x)+\beta(x)|<\varepsilon.$$

Это значит, что $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha(x)+\beta(x)\right)=0$,то есть

$\alpha(x)+\beta(x)$ –б. м. ф.

Аналогично проводится доказательство для любого конечного числа б. м. функций.

Замечание: в дальнейшем будем использовать следующие очевидные соотношения

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\frac{c}{\infty}=0\\ \frac{c}{0}=\infty;\\ \frac{0}{c}=0\end{cases}$$

Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией.

Теорема 1.3. Если функция $f(x)$ имеет предел, равный A, то ее можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, то есть если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, то $f(x)=A+\alpha(x)$.

Доказательство.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.Следовательно,

$(\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \forall x\neq x_0{:}\,|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon)$,

то есть$|f(x)-A-0|<\varepsilon$.

Это означает, что функция $f(x)-A$ имеет предел, равный нулю, то есть является бесконечно малой функцией, которую обозначим через $\alpha(x)$: $f(x)-A=\alpha(x)$. Отсюда $f(x)=A+\alpha(x)$.

Заметим, что отыскание предела функции по определению – это довольно трудоемкий процесс. Поэтому на практике удобнее пользоваться следующими свойствами, которые могут быть доказанны с использованием определения предела функции.

Свойства пределов функций:

Пусть существуют конечные пределы функций $f(x), g(x)$в точке x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$,то

1. Предел постоянной функции равен самой постоянной:
   $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$;
2. Предел суммы (разности) конечного числа функций равен сумме (разности) пределов этих функций:
   $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \pm B$;
3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций:
   $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A\cdot B$;

   Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:
   $\lim\limits_{x\to x_0} C\cdot f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} C\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C\cdot A$;

   Следствие 2. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n.$$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций:
   $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $(B \neq 0)$.

Все свойства пределов вытекают из определения предела функции, докажем, например 3) свойство, аналогично доказываются остальные свойства.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$.

Тогда по теореме 1.3 о связи функции, ее предела и б. м. ф. можно записать $f(x) = A + \alpha(x)$, и $g(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б. м. ф.

Следовательно,

$$f(x)\cdot g(x) = \big(A + \alpha(x)\big)\cdot\big(B + \beta(x)\big) =$$
$$= AB + \big(A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)\big),$$

Выражение в скобках есть б.м.ф., поэтому

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = AB.$$

Отметим, что теорема справедлива для произведения любого конечного числа функций.

Пример 1.5. Найти предел: **а)** $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2 - 3x + 4)$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-1}{3x^2-5x+1}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x^2+2x+1}$; **г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{-2}}{x^{-3}+3}$.

Решение

Чтобы вычислить предел любого типа и вида нужно подставить предельное значение x, в функцию, стоящую под знаком предела. Учитывая свойства пределов, имеем:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2 - 3x + 4) = 2\lim\limits_{x\to 2}x^2 - 3\lim\limits_{x\to 2}x + \lim\limits_{x\to 2}4 =$

$= 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 4 = 6$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-1}{3x^2-5x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-5x+1)} =$

$= \dfrac{(-1)^2 - (-1) - 1}{3(-1)^2 - 5(-1) + 1} = \dfrac{1}{9}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x^2+2x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(4-x^2)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2+2x+1)} =$

$= \dfrac{4 - (-2)^2}{(-2)^2 + 2(-2) + 1} = \dfrac{0}{1} = 0$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{-2}}{x^{-3}+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}+3}=\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+3}=\frac{0}{3}=0.$

1.5. Практическое вычисление пределов.

При вычислении пределов часто сталкиваются с ситуациями, которые называются неопределенностями. Различают 7 основных видов неопределенностей:

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right],\left[\frac{0}{0}\right],\ [\infty-\infty],\ [\infty\cdot 0],\ [1^{\infty}],[\infty^{0}],\ [0^{0}].$$

Для раскрытия неопределенностей используются специальные правила:

Правило I. Чтобы раскрыть **неопределенность вида** $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, возникающую в пределах $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $Q_m(x)=b_0x^m++b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$ – многочлены степени n,m соответственно, необходимо и числитель, и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень, после сокращения неопределённость уйдёт.

Пример 1.6. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-8}{4x+2}$;**б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2-6x+1}{2x^3-5x^2+8}$;**в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+1}{2x-5}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-4}{4n^3+1}$;**д)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; **е)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{4\cdot 5^n+2^n}$;

ё) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$;**ж)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n^3+3n^2+1}}{\sqrt[4]{2n^2-4n+2}}$;**з)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$;**й)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+2n-1}{1+2+\cdots+n}$.

Решение.

а) Предел частного найти не удаётся, так как предел числителя и знаменателя при $x\to\infty$ равны бесконечности, получим неопределённость вида бесконечность разделить на бесконечность$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для избавления от неопределенности вынесем за скобки в числителе и знаменателе дроби переменную в старшей степени, то есть x,после сокращения в скобках останутся константы и слагаемые, которые стремятся к нулю:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x-8}{4x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x(5-\frac{8}{x})}{x(4+\frac{2}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{8}{x}}{4+\frac{2}{x}}=\frac{5}{4};$$

б) Рассуждая, аналогично имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-6x+1}{2x^3-5x^2+8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{7}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2-\frac{5}{x}+\frac{8}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{5}{x}+\frac{8}{x^3}}=\frac{0}{2}=0;$$

в) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+1}{2x-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}=\frac{1}{0}=\infty;$$

г) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-4}{4n^3+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(4+\frac{1}{n^3}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{4+\frac{1}{n^3}}=\frac{0}{4}=0;$$

д) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2};$$

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{4\cdot5^n+2^n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(4+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{4+\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{1}{4};$$

ё)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3-\frac{2}{x^4}\right)}{\sqrt{x^8\left(1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3-\frac{2}{x^4}\right)}{x^4\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=\frac{3}{1}=3;$$

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n^3+3n^2+1}}{\sqrt[4]{2n^2-4n+2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n^3\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}}{\sqrt[4]{n^2\left(2-\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt[6]{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt[4]{2\left(1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\right)}}=\frac{\sqrt[6]{1}}{\sqrt[4]{2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt[4]{8}}{2};$$

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}\right)}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^4-\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^4}{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^4+\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^4}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^4-\left(1-\frac{1}{n}\right)^4\right)}{n^4\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^4+\left(1-\frac{1}{n}\right)^4\right)}=\frac{0}{2}=0;$

й) В числителе и знаменателе наблюдается арифметическая прогрессия, как известно, её сумма вычисляется по формуле:

$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$,тогда

$$1+3+5+\cdots+2n-1\Rightarrow S_n=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2;$$

$$1+2+3\ldots+n\Rightarrow S_n=\frac{(1+n)n}{2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+2n-1}{1+2+\cdots+n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{(1+n)n}{2}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=2.$$

Правило II. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, возникающую в пределах $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$,

где $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$,

$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$-многочлены, необходимо числитель и знаменатель разложить на множители, после сокращения неопределённость уйдёт.

Замечание: для того, чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, в которой числитель или знаменатель, или числитель и знаменатель иррациональны, следует числитель и знаменатель умножить на выражение, сопряженное иррациональному.

Пример 1.7. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{6x^2+5x-1}{5x^2+3x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-8}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; **е)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$;

ё) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+3x+4}{x^3+1}$.

Решение.

а) Подставляя предельное значение, получим неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$, чтобы устранить её, необходимо разложить числитель и знаменатель на множители, и после сокращения неопределённость уйдёт:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)x}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=\frac{6}{3}=2;$$

б) Подставляя предельное значение, получим неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$, раскладывая числитель и знаменатель на множители имеем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-5}=-\frac{1}{2};$$

в) $$\lim_{x\to -1}\frac{6x^2+5x-1}{5x^2+3x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{6\left(x-\frac{1}{6}\right)(x+1)}{5\left(x-\frac{2}{5}\right)(x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{6x-1}{5x-2}=\frac{-7}{-7}=1;$$

г) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{1}{12};$$

д) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x(x^2+3x+2)}{(x+2)(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x+1)}{x-3}=\frac{6}{-1}=-6;$$

е) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0;$$

ё) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+3x+4}{x^3+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+1+3x+3}{(x+1)(x^2-x+1)}=$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)+3(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+4)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+4}{x^2-x+1}=\frac{6}{3}=2.$$

Пример 1.8. Вычислить**:**

а) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$;**б)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

в)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; **г)**$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$.

Решение.

а) Подставляя предельное значение, получим неопределённость$\left[\frac{0}{0}\right]$, содержащую иррациональность в числителе, поэтому для начала избавляемся от иррациональности- числитель и знаменатель умножить на выражение, сопряженное числителю, то есть на$\sqrt{x-2}+2$, приводим подобные и после сокращения неопределённость уйдёт:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 6}\frac{(\sqrt{x-2}-2)(\sqrt{x-2}+2)}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-2^2}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{x-2-4}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{1}{\sqrt{x-2}+2}=\frac{1}{4};$$

б) Рассуждая, аналогично имеем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+13-4(x+1)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{16};$$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x^2+1-1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(x^2+16-16)(\sqrt{x^2+1}+1)} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \frac{8}{2} = 4;$$

г) Для того, чтобы исключить иррациональность в числителе воспользуемся формулой $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$,учитывая, что $x - 1 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 - 1^3 = \left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)$ умножим и разделим исходную дробь на $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3}.$$

Правило III. Чтобы раскрыть неопределенности вида $[\infty-\infty]$,$[\infty\cdot 0]$ необходимо при помощи алгебраических преобразований перейти к пределам типа $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$,а далее воспользоваться правилом избавления от полученного вида неопределённости.

Пример 1.9. Вычислить: **а)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x-1}\cdot x^2$;
б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$; **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right)$;
г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$; **д)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x-3}\right)$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x-1}\cdot x^2=[\infty\cdot 0]=5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=5\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=5\cdot\frac{1}{0}=5\cdot(+\infty)=+\infty;$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x^2+1)}{x^2+1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=-\frac{1}{\infty}=0;$$

в) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{2}{x-2}-\frac{8}{x^2-4}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to2}\frac{2(x+2)-8}{x^2-4}=$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2x+4-8}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{2x-4}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{2}{x+2}=\frac{1}{2};$$

г) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x+1-3}{(1-x)(x^2+x+1)}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(x^2+x+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=-1;$$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)=[\infty-\infty]=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1-x^2+x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{x}{x^2}\right)}};$$

Поскольку, $\sqrt{t^2} = |t| = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases}$ и

$$\sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{x}{x^2}\right)} =$$

$$= |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}} =$$

$$= |x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right),$$

получим предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)};$$

Рассмотрим два случая: 1) поведение функции при $x \to +\infty$;2) при $x \to -\infty$;

$$1)\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$2)\lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = -\frac{2}{2} = -1;$$

Таким образом,

при $x \to +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right) = 1;$

при $x \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right) = -1.$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x-3}\right) = [\infty-\infty] =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x-3}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x-3}\right)}{x+\sqrt{x^2+5x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+5x-3}\right)^2}{x+\sqrt{x^2+5x-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2-5x+3}{x+\sqrt{x^2+5x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-5x+3}{x+\sqrt{x^2+5x-3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right];$$

Поскольку $\sqrt{x^2+5x-3} = |x|\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)$,

рассмотрим два случая 1) поведение функции при $x \to +\infty$;2) при $x \to -\infty$:

$$1) \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x+3}{x+|x|\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-5+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-5+\frac{3}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \frac{-5}{2} = -2{,}5;$$

$$2)\lim_{x\to -\infty}\frac{-5x+3}{x+|x|\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-5+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1-\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{-5+\frac{3}{x}}{1-\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}}=\frac{-5}{0}=-\infty;$$

Таким образом,

при $x\to+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x-3}\right)=-2{,}5;$

при $x\to-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x-3}\right)=-\infty.$

ГЛАВА 2. ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛЫ И ИХ СЛЕДСТВИЯ.

2.1. Первый замечательный предел и его следствия.

Замечательных пределов существует несколько, но самыми известными являются первый и второй замечательные пределы. Замечательность этих пределов состоит в том, что они имеют широкое применение и с их помощью можно найти другие пределы, встречающиеся в многочисленных задачах. Этим мы и будем заниматься на практике, а сейчас рассмотрим первый замечательный предел.

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \; (2.1)$$

Предел вида (2.1) называется **первым замечательным пределом.**

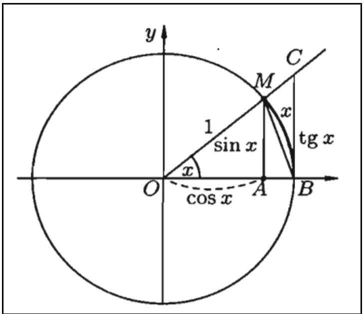

Рис.5

Особенности первого замечательного предела:

1) Так как $\sin x \to 0$ при $x \to 0$, то имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$;

2) В данном пределе рассматривается отношение синуса некоторого аргумента к этому аргументу (x – измеряется в радианах) при стремлении аргумента к нулю.

Рассмотрим, как выводится данная формула.

Возьмем круг радиуса 1, обозначим радианную меру $< MOB$ через x (см. рис. 5).

Пусть $0 < \ x < \frac{\pi}{2}$. На рисунке $\frac{|AM|}{|OM|} = \sin x$, то есть $\sin x = |AM|$, дуга $MB =< x$, $|BC| = \frac{\sin x}{\cos x} = tgx$, то есть $tgx = \frac{|AM|}{|OA|}$. Очевидно, что $S_{\Delta MOB} < S_{\text{сектора}MOB} < S_{\Delta COB}$.

Очевидно, что $S_{\Delta MOB} < S_{\text{сек.}MOB} < S_{\Delta COB}$. На основании соответствующих формул геометрии $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, $S_{\text{сектора}} = \frac{1}{2}R^2\alpha$, получаем:

$$S_{\Delta MOB} = \frac{1}{2}OM \cdot OB = \frac{1}{2}\sin x,$$

$$S_{\Delta COB} = \frac{1}{2}OB \cdot CB = \frac{1}{2}tgx,$$

$S_{\text{сек.}MOB} = \frac{1}{2}x$, следовательно, выполняется неравенство:

$$\frac{1}{2}sinx < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx \Big| \cdot \frac{2}{sinx},$$
$$1 < \frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx},$$
$$cosx < \frac{sinx}{x} < 1,$$

Переходя к пределу при $x \to 0$, учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0} cosx = 1, \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ по теореме (о пределе промежуточной функции) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1.$$

Следствия из первого замечательного предела.

Из первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$ несложно вывести следующие пределы:

$$1)\ \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1;}$$
$$2)\ \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1;}$$
$$3)\ \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1;}$$
$$4)\ \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{\frac{x^2}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1.}$$

Опираясь на первый замечательный предел, докажем каждое из этих равенств:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{sinx}{cosx}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx} = 1;$$
$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x} = \left|\begin{matrix} t = arcsinx \\ x = sint \\ \text{при} x \to 0, t \to 0 \end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{t}{sint} = 1;$$
$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x} = \left|\begin{matrix} t = arctgx \\ x = tgt \\ \text{при} x \to 0, t \to 0 \end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{t}{tgt} = 1;$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1.$$

Пример 2.1. Вычислить предел: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$;
б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{tg3x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 3x}{5x^2}$;**г)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)x}{arctg5x}$.

Решение.

а) Подставляя предельное значение, получим неопределённость$\left[\frac{0}{0}\right]$,чтобы устранить её, учитывая, что в пределе находится тригонометрическая функция- $\sin 3x$, построим первый замечательный предел для этого числитель и знаменатель дроби умножим и разделим на 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3;$$

б) Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{tg3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}\cdot\frac{tg5x}{5x}\cdot\frac{3x}{tg3x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{tg3x}=\frac{5}{3};$$

в) Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 3x}{5x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{9}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{3x}=\frac{9}{5};$$

г) Так как $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$,
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-cosx)x}{arctg5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{5x}{arctg5x}\cdot$$
$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{\frac{x^2}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0.$$

Замечание: при расчете некоторых пределов $\lim_{x\to x_0}f(x)$,когда переменная в пределе не стремится к нулю, удобно переходить к новой переменной $t=x-x_0$.

Пример 2.2. Вычислить:

а)$\lim_{x\to 2}\frac{sin(x-2)}{2x-4}$;**б)** $\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\frac{\pi x}{2}$;

в) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{arctg(x-2)}$; **г)**$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx.$

Решение.

а) Подставляем предельное значение, получаем неопределённость$\left[\frac{0}{0}\right]$,поскольку переменная, относительно которой вычисляется предел не стремится к нулю, для удобства сделаем подстановку $t=x-2\to 0$,предварительно преобразовав выражение под знаком предела, имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{sin(x-2)}{2x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x-2\to 0}\frac{sin(x-2)}{2(x-2)}=$$
$$=\begin{vmatrix}t=x-2\\x=t+2\end{vmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{sint}{2t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{sint}{t}=\frac{1}{2};$$

б) $\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]$, поскольку мы имеем дело с неопределённость$[0\cdot\infty]$,то согласно правилу избавления от данного вида неопределённости, с помощью алгебраического преобразования перейдём к пределу вида$\left[\frac{0}{0}\right]$,далее сделав замену $t=x-1$, учитывая, что $ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$ получим:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{ctg\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=-\lim_{x-1\to 0}\frac{x-1}{ctg\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\begin{vmatrix}t=x-1\\x=t+1\end{vmatrix}=$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{t}{ctg\frac{\pi(t+1)}{2}}=-\lim_{t\to 0}\frac{t}{ctg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2}\right)}=$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{t}{-tg\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{tg\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi};$$

в) Сделаем подстановку $t=x-2\to 0$, предварительно преобразовав выражение под знаком предела и учитывая, что $arctgt\sim t$,при $t\to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{arctg(x-2)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{arctg(x-2)}=$$

$$=\begin{vmatrix}t=x-2\\x=t+2\end{vmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{t((t+2)^2+2(t+2)+4)}{arctgt}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t((t+2)^2+2(t+2)+4)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}((t+2)^2+2(t+2)+4)=12;$$

г) Сделаем подстановку $t=x-\frac{\pi}{2}\to 0$, предварительно преобразовав выражение под знаком предела и учитывая, что $tg\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-ctgt$ имеем:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx=[0\cdot\infty]=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot tgx=$$

$$=\begin{vmatrix}t=x-\frac{\pi}{2}\to 0\\x=t+\frac{\pi}{2}\end{vmatrix}=-\lim_{t\to 0}t\cdot tg\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=-\lim_{t\to 0}t\cdot(-ctgt)=\lim_{t\to 0}t\cdot ctgt=$$

$$=[0\cdot\infty]=\lim_{t\to 0}\frac{t}{tgt}=1.$$

2.2. Второй замечательный предел и его следствия.

Предел вида $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (2.2)

называется **вторым замечательным пределом.**

Особенности второго замечательного предела:

1) Так как $\frac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$, то имеем неопределенность вида $[1^\infty]$;

2) В показателе степени стоит бесконечно большая величина, второе слагаемое суммы в скобках – обратная ей величина – бесконечно малая;

3) $e = 2{,}71828\ldots$ – число Непера, основание натуральных логарифмов.

В силу громоздкости доказательства, примем эту формулу без доказательств.

Замечание: при $x\to 0$ формула второго замечательного предела принимает вид (2.3)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = e \quad (2.3)$$

Пример 2.3. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$; **г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+8}\right)^{5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.

.

Решение.

а) Очевидно, что имеет место неопределённость

$[1^{\infty}]$, поэтому воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=[1^{\infty}]=e$ предварительно построив его- умножив и разделив показатель степени на 3 имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=[1^{\infty}]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=e^{3};$$

б) Неопределённость вида $[1^{\infty}]$,при этом $x\to 0$.Построим второй замечательный предел, применяя формулу $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=[1^{\infty}]=e$:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+2x}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=[1^{\infty}]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2}=e^{2};$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=[1^{\infty}]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(x-2)+3}{x-2}\right)^{2x-1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right]^{\frac{3(2x-1)}{x-2}}=$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2x-1)}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3\left(2-\frac{1}{x}\right)}{1-\frac{2}{x}}}=e^{6};$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^{2}-1}{2x^{2}+8}\right)^{5x}=[1^{\infty}]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(2x^{2}+8)-9}{2x^{2}+8}\right)^{5x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-9)}{2x^{2}+8}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{(-9)}{2x^{2}+8}\right)^{\frac{2x^{2}+8}{-9}}\right]^{\frac{-45x}{2x^{2}+8}}=$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-45x}{2x^{2}+8}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-45x}{x^{2}\left(2+\frac{8}{x^{2}}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-45}{x\left(2+\frac{8}{x^{2}}\right)}}=$$
$$=e^{0}=1;$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 3x}}=[1^{\infty}]=$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+sin2x)^{\frac{1}{sin2x}}\right]^{\frac{sin2x}{sin3x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin2x}{sin3x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{sin3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}} = e^{\frac{2}{3}}.$$

Следствия из второго замечательного предела.

Разберём те формулы, которые можно получить, используя второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, а именно следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{1}{lna}; a > 0; a \neq 1;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1;$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = lna;$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x} = k; k\epsilon R.$

Докажем каждое из этих равенств:

1)Учитывая, что $lnx^p = plnx$ и $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot ln(1+x) =$$

$$= \lim_{x\to 0}ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = lne = 1;$$

2) Учитывая, что$log_a b = \frac{lnb}{lna}$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{lna\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{lna}=\frac{1}{lna};$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix} t=e^x-1 \\ t+1=e^x \\ ln(t+1)=lne^x \\ ln(t+1)=xlne \\ ln(t+1)=x \\ \text{при } x\to 0, t\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{ln(1+t)}{t}}=1;$$

4)Учитывая, что $a^{log_a b}=b$, то есть $e^{log_e a^x}=e^{lna^x}=a^x$, отсюда имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{lna^x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{xlna}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{xlna}-1}{xlna}\cdot\lim_{x\to 0}lna=lna;$$

5) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ln(1+x)^k}-1}{x}=$$

$$=k\lim_{x\to 0}\frac{e^{kln(1+x)}-1}{kln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=k.$$

Пример 2.4. Вычислить:

а) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot ln(1+2x)$;**б)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$;

в) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$.

Решение.

а) При подстановки предельного значения имеем дело с неопределённостью$[0\cdot\infty]$,с помощью алгебраических преобразований перейдём к пределу вида$\left[\frac{0}{0}\right]$ и учитывая, что $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$ получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot ln(1+2x)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+2x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+2x)}{2x} = 2;$$

б) Зная, что $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$ имеем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}(e^x - 1)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} e^{2x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = e^0 \cdot 1 = 1;$$

в) Так как $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = lna$ получим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{(a^x - 1) - (b^x - 1)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{b^x - 1}{x} = lna - lnb = ln\frac{a}{b}.$$

2.3. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$,то есть $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ и $\lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.

Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, то есть по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $\alpha(x) = x^5$ стремится к нулю быстрее, чем функция $\beta(x) = x$.

Запишем следующие определения:

1) Если $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция $\beta(x)$.

Обозначение: $\boldsymbol{\alpha(x) = \bar{\bar{0}}(\beta(x))}$.

Например, если $\alpha(x) = x^5$,$\beta(x) = x$ бесконечно малые функции при $x \to 0$,то $\alpha(x) = x^5$ – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\beta(x)$,так как

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^5}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0$,то есть $\alpha(x)$ стремится к нулю быстрее, чем функция $\beta(x)$.

2) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то **функция $\alpha(x)$** называется **бесконечно малой более низкого порядка**, чем функция $\beta(x)$.

Например, $\alpha(x) = tgx$,$\beta(x) = x^3$ **-**бесконечно малые функции при $x \to 0$,вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = 1\cdot\frac{1}{0} = \infty$,следовательно, $\alpha(x) = tgx$ бесконечно малая функция более низкого порядка, чем $\beta(x) = x^3$,то есть стремится к нулю медленнее, чем функция$\beta(x)$.

3) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \neq \mathbf{0}$,то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми функциями одного порядка.**

Например, $\alpha(x) = x^3 - 2x$ и $\beta(x) = x^3 + 2x^2 + x$ **-**бесконечно малые функции при $x \to 0$, вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3 - 2x}{x^3 + 2x^2 + x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x^3 - 2x}{x^3 + 2x^2 + x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3 - 2x}{x^3 + 2x^2 + x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x^2 - 2)}{x(x^2 + 2x + 1)} =$$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2}{x^2+2x+1} = -2 \neq 0$,следовательно, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми функциями одного порядка.

4)Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \mathbf{1}$,то функции $\boldsymbol{\alpha(x)}$ и $\boldsymbol{\beta(x)}$ называются **эквивалентными бесконечно малыми функциями**.

Обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Например, $\alpha(x) = sinx, \beta(x) = x$ эквивалентные бесконечно малые функции, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1,$$

то есть $sinx \sim x$, при $x \to 0$.

Замечание: если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \nexists$, то $\alpha(x), \beta(x)$ называют несравнимыми бесконечно малыми функциями.

Пример 2.5. Сравнить порядок бесконечно малых функций:

а) $\alpha(x) = x^3, \beta(x) = x^2 - x, x \to 0$;
б) $\alpha(x) = sinx, \beta(x) = x^4, x \to 0$;
в) $\alpha(x) = sin^2x, \beta(x) = 2x^2, x \to 0$;
г) $\alpha(x) = tgx, \beta(x) = x, x \to 0$.

Решение.

а) Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-1} = \frac{0}{-1} = 0,$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, следовательно, $\alpha(x) = x^3$ – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\beta(x) = x^2 - x$, то есть стремится к нулю быстрее, чем функция $\beta(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3} =$

$= 1 \cdot \frac{1}{0} = \infty$, следовательно, $\alpha(x) = sinx$ – бесконечно малая функция более низкого порядка, чем $\beta(x) = x^4$, то есть стремится к нулю медленнее, чем функция $\beta(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2x}{2x^2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x} \cdot$

$\cdot \lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = \frac{1}{2} \neq 0$, следовательно,

$\alpha(x) = \sin^2 x, \beta(x) = 2x^2$ –бесконечно малые функции одного порядка;

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{x} = 1$,следовательно, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми функциями, то есть $tgx\sim x, x\to0$.

Эквивалентные бесконечно малых функции.

Как мы заметили ранее, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$,то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми функциями. Эквивалентные — значит равносильные

Приведём примеры эквивалентных бесконечно малых функций:

$$\sin x\sim x, x\to0,\ tgx\sim x, x\to0, \arcsin x\sim x, x\to0,$$
$$arctgx\sim x, x\to0, 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}, x\to0;$$

Действительно, так как мы показывали ранее, что $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1, \lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{x} = 1, \lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x} = 1,$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{arctgx}{x} = 1, \lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$(см. первый замечательный предел и его следствия).

Теорема 2.1. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

Доказательство.

Пусть $\alpha\sim\alpha'$и $\beta\sim\beta'$ при $x\to x_0$.Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha'}\cdot\frac{\beta'}{\beta'} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta'}{\beta}\cdot$$
$$\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'} = 1\cdot1\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}$$,то

есть $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}$.

Понятно, что $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta'}$.

Теорема 2.2. Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них.

Доказательство.

Пусть $\alpha \sim \beta$ при $x \to x_0$.Тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim_{x \to x_0} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 - \lim_{x \to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0,$$

аналогично, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha - \beta}{\beta} = 0.$

Заметим, что обратное утверждение так же верно.

Теорема 2.3. Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Доказательство.

Докажем теорему для двух функций.

Пусть $\alpha \to 0, \beta \to 0$ при $x \to x_0$, причем α - б.м.ф. высшего порядка, чем β, то есть

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0.$$

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} + 1 =$

$= 0 + 1 = 1.$

Следовательно, $\alpha + \beta \sim \beta$ при $x \to x_0$.

Слагаемое, эквивалентное сумме бесконечно малых, называется **главной частью этой суммы**. Замена суммы б.м.ф. ее главной частью называется отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка.

Пример 2.6. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x + 4x^2}{\sin 4x}$.

Решение.

Учитывая, что $\sin 4x \sim 4x$,при $x \to 0$;

$x + 4x^2 \sim x$, при $x \to 0$,так как

x –б.м.ф. более низкого порядка, чем $4x^2$, действительно, $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{4x^2}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$,

поэтому имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{x+4x^2}{\sin 4x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}.$$

2.5. Применение бесконечно малых функций к вычислению пределов.

Во многих задачах на вычисление пределов можно заменить некоторую бесконечно малую функцию, эквивалентной бесконечно малой функцией, так как предел их отношения при этом не изменится. Данное действие значительно упрощает решение задачи.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to x_0$.Запишем основные эквивалентные бесконечно малые функции в таблицу, которой очень удобно пользоваться при нахождении пределов. Замена производится на основе таблицы.

$\sin(\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$tg(\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$arctg(\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$\arcsin(\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$1-\cos(\alpha(x))$	$\sim$	$\frac{\alpha^2(x)}{2}$
$\ln(1+\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$e^{\alpha(x)}-1$	$\sim$	$\alpha(x)$
$a^{\alpha(x)}-1$	$\sim$	$\alpha(x)\ln a$

$\left(1+\alpha(x)\right)^k-1$	$\sim$	$k\alpha(x)$

Эквивалентность всех функций, указанных в таблице, доказывается, основываясь на равенстве $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Пример 2.7. Вычислить предел: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x}{arctg3x}$;**в)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{\arcsin\frac{x}{5}}$;

Решение.

а)<u>1 способ </u>(строим первый замечательный предел)

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=7\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=7;$$

<u>2 способ </u>(используем таблицу эквивалентных бесконечно малых функций)

Учитывая, что $\sin 7x\sim 7x$, при $x\to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{x}=7.$$

б)<u> 1 способ </u>(воспользуемся следствием первого замечательного предела)

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg4x}{arctg3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{tg4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{arctg3x}=\frac{4}{3};$$

<u>2 способ </u>(используем таблицу эквивалентных бесконечно малых функций)

Учитывая, что $tg4x\sim 4x$, $arctg3x\sim 3x$при $x\to 0$ имеем:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x}{arctg3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}.$

в) 1 способ

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1,$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=1$имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{arcsin\frac{x}{5}}=\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{3}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{5}}{arcsin\frac{x}{5}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3}\cdot\frac{5}{x}=\frac{5}{3};$$

2 способ

Учитывая, что $arcsin\frac{x}{5}\sim\frac{x}{5}, x\to 0\;\; ln\left(1+\frac{x}{3}\right)\sim\frac{x}{3}$при $x\to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{arcsin\frac{x}{5}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3}}{\frac{x}{5}}=\frac{5}{3}.$$

2.6. Практическое вычисление пределов по теме: первый замечательный предел и его следствия.

Пример 2.8. Вычислить пределы от тригонометрических функций:

а)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 10x}$;**б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\frac{x}{2}}{x}$;**в)**$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$;**д)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$;

е)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos2x+tg^2x}{xsinx}$;**ё)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+sinx-cos2x}{sin^2x}$.

Решение.

а) Так как $sint\sim t$, при $t\to 0$,то

$sin10x\sim 10x, sin3x\sim 3x,$ при $x\to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 10x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{10x}=\frac{3}{10};$$

б) Так как $tgt\sim t$, при $t\to 0$,то

$arctg\,\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}$, при $x\to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,\frac{x}{2}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2};$$

в) Так как $1-cost\sim\frac{t^2}{2}$, при $t\to 0$,то

$1-\cos 3x\sim\frac{(3x)^2}{2}=\frac{9x^2}{2}$,

$1-\cos 5x\sim\frac{(5x)^2}{2}=\frac{25x^2}{2}$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{25x^2\cdot 2}{2\cdot 9x^2}=\frac{25}{9};$$

г) Так как $sint\sim t$, при $t\to 0$,то

$sin3x\sim 3x$, при $x\to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3-\sqrt{2x+9}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\left(3+\sqrt{2x+9}\right)}{\left(3-\sqrt{2x+9}\right)\left(3+\sqrt{2x+9}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x(3+\sqrt{2x+9})}{9-2x-9}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{3x(3+\sqrt{2x+9})}{2x}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\left(3+\sqrt{2x+9}\right)=-9;$$

д) Учитывая, что $cos\alpha-cos\beta=-2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$,

$tg^2 2x\sim(2x)^2=4x^2$, при $x\to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-2sin\frac{4x}{2}sin\frac{2x}{2}}{4x^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{sin2xsinx}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=-1;$$

е) $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos2x+tg^2x}{xsinx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2x+tg^2x}{xsinx}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2x+\frac{sin^2x}{cos^2x}}{xsinx}=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x(2cos^2x+1)}{cos^2x\cdot xsinx}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2(2cos^2x+1)}{x^2cos^2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2cos^2x+1}{cos^2x} = 3;$$

ё) $\lim_{x\to 0}\frac{1+sinx-cos2x}{sin^2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{sin^2x+cos^2x+sinx-cos^2x+sin^2x}{sin^2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2sin^2x+sinx}{sin^2x} = \lim_{x\to 0}\left(2+\frac{1}{sinx}\right) = \infty.$$

Пример 2.9. Вычислить:

а) $\lim_{x\to 1}\frac{sin(x-1)}{x^2-3x+2}$;**б)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot ctg2x$;

в) $\lim_{x\to 1}\frac{sin\pi x}{sin3\pi x}$;**г)** $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{arcsin(x+1)}$;

д) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cosx-sinx}{x-\frac{\pi}{4}}$;**е)** $\lim_{\alpha\to\beta}\frac{sin^2\alpha-sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

Решение.

а) Подставляем предельное значение, получаем неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$,поскольку переменная относительно которой вычисляется предел, не стремится к нулю для удобства сделаем подстановку $t = x-1 \to 0$, предварительно преобразовав выражение под знаком предела имеем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{sin(x-1)}{x^2-3x+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x-1\to 0}\frac{sin(x-1)}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \left|\begin{matrix} t = x-1\to 0 \\ x = t+1 \end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{sint}{t(t+1-2)} = \lim_{t\to 0}\frac{sint}{t(t-1)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{sint}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{t-1} = -1;$$

б) Так, как под знаком предела неопределённость $[0\cdot\infty]$,с помощью алгебраических преобразований перейдём к пределу вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и сделаем подстановку

$t = x - \frac{\pi}{2} \to 0$ учитывая, что $ctg(\pi + \alpha) = ctg\alpha$, и $tg2t \sim 2t$, при $t \to 0$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)ctg2x = [0\cdot\infty] = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)ctg2x =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x - \frac{\pi}{2}}{tg2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{matrix} t = x - \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + t \end{matrix}\right| =$$

$$= -\lim_{t\to 0}\frac{t}{tg2\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} = -\lim_{t\to 0}\frac{t}{tg(\pi + 2t)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= -\lim_{t\to 0}\frac{t}{tg2t} == -\lim_{t\to 0}\frac{t}{2t} = -\frac{1}{2};$$

в) Преобразуем выражение под знаком предела и сделаем подстановку $t = x - 1$ и учитывая, что $sin(\pi + \alpha) = -sin\alpha$; $sin\pi t \sim \pi t, sin3\pi t \sim 3\pi t$, при $t \to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{sin\pi x}{sin3\pi x} = \lim_{x-1\to 0}\frac{sin\pi x}{sin3\pi x} = \left|\begin{matrix} t = x - 1 \\ x = t + 1 \end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{sin\pi(t+1)}{sin3\pi(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{sin(\pi t + \pi)}{sin(3\pi t + 3\pi)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-sin\pi t}{-sin3\pi t} = \lim_{t\to 0}\frac{sin\pi t}{sin3\pi t} = \lim_{t\to 0}\frac{\pi t}{3\pi t} = \frac{1}{3};$$

г) Преобразуем выражение под знаком предела и сделаем подстановку $t = x + 1$ и учитывая, что $arcsint \sim t, t \to 0$,и $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ имеем:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{arcsin(x+1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x+1\to 0}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{arcsin(x+1)} =$$

$$= \left|\begin{matrix} t = x + 1 \to 0 \\ x = t - 1 \end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{t((t-1)^2 - (t-1) + 1)}{arcsint} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t((t-1)^2 - (t-1) + 1)}{t} = \lim_{t\to 0}((t-1)^2 - (t-1) + 1) = 3;$$

д) Сделаем подстановку $t = x - \frac{\pi}{4}$ и учитывая, что

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, имеем:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{x-\frac{\pi}{4}} = \left| \begin{matrix} t = x - \frac{\pi}{4} \\ x = t + \frac{\pi}{4} \end{matrix} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos t\cos\frac{\pi}{4} - \sin t\sin\frac{\pi}{4} - (\sin t\cos\frac{\pi}{4} + \cos t\sin\frac{\pi}{4})}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t - \sin t - \cos t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(-2\sin t)}{t} =$$

$$= -\sqrt{2}\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = -\sqrt{2};$$

е) Преобразуем выражение под знаком предела и сделаем подстановку $t = \alpha - \beta$ и учитывая, что $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$,

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, а $\sin\frac{t}{2} \sim \frac{t}{2}$, при $t \to 0$ имеем:

$$\lim_{\alpha\to\beta} \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\alpha^2 - \beta^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\alpha-\beta\to 0} \frac{(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\alpha + \sin\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} =$$

$$= \lim_{\alpha-\beta\to 0} \frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \alpha - \beta \to 0 \\ \alpha = t + \beta \end{matrix} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t+2\beta}{2} \cdot 2\sin\frac{t+2\beta}{2}\cos\frac{t}{2}}{t\cdot(t+2\beta)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{4\cdot\frac{t}{2}\cos\frac{t+2\beta}{2}\sin\frac{t+2\beta}{2}\cos\frac{t}{2}}{t\cdot(t+2\beta)} =$$

$$= 2\lim_{t\to 0} \frac{\cos\frac{t+2\beta}{2}\cdot\sin\frac{t+2\beta}{2}\cos\frac{t}{2}}{t+2\beta} =$$

$$= \frac{2\sin\beta\cos\beta}{2\beta} = \frac{\sin 2\beta}{2\beta}.$$

2.7. Практическое вычисление пределов по теме: второй замечательный предел и его следствия.

Пример 2.10. Вычислить: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{ctg^2 x}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot ln\left(1-\frac{3}{x}\right)=[\infty\cdot 0]$;

в)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(x+4)-ln\,4}{x}$; г)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$;д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2 3x}{ln^2(1+2x)}$;**ё)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(\cos x)}{ln(1+x^2)}$; **ж)**$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{sin^2\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)}{ln\left(\frac{n+10}{n}\right)}$.

Решение.

а) Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=[1^\infty]=e$ и $sin^2 x\sim x^2$,при $x\to 0$, имеем:

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{ctg^2 x}=[1^\infty]=\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{cos^2 x}{sin^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{cos^2 x}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{cos^2 x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}cos^2 x}=e^0=1;$$

б) Учитывая, что $ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}$,при $x\to\infty$ имеем:

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot ln\left(1-\frac{3}{x}\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\frac{ln\left(1+\left(-\frac{3}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}=-3;$$

в)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(x+4)-ln\,4}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\left(\frac{x+4}{4}\right)}{x}=$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{ln\left(\frac{x}{4}+1\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{4}}{x} = \frac{1}{4};$$

г) Так как $e^x - 1 \sim x$,при $x \to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(e^x-1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\cdot x}{x} = \lim_{x\to 0} e^{2x} = 1;$$

д) Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = lna$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)-(b^x-1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x} = lna - lnb = ln\frac{a}{b};$$

е) Так как $ln^2(1+2x) \sim (2x)^2$,
$sin^2 3x \sim (3x)^2$ при $x \to 0$,имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 3x}{ln^2(1+2x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{4x^2} = \frac{9}{4};$$

ё) Так как $ln(1+(cosx-1)) \sim cosx - 1$,
$ln(1+x^2) \sim x^2$,при $x \to 0$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(cos\,x)}{ln(1+x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+(cosx-1))}{ln(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{cos\,x-1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2};$$

ж) Для начала избавимся от неопределённости $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ в аргументах синуса и логарифма, для этого вынесем старшие степени:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+10}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n}\right) = 1;$$

Таким образом,мы имеем дело с неопределённостью$\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)}{\ln\left(\frac{n+10}{n}\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)}{\ln\left(1+\frac{10}{n}\right)};$$

Так как

$\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)\sim\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^2$, при $n\to\infty$;

$\ln\left(1+\frac{10}{n}\right)\sim\frac{10}{n}$, при $n\to\infty$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)}{\ln\left(1+\frac{10}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^2}{\frac{10}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}}{\frac{10}{n}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot 10}=$$

$$=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{1}{10}.$$

Задания для самостоятельного решения.

1.Вычислить пределы:

1.	$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-x}$	**16.**	$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^3-27}$
2.	$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 5^n-3^n}{2\cdot 5^n+2^n}$	**17.**	$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$
3.	$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x-4}{2x-5}$	**18.**	$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^4+n^3}-\sqrt[3]{n^4-n^3}\right)$

4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-x+1}{6x^5-5x-5}$	**19.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$
5.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$	**20.**	$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$
6.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-x}{3x+5}$	**21.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$
7.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^3+x-4}{x^2-1}$	**22.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{5x^2+1}-\dfrac{x^2}{5x-3}\right)$
8.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^3-4x^2-5x+6}{x^3+x-2}$	**23.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$
9.	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}{x^2-4}$	**24.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$
10.	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+5}}{x^3-8}$	**25.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-3}-x\right)$
11.	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9-x^2}-3}{\sqrt{16-x^2}-4}$	**26.**	$\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$
12.	$\lim\limits_{x\to9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{5-\sqrt{2x+7}}$	**27.**	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^3+x-4}{x^2-1}$
13.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3-1}}$	**28.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x+1}+\sqrt{2x^3+1}}{5\cdot\sqrt[4]{x^6+x+2}-x}$
14.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-10^n}{2+10^{n+1}}$	**29.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5\cdot3^{2x}+1}{4-3^{2x}}$
15.	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+6x-16}{x^2-4}$	**30.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

Ответы:1.1.1.**1.2.** $\frac{3}{2}$.**1.3**. ∞. **1.4.**0. **1.5.** при $x\to+\infty\Rightarrow1;$

при $x \to -\infty \Rightarrow -1$. **1.6.** $\frac{1}{3}$. **1.7.**5. **1.8.** -1.**1.9.** $\frac{1}{8}$. **1.10.** $\frac{\sqrt{11}}{132}$.

1.11. $\frac{4}{3}$. **1.12.** $\frac{5}{6}$.**1.13.**2 . **1.14.**-$\frac{1}{10}$. **1.15.** $\frac{5}{2}$.

1.16. $\frac{1}{27}$. **1.17.**24. **1.18.** ∞.**1.19.**1. **1.20.** $\frac{1}{2}$**1.21.**1.

1.22. $-\frac{3}{25}$.**1.23.** 0. **1.24.**0.**1.25.**0.**1.26.** $\frac{1}{2}$.**1.27.24.1.28.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$.**1.29.** при $x \to +\infty \Rightarrow -5$; при $x \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{4}$.**1.30.** $\frac{1}{2}$.

2.Вычислить пределы от тригонометрических функций:

1.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2(3x)}{sin^2(2x)}$	**16.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x - sinx}{x^3}$
2.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - cosx}{x^2}$	**17.**	$\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1 - sin\frac{x}{2}}{\pi - x}$
3.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{sin\,(6\pi x)}{sin\,(\pi x)}$	**18.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - cos\,3x}{x^2}$
4.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{sin\,5x}$	**19.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2\frac{x}{2}}{1 - cosx}$
5.	$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctgx$	**20.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - cos2x}{1 - cos3x}$
6.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos5x - cos\,3x}{x^2}$	**21.**	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{sin\pi x}{sin5\pi x}$
7.	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{sin\,2x}{tg4x}$	**22.**	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{tg(x^2-9)}{x^3+2x^2-9x-18}$

8.	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$	**23.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+5x}{ctgx(1-\cos^2 4x)}$
9.	$\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}$	**24.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$
10.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{4x^2 tgx}$	**25.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin 3x}$
11.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,tg\,x-\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}$	**26.**	$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$
12.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x}{\sin x}$	**27.**	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}-2\cos x}{\cos 3x}$
13.	$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg5x$	**28.**	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$
14.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{1-\cos x}$	**29.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$
15.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{1-\cos 2x}$	**30.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^3+2x)}{2x-x^4}$

Ответы: 2.1.2,25.**2.2.** 0,5.**2.3.**-6.**2.4.** 0,4.**2.5.** 1. **2.6.** -8.**2.7.** – 0,5.**2.8.** $\frac{1}{2}$.**2.9.** $\frac{1}{2\pi}$.**2.10.** $\frac{1}{4}$.**2.11.**0.**2.12.**4 .**2.13.** $\frac{1}{5}$. **2.14.10** .**2.15.** ∞ .**2.16.** $\frac{1}{2}$. **2.17.**.0. **2.18.** $\frac{9}{2}$ . .**2.19.**$\frac{1}{2}$.**2.20.**$\frac{4}{9}$.**2.21.**$\frac{1}{5}$.**2.22.**$\frac{1}{5}$.**2.23.**$\frac{5}{16}$.**2.24.**4.**2.25.**$-\frac{5}{3}$.**2.26.**- $\frac{1}{2}$.**2.27.** $-\frac{1}{3}$. **2.28.** $\sqrt{2}$.**2.29.** $-\frac{1}{4}$.**2.30.**1.

3. Вычислить пределы:

1.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}$	**16.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{3x^2-2}\right)^{5x^2+1}$
2.	$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}$	**17.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n+1}$
3.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5-x}{6-x}\right)^{x+2}$	**18.**	$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 3x)^{ctg 2x}$
4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2}$	**19.**	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(3-x)}{x-2}$
5.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{x}$	**20.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1-x)}$
6.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n-1}$	**21.**	$\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$	**22.**	$\lim\limits_{x\to\infty}(4x+9)\ln\left(\frac{3x-5}{3x+2}\right)$
8.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x}\right)^{4x-1}$	**23.**	$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^3)^{\frac{1}{x^3}}$
9.	$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$	**24.**	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$
10.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-1}{4^x-1}$	**25.**	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$

11.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{x}$	**26.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(x+a)-ln\,a}{x}$
12.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+sin2x)^{\frac{1}{x}}$	**27.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x^2)}{tg^2 8x}$
13.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\ tgx)^{ctgx}$	**28.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^{x}-1)}{1-cosx}$
14.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\,4x}{ln(1+3x)}$	**29.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{ln(1-4x)}$
15.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{sin5x}-e^{sinx}}{ln(1+2x)}$	**30.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2 5x}{xln(1+x)}$

Ответы: 3.1. e^5**.3.2.** e^5**.3.3.** e**.3.4.** e^4.
3.5. e^{10}**3.6.** $\frac{1}{e^2}$**.3.7.** $\frac{1}{e^2}$**.3.8.** $\frac{1}{e^6}$. **3.9.** $\frac{1}{e}$ **.3.10.** $log_4 7$.
3.11. 1**.3.12.** e^2 **.3.13** e. **3.14.** $\frac{4}{3}$**.3.15.**2 **.3.16.** e^5.
3.17. e^2**.3.18.**$\frac{1}{e\sqrt{e}}$**.3.19.**-1**.3.20.**1**.3.21.**1**.3.22.**$-\frac{28}{3}$**.**
3.23. e^{-2}**.3.24.**$\frac{1}{\sqrt{e}}$**.3.25.**$e^{\frac{3}{2}}$**.3.26.**$\frac{1}{a}$**.3.27.**$\frac{1}{64}$ **.3.28.**2.
3.29. $-\frac{1}{2}$**. 3.30.**25.

ГЛАВА 3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ.

3.1. Односторонние пределы

Если $f(x)\to A_1$ при $x\to\ x_0$только при $x<\ x_0$ (рис.6), то $\lim\limits_{x\to\ x_0-0} f(x)=A_1$ называется пределом функции $f(x)$ в точке слева $x=\ x_0$;

Обозначение: $\lim\limits_{x\to\ x_0-0} f(x)=A_1$

Если $f(x)\to A_2$ при $x\to\ x_0$только при $x>\ x_0$(рис.6), то $\lim\limits_{x\to\ x_0+0} f(x)=A_2$ называется пределом функции $f(x)$ в точке справа $x = x_0$;

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A_2$

Таким образом, под односторонним пределом функции подразумевают «приближение» к предельной точке с одной стороны.

Пределы функции слева и справа называются также **односторонними пределами** функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

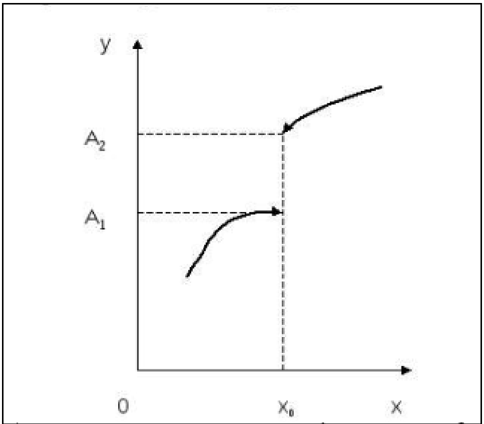

Рис.6

3.2. Непрерывность и точки разрыва функции.

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если она определена в некоторой двусторонней окрестности этой точки, включая и саму эту точку, и при этом

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = \lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0) \quad (3.1)$$

Равенство (3.1) равносильно равенству (3.2)

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \quad (3.2)$$

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной на промежутке**, если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

Другими словами, когда мы слышим термин «непрерывная функция», мы представляют себе линию, которую можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги. Примером, может служить график обычной параболы.

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются **точками разрыва функции.**

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), то есть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$.

При этом:

1)если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**, то есть функция имеет устранимый разрыв первого рода в точке x_0 , когда пределы справа и слева равны, но не равны значению функции в точке x_0. Например, парабола, но с выколотой точкой (см.рис.7).

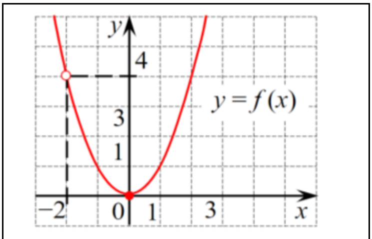

Рис.7.

2) если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то точка x_0 называется **точкой конечного разрыва,** то есть функция имеет неустранимый (конечный) разрыв I рода в точке x_0 , если пределы справа и слева не явля-

ются равными. Величину $|A_1 - A_2|$ называют

скачком функции в точке разрыва I рода.

Например, функция может быть определена на всей числовой прямой — и всё равно иметь точку разрыва (см.рис.8), в точке $x_0 = 0$ происходит скачкообразное изменение, скачок функции равен 2.

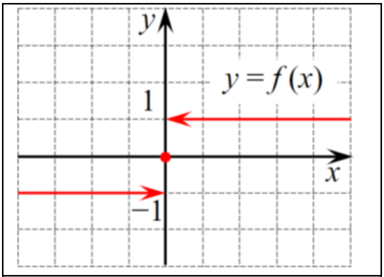

Рис.8

Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности. Например, классическая гипербола $y = \dfrac{1}{x}$, которая не определена в точке $x_0 = 0$, а график «уходит» в бесконечность в окрестности этой точки (рис.9).

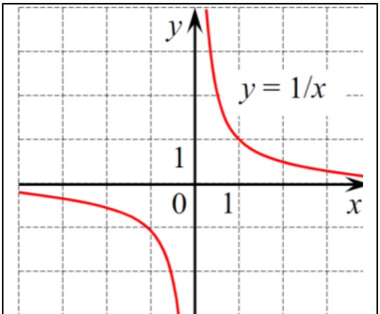

Рис.9

Таким образом, проблемы с непрерывностью возникают там, где функция «уходит» в бесконечность, либо меняется скачкообразно, либо вообще не определена.

Пример 3.1. Найти точки разрыва функций и исследовать их характер:

а) $f(x)=\begin{cases} x+4, & x\le -1\\ x^2+2, & -1<x<1\\ 2x, & x\ge 1\end{cases}$; **б)** $f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-4}$;

в) $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение.

а) Для наглядности построим график заданной функции (см.рис.10):

По определению функции, непрерывной в точке:
$f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$;
Функция непрерывна всюду, за исключением, возможно, точек $x=\pm1$, в которых происходит смена значений функции.
Проверим на непрерывность точки $x=\pm1$-точки предполагаемого разрыва.

1) $x=1$;

$\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}(x^2+2)=$

$\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to1+0} 2x=2$;

$f(1)=2$;

$f(1-0)\ne f(1+0)$,следовательно,

$x=1$ -точка разрыва I рода, точка скачка.

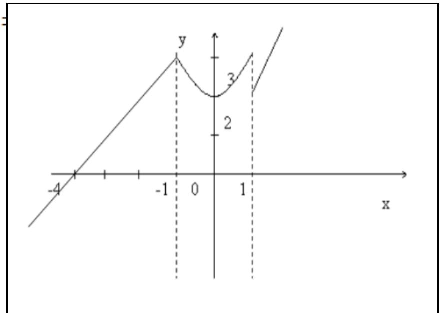

Рис.10

2) $x=-1$;

$\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0}(x+4)=3$;

$\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0}(x^2+2)=3$;

$f(-1)=3$.

Таким образом,

$f(-1)=f(-1-0)=f(-1+0)$,следовательно,

функция непрерыв- на в точке $x=-1$.

б) Функция $f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-4}$ не определена в точке $x=4$.

Рассмотрим поведение функции в окрестности точки $x=4$:

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{x^2-5x+4}{x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4-0}\frac{(x-1)\cdot(x-4)}{x-4}=$$

$$=\lim_{x\to 4-0}(x-1)=3,\text{то есть } f(4-0)=3;$$

$$\lim_{x\to 4+0}\frac{x^2-5x+4}{x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4+0}\frac{(x-1)\cdot(x-4)}{x-4}=$$

$$=\lim_{x\to 4+0}(x-1)=3,\text{то есть } f(4+0)=3;$$

Таким образом, $f(4-0)=f(4+0)\neq f(4)$, следовательно, $x=4$-точка разрыва I рода, точка устранимого разрыва.

в) Функция $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$ не определена в точке $x=1$.

Рассмотрим поведение функции в окрестности точки $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{\frac{1}{1-0-1}}=e^{-\frac{1}{0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=0;$$

$$\lim_{x\to 1+0}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{\frac{1}{1+0-1}}=e^{+\frac{1}{0}}=e^{+\infty}=+\infty;$$

Так как $f(1+0)=+\infty$, следовательно,

$x=1$-точка разрыва II рода.

Пример 3.2. Найти, при каком значении A функция $f(x)=\begin{cases}\frac{2x^2+x-1}{x+1}, & x\neq -1\\ A, & x=-1\end{cases}$ будет непрерывна?

Решение.

Функция непрерывна всюду, за исключением точки $x=-1$,в которой она не определена.

Рассмотрим поведение функции в окрестности точки $x=-1$:

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{2x^2+x-1}{x+1}=\left[\frac{0}{0}\right];$$

Поскольку, мы имеем дело с неопределённостью $\left[\frac{0}{0}\right]$,то раскладываем числитель и знаменатель функции под знаком предела на множители:

$$2x^2+x-1=0, D=1-4\cdot 2\cdot(-1)=9;$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm 3}{4};$$

$$x_1=\frac{1}{2}, x_2=-1;$$

$$2x^2+x-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x+1)=(2x-1)\cdot(x+1);$$

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{2x^2+x-1}{x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-1-0}\frac{(2x-1)\cdot(x+1)}{x+1}=$$

$=\lim\limits_{x\to-1-0}(2x-1)=-3$,то есть $f(-1-0)=-3$;

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{2x^2+x-1}{x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-1+0}\frac{(2x-1)\cdot(x+1)}{x+1}=$$

$=\lim\limits_{x\to-1+0}(2x-1)=-3$, то есть $f(-1-0)=-3$;

Для того, чтобы функция была непрерывна необходимо, чтобы

$$f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0);$$

$$f(-1-0)=f(-1+0)=f(-1)=A=-3.$$

Таким образом, при $A=-3$,функция непрерывна и имеет вид: $f(x)=\begin{cases}\frac{2x^2+x-1}{x+1}, & x\neq-1\\ -3, & x=-1\end{cases}$.

Пример 3.3. Найти, при каком значении A, B

функция $f(x)=\begin{cases}ln(x^2+1), & x\leq 0\\ Asinx+B, & 0<x\leq\frac{\pi}{2}\\ -2, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$?

Решение.

Функция непрерывна при $x<0$, $0<x<\frac{\pi}{2}, x>\frac{\pi}{2}$.

Исследуем точки $x = 0$и $x = \frac{\pi}{2}$.

1) $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0-0} ln(x^2 + 1) = 0$;

$\lim\limits_{x \to 0+0} (Asinx + B) = B$;

$f(0) = ln(0^2 + 1) = 0$, для того, чтобы исходная функции была непрерывности в точке $x = 0$ должно выполняться равенство:

$f(0) = f(0 - 0) = f(0 + 0)$, следовательно, условие непрерывности функции в точке $x = 0$ имеет вид: $\underline{B = 0.}$

2) $x = \frac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} (Asinx + B) = Asin\frac{\pi}{2} + B = A + B$;

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} (-2) = -2$;

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = Asin\frac{\pi}{2} + B = A + B$;

Для того, чтобы исходная функции была непрерывности в точке $x = 0$ должно выполняться равенство:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)$,следовательно, условие непрерывности функции в точке $x = \frac{\pi}{2}$ имеет вид: $\underline{A + B = -2.}$

Получаем следующую систему: $\begin{cases} A + B = -2 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 0 \end{cases}$.

Таким образом, искомая функция имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ln(x^2 + 1), & x \le 0 \\ -2sinx, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}. \\ -2, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения.

4. Найти точки разрыва функций и исследовать их характер **(1)-(10)**; найти, при каком выборе параметров функция $f(x)$ будет непрерывной **(10)-(15).**

1.	$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$
2.	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x^2-2x, & 0<x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$
3.	$f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$
4.	$f(x)=\dfrac{sinx}{x}$
5.	$f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$
6.	$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$
7.	$f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$
8.	$f(x)=3^{x+\frac{1}{x}}$
9.	$f(x)=3^{x-\frac{1}{x^2}}$
10.	$f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+x-2}$
11.	$f(x)=\begin{cases} cosx, & x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$

12.	$f(x)=\begin{cases}-2sinx, & x\le -\frac{\pi}{2}\\ Asinx+B, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ -2, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$
13.	$f(x)=\begin{cases}Ax, & x\epsilon[-1;2]\\ \frac{6}{x}, & x\epsilon(2;+\infty)\end{cases}$
14.	$f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 1\\ Ax^2-2, & x>1\end{cases}$
15.	$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x-2}{x-1}, & x\ne 1\\ A, & x=1\end{cases}$

Ответы:

4.1. $x=1$- точка разрыва II рода.**4.2.** $x=2$ - точка разрыва I рода, точка конечного разрыва.**4.3.** $x=0, x=1$- точки разрыва II рода . **4.4.** $x=0$-точка разрыва I рода, точка устранимого разрыва. **4.5.** $x=0$ -точка разрыва I рода, точка конечного разрыва. **4.6.** $x=0$ -точка разрыва I рода, точка конечного разрыва. **4.7.** $x=-1$- точка разрыва II рода. **4.8.** $x=0$- точка разрыва II рода.**4.9.** $x=0$-точка разрыва I рода, точка устранимого разрыва. **4.10.** $x=1$-точка разрыва I рода, точка устранимого разрыва; $x=-2$- точка разрыва II рода. **4.11.** $x=0$ -точка разрыва I рода, точка конечного разрыва. **4.12.** $A = -1, B = 1$.**4.13.** $A = 1{,}5$. **4.14.** $A = 2$. **4.15.** $A = 3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. Изд. 3-е. — Ростов н/Д, 2006. — 640 с.
2. Виленкин И.В., Гробер В.М. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов. Издательство «Феникс» — Ростов н/Д, 2004. — 415 с.
3. Письменный Д.Т., Конспект лекций по высшей математике (полный курс). 2-е изд. Москва: «Айриспресс», 2014.
4. Данко П.Е., Попов, А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах (1 том). — М.: Высш. шк., 2002.