ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Производные»

«Математический анализ»

Авторы

Ермилова О.В.

Ростов-на-Дону, 2023

Аннотация

Учебное пособие предназначено для аудиторной и самостоятельной работы по теме «Производные», дисциплина «Математический анализ» при различных формах обучения: очном, заочном и дистанционном для студентов технических направлений и специальностей.

Автор

Старший преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Ермилова О.В.

Оглавление

Глава 1. ПРоизводная И ДИФФЕРЕНЦИАЛ. 4

1.1. Определение производной. 4
1.2. Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции................ 5
1.3. Основные правила дифференцирования.................. 7
1.4. Производная обратной функции. 9
1.5. Производные элементарных функций. 11
1.6. Производная сложной функции. 15
1.7. Геометрический и физический смысл производной функции. Уравнение касательной и нормали к графику функции...19
1.8. Логарифмическое дифференцирование.................23
1.9. Дифференциал функции и его связь с производной. 26
1.10. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. 29
Задания для самостоятельного решения. 34

Глава 2. Производные высших порядков.........................37

2.1. Производные и дифференциалы высших порядков явно заданной функции. 37
2.2. Производные высших порядков неявно заданной функции...41
2.3. Производные высших порядков параметрически заданных функций. 44
Задания для самостоятельного решения. 47

Глава 3. Приложения производных.................................50

3.1. Теорема Ферма, Роля, Лагранжа и Коши. 50
3.2. Правило Лопиталя. 52
3.3. Формула Тейлора..58
3.4. Исследование функций и построение графиков.......63
Задания для самостоятельного решения. 84

Список литературы 89

ГЛАВА 1. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ.

В дифференциальном исчислении изучаются понятия производной и дифференциала и способы их применения к исследованию функций. Развитие дифференциального исчисления тесно связано с развитием интегрального исчисления. Понятие производной широко используется при решении целого ряда задач физики, математики и других наук, в особенности при изучении скорости разных процессов.

1.1. Определение производной.

Производной функции $y = f(x)$в точке x_0 называется конечный предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю (см.рис.1.1), то есть

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad (1.1).$$

Обозначение: $f'(x)$

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной употребляются и другие обозначения, например, $y', y'_x, \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$.

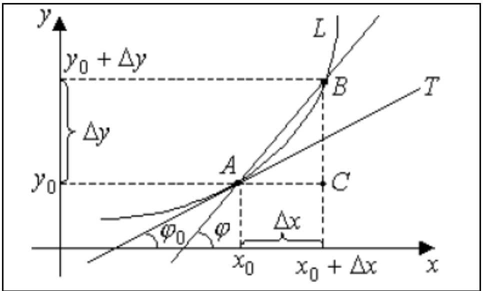


Рис.1.1

Процесс нахождения производной будем называть **дифференцированием.**

Пример 1.1. Исходя из определения, найти производную функции $f(x) = x^2$.

Решение.

Функция $y = x^2$определена и непрерывна в любой точке числовой прямой.

Придадим аргументу функции в точке x_0 приращение $\triangle x$. Тогда соответствующее приращение величины y имеет вид:

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = (x_0 + \triangle x)^2 - x_0^2 =$$

$$= x_0^2 + 2x_0 \triangle x + \triangle x^2 - x_0^2 = 2x_0 \triangle x + \triangle x^2,$$

то есть $\triangle y = 2x_0 \triangle x + \triangle x^2$,разделив обе части полученного равенства на$\triangle x$ и переходя к пределу при$\triangle x \to 0$,учитывая, что$f'(x_0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$ имеем:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{2x_0 \triangle x + \triangle x^2}{\triangle x} = 2x_0 + \triangle x,$$

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} (2x_0 + \triangle x) = 2x_0,$$

$$f'(x_0) = 2x_0.$$

Таким образом, $f'(x) = 2x.$

1.2. Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Если функция$y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , то есть если существует предел (1.1), то будем говорить, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Теорема 1.1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Доказательство

Пусть функция $y = f(x)$дифференцируема в некоторой точке x. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x)$.Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем: $\frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x) + \alpha$,где $\alpha \to 0$ при $\triangle x \to 0$, умножив обе части равенства на $\triangle x$ получим:

$$\triangle y = f'(x) \triangle x + \alpha \triangle x,$$

переходя к пределу в обеих частях равенства, при$\triangle x \to 0$, получаем:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle y = \lim_{\triangle x \to 0} f'(x) \triangle x + \lim_{\triangle x \to 0} \alpha \triangle x = 0.$$

Таким образом, $\lim_{\triangle x \to 0} \triangle y = 0$. А это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x.

Замечание: обратная теорема неверна, то есть непрерывная функция может и не иметь производной в точке. Дифференцируемость сильнее свойства непрерывности. Рассмотрим эту ситуацию на примере 1.2.

Пример 1.2. Существует ли производная в точке$x_0 = 0$ для функции$y = |x|$,при $x \epsilon (-1; 1)$.

Решение.

Хорошо известно, что данная функция $y = |x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, \;\; x \geq 0 \end{cases}$ (см.рис.1.2) является непрерывной в точке $x_0 = 0, \lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} x = 0.$

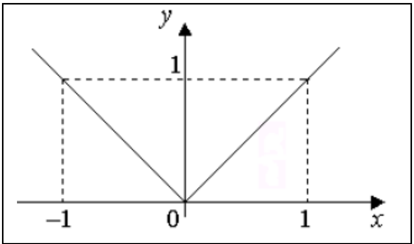


Рис.1.2

Вычислим левый и правый односторонний пределы данной функции при $x \to x_0, x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0-0} y = \lim_{x \to 0-0} (-x) = 0,$$

$$\lim_{x \to 0+0} y = \lim_{x \to 0+0} x = 0.$$

Так как

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0+0} y = \lim_{x \to 0-0} y = 0,$$

убеждаемся, что функция$y = |x|$ непрерывна в точке $x_0 = 0$.

Покажем, что в точке $x_0 = 0$ производная не существует:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1, & \Delta x > 0 \\ -\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = -1, & \Delta x < 0 \end{cases};$$

Предел слева и справа различны, поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, следовательно производная функции $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ не существует.

1.3. Основные правила дифференцирования.

Основные правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, тогда справедливы следующие утверждения:

1) Производная суммы(разности) двух функций равна сумме (разности) производных, то есть

$$(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \pm \boldsymbol{u}';$$

Замечание: правило справедливо для любого конечного числа слагаемых, то есть $(u_1 \pm u_2 \pm \ldots \pm u_n)' = u_1{}' \pm u_2{}' \pm \ldots \pm u_n{}'$

2) Производная произведения двух функций равна произведению первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, то есть

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{u};$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной, то есть $(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{u})' = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{u}'$.

Действительно, если $y = C \cdot u(x)$, где $C = const$, то учитывая, что $(C)' = 0$ и правило дифференцирования произведения функций имеем:

$(C\cdot u)'=(C)'\cdot u(x)+C\cdot u'(x)=C\cdot u'(x);$

3) Производная частного двух функций $\frac{u(x)}{v(x)}$, если $v(x)\neq 0$ равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат исходного знаменателя, то есть

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2},\ v\neq 0;$$

Все эти правила вытекают из определения производной. Докажем, например, первое и второе утверждение.

Обозначим через $\triangle u,\triangle v$ приращение функции $u(x)$ и $v(x)$ при переходе от точки x к близкой точке $x+\triangle x$.

1) $(u+v)'=u'+v'$;

Если $y=u+v$, то значению x соответствует значение $y(x)=u(x)+v(x)$, а значению $x+\triangle x$ соответствует значение

$y(x+\triangle x)=u(x+\triangle x)+v(x+\triangle x)$, тогда

$$\triangle y=y(x+\triangle x)-y(x)=u(x+\triangle x)+v(x+\triangle x)-$$
$$-\big(u(x)+v(x)\big)=[u(x+\triangle x)-u(x)]+$$
$$+[v(x+\triangle x)-v(x)]=\triangle u+\triangle v.$$

Следовательно,

$$(u+v)'=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle u+\triangle v}{\triangle x}=$$
$$=\lim_{\triangle x\to 0}\left(\frac{\triangle u}{\triangle x}+\frac{\triangle v}{\triangle x}\right)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle u}{\triangle x}+\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle v}{\triangle x}=u'+v'.$$

2) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$;

$y(x)=u(x)\cdot v(x)$,

$y(x+\triangle x)=u(x+\triangle x)\cdot v(x+\triangle x)$, тогда

$$y'=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{u(x+\triangle x)\cdot v(x+\triangle x)-u(x)\cdot v(x)}{\triangle x}=$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{(u(x)+\triangle u)\cdot(v(x)+\triangle v)-u(x)\cdot v(x)}{\triangle x}=$$
$$= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{u(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot\triangle v+\triangle uv(x)+\triangle u\cdot\triangle v-u(x)\cdot v(x)}{\triangle x}=$$
$$= \lim_{\triangle x\to 0}\left(v(x)\cdot\frac{\triangle u}{\triangle x}+u(x)\cdot\frac{\triangle v}{\triangle x}+\triangle v\cdot\frac{\triangle u}{\triangle x}\right)=$$
$$= v(x)\cdot\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle u}{\triangle x}+u(x)\cdot\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle v}{\triangle x}+\lim_{\triangle x\to 0}\triangle v\cdot\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle u}{\triangle x}=$$
$$= u'(x)\cdot v(x)+v'(x)\cdot u(x)+0\cdot u'(x)=u'\cdot v+v'\cdot u.$$

Аналогично доказываются остальные утверждения.

1.4. Производная обратной функции.

Теорема 1.2. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна и строго монотонна (возрастает или убывает) на некотором множестве X. Если функция $y=f(x)$ имеет в точке $x\in X$ отличную от нуля производную $f'(x)\neq 0$, то и обратная ей функция $x=x(y)$ имеет в соответствующей точке y производную $x'(y)$, причем:

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}\quad \textbf{(1.2)}$$

Доказательство

Так как функция $y=f(x)$ непрерывна и строго монотонна, то обратная ей функция $x=x(y)$ непрерывна и строго монотонна. Дадим переменной y приращение Δy. Соответствующее приращение Δx обратной функции также не равно нулю вследствие строгой монотонности и $\Delta x\to 0$ при $\Delta y\to 0$.

В следствии чего, имеем:

$$x'(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{y'(x)},\ y'(x)\neq 0,$$

то есть $y'(x)=\frac{1}{x'(y)}$.

Данную формулу можно записать в виде $y'_x=\frac{1}{x'_y}$.

Пример 1.3. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, показать, что: **а)**$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;**б)** $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Решение.

а) Разрешим данное равенство $y = arcsinx$ относительно x:

функция $x = siny$, где $y\epsilon\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$-является обратной функцией для функции $y = arcsinx$.

По теореме о производной обратной функции имеем:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(siny)'_y} = \frac{1}{cosy} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}};$$

Так как, $cosy > 0$,при $y\epsilon\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$,получим:

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

Таким образом,$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Аналогично доказывается, что$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

б) Разрешим данное равенство $y = arctgx$ относительно x:

функция $x = tgy$,где $y\epsilon\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$-является обратной функцией для функции $y = arctgx$.

По теореме о производной обратной функции имеем:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(tgy)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2y}} = cos^2y =$$

$$= \frac{1}{1+tg^2y} = \frac{1}{1+x^2};$$

Таким образом,$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Аналогично доказывается, что $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Пример 1.4. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производнуюy'_x для функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Решение.

Разрешим данное равенство относительно x:

$$y^3 = \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3;$$
$$y^3 = x - 1;$$
$$x = y^3 + 1;$$

По теореме о производной обратной функции имеем:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(y^3+1)'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2}.$$

1.5. Производные элементарных функций.

Запишем производные основных элементарных функций в таблицу.

Таблица основных элементарных функций

1.	$(C)' = 0$
2.	$(x^n)' = nx^{n-1}$
3.	$(a^x)' = a^x lna, a > 0$
4.	$(e^x)' = e^x$
5.	$(log_a x)' = \frac{1}{xlna}, a > 0,$ $a \neq 1, x > 0$
6.	$(lnx)' = \frac{1}{x}, x > 0$
7.	$(sinx)' = cosx$
8.	$(cosx)' = -sinx$
9.	$(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}$
10.	$(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 u}$

11.	$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12.	$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13.	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
14.	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Используя определение производной, найдем производные некоторых элементарных функций из таблицы, например,1),6),7).

1)$(C)' = 0$.

Значениям аргументов x_0 и $x_0 + \triangle x$ соответствует одно и то же значение функции $y = C$.Поэтому

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \lim_{\triangle x \to 0} \frac{C - C}{\triangle x} = 0.$$

6) $(lnx)' = \frac{1}{x}$.

Покажем, что $(lnx)' = \frac{1}{x}$.Значениям аргументов x_0 и $x_0 + \triangle x$ соответствуют значение функции $y(x_0) = lnx_0$, $y(x_0 + \triangle x) = ln(x_0 + \triangle x)$, следовательно,

$$\triangle y = y(x_0 + \triangle x) - y(x_0) = ln(x_0 + \triangle x) - ln(x_0) =$$
$$= ln\frac{x_0 + \triangle x}{x_0} = ln\left(1 + \frac{\triangle x}{x_0}\right);$$

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{ln\left(1 + \frac{\triangle x}{x_0}\right)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{1}{\triangle x} ln\left(1 + \frac{\triangle x}{x_0}\right) =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} ln\left(1 + \frac{\triangle x}{x_0}\right)^{\frac{1}{\triangle x}} = ln \lim_{\triangle x \to 0} \left[\left(1 + \frac{\triangle x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\triangle x}}\right]^{\frac{1}{x_0}} =$$

$$= lne^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} lne = \frac{1}{x_0},$$ то есть $(lnx)' = \frac{1}{x}$.

7) $(sinx)' = cosx$.

Так как $y(x) = sinx$,то значениям аргументов x_0 и $x_0 + \triangle x$ соответствуют значение функций $y(x_0) = sinx_0$ и $y(x_0 + \triangle x) = sin(x_0 + \triangle x)$, соответственно, учитывая, что $sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ имеем:

$$\triangle y = y(x_0 + \triangle x) - y(x_0) = sin(x_0 + \triangle x) - sin(x_0) =$$
$$= 2sin\left(\frac{x_0 + \triangle x - x_0}{2}\right)cos\left(\frac{x_0 + \triangle x + x_0}{2}\right) =$$
$$= 2sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right);$$
$$y' = \lim_{\triangle x \to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0}\frac{2sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x} =$$
$$= \lim_{\triangle x \to 0}\frac{sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)}{\frac{\triangle x}{2}} \cdot \lim_{\triangle x \to 0} cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right) = cos(x_0),$$ то есть
$(sinx)' = cosx$.

Пример 1.5. Доказать, что $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2x}$ и $(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$.

Решение.

$$(ctgx)' = \left(\frac{cosx}{sinx}\right)' = \frac{(cosx)'sinx - (sinx)'cosx}{sin^2x} =$$
$$= \frac{-sinxsinx - cosxcosx}{sin^2x} = -\frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2x} = -\frac{1}{sin^2x};$$
$$(tgx)' = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{(sinx)'cosx - (cosx)'sinx}{cos^2x} =$$
$$= \frac{cosxcosx - (-sinx)sinx}{cos^2x} = \frac{sin^2x + cos^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}.$$

Пример 1.6. Доказать, что $(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$.

Решение.

Переходя к новому основанию по формуле $log_a b = \dfrac{log_c b}{log_c a}$ и учитывая, что $(lnx)' = \dfrac{1}{x}, x > 0$ имеем:

$$(log_a x)' = \left(\frac{log_e x}{log_e a}\right)' = \left(\frac{lnx}{lna}\right)' = \frac{1}{lna}(lnx)' = \frac{1}{xlna}.$$

Пример 1.7. Найти производную функции: **а)**$y = \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}$; **б)** $y = \frac{1+x+3x^2}{x}$;**в)** $y = x^4 \cdot lnx$;
г) $y = \frac{5-x^2}{e^x}$;**д)** $y = sinx - \frac{x+1}{x-1}$.

Решение.

а) Функция представляет собой сумму функций, следовательно,

$$y' = \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}\right)' = (x^{-2})' + \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = -2x^{-3} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} =$$
$$= -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}};$$

б) Для упрощения решения преобразуем функцию:

$$y = \frac{1 + x + 3x^2}{x} = \frac{1}{x} + 1 + 3x;$$

Найдём производную:

$$y' = \left(\frac{1}{x} + 1 + 3x\right)' = (x^{-1})' + (1)' + 3(x)' = -x^{-2} + 3 =$$
$$= 3 - \frac{1}{x^2};$$

в) Функция представляет собой произведение двух элементарных функций, поэтому применяя формулу производной произведения имеем:

$$y' = (x^4 \cdot lnx)' = (x^4)' \cdot lnx + x^4 \cdot (lnx)' =$$
$$= 4x^3 \cdot lnx + x^4 \cdot \frac{1}{x} = x^3(4lnx + 1);$$

г) Функция представляет собой частное двух элементарных функций, поэтому:

$$y' = \left(\frac{5-x^2}{e^x}\right)' = \frac{(5-x^2)' \cdot e^x - (5-x^2) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{-2x \cdot e^x - (5-x^2) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(x^2-2x-5)}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{x^2-2x-5}{e^x};$$

д) $y' = \left(sinx - \frac{x+1}{x-1}\right)' = (sinx)' - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' =$

$$= cosx - \frac{(x+1)' \cdot (x-1) - (x+1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= cosx - \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = cosx + \frac{2}{(x-1)^2}.$$

1.6. Производная сложной функции.

Пусть функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u. Тогда сложная функция $y = f\big(\varphi(x)\big)$имеет конечную производную в точке x_0, которая равна

$$\boldsymbol{y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)} \quad \textbf{(1.3)}$$

Замечание: это правило может быть распространено на случай сложной функции, составленной из произвольного числа дифференцируемых функций.

Таблица производных сложных функций

Используя формулу (1.6), таблицу производных, полученную ранее, можно представить в более общем виде.

1.	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
2.	$(a^u)' = a^u lna \cdot u', a > 0$
3.	$(e^u)' = e^u \cdot u'$

4.	$(log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$
5.	$(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
6.	$(sinu)' = cosu \cdot u'$
7.	$(cosu)' = -sinu \cdot u'$
8.	$(tgu)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$
9.	$(ctgu)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot u'$
10.	$(arcsinu)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11.	$(arccosu)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12.	$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13.	$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Пример 1.8. Найти производную функции: **а)**$y = sin^3 x$;**б)**$y = sinx^3$;**в)**$y = 3^{\frac{4}{x^3}}$;**г)** $y = e^{-\sqrt{x}}$;
д) $y = ln\sqrt[4]{\frac{5-x}{5+x}}$.

Решение.

а) Функция $y = sin^3 x = (sinx)^3$ является сложной, воспользуемся формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$:

$$y' = (sin^3 x)' = ((sinx)^3)' = 3(sinx)^2 \cdot (sinx)' =$$
$$= 3sin^2 xcosx;$$

б) Функция сложная, воспользуемся формулой $(sinu)' = cosu \cdot u'$:

$$y' = (sinx^3)' = \left(sin(x^3)\right)' = cosx^3 \cdot (x^3)' = 3x^2cosx^3;$$

в) Применяя правило нахождения производной сложной-показательной функции $(a^u)' = a^u lna \cdot u', a > 0$ имеем:

$$y' = \left(3^{\frac{4}{x^3}}\right)' = 3^{\frac{4}{x^3}} ln3 \cdot \left(\frac{4}{x^3}\right)' = 3^{\frac{4}{x^3}} ln3 \cdot 4(x^{-3})' =$$

$$= 3^{\frac{4}{x^3}} ln3 \cdot (-12)x^{-4} = -\frac{12ln3 \cdot 3^{\frac{4}{x^3}}}{x^4};$$

г) Воспользуемся формулой $(e^u)' = e^u \cdot u'$:

$$y' = \left(e^{-\sqrt{x}}\right)' = e^{-\sqrt{x}} \cdot \left(-\sqrt{x}\right)' = -e^{-\sqrt{x}} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= -e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}};$$

д) Для упрощения решения преобразуем функцию, используя свойства логарифмов $lna^\alpha = \alpha lna$ и $ln\frac{a}{b} = lna - lnb$:

$$y = ln\sqrt[4]{\frac{5-x}{5+x}} = ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(ln(5-x) - ln(5+x)\right);$$

Находим производную:

$$y' = \frac{1}{4}\left(\left(ln(5-x)\right)' - \left(ln(5+x)\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(5-x)'}{5-x} - \frac{(5+x)'}{5+x}\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{5-x} - \frac{1}{5+x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5-x} + \frac{1}{5+x}\right) = -\frac{10}{4(25-x^2)};$$

Пример 1.9. Найти производные первого порядка функций: **а)**$y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$;**б)**$z = \frac{1-3tg\,t}{arctg2t}$; **в)**$u = cos^3(3v+1)$;**г)** $y = arctg^2\frac{1}{x}$;**д)** $y = ctgln^4x$.

Решение.

а) $y' = \left(5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}\right)' = 5(x)' - 2(x^{-4})' +$

$+3\left(x^{\frac{6}{5}}\right)' = 5 + 8x^{-5} + \frac{18}{5}x^{\frac{1}{5}} = 5 + \frac{8}{x^5} + \frac{18\sqrt[5]{x}}{5};$

б)

$$z' = \frac{(1-3tg\ t)' \cdot arctg2t - (1-3tg\ t)\cdot(arctg2t)'}{(arctg2t)^2} =$$

$$= \frac{\frac{-3}{cos^2 t}\cdot arctg2t - (1-3tg\ t)\cdot\frac{2}{1+4t^2}}{arctg^2 2t} =$$

$$= \frac{-\frac{3\ arctg2t}{cos^2 t} - \frac{2-6tg\ t}{1+4t^2}}{arctg^2 2t} =$$

$$= -\frac{3}{cos^2 t arctg2t} - \frac{2-6tg\ t}{(1+4t^2)arctg^2 2t};$$

в) $u' = ((cos(3v+1))^3)' = 3cos^2(3v+1)\cdot$

$\cdot(cos(3v+1))' = -3cos^2(3v+1)\,sin(3v+1)\cdot$

$\cdot(3v+1)' = -9cos^2(3v+1)si\,n(3V+1).$

г) $y' = \left(arctg^2\frac{1}{x}\right)' = \left(\left(arctg\frac{1}{x}\right)^2\right)' =$

$$= 2arctg\frac{1}{x}\cdot\left(arctg\frac{1}{x}\right)' = 2arctg\frac{1}{x}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot(x^{-1})' = 2arctg\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2arctg\frac{1}{x}}{1+x^2};$$

д) $y' = (ctgln^4x)' = \left(ctg(ln^4x)\right)' =$

$$= -\frac{1}{sin^2 ln^4 x} \cdot ((lnx)^4)' = -\frac{1}{sin^2 ln^4 x} \cdot$$
$$\cdot 4ln^3 x \cdot (lnx)' = -\frac{4ln^3 x}{x sin^2 ln^4 x}.$$

1.7. Геометрический и физический смысл производной функции. Уравнение касательной и нормали к графику функции.

Геометрический смысл производной.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$,которая определена и непрерывна на некотором интервале, зафиксируем точку $A(x_0; f(x_0))$ (см.рис.1.1).

Зададим аргументу функции приращение $\triangle x$ в точке x_0, то есть $x_0 + \triangle x$,получим точку $B(x_0 + \triangle x; f(x_0 + \triangle x))$.

Приращение аргумента $\triangle x$ повлекло за собой приращение функции:

$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$, $\triangle y > 0$ (функция, возрастающая на данном промежутке). Через точки A , B проведём секущую AB,угол наклона секущей к оси Ox обозначим через φ:

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC и угол $\varphi =< BAC$,

$$tg\ \varphi = \frac{BC}{AC} = \frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

Если $\triangle x \to 0$ (медленно двигаемся к точке x_0, уменьшая приращение $\triangle x$,при этом $\triangle y \to 0$)точка B будет приближаться к точке A, в результате секущая AB будет стремится занять положение касательной AT , угол наклона φ секущей AB будет стремиться к углу наклона касательной φ_0,следовательно $\lim\limits_{\triangle x \to 0} tg\varphi = tg\varphi_0$.

Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\varphi_0 = k,$$

Итак, **производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0**,то есть

$$\boldsymbol{f'(x_0) = tg\varphi_0 = k \ (1.4)}$$

Равенство (1.4) отражает геометрический смысл производной.

Уравнение касательной и нормали к графику функции.

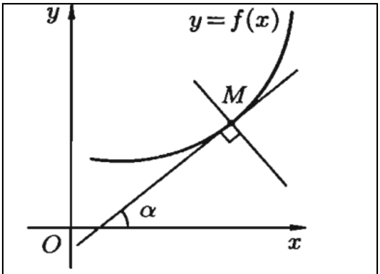


Рис.1.3

Напишем уравнение касательной:

Если точка касания M имеет координаты $M(x_0; y_0)$ (см. рис.1.3), то угловой коэффициент касательной равен$k = f'(x_0)$. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку $M(x_0; y_0)$ с угловым коэффициентом k($y - y_0 = k(x - x_0)$), можно записать уравнение касательной:

$\boldsymbol{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$**(1.5)**

Напишем уравнение нормали:

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется **нормалью.**

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент имеет вид:

$$k_{\text{кас.}} \cdot k_{\text{норм.}} = -1;$$

$$k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k_{\text{кас.}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Поэтому уравнение нормали имеет вид (1.6):

$$\boldsymbol{y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)}\textbf{(1.6)}$$

Пример 1.10. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\sqrt{x}+2x$ в точке с абсциссой $x_0=4$.

Решение.

Чтобы справиться с поставленной задачей, найдём значение исходной функции и её производной в точке $x_0=4$:

$$y(4)=\sqrt{4}+2\cdot 4=10;$$

$$y'=\left(x^{\frac{1}{2}}+2x\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2;$$

$$y'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}+2=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4};$$

Уравнение касательной имеет вид: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$;

$$y=10+\frac{9}{4}(x-4)|\cdot 4;$$

$$4y=40+9x-36;$$

$$9x-4y+4=0.$$

Уравнение нормали имеет вид:

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0);$$

$$y=10-\frac{1}{\frac{9}{4}}(x-4);$$

$$y=10-\frac{4}{9}(x-4)|\cdot 9;$$

$$9y=90-4x+16;$$

$$4x+9y-106=0.$$

Физический смысл производной.

Рассмотрим задачу о скорости движения. Пусть точка движется вдоль прямой и известна зависимость $s=s(t)$ пройденного пути от времени t (рис. 1.4).

Средняя скорость движения на интервале времени $[t_0;\ t_0 + \Delta t]$, равна отношению пройденного за это время пути Δs к промежутку времени Δt :

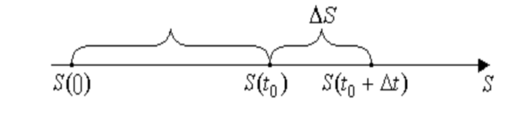


Рис. 1.4

$V_{cp.} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость характеризует движение. Мгновенной скоростью в момент времени t_0 называется предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$:

$$\boldsymbol{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)(1.7)}$$

Учитывая, что $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ равенство (1.7) можно записать в виде (1.8):

$$\boldsymbol{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}\ (1.8)}$$

Таким образом, скорость движения точки в момент времени t_0 – это предел отношения приращения пути Δs (функции) к приращению времени Δt (аргумента) при стремлении приращения времени Δt (аргумента) к нулю.

То есть, первая производная функции — это мгновенная скорость изменения любого процесса.

Замечание: выше было установлено, что если точка движется прямолинейно по закону $s = s(t)$, (где s – путь, t – время), то $s'(t_0)$ – скорость изменения пути в момент времени t_0 . Следовательно, $s''(t) = (s'(t_0))' = (v(t_0))'$– скорость изменения скорости или ускорение точки в момент времени t_0.

Пример 1.11. Найти скорость движения точки в момент времени $t=3$ при прямолинейном движении точки $S=(t^2-1)^2$.

Решение.

Исходя из физического смысла производной понимаем, что скорость движения точки в момент времени t равна производной от пути, то есть вычисляется по формуле:

$$V(t)=S'(t)=((t^2-1)^2)'=2(t^2-1)(t^2-1)'=$$
$$=4t(t^2-1).$$

При $t=3$ имеем:

$$V(3)=4\cdot 3(3^2-1)=12\cdot 8=96.$$

1.8. Логарифмическое дифференцирование.

В ряде случаев для нахождения производной необходимо заданную функцию сначала прологарифмировать, а затем продифференцировать-такую операцию называют **логарифмическим дифференцированием**. К числу функций, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием относятся степенно-показательные функции $y=u^v$,где $u=u(x), v=v(x)$,то есть функции основание и показатель степени которых зависят от x.Рассмотрим, как находить производную данной функции:

1)Логарифмируем обе части равенства $y=u^v$:

$$lny=lnu^v;$$
$$lny=vlnu.$$

2)Продифференцируем полученное равенство:

$$(lny)'=(vlnu)';$$
$$\frac{1}{y}\cdot y'=v'\cdot lnu+\frac{v}{u}\cdot u';$$
$$y'=y\left(v'lnu+\frac{v}{u}u'\right),$$

учитывая, что $y=u^v$имеем:

$$y' = u^v\left(v' lnu + \frac{v}{u}u'\right).$$

Пример 1.12. Найти y' ,если:

а)$y = (sinx)^{tgx}$;**б)**$y = (x^3 + 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}$;**в)** $y = \frac{\sqrt{x+1}(2x+1)^2}{x-1}$.

Решение

а) Основание и показатель степени функции $y = (sinx)^{tgx}$ зависят от x, поэтому применяем логарифмическое дифференцирование:

1)Прологарифмируем обе части равенства $y = (sinx)^{tgx}$:

$$lny = ln(sinx)^{tgx},$$
$$lny = tgxln(sinx);$$

2)Продифференцируем полученное равенство по x, учитывая, что $y = y(x)$, то есть lny – сложная функция:

$$\frac{y'}{y} = (tgx)' \cdot ln(sinx) + tgx \cdot \frac{1}{sinx} \cdot (sinx)',$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{cos^2x} \cdot ln(sinx) + tgx \cdot \frac{1}{sinx} \cdot cosx,$$
$$y' = y\left(\frac{ln(sinx)}{cos^2x} + \frac{sinx}{cosx} \cdot \frac{cosx}{sinx}\right),$$
$$y' = (sinx)^{tgx}\left(\frac{ln(sinx)}{cos^2x} + 1\right),$$
$$y' = (sinx)^{tgx}\left(\frac{ln(sinx)}{cos^2x} + 1\right);$$

б) $y = (x^3 + 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}$ - данная функция является степенно-показательной. Найдем ее производную.

Прологарифмируем обе части исходного равенства

$$lny = ln(x^3 + 2x^2)^{\frac{1}{x^2}},$$
$$lny = \frac{1}{x^2} ln(x^3 + 2x^2);$$

Продифференцируем полученное равенство:

$$\frac{y'}{y}=(x^{-2})'ln(x^3+2x^2)+\frac{1}{x^2}\left(ln(x^3+2x^2)\right)',$$

$$\frac{y'}{y}=\left(-\frac{2}{x^3}ln(x^3+2x^2)+\frac{1}{x^2(x^3+2x^2)}(x^3+2x^2)'\right),$$

$$\frac{y'}{y}=\left(-\frac{2}{x^3}ln(x^3+2x^2)+\frac{3x^2+4x}{x^2(x^3+2x^2)}\right),$$

$$y'=y\left(-\frac{2}{x^3}ln(x^3+2x^2)+\frac{3x+4}{x(x^3+2x^2)}\right),$$

$$y'=(x^3+2x^2)^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}ln(x^3+2x^2)+\frac{3x+4}{x^3(x+2)}\right);$$

Замечание: метод логарифмического дифференцирования полезно также применять в случаях, когда это приводит к упрощению вычислений, при нахождении производной функции.

в) Данную функцию (в силу громоздкости стандартного дифференцирования) удобно продифференцировать при помощи логарифмического - дифференцирования.

1) Логарифмируем исходное равенство:

$$lny=ln\frac{\sqrt{x+1}(2x+1)^2}{x-1};$$

Упростим правую часть полученного равенства, используя свойства логарифмов $ln\frac{a}{b}=lna-lnb, ln(ab)=lna-lnb, lna^{\alpha}=\alpha lna;$

$$ln\frac{\sqrt{x+1}(2x+1)^2}{x-1}=ln\left(\sqrt{x+1}(2x+1)^2\right)-ln(x-1)=$$

$$=ln(x+1)^{\frac{1}{2}}+ln(2x+1)^2-ln(x-1)=$$

$=\frac{1}{2}ln(x+1)+2ln(2x+1)-ln(x-1)$, то есть

$$lny=\frac{1}{2}ln(x+1)+2ln(2x+1)-ln(x-1),$$

2) Продифференцируем полученное равенство по x:

$$(lny)'=\left(\frac{1}{2}ln(x+1)+2ln(2x+1)-ln(x-1)\right)';$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{4}{2x+1} - \frac{1}{x-1};$$

$$y' = \frac{\sqrt{x+1}(2x+1)^2}{x-1} \cdot \left(\frac{1}{2(x+1)} + \frac{4}{2x+1} - \frac{1}{x-1}\right).$$

1.9. Дифференциал функции и его связь с производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0.Следовательно, существует$f'(x_0)$,

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, Δx – приращение аргумента; Δy – приращение функции в точке x_0, соответствующее приращению аргументаΔx:

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

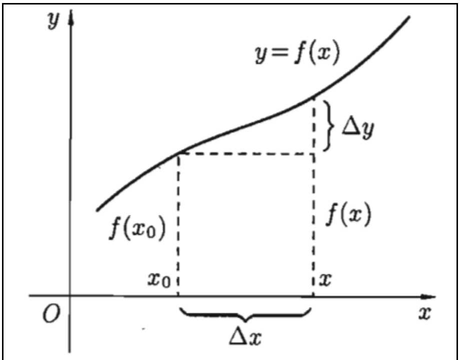


Рис.1.5

По теореме о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ –бесконечно малая функция при $x \to x_0$.Отсюда,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

$\alpha = \alpha(\Delta x) \to 0$ при$\Delta x \to 0$,следовательно,

$$\boldsymbol{\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha \cdot \Delta x} \quad (\mathbf{1.9})$$

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x_0) \cdot \Delta x$ и $\alpha \cdot \Delta x$, являющихся бесконечно малыми при$\Delta x \to 0$. При этом первое слагаемое есть бесконечно малая функция одного порядка сΔx , так как

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0)\cdot\Delta x}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0$, а второе слагаемое $\alpha \cdot \Delta x$ есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx ,так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Поэтому первое слагаемое $f'(x_0) \cdot \Delta x$ называют **главной частью** приращения функции Δy.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента.

Обозначение: dy.

Таким образом, выражение для дифференциала имеет вид:

$$\boldsymbol{dy = f'(x) \cdot \Delta x} \quad \textbf{(1.10)},$$

где $dx = \Delta x$.

Поэтому формулу (1.10) можно записать в виде (1.11):

$$\boldsymbol{dy = f'(x)dx} \quad (1.11)$$

Итак, задача вычисления дифференциала функции сводится к задаче вычисления производной этой функции.

Свойства дифференциалов.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x,то их дифференциалы обладают следующими свойствами:

1) $d(C) = 0, C = const$;

2) $d\big(Cf(x)\big) = Cd\big(f(x)\big)$;

3) $d\big(f(x) \pm g(x)\big) = d\big(f(x)\big) \pm d\big(g(x)\big)$;

4) $d\big(f(x) \cdot g(x)\big) = d\big(f(x)\big)g(x) + f(x)d\big(g(x)\big)$;

5) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{d(f(x))g(x) - f(x)d(g(x))}{g^2(x)}$.

Пример 1.13. Найти дифференциал dy функции:
а) $y = x\sqrt{5-x}$;**б)** $y = 3^{ctg3x}$;**в)** $y = arctg\sqrt{x}$.

Решение.

а) Так как $dy = y'dx$ задача вычисления дифференциала функции сводится к вычислению y':

$$y' = \left(x\sqrt{5-x}\right)' = \left(\sqrt{5x^2 - x^3}\right)' = \left((5x^2 - x^3)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}(5x^2 - x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (5x^2 - x^3)' = \frac{10x - 3x^2}{2\sqrt{5x^2 - x^3}} =$$

$$= \frac{x(10-3x)}{2x\sqrt{5-x}} = \frac{10-3x}{2\sqrt{5-x}};$$

Таким образом, $dy = \frac{10-3x}{2\sqrt{5-x}}dx$.

б) $y' = (3^{ctg3x})' = 3^{ctg3x}ln3(ctg3x)' =$

$$= 3^{ctg3x}ln3 \cdot \left(-\frac{1}{sin^2(3x)}\right) \cdot (3x)' =$$

$= -\frac{3^{ctg3x+1}ln3}{sin^2(3x)}$, следовательно,

$$dy = -\frac{3^{ctg3x+1}ln3}{sin^2(3x)}dx.$$

в) $y' = \left(arctg\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{1+x} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' =$

$= \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$, следовательно,

$$dy = \frac{dx}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

Пример 1.14. Найти дифференциал функции $y = \sqrt{x^2+1}$. Вычислить dy при $x = 1, dx = 0{,}2$.

Решение.

$y' = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, тогда

$$dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Подставив $x = 1$ и $dx = 0{,}2$, получим:

$$dy|_{\substack{x=1\\dx=0{,}2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} \cdot 0{,}2 = \frac{1}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

1.10. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций.

Дифференцирование неявно заданных функций.

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешённым относительно y,то мы имеем дело с функцией, заданной в явном виде (явной функцией).

Под неявным заданием функции $y = f(x)$ понимают задание функции уравнением

$$\boldsymbol{F(x;y) = 0} \quad (1.12),$$

то есть уравнением не разрешённым относительно y.
Например, $y = x^3 + 1$-явно заданная функция,
$x^2 + y^2 = 4$-неявно заданная функция, где
$F(x;y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Замечание: всякую явно заданную функцию $y = f(x)$можно записать как неявную, с помощью уравнения $y - f(x) = 0$,но не всегда можно сделать обратное действие. Например, от явного задания функции $y = x^2$ можно перейти к неявному заданию функции $y - x^2 = 0$; Неявное уравнение $2^y - x + y = 0$ невозможно разрешить относительно y, то есть получить в явном виде.

Правило нахождения производной неявной функции.

Для нахождения производной неявной функции необходимо:

1)Продифференцировать уравнение $F(x;y) = 0$ по x,учитывая, что $y = y(x)$:

$$\big(F(x;y)\big)'_x = 0;$$

2) Выразить y' из полученного уравнения.

Пример 1.15. Найти y' для функций:

а) $x^3 + y^3 - 3xy = 7$;**б)** $e^{\frac{x}{y}} - yx + 1 = 0$;

в) $cos(x + y) - x + y = 0$.

Решение.

а) Функция задана неявно, уравнением $F(x; y) = x^3 + y^3 - 3xy - 7 = 0$, применяя правила нахождения производной неявной функции, имеем:

1)Дифференцируем обе части уравнения $F(x; y)$ по переменной x:

$$(x^3 + y^3 - 3xy - 7)' = 0;$$

Учитывая, что $y = y(x)$, найдём производную y^3:

$$(y^3)' = \left(\left(y(x)\right)^3\right)' = 3\left(y(x)\right)^2 \cdot \left(y(x)\right)' =$$

$= 3y^2(x) \cdot y'(x) = 3y^2 y'$,таким образом имеем:

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3(x'y + xy') = 0 | : 3;$$

$$x^2 + y^2 y' - y - xy' = 0;$$

2) Разрешим полученное уравнение относительно y':

$$x^2 + y^2 y' - y - xy' = 0;$$

$$y'(y^2 - x) = y - x^2;$$

$$y' = \frac{y-x^2}{y^2-x}.$$

б) Функция задана неявно, уравнением $F(x; y) = e^{\frac{x}{y}} - yx + 1$.

1)Продифференцируем обе части уравнения $F(x; y)$ по переменной x:

$$\left(e^{\frac{x}{y}} - yx + 1\right)' = 0,$$

$$e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}\right)' - (y'x + x'y) = 0,$$

$$e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x'y - xy'}{y^2} - y'x - y = 0,$$

$$e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} - y'x - y = 0,$$

$$e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}y'\right) - y'x - y = 0,$$

$$\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}-\frac{e^{\frac{x}{y}}x}{y^2}y'-y'x-y=0,$$

$$-y'\left(\frac{e^{\frac{x}{y}}x}{y^2}+x\right)=y-\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}|\cdot(-1),$$

$$y'\left(\frac{e^{\frac{x}{y}}x}{y^2}+x\right)=\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}-y,$$

$$y'=\frac{\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}-y}{\frac{e^{\frac{x}{y}}x}{y^2}+x},$$

$$y'=\frac{\frac{e^{\frac{x}{y}}-y^2}{y}}{\frac{e^{\frac{x}{y}}x+xy^2}{y^2}},$$

$$y'=\frac{\frac{e^{\frac{x}{y}}-y^2}{y}}{\frac{e^{\frac{x}{y}}x+xy^2}{y^2}},$$

$$y'=\frac{y\left(e^{\frac{x}{y}}-y^2\right)}{x\left(e^{\frac{x}{y}}+y^2\right)}$$

в) $(\cos(x+y)-x+y)'=0,$

$-\sin(x+y)(x+y)'-1+y'=0,$

$-(1+y')\sin(x+y)-1+y'=0|\cdot(-1),$

$(1+y')\sin(x+y)+1-y'=0,$

$\sin(x+y)+y'\sin(x+y)+1-y'=0,$

$$y'(sin(x+y)-1)=-\big(1+sin(x+y)\big),$$
$$y'=-\frac{1+sin(x+y)}{sin(x+y)-1},$$
$$y'=\frac{1+sin(x+y)}{1-sin(x+y)}.$$

Пример 1.16. Найти производную функции $\sqrt{x^2+y^2}=2y-x$ в точке $M_0(3;4)$.

Решение.

Для начала найдём y', поскольку исходная функция задана неявно, уравнением $F(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}+x-2y=0$,воспользуемся правилом дифференцирования неявных функций:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'=(2y-x)';$$
$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2)'=2y'-1;$$
$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x+2yy')\quad=2y'-1;$$
$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=2y'-1;$$
$$x+yy'=(2y'-1)\sqrt{x^2+y^2};$$
$$x+yy'=2y'\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2+y^2};$$

$$yy'-2y'\sqrt{x^2+y^2}=-\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right);$$
$$y'\left(y-2\sqrt{x^2+y^2}\right)=-\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right);$$
$$y'=-\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y-2\sqrt{x^2+y^2}};$$

Найдём значение производной функции в точке $M_0(3;4)$:

$$y'|_{M_0}=-\frac{3+\sqrt{3^2+4^2}}{4-2\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{3+5}{4-10}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

Дифференцирование параметрически заданных функций.

Функция $y = f(x)$задана параметрически уравнениями $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$, $t \in R, t -$вспомогательная переменная-параметр.

Например, для функции заданной параметрически уравнениями$\begin{cases} y = t^2 - 5 \\ x = 1 - t \end{cases}$,найдём зависимость y от x.Из уравнения $x = 1 - t$,находим $t = 1 - x$, подставляем в уравнение $y = t^2 - 5$ получим $y = (1 - x)^2 - 5$.

Найдём производную функции заданной параметрически y'_x,считая , что функции $x = x(t), y = y(t)$ имеют производные и что $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi(x)$, как известно, производная обратной функции равна $t'_x = \frac{1}{x'_t}$.

Функция $y = f(x)$- сложная, так как $y = y(t), t = \varphi(x)$, поэтому $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}$,

то есть

$$\boldsymbol{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}} \quad \textbf{(1.13)}$$

Замечание: формула (1.13) позволяет находить y'_x от функции, заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

Пример 1.17. Найти производную для функций:

а) $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = ln^2 2t \end{cases}$;**б)** $\begin{cases} x = (t+1)^2 \\ y = \frac{t^3 + 2t^2}{t} \end{cases}$;**в)** $\begin{cases} x = cos^2 3t \\ y = sin^2 3t \end{cases}$.

Решение.

а) Функция задана параметрически, так как

$x = x(t), y = y(t)$,поэтому $y' = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$:

$x'_t=\left(\frac{t+1}{t}\right)'=\left(1+\frac{1}{t}\right)'=(t^{-1})'=-t^{-2}=-\frac{1}{t^2},$

$y'_t=((ln2t)^2)'=2ln2t(ln2t)'=2ln2t\frac{1}{2t}(2t)'=$

$=\frac{2ln2t}{t}$,следовательно,

$$y'=\frac{\frac{2ln2t}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=-\frac{2ln2t\cdot t^2}{t}=-2tln2t;$$

б) Учитывая, что $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$ имеем:

$x'_t=((t+1)^2)'=2(t+1)(t+1)'=2(t+1),$

$$y'_t=\left(\frac{t^3+\ 2t^2}{t}\right)'=(t^2+2t)'=2t+2=2(t+1).$$

Таким образом,$y'=\frac{2(t+1)}{2(t+1)}=1;$

в) $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$:

$x'_t=(cos^23t)'=((cos3t)^2)'=2cos3t(cos3t)'=$

$=-2cos3tsin3t(3t)'=-3sin6t,$

$y'_t=(sin^23t)'=((sin3t)^2)'=2sin3t(sin3t)'=$

$=2sin3tcos3t(3t)'=3sin6t$,следовательно,

$$y'_x=\frac{3sin6t}{-3sin6t}=-1.$$

Задания для самостоятельного решения.

1. Вычислить производную функции:

1.	$y=2x^2-\frac{3}{x}+\sqrt[4]{x^3}$	**11.**	$y=ln(1+e^{10x})+\sqrt{x^2+1}$
2.	$y=\frac{\left(\sqrt[5]{x}-\sqrt{x}\right)^3}{x}$	**12.**	$y=e^{-\sqrt{x^2+1}}$
3.	$y=x^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{x^3}\cdot sinx$	**13.**	$y=(sinx)^{x^2+1}$
4.	$y=ctg^3lnx$	**14.**	$y=x^{x^2}$
5.	$y=tgln^3x$	**15.**	$y=(2x)^{sin3x}$
6.	$y=xln^2x$	**16.**	$y=x^{lnx}$

7.	$y = arctg^9(x^3 + 2x)$	**17.**	$y = x^{\sqrt{x}}$
8.	$y = ln(x^4 + 2x)$	**18.**	$y = ln\sqrt{\frac{1 - sinx}{1 + sinx}}$
9.	$y = 3^{\frac{4}{x^2}}$	**19.**	$y = (sinx - 2cosx)^3$
10.	$y = ln\left(\sqrt[4]{\frac{3x+1}{x^3+1}}\right)$	**20.**	$y = cos(x^3 - 3)$

Ответы:

1.1. $y' = 4x + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$. **1.2.** $y' = -\frac{2}{5x\sqrt[5]{x^2}} + \frac{3}{10x\sqrt[10]{x}} + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^4}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **1.3.** $y' = sinx + xcosx$. **1.4.** $y' = -\frac{3ctg^2 lnx}{xsin^2 lnx}$.
1.5. $y' = \frac{3ln^2 x}{xcos^2 ln^3 x}$. **1.6.** $y' = lnx(lnx + 2)$.
1.7. $y' = \frac{9(3x^2+2)arctg^8(x^3+2x)}{1+(x^3+2x)^2}$. **1.8.** $y' = \frac{4x^3+2}{x^4+2x}$.
1.9. $y' = -\frac{8}{x^3}3^{\frac{4}{x^2}}ln3$. **1.10.** $y' = \frac{3(1-x^2-2x^3)}{4(3x+1)(x^3+1)}$.
1.11. $y' = \frac{10e^{10x}}{1+e^{10x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. **1.12.** $y' = -\frac{xe^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$.
1.13. $y' = (sinx)^{x^2+1}(2xln(sinx) + (x^2 + 1)ctgx)$.
1.14. $y' = x^{x^2+1}(2lnx + 1)$.
1.15. $y' = (2x)^{sin3x}\left(3cos3xln2x + \frac{1}{x}sin3x\right)$.
1.16. $y' = 2x^{lnx-1}lnx$. **1.17.** $y' = \frac{(lnx+2)x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.
1.18. $y' = -\frac{1}{cosx}$. **1.19.** $y' = 3(sinx - 2cosx)^2(cosx + 2sinx)$.
1.20. $y' = -3x^2 sin(x^3 - 3)$.

2. Вычислить производную функции:

1.	$x^2 + y^2 - 4xy = 0$	**11.**	$arcsin\frac{x}{y} = ylnx$

2.	$arctg\dfrac{y}{x} - xy = 0$	**12.**	$\begin{cases} x = e^t sint \\ y = e^t cost \end{cases}$
3.	$e^{xy} + y - 3 = 0$	**13.**	$\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}$
4.	$x^2 + y^2 - 2axy = 0$	**14.**	$\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3} \\ y = \dfrac{1}{2t} + \dfrac{3}{2t^2} \end{cases}$
5.	$e^{x+y} + xy + 5 = 0$	**15.**	$\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = t^2 - 2t^3 \end{cases}$
6.	$sin(xy) = -x^3y^2$	**16.**	$\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t} \\ y = \dfrac{t-1}{t} \end{cases}$
7.	$3x^2y^2 - 5x = 3y - 1$	**17.**	$\begin{cases} x = t - arctgt \\ y = \dfrac{t^3}{3} + 1 \end{cases}$
8.	$xy = e^x siny$	**18.**	$\begin{cases} x = t - 4 \\ y = t^2 - 16 \end{cases}$
9.	$sin(x^2 - y) - y^2 = 0$	**19.**	$\begin{cases} x = 3sint \\ y = 2cost \end{cases}$
10.	$x^3 + y^3 = sin(x - 2y)$	**20.**	$\begin{cases} x = cos^2 t \\ y = sin^2 t \end{cases}.$

Ответы:

2.1. $y' = \frac{2y-x}{y-2x}$. **2.2.** $y' = \dfrac{y(1+x^2+y^2)}{x(1-x^2-y^2)}$.

2.3. $y' = \frac{y^2-3y}{x(3-y)+1}$. **2.4.** $y' = \frac{ay-x}{y-ax}$.

2.5. $y' = -\frac{e^{x+y}+y}{e^{x+y}+x}$. **2.6.** $y' = -\frac{ycos(xy)+3x^2y^2}{xcos(xy)+2x^3y}$.

2.7. $y' = \frac{6xy^2-5}{3-6x^2y}$. **2.8.** $y' = \frac{e^x siny-y}{x-e^x cosy}$.

2.9. $y' = \frac{2x\cos(x^2-y)}{\cos(x^2-y)+2y}$. **2.10.** $y' = \frac{\cos(x-2y)-3x^2}{3y^2+2\cos(x-2y)}$.

2.11. $y' = \frac{y\left(x-y\sqrt{y^2-x^2}\right)}{x\left(y\ln x\sqrt{y^2-x^2}+x\right)}$. **2.12.** $y' = \frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$.

2.13. $y' = ctg\,\frac{t}{2}$. **2.14.** $y' = \frac{t(t+6)}{2(2t+3)}$. **2.15.** $y' = \frac{t(1-3t)}{1+t}$.

2.16. $y' = -1$. **2.17.** $y' = t^2 + 1$. **2.18.** $y' = 2t$.

2.19. $y' = -\frac{2}{3}tgt$. **2.20.** $y' = -1$.

ГЛАВА 2. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

Производные высших порядков — это производные порядка выше первого. Чтобы найти производные высших порядков, необходимо выполнять дифференцирование несколько раз.

2.1. Производные и дифференциалы высших порядков явно заданной функции.

Функция $y = f(x)$, x-независимая переменная,

$y' = f'(x)$-производная первого порядка или $\frac{dy}{dx}$;

$dy = f'(x)dx$ –дифференциал первого порядка;

$y'' = (y')'$ –производная второго порядка или $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$;

$d^2y = f''(x)dx^2$ –дифференциал второго порядка.

Действительно,

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d\big(f'(x)\big)dx =$$
$$= f''(x)dxdx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

Аналогично рассуждая, получим:

$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$ - производная n –го порядка или $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{dx}$;

$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n -$ дифференциал n –го порядка.

Пример 2.1. Для следующих функций найти производные и дифференциалы первого и второго порядка: **а)** $y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$;**б)** $y = (2x+5)^6$;

в) $y = arcsin\frac{1}{x}$;**г)**$y = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Решение.

а) Первую производную функции $y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$ мы уже находили (см. пример 1.9)

$$y' = 5 + \frac{8}{x^5} + \frac{18\sqrt[5]{x}}{5}.$$

Подставляя $y' = f'(x) = 5 + \frac{8}{x^5} + \frac{18\sqrt[5]{x}}{5}$ в формулу для вычисления дифференциала $dy = f'(x)dx$ первого порядка, получим:

$dy = \left(5 + \frac{8}{x^5} + \frac{18\sqrt[5]{x}}{5}\right)dx -$ дифференциал первого порядка функции $y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$.

Найдём y'':

$$y'' = \left(5 + \frac{8}{x^5} + \frac{18\sqrt[5]{x}}{5}\right)' = -\frac{40}{x^6} + \frac{18}{25\sqrt[5]{x^4}}.$$

Подставляя $y'' = f''(x) = -\frac{40}{x^6} + \frac{18}{25\sqrt[5]{x^4}}$ в формулу $d^2y = f''(x)dx^2$ имеем:

$d^2y = \left(-\frac{40}{x^6} + \frac{18}{25\sqrt[5]{x^4}}\right)dx^2$- дифференциал второго порядка исходной функции.

б) Найдём y':

$y' = ((2x+5)^6)' = 6(2x+5)^5 \cdot (2x+5)' =$
$= 12(2x+5)^5$;

Подставляя $y' = f'(x) = 12(2x+5)^5$ в формулу для вычисления дифференциала $dy = f'(x)dx$ получим:

$dy = 12(2x+5)^5 dx$ –дифференциал первого порядка функции $y = (2x+5)^6$.

Найдём y'':
$y'' = 12((2x+5)^5)' = 60(2x+5)^4 \cdot (2x+5)' =$
$= 120(2x+5)^4$.

Подставляя $y'' = f''(x) = 120(2x+5)^4$
в формулу $d^2y = f''(x)dx^2$ имеем:
$d^2y = 120(2x+5)^4 dx^2$ - дифференциал второго порядка исходной функции.

в) Найдём y' и dy:

$$y' = \left(\arcsin\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} \cdot (x^{-1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (-x^{-2}) =$$

$$= -\frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$ следовательно,

$dy = y'dx = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.

Для того, чтобы упростить вычисление второй производной преобразуем полученную производную первого порядка:

$$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}} = -(x^4-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$y'' = -\left((x^4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(x^4-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x^4-x^2)' =$$

$$= \frac{4x^3-2x}{2(x^4-x^2)\sqrt{x^4-x^2}} = \frac{2x(2x^2-1)}{2x^2(x^2-1)x\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}},$$ следовательно,

$$d^2y = y''dx^2 = \frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}\,dx^2.$$

г) $y' = \left(ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(\left(x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)\right)' =$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\left(x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)'\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$dy = y'dx = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$y'' = \left((x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x^2+1)' =$$

$$= -\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}};$$

$$d^2y = y''dx^2 = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx^2.$$

Пример 2.2. Для следующих функций найти производные и дифференциалы n –го порядка $y^{(n)}$:

а) $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5$;**б)** $y = 2^x + 2^{-x}$;**в)**$y = \frac{1}{x+1}$.

Решение.

а) $y' = \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5\right)' = x^2 + 4x;$

$y'' = (x^2+4x)' = 2x+4;$

$y''' = (2x+4)' = 2;$

$y^{(4)} = y^{(5)} = \cdots = y^{(n)} = 0;$

Следовательно, $d^ny = y^{(n)}(x)dx^n = 0dx^n$.

б)$y' = (2^x + 2^{-x})' = 2^x ln2 - 2^{-x} ln2 =$

$= ln2(2^x - 2^{-x});$

$y'' = \left(ln2(2^x - 2^{-x})\right)' = ln2(2^x - 2^{-x})' =$

$= ln2(2^x ln2 - 2^{-x} ln2(-x)') = ln2(2^x ln2 + 2^{-x} ln2) =$

$= ln^2 2(2^x + 2^{-x});$

$y''' = ln^2 2(2^x + 2^{-x})' = ln^2 2(2^x ln2 + 2^{-x} ln2(-x)') =$

$= ln^2 2(2^x ln2 - 2^{-x} ln2) = ln^3 2(2^x - 2^{-x}).$

Остановимся на вычислении трёх производных, так как уже можно выявить некоторую закономерность.

Таким образом,

$$y^{(n)} = ln^n 2(2^x + (-1)^n \cdot 2^{-x});$$

Следовательно,

$d^n y = y^{(n)}(x)dx^n = ln^n 2(2^x + (-1)^n \cdot 2^{-x})dx^n.$

Проверим правильность полученной формулы:

при $n = 1$, получим $dy = ln2(2^x - 2^{-x})dx$;

при $n = 2$,имеем $d^2y = ln^2 2(2^x + 2^{-x})dx^2$ –верно! и так далее.

в) $y' = \left(\frac{1}{x+1}\right)' = ((x+1)^{-1})' = -(x+1)^{-2}(x+1)' =$

$= -(x+1)^{-2} = -\dfrac{1}{(x+1)^2};$

$y'' = -((x+1)^{-2})' = 2(x+1)^{-3}(x+1)' = \dfrac{2}{(x+1)^3};$

$y''' = 2((x+1)^{-3})' = -\dfrac{6}{(x+1)^4};$

Учитывая, что $1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,$ имеем:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \ .$$

Следовательно, $d^n y = y^{(n)}(x)dx^n = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} dx^n.$

Правильность полученной формулы проверьте самостоятельно.

2.2. Производные высших порядков неявно заданной функции.

Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В неё войдут x, y и y'.Подставляя найденное значение y' в выражение второй производной, находим выражение y'' через x, y.

Аналогично, находится третья производная и так далее.

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно равенством $F(x;y) = 0$. Чтобы найти производную, продифференцируем обе части этого равенства: $\left(F(x;y)\right)'_x = (0)'_x$, считая, что y есть функция от x, используя правило дифференцирования сложной функции. Затем из получившегося равенства выразим производную $y' = y'(x) = f(x;y)$.

Для того, чтобы найти производную второго порядка, продифференцируем равенство $y' = f(x;y)$,

считая, что y есть функция, зависящая от переменной x ,получим $y'' = g(x;y;y')$.

Подставляя найденную ранее производную первого порядка$y' = f(x;y)$,в полученное равенство окончательно имеем:

$$y'' = g\big(x;y;f(x;y)\big).$$

Аналогично, находится третья производная и так далее.

Пример 2.3. Найти первую и вторую производную функции: **а)**$x^2 + y^2 = 4y$;**б)** $ln(x + 2y) - y + 1 = 0$;

в) $arctgy = x + y$.

Решение

а) Функция задана неявно, уравнением $F(x;y) = x^2 + y^2 - 4y$.

Продифференцируем обе части уравнения $F(x;y) = 0$ по переменной x и найдём y':

$$(x^2 + y^2)' = (4y)',$$
$$2x + 2yy' - 4y' = 0|:2,$$
$$x + yy' - 2y' = 0,$$
$$y'(y-2) = -x,$$
$$y' = -\frac{x}{y-2},$$
$$y' = \frac{x}{2-y}.$$

Для нахождения второй производной продифференцируем полученное равенство по x:

$$y'' = \left(\frac{x}{2-y}\right)',$$

$$y'' = \frac{2-y+xy'}{(2-y)^2},$$

исключая$y' = \frac{x}{2-y}$ из данного равенства,получим:

$$y'' = \frac{2-y+\dfrac{x^2}{2-y}}{(2-y)^2} = \frac{(2-y)^2-x^2}{(2-y)^3};$$

Таким образом, $y'' = \frac{(2-y)^2-x^2}{(2-y)^3}$;

б) Продифференцируем обе части уравнения $F(x;y) = 0$ по переменной x:

$$(ln(x+2y) - y + 1)' = 0,$$

$$\frac{1+2y'}{x+2y} - y' = 0,$$

$$\frac{1+2y'}{x+2y} = y',$$

$$1 + 2y' = y'(x+2y),$$

$$1 + 2y' = xy' + 2y'y,$$

$$y'(2-x-2y) = 1,$$

$$y' = \frac{1}{2-x-2y},$$

$$y'' = \left(\frac{1}{2-x-2y}\right)',$$

$$y'' = ((2-x-2y)^{-1})' = -\frac{(2-x-2y)'}{(2-x-2y)^2} =$$

$= -\frac{-1-2y'}{(2-x-2y)^2} = \frac{1+2y'}{(2-x-2y)^2}$,учитывая, что

$y' = \frac{1}{2-x-2y}$ имеем:

$$y'' = \frac{1 + \frac{2}{2 - x - 2y}}{(2 - x - 2y)^2} = \frac{2 - x - 2y + 2}{(2 - x - 2y)^3} =$$
$$= \frac{4 - x - 2y}{(2 - x - 2y)^3}.$$

в) $arctgy = x + y,$
$(arctgy)' = (x + y)',$
$\frac{y'}{1 + y^2} = 1 + y',$
$y' = (1 + y')(1 + y^2),$
$y' = 1 + y^2 + y' + y'y^2,$
$y'y^2 = -(1 + y^2),$
$y' = -\frac{1+y^2}{y^2},$
$y' = -\left(\frac{1}{y^2} + 1\right),$
$y'' = -\left(\frac{1}{y^2} + 1\right)',$
$y'' = -(y^{-2})' = 2y^{-3} \cdot y' = \frac{2y'}{y^3},$

$$y'' = \frac{2y'}{y^3} = \frac{2\left(-\frac{1 + y^2}{y^2}\right)}{y^3} = -\frac{2(1 + y^2)}{y^5}.$$

2.3. Производные высших порядков параметрически заданных функций.

Пусть функция $y = f(x)$задана параметрически уравнениями$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,нам известно, что $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.Найдем её производную, то есть вторую производную от функции, заданной параметрически, применяя правила дифференцирования сложной и обратной функций имеем:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \frac{1}{x'_t}(y'_x)'_t = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Аналогично, находится третья производная и так далее, то есть

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \ldots,$$

$$y^{(n)}{}_x = \frac{(y^{(n-1)}{}_x)'_t}{x'_t}.$$

Пример 2.4. Найти первую, вторую и третью производную параметрически заданной функции: $\begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = lnt \end{cases}.$

Решение.

Функция задана параметрически, поэтому y' находим по соответствующей формуле $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$:

$$x'_t = \left(\frac{1}{t}\right)' = (t^{-1})' = -t^{-2} = -\frac{1}{t^2},$$

$y'_t = (lnt)' = \frac{1}{t}$,следовательно, $y'_x = \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -t;$

Найдём вторую производную:

$$y'' = y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-t)'_t}{-\frac{1}{t^2}} = t^2;$$

Найдём третью производную:

$$y''' = y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = \frac{(t^2)'_t}{-\frac{1}{t^2}} = \frac{2t}{-\frac{1}{t^2}} = -2t^3.$$

Пример 2.5. Найти первую, вторую производную параметрически заданной функции:

а) $\begin{cases} x = 2t^2 + 2t + 8 \\ y = ln4t + 2t + 4 \end{cases}$;**б)**$\begin{cases} x = acos^3t \\ y = asin^3t \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2} \\ y = arcsin(1 - t) \end{cases}$.

Решение.

а) Функция задана параметрически, y' вычислим по формуле $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$:

$x'_t = (2t^2 + 2t + 8)' = 4t + 2 = 2(2t + 1);$

$y'_t = (ln4t + 2t + 4)' = \dfrac{1}{4t}(4t)' + 2 =$

$= \frac{1}{t} + 2 = \frac{2t+1}{t}$.

Таким образом,

$y' = y'_x = \dfrac{\frac{2t+1}{t}}{2(2t+1)} = \frac{1}{2t};$

Найдём вторую производную $y'' = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$:

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{1}{2t}\right)' = \frac{1}{2}(t^{-1})' = -\frac{1}{2t^2};$$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{2t^2}}{2(2t + 1)} = -\frac{1}{4t^2(2t + 1)};$$

б) Вычислим y' :

$x'_t = (acos^3t)' = a((cost)^3)' = 3acos^2t(cost)' =$
$= -3acos^2tsint;$

$y'_t = (asin^3t)' = a((sint)^3)' = 3asin^2t(sint)' =$
$= 3asin^2tcost.$

Таким образом,

$y' = \frac{3asin^2tcost}{-3acos^2tsint} = -\frac{sint}{cost} = -tgt;$

Найдём вторую производную:

$$y'' = y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-tgt)'_t}{-3acos^2tsint} =$$

$$=\frac{\frac{1}{cos^2t}}{3acos^2tsint}=\frac{1}{3acos^4tsint};$$

в) Найдём y':

$$x'_t=\left(\sqrt{2t-t^2}\right)'=\left((2t-t^2)^{\frac{1}{2}}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}(2t-t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2t-t^2)'=\frac{2-2t}{2\sqrt{2t-t^2}}=$$

$$=\frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}};$$

$$y'_t=\left(arcsin(1-t)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-(1-t)^2}}(1-t)'=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}\ .$$

Таким образом,

$$y'=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}}{\frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}}=-\frac{1}{1-t}=\frac{1}{t-1}.$$

Найдём вторую производную$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$, так как

$$(y'_x)'_t=\left(\frac{1}{t-1}\right)'=((t-1)^{-1})'=$$

$$=-(t-1)^{-2}=-\frac{1}{(t-1)^2},$$

имеем:

$$y''=\frac{-\frac{1}{(t-1)^2}}{\frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}}=-\frac{1}{(t-1)^2}\cdot\frac{\sqrt{2t-t^2}}{1-t}=\frac{\sqrt{2t-t^2}}{(t-1)^3}.$$

Задания для самостоятельного решения.

3.(1)-(7) Найти первую и вторую производные и дифференциалы данных функций;(8)-(10) Найти производную n –го порядка;
(11) -(20) Найти первую и вторую производные данных функций:

1.	$y=(x^2+1)^3$	**11.**	$y^2=x$
2.	$y=sin^2x$	**12.**	$2x^2+3y^2-7=0$
3.	$y=e^{-x}cosx$	**13.**	$y=e^y+4x$
4.	$y=\dfrac{x^2}{x+1}$	**14.**	$\sqrt{x^2+y^2}=e^{arctg\frac{y}{x}}$
5.	$y=\sqrt[3]{x+3}$	**15.**	$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{t}} \\ y=\sqrt[3]{t} \end{cases}$
6.	$y=x(lnx-1)$	**16.**	$\begin{cases} x=t^3+3t^2+4 \\ y=sin^2t \end{cases}$
7.	$y=arctgx^2$	**17.**	$\begin{cases} x=\sqrt{t^3} \\ y=arctg\sqrt{t} \end{cases}$
8.	$y=ln(2x-1)$	**18.**	$\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=t^3 \end{cases}$
9.	$y=cos3x$	**19.**	$\begin{cases} x=t^2 \\ y=2cost \end{cases}$
10.	$y=a^{5x}$	**20.**	$\begin{cases} x=cos2t \\ y=t^2 \end{cases}$.

Ответы:

3.1. $y'=6x(x^2+1)^2, dy=6x(x^2+1)^2dx$;

$y''=6(5x^2+1)(x^2+1), d^2y=6(5x^2+1)(x^2+1)dx^2$.

3.2. $y'=sin2x$, $dy=sin2xdx$; $y''=2cos2x, d^2y=2cos2xdx^2$.

3.3. $y'=-e^{-x}(sinx+cosx), dy=-e^{-x}(sinx+cosx)dx$;

$y'' = 2e^{-x}cosx, d^2y = 2e^{-x}cosxdx^2$.**3.4.** $y' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$,

$dy = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}dx$; $y'' = \frac{2}{(x+1)^3}$, $d^2y = \frac{2}{(x+1)^3}dx^2$.

3.5. $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}$, $dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}dx$; $y'' = -\frac{2}{9(x+3)\sqrt[3]{(x+3)^2}}$,

$d^2y = -\frac{2}{9(x+3)\sqrt[3]{(x+3)^2}}dx^2$. **3.6.** $y' = lnx, dy = lnxdx$;

$y'' = \frac{1}{x}$, $d^2y = \frac{1}{x}dx^2$. **3.7.** $y' = \frac{2x}{1+x^4}$, $dy = \frac{2x}{1+x^4}dx$

$y'' = \frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}$, $d^2y = \frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}dx^2$.

3.8. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!2^n}{(2x-1)^n}$. **3.9.** $y^{(n)} = 3^n cos\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right)$.

3.10. $y^{(n)} = a^{5x}ln^n a5^n$. **3.11.** $y' = \frac{1}{2y}$, $y'' = -\frac{1}{4y^3}$.

3.12. $y' = -\frac{2x}{3y}$, $y'' = -\frac{4x^2+6y^2}{9y^3}$. **3.13.** $y' = \frac{4}{1-e^y}$,

$y'' = \frac{16e^y}{(1-e^y)^3}$. **3.14.** $y' = \frac{x+y}{x-y}$, $y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

3.15. $y' = -\frac{2}{3}t^{\frac{5}{6}}$, $y'' = \frac{10}{9}t\sqrt[3]{t}$. **3.16.** $y' = \frac{sint}{3t^2+6t}$,

$y'' = \frac{6\left(cos2t(t^2+2t)-sin2t(t+1)\right)}{(3t^2+6t)^2}$. **3.17.** $y' = \frac{1}{3t(1+t)}$,

$y'' = -\frac{2(2t+1)}{9t^2\sqrt{t}(1+t)^2}$. **3.18.** $y' = -\frac{3t^2}{e^{-t}}$, $y'' = 3e^{2t}t(2+t)$.

3.19. $y' = -\frac{sint}{t}$, $y'' = \frac{sint-tcost}{2t^3}$.

3.20. $y' = -\frac{t}{sin2t}$, $y'' = \frac{sin2t-2tcos2t}{2sin^3 2t}$.

ГЛАВА 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ.

3.1. Теорема Ферма, Роля, Лагранжа и Коши.

Теорема Ферма.

Теорема 3.1. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке X и во внутренней точке x_0 этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Тогда если в точке x_0 существует производная этой функции, то она равна нулю, то есть $f'(x_0) = 0$.

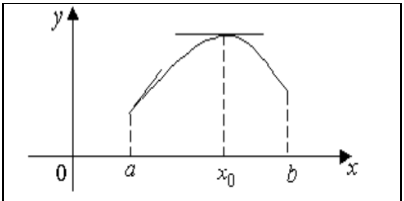


Рис. 3.1

Теорема Ферма имеет следующий геометрический смысл (см. рис.3.1): если во внутренней точке промежутка функция принимает наибольшее (наименьшее) значение и в этой точке существует касательная, то эта касательная параллельна оси Ox. В теореме существенным является то, что x_0 – внутренняя точка. Действительно, если наибольшее (наименьшее) значение достигается функцией на границе промежутка, то производная в этой точке может быть не равна нулю. Обратите внимание на рис.3.1 наименьшее значение функции достигается в точке a . Однако касательная в этой точке не параллельна оси Ox, то есть$f'(a) \neq 0$.

Теорема Ролля.

Теорема 3.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и принимает на концах отрезка равные значения: $f(a) = f(b)$. Тогда найдется точка $c \epsilon (a;b)$

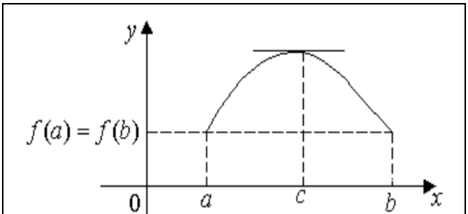


Рис. 3.2

, в которой $f'(c) = 0$.

Теорема Ролля имеет следующий геометрический смысл (см.рис.3.2): на графике функции, удовлетворяющей условиям теоремы, найдется точка, в которой касательная параллельна оси Ox.

Теорема Лагранжа.

Теорема 3.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема в интервале $(a; b)$. Тогда найдется точка $c\epsilon(a; b)$, в которой

$$\boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}} \quad (3.1)$$

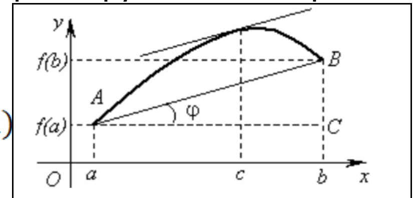


Рис. 3.3

Теорема Лагранжа имеет следующий геометрический смысл (рис. 3.3): на графике дифференцируемой функции найдется точка, в которой касательная параллельна хорде AB. Действительно, которой $f'(c)$ – угловой коэффициент касательной,

$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{BC}{AC}$ – угловой коэффициент хорды AB . По теореме Лагранжа имеет место формула:

$\boldsymbol{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)(3.2)}$, которая так же, как и формула (3.1), называется формулой Лагранжа, или формулой конечных приращений.

Теорема Коши.

Теорема 3.4. Пусть функция f и g непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы в интервале $(a; b)$. Тогда найдется точка $c\epsilon(a; b)$, для которой

$$\boldsymbol{\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}} \quad \textbf{(3.3)}$$

Формула (3.3) называется формулой Коши.

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$.

Чтобы пояснить геометрический смысл теоремы

Коши, рассмотрим кривую, заданную параметрически: $x = g(t)$, $y = f(t)$, $t \epsilon (a; b)$. Тогда левая часть формулы (3.3) – угловой коэффициент касательной, проведенной в некоторой внутренней точке дуги, при $t = c$, а правая часть – угловой коэффициент хорды, соединяющей точкиA ($f(a)$; $g(a)$) и B ($f(b)$; $g(b)$)).

3.2. Правило Лопиталя.

Правило Лопиталя применяется для раскрытия основных неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при вычислении пределов.

Теорема 3.5. (Теорема Лопиталя). Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0(\infty)$, причем, $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то и $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$,то есть

$$\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \quad (3.4)$$

Доказательство.

Рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

Доопределим функции f и g в точке x_0: $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тогда эти функции будут непрерывны в точкеx_0 . Применяя теорему Коши, получим: $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, где c – промежуточная точка междуx_0 и x .

Учитывая, что $f(x_0) = g(x_0) = 0$,то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)};$$

Пусть при $x \to x_0$отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ стремится к некоторому пределу. Так как точка c лежит между точками x_0 и x, то при $x \to x_0$, очевидно, и $c \to x_0$,поэтому, и отношение $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ стремится к тому же пределу. Таким образом, равенство можно записать:

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Теорема доказана.

Эту теорему обычно называют правилом Лопиталя.

Замечание: если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и так далее пока неопределенность не уйдёт. Понятно, что правило Лопиталя можно применять повторно, если функции, полученные после дифференцирования, удовлетворяют тем же требованиям, что и исходные функции f и g.

Пример 3.1. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^3+x+2}{2x^3-3x^2+x}$; **б)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x}$;

в) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi - 2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$;**г)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx - xcosx}{sin^3 x}$;**д)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{ln(tgx)}{ctg2x}$;

е) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{16x^2} - cosx}{sinx \cdot arctg4x}$.

Решение.

а) Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Функции $f(x) = 4x^3 + x + 2$,

$g(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ входящие в числитель и знаменатель дроби соответственно удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя: $f'(x) = 12x^2 + 1$,

$g'(x) = 6x^2 - 6x + 1$.

Применяя правило Лопиталя, имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x+2}{2x^3-3x^2+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^3+x+2)'}{(2x^3-3x^2+x)'}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+1}{6x^2-6x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(12x^2+1)'}{(6x^2-6x+1)'}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{12x-6}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(24x)'}{(12x-6)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{24}{12}=2.$$

б) Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Функции $f(x)=lnx$, $g(x)=x$ входящие в числитель и знаменатель дроби соответственно удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя: $f'(x)=\frac{1}{x}, g'(x)=1$.

Применяя правило Лопиталя имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(lnx)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0;$$

в) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\pi-2arctgx)'}{\left(e^{\frac{3}{x}}-1\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2}{1+x^2}}{-\frac{3e^{\frac{3}{x}}}{x^2}}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)e^{\frac{3}{x}}}=$$
$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{3}{x}}}=\frac{2}{3};$$

г) $$\lim_{x\to0}\frac{sinx-xcosx}{sin^3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(sinx-xcosx)'}{(sin^3x)'}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{cosx-cosx+xsinx}{3sin^2xcosx}=\lim_{x\to0}\frac{xsinx}{3sin^2xcosx}=$$
$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{x}{2sinxcosx}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{x}{sin2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(sin2x)'} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2cos2x} = \frac{1}{3};$$

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln(tgx)}{ctg2x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln(tgx)}{ctg2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(ln(tgx))'}{(ctg2x)'} =$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{cos^2x}}{\frac{2}{sin^2 2x}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{2sinx}\cdot\frac{sin^2 2x}{cos^2x} =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sin^2 2x}{2sinxcosx} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sin^2 2x}{sin2x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}sin2x = 0;$$

е) Непосредственное использование правило Лопиталя привело бы к громоздким вычислениям, так как в знаменателе надо находить производную произведения. Значительно проще заменить бесконечно малые функции на эквивалентные (при $x \to 0$) $sinx \sim x, arctg4x \sim 4x$ и уже затем применять правило Лопиталя, в результате получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{16x^2} - cosx}{sinx\cdot arctg4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{16x^2} - cosx\right)'}{(4x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{32xe^{16x^2} + sinx}{8x} = \frac{1}{8}\left(32\lim_{x\to 0}e^{16x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\right) = \frac{33}{8}.$$

Замечание:

1) В случае неопределённости вида $0\cdot\infty$ или $\infty - \infty$ необходимо с помощью тождественных преобразований перейти к пределам вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и только потом применять правило Лопиталя;

2) В случае неопределённостей вида $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$, следует учитывая, что $f(x)^{g(x)} = e^{lnf(x)^{g(x)}}$,

перейти от предела вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ к пределу $\lim\limits_{x\to x_0} e^{lnf(x)^{g(x)}}$, и найти предел логарифма

$lnf(x)^{g(x)} = g(x)lnf(x)$, то есть

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{lnf(x)^{g(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)lnf(x)}.$$

Пример 3.2.а) $\lim\limits_{x\to+0} \sqrt[3]{x}lnx$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\pi - 2arctgx)$;**в)** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2} - ctg^2x\right)$;**д)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(sinx)^{tgx}$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{6}{1+2lnx}}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to+0} \sqrt[3]{x}lnx = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{3}}lnx =$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{lnx}{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to+0}\frac{(lnx)'}{\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}} =$$

$$= -3\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^{-\frac{1}{3}}} = -3\lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x} = 0;$$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\pi - 2arctgx) = [\infty\cdot 0] =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi - 2arctgx}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\pi - 2arctgx)'}{(x^{-1})'} =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{x^{-2}} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(1+x^2)'} =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x} = 2;$$

в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{\left(x(e^x-1)\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1+xe^x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x} = \frac{1}{2};$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-ctgx\right) = [\infty-\infty] = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{cosx}{sinx}\right) =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{sinx-xcosx}{xsinx} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(sinx-xcosx)'}{(xsinx)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{cosx-cosx+xsinx}{sinx+xcosx} = \lim_{x\to 0}\frac{xsinx}{sinx+xcosx} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(xsinx)'}{(sinx+xcosx)'} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx+xcosx}{cosx+cosx-xsinx} = \frac{0}{2} = 0;$$

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(sinx)^{tgx} = [1^\infty] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{ln(sinx)^{tgx}} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} ln(sinx)^{tgx}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx ln(sinx)},$$

найдём предел степени:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx ln(sinx) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln(sinx)}{\frac{1}{tgx}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln(sinx)}{ctgx} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(ln(sinx)\right)'}{(ctgx)'} =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{cosx}{sinx}}{\frac{1}{sin^2x}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{sinx}\cdot sin^2x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} cosxsinx = 0;$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(sinx)^{tgx} = e^0 = 1;$

е) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{6}{1+2lnx}} = [\infty^0] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{lnx^{\frac{6}{1+2lnx}}};$

Найдем предел степени:

$$\lim_{x\to+\infty} lnx^{\frac{6}{1+2lnx}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6lnx}{1+2lnx} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= 6 \lim_{x\to+\infty} \frac{(lnx)'}{(1+2lnx)'} = 6 \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}} = 6 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = 3;$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{6}{1+2lnx}} = e^3$.

3.3. Формула Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале$(a;b)$ и имеет в точке $x_0 \epsilon (a;b)$ производные до порядка n включительно, тогда при$x \to x_0$ имеем:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \cdots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + 0((x-x_0)^n)$$ или кратко

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k + 0((x-x_0)^n)\ (3.5)}$$

Формулу (3.5) называют **формулой Тейлора n -го порядка с остаточным членом в форме Пеано.**

Если в формуле (3.5) положить $x_0 = 0$,то получим **формулу Маклорена** (3.6):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \cdots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + 0(x^n)$$ или кратко

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k + 0(x^n)\ (3.6)}$$

Приведем разложения в ряды Маклорена (степенные ряды) элементарных функций с указанием области сходимости соответствующих рядов.

1) $$\boldsymbol{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n) =}$$

$$\boldsymbol{= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + 0(x^n), x\epsilon(-\infty; +\infty);}$$

Действительно, для функции $f(x) = e^x$имеем:

$f(0) = e^0 = 1;$

$f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x;$

$f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1;$

Поэтому по формуле Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + 0(x^n)$$

имеем: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n);$

2) $$\boldsymbol{sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+2}) =}$$

$$\boldsymbol{= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + 0(x^{2n+2}), x\epsilon(-\infty; +\infty);}$$

Действительно, для функции $f(x) = sinx$:

$f(0) = sin0 = 0;$

$f'(x) = cosx, f'(0) = cos0 = 1;$

$f''(x) = -sinx, f''(0) = -sin0 = 0;$

$f'''(x) = -cosx, f'''(0) = -cos0 = -1;$

Заметим, что при четных $k = 2n + 2$ производная $f^{(k)}(0) = 0$, а при нечетных $k = 2n + 1,$

$f^{(k)}(0) = (-1)^n$.

Следовательно, положив в формуле (3.6), получим:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+2});$$

Аналогично выводят- ся формулы, представленные ниже.

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n+1}) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + 0(x^{2n+1}), x \epsilon (-\infty; +\infty);$$

4) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + 0(x^n) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k + 0(x^n), x \epsilon (-1; 1);$$

5) $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + 0(x^n) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + 0(x^n), x \epsilon (-1; 1];$$

6) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 +$

$$+ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + 0(x^n) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} x^k + 0(x^n), x \epsilon (-1; 1);$$

7) $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} +$

$$+ 0(x^{2n+2}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + 0(x^{2n+2}), x \epsilon [-1; 1].$$

Формула Тейлора и Маклорена имеют разнообразные приложения. Ограничимся применением их для раскрытия неопределённостей при вычислении пределов и приближённого расчёта значений функций.

Пример 3.3. Разложить функцию $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - x + 1$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$.

Решение.

Формула Тейлора имеет вид:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\cdots$$

$$\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+0((x-x_0)^n);$$

В нашем случае $x_0=-1$,для функции $f(x)=-3x^3+2x^2-x+1$имеем:

$$f(-1)=-3(-1)^3+2(-1)^2-(-1)+1=7;$$

$$f'(x)=-9x^2+4x-1; \qquad f'(-1)=-14;$$

$$f''(x)=-18x+4; \qquad f''(-1)=22;$$

$$f'''(x)=-18; \qquad f'''(-1)=-18;$$

$f^{(n)}(x)=0, n\geq 4$,подставляя полученные значения в формулу Тейлора

$$f(x)=f(-1)+\frac{f'(-1)}{1!}\cdot(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}\cdot(x+1)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}\cdot(x+1)^n+0((x+1)^n),$$ имеем:

$$-3x^3+2x^2-x+1=7+\frac{-14}{1!}\cdot(x+1)+\frac{22}{2!}\cdot(x+1)^2+$$

$$+\frac{-18}{3!}\cdot(x+1)^3;$$

Итак, разложение исходной функции в ряд Тейлора по степеням $x_0=-1$ имеет вид:

$$-3x^3+2x^2-x+1=7-14(x+1)+11(x+1)^2-3(x+1)^3.$$

Пример 3.4. Вычислить пределы, используя разложение в ряды Тейлора и Маклорена: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx-x}{x^3}$;**в)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^{3x}}{arctgx}$.

Решение.

а) Воспользуемся следующим разложением:

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+0(x^3)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+0(x^2)\right)=1;$$

б) Воспользуемся разложением:

$$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+0(x^5)-x}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+0(x^5)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{x^3}{120}+0(x^2)\right)=-\frac{1}{6};$$

в) $arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots;$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots,$ следовательно,

$$e^{3x}=1+3x+\frac{(3x)^2}{2}+\cdots,$$

$$xe^{3x}=x+3x^2+\frac{9x^3}{2}+\cdots,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{3x}}{arctgx}=\lim_{x\to 0}\frac{x+3x^2+\frac{9x^3}{2}+0(x^3)}{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+0(x^5)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+3x+\frac{9x^2}{2}+0(x^2)\right)}{x\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+0(x^4)\right)}=1.$$

Пример 3.5. Найти число e с точностью до 0,001.

Решение.

Выпишем формулу Маклорена для функции $f(x)=e^x$,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

Положим $x=1$:

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^6}{6!} + \frac{1^7}{7!} + \cdots =$$
$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \cdots;$$

Для нахождения e с точностью 0,001 определим количество слагаемых из условия, что остаточный член меньше 0,001, поскольку $\frac{1}{5040} < 0{,}001$, то

$$e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2 + 0{,}5 + 0{,}1667 +$$
$$+0{,}0417 + 0{,}0083 + 0{,}0014 = 2{,}7181 \approx 2{,}718.$$

3.4. Исследование функций и построение графиков.

Монотонность функции. Признаки монотонности.

Напомним определения монотонных функций.

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на отрезке $[a;b]$, если для любых x_1 , $x_2 \epsilon [a;b]$, удовлетворяющих условию $x_1 > x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$.

Возрастающие, убывающие функции называются **монотонными.**

Замечание: в определении возрастающей и убывающей знаки неравенства между значениями функции могут быть нестрогими. При этом:

1) если при $x_1 > x_2$ справедливо $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется неубывающей;

2) если при $x_1 > x_2$ справедливо $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется невозрастающей.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$. В этом случае:

1)если $f'(x) > 0$ для всех значений $x\epsilon[a;b]$,то функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a;b]$;

2) если $f'(x) < 0$ для всех значений $x\epsilon[a;b]$,то функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a;b]$.

Замечание:

1)если $f'(x) \geq 0$ для всех значений $x\epsilon[a;b]$,то $f(x) -$ неубывающая функция на отрезке $[a;b]$;

2)если $f'(x) \leq 0$ для всех значений $x\epsilon[a;b]$,то $f(x) -$ невозрастающая функция на отрезке $[a;b]$.

Исследование функций с помощью первой производной. Экстремумы функции

Функция $f(x)$ имеет в точке максимум (минимум), если она определена в интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ и для всех $x\epsilon(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ выполнено неравенство $f(x) < f(x_0)\big(f(x) > f(x_0)\big)$.

Максимумы или минимумы функции называются **экстремумами** или экстремальными значениями.

Значения аргумента, при которых производная функции $f(x)$ обращается в нуль или не существует, называются **критическими точками**.

Теорема 3.6.(Необходимое условие экстремума). В точке экстремума производная $f'(x_0)$ равна нулю или не существует, то есть x_0 является критической точкой функции $f(x)$.

Теорема 3.7.(Достаточное условие экстремума). Пусть функция определена и непрерывна в некоторой окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, критической точки x_0 и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 –точка максимума, если меняет знак с минуса на плюс, то x_0 –точка минимума.

Алгоритм исследование функций с помощью первой производной.

Для того, чтобы найти интервалы монотонности и экстремумы функции, необходимо:

1)вычислить производную заданной функции;

2)найти критические функции (нули производной $f'(x) = 0$ -стационарные точки и точки, в которых производная не существует $f'(x)\nexists$);

3)нанести эти точки, а также точки разрыва функции на числовую ось;

4)определить знак производной на каждом из полученных интервалов;

5)по знаку производной определить характер монотонности функции, определить наличие экстремума и его характер в каждой критической точке, исключая точки разрыва функции.

Пример 3.6. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции: **а)**$y = 3x^5 - 5x^3$;

б) $y = \sqrt[3]{(x-1)(x-3)}$;**в)** $y = \frac{x^2+3}{x-1}$.

Решение

а) Область определения функции: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$.

Найдем критические точки:

$f'(x) = 0$,

$15x^2(x^2 - 1) = 0$,

$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$;

$f'(x)\nexists$ таких точек нет, так как $f'(x)$ существует на всей числовой оси.

Исследуем методом интервалов знак производной функции и заносим данные в таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$
	ф-я возр.	$(\cdot)$ка max	ф-я убыв.	$(\cdot)$ка min	ф-я возр.

Определяем промежутки монотонности и экстремумы функции:
$y' > 0$,функция y возрастает$\nearrow$,при $x\epsilon(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$;
$y' < 0$,функцияy убывает$\searrow$,при$x\epsilon(-1;1)$.
$x=-1$ –точка максимума,$y_{max}(-1)=2$,так как производная при переходе через эту точку меняет знак «+» на «-»;
$x=1$ –точка минимума,$y_{min}(1)=-2$,так как производная при переходе через эту точку меняет знак «-» на «+».

б) Область определения функции: $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

Преобразуем исходную функцию, для упрощения нахождения производной

$$f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x-3)}=\sqrt[3]{x^2-4x+3}=(x^2-4x+3)^{\frac{1}{3}};$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x^2-4x+3)^{-\frac{2}{3}}(x^2-4x+3)'=$$

$$=\frac{2x-4}{3\sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}}=\frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-3)^2}};$$

$f'(x)=0$, при $2(x-2)=0$,то есть$x_1=2$;

$f'(x)\nexists$, при $x_2=1, x_3=3$.

Исследуем методом интервалов знак производной функции и заносим данные в таблицу:

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	$-$	не сущ.	$-$	0	$+$	не сущ.	$+$
y	$\searrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$
	ф-я убыв.	0	ф-я убыв.	$(\cdot)$ка min	ф-я возр.	0	ф-я возр.

Определяем промежутки монотонности и экстремумы функции:

$y' > 0$,функцияy возрастает$\nearrow$,при$x\epsilon(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$;

$y' < 0$,функция y убывает$\searrow$,при$x\epsilon(-\infty;2)$.

$x = 2$ –точка минимума,$y_{min}(2) = -1$,так как производная при переходе через эту точку меняет знак «-» на «+».

в) $f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$;

$f'(x) = 0, \quad (x+1)(x-3) = 0,$

$x_1 = -1, x_2 = 3,$

$f'(x)\nexists$ при $x_3 = 1$.

Методом интервалов исследуем знак производной и данные заносим в таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	не сущ.	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	-2	$\searrow$	не сущ.	$\searrow$	6	$\nearrow$
	ф-я возр.	$(\cdot)$ка max	ф-я убыв.	не сущ.	ф-я убыв.	точка min	ф-я возр.

Таким образом, $y' > 0$,функцияy возрастает$\nearrow$,при$x\epsilon(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$;

$y' < 0$,функцияy убывает$\searrow$,при $x\epsilon(-1;1)\cup(1;3)$.

$x = -1$ –точка максимума,$y_{max}(-1) = -2$;

$x = 3$ –точка минимума,$y_{min}(3) = 6$.

Исследование функций с помощью второй производной. Выпуклость, вогнутость функции. Точки перегиба.

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вниз(вогнутой)** на интервале $(a;b)$,если её график лежит выше касательной к ней, проведённой в любой точке с абсциссой $x\epsilon(a;b)$(см.рис.3.4)

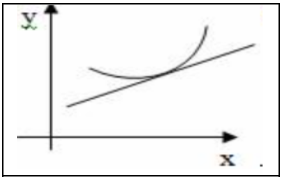


Рис.3.4.

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вверх(выпуклой)** на интервале$(a;b)$,если её график лежит ниже касательной к ней, проведённой в любой точке с абсциссой $x\epsilon(a;b)$(см.рис.3.5)

Теорема 3.8. (Достаточные условия вогнутости и выпуклости).

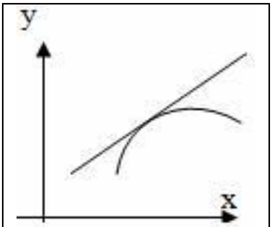


Рис.3.5

Если функция $f(x)$дважды непрерывно дифференцируема на $(a;b)$ и $f''(x_0)>0$для всех $x\epsilon(a;b)$, то график функции на этом интервале вогнутый.

Если$f''(x_0)<0$для всех $x\epsilon(a;b)$, то график на этом интервале выпуклый.

Утверждение теоремы сохраняется, если вторая производная обращается в ноль $f''(x)=0$ или $f''(x)\nexists$ не существует.

Точки, в которых меняется направление выпуклости графика функции, называются **точками перегиба.** (см.рис.3.6.)

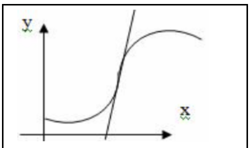


Рис.3.6.

Теорема 3.9. (Достаточное условие перегиба). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой двусторонней окрестности точки x_0, включая и саму эту точку, и дважды непрерывно дифференцируема во всех точках этой окрестности, за исключением, быть может, самой точкиx_0. Если $f''(x_0)$ меняет свой знак при переходе через x_0 , то x_0 – точка перегиба.

Алгоритм исследование функций с помощью второй производной.

Для того, чтобы найти интервалы выпуклости, вогнутости функции, необходимо:

1)вычислить вторую производную заданной функции;

2) найти нули и точки разрыва второй производной: $f''(x) = 0, f''(x)\nexists$;

3)нанести эти точки, а также точки разрыва функции на числовую ось;

4)определить знак второй производной на каждом из полученных интервалов;

5)по знаку второй производной определить характер выпуклости функции и найти точки перегиба (при переходе через точку перегиба вторая производная меняет знак).

Пример 3.7. Найти промежутки выпуклости вогнутости и точки перегиба функции:

а) $y = \sqrt[3]{x^5}$;**б)** $y = ln(1 + x^2)$;**в)** $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

Решение.

а) Область определения функции: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}};$$

$$y'' = \left(\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{5}{3}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}};$$

$y'' = 0$,таких точек нет;

$y''\nexists$,при $x = 0$.

Методом интервалов исследуем знак второй производной, данные заносим в таблицу.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
y''	$-$	не сущ.	$+$
y	$\cap$	0	$\cup$
	ф-я выпукла	$(\cdot)$ка перегиба	ф-я вогнута

Определяем промежутки выпуклости, вогнутости и точки:
$y''>0$,функцияy выпукла $\cap$,при $x\epsilon(-\infty;0)$;
$y''<0$,функцияy вогнута $\cup$,при$x\epsilon(0;+\infty)$.
$x=0$ –точка перегиба,$y(0)=0$,так как вторая производная при переходе через эту точку меняет направление выпуклости.

б) Область определения функции: $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

$$y'=\left(ln(1+x^2)\right)'=\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)'=\frac{2x}{1+x^2};$$

$$y''=\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2};$$

$$y''=0,\quad 2(1-x)(1+x)=0,$$

$$x_1=1,x_2=-1;$$

$y''\nexists$, таких точек нет.

Методом интервалов исследуем знак второй производной, данные заносим в таблицу.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\cap$	$ln2$	$\cup$	$ln2$	$\cap$
	ф-я выпукла	$(\cdot)$ка перегиба	ф-я вогнута	$(\cdot)$ка перегиба	ф-я выпукла

Определяем промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба:
$y''>0$,функцияy выпукла $\cap$,при $x\epsilon(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$;
$y''<0$,функцияy вогнута $\cup$,при $x\epsilon(-1;1)$.

$x = \pm 1$ –точки перегиба, $y(\pm 1) = ln2$.

в) Область определения функции:

Область определения функции: $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

$$y' = \left(\frac{x^4}{(1+x)^3}\right)' = \frac{4x^3(1+x)^3 - x^4 \cdot 3(1+x)^2}{(1+x)^6} =$$

$$= \frac{x^3(1+x)^2(4(1+x)-3x)}{(1+x)^6} = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4} = \frac{x^4+4x^3}{(1+x)^4};$$

$$y'' = \left(\frac{x^4+4x^3}{(1+x)^4}\right)' =$$

$$= \frac{(4x^3+12x^2)(1+x)^4 - (x^4+4x^3)4(1+x)^3}{(1+x)^8} =$$

$$= \frac{4x^2(1+x)^3\big((x+3)(1+x) - (x^2+4x)\big)}{(1+x)^8} =$$

$$= \frac{4x^2(x^2+4x+3-x^2-4x)}{(1+x)^5} = \frac{12x^2}{(1+x)^5};$$

$$y'' = 0, \quad 12x^2 = 0,$$

$$x = 0;$$

$$y'' \nexists, \quad x = -1.$$

Методом интервалов исследуем знак второй производной, данные заносим в таблицу.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; +\infty)$
y''	$-$	не сущ.	$+$
y	$\cap$	не сущ.	$\cup$
	ф-я выпукла		ф-я вогнута

Определяем промежутки выпуклости, вогнутости и экстремумы:

$y'' > 0$,функция y выпукла $\cap$,при $x \epsilon (-\infty; -1)$;

$y'' < 0$,функцияy вогнута $\cup$,при $x \epsilon (-1; +\infty)$.

Точек перегиба нет, так как точка $x = -1$ не входит в область определения функции.

Асимптоты графика функции.

Построение графика значительно облегчается, если знать его асимптоты.

Асимптота — это прямая к которой неограниченно близко приближается график функции при удалении его переменной точки в бесконечность. Различают вертикальные, наклонные и горизонтальные асимптоты:

1)прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. Вертикальные асимптоты проходят через точки бесконечного разрыва. Непрерывные функции вертикальных асимптот не имеют;

2)прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$,если существуют конечные пределы:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b,$$

При $x \to +\infty$ получают правостороннюю асимптоту, при $x \to -\infty$получают левостороннюю асимптоту.

Замечание: если $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k = 0$, то уравнение наклонной асимптоты принимает вид $y = b$.Такая асимптота называется **горизонтальной.**

Пример 3.8. Найти асимптоты графика функции: **а)** $y = \frac{x+5}{x-3}$; **б)** $y = \frac{x^3}{2x^2+3}$; **в)** $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

Решение.

а) Область определения функции: $D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$;

1) Вертикальные асимптоты:

$x=3$ – является точкой разрыва, так как в ней обращается в ноль знаменатель дроби.

Действительно, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+5}{x-3}=\pm\frac{8}{0}=\pm\infty$,тогда $x=3$ –вертикальная асимптота;

2) Горизонтальные и наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+5}{x-3}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+5}{x^2-3x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}=$$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=\frac{0}{1}=0$,так как $k=0$ наклонных асимптот нет.

Найдём горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+5}{x-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}=$$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}}=1$,следовательно,

$y=1$ – горизонтальная асимптота.

б) Область определения функции: $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

1) Вертикальные асимптот, так как нет точек разрыва.

2) Горизонтальные и наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{2x^2+3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2x^3+3x}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2+\frac{3}{x^2}}=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2+3}-\frac{x}{2}\right)=$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 - x(2x^2+3)}{2(2x^2+3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x}{2(2x^2+3)} =$$

$$= -\frac{3}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{3}{x^2}\right)} = -\frac{3}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x^2}} = 0, \text{ тогда}$$

$y = \frac{x}{2}$ – наклонная асимптота.

в) Область определения функции: $x^2 - 1 \geq 0$,то есть $D(f) = (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$;

1) Вертикальные асимптоты нет, так как нет точек бесконечного разрыва.

2) Горизонтальные и наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x};$$

Учитывая, что $|x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, \ x \geq 0 \end{cases}$ имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1, \text{то}$$

есть при $x \to +\infty, k = 1$;

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = -1,$$

то есть при $x \to -\infty, k = -1$;

Найдём b:

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} =$$

$$= -\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0;$$

Таким образом,

$y = x$ – правосторонняя наклонная асимптота,

$y = -x$ – левосторонняя наклонная асимптота.

Горизонтальные асимптот нет, так как $k \neq 0$.

Общая схема анализа свойств функции и построения ее графика

Рекомендуем следующую последовательность анализа свойств функции.

1)Область определения функции-множество значений аргумента x,при котором задана функция.

2)Координаты точек пересечения с осями координат:

с осью Ox:$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$ и Oy:$\begin{cases} x = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$.

3)Исследование функции на четность, нечетность:

$f(-x) = f(x)$ –чётная функция, график функции симметричен относительно оси Oy;

$f(-x) = -f(x)$ –нечётная функция, график функции симметричен относительно оси Ox;

$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$ – функция общего вида.

4)Исследование функции на периодичность:

$f(x \pm T) = f(x)$ –периодическая функция, где T –период функции.

5)Исследование функции по первой производной:

— промежутки монотонности $y' > 0$ ⇒функция возрастает↗;

$y' < 0$ ⇒функция убывает;

—экстремумы функции⇒ $y' \begin{cases} (\cdot)min\ "-" \Rightarrow "+" \\ (\cdot)max\ "+" \Rightarrow "-" \end{cases}$.

6)Исследование функции по второй производной:

$-y'' < 0$проме- жутки выпуклости вверх ∩

(выпуклости) ;

$-y'' > 0$ промежутки выпуклости вниз ∪ (вогнутости);

- точки перегиба- точки, в которых происходит смена направления выпуклости функции.

7) Анализ области непрерывности. Анализ точек разрыва. Асимптоты графика функции:

прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$;

прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$;

прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой, если существуют конечные пределы:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b;$$

8) Построение графика функции.

Расчет координат дополнительных точек для уточнения графика (если это необходимо).

Алгоритм построения графика исследованной функции.

Для того, чтобы построить график исследованной функции, необходимо:

1)ввести прямоугольную систему координат;

2)провести асимптоты (если они имеются);

3)отметить все характерные точки (точки экстремума, точки перегиба).

4)соединить характерные точки кривыми в соответствии с исследованием функции.

Пример 3.9. Провести полное исследование и построить график функции:

а)$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 1$;**б)** $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение.

а) 1) Область определения функции: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 1$

Координаты точек пересечения с осями координат:

с осью Oy: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1,$

то есть $A(0;1)$ – точка пересечения с осью Oy;

с осью Ox: $\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 1 \end{cases};$

$2x^3 - 15x^2 + 24x + 1 = 0$,поскольку уравнение не имеет целых корней, воспользуемся специальным сервисом для решения кубического уравнения, получим:

$x_1 = -0{,}4,\ x_2 = 5{,}15,\ x_3 = 2{,}39.$

Таким образом, $B(-0{,}4;0), C(5{,}15;0), D(2{,}39;0)$- точки пересечения с осью Ox.

3) $f(-x) = 2(-x)^3 - 15(-x)^2 + 24(-x) + 1 =$
$= -2x^3 - 15x^2 - 24x + 1 = -(2x^3 + 15x^2 + 24x - 1) \neq$
$\neq f(x) \neq -f(x)$ – функция не является ни четной, ни нечетной;

4)Функция не периодична.

5)Промежутки убывания и возрастания функции, экстремумы.

Найдем первую производную функции:

$y' = (2x^3 - 15x^2 + 24x + 1)' = 6x^2 - 30x + 24.$

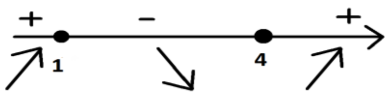
Найдем критические точки функции:

$y' = 0, \quad 6x^2 - 30x + 24 = 0|:6;$

$x^2 - 5x + 4 = 0;$

$x_1 = 1,\ x_2 = 4. \qquad y' \nexists, \quad$ таких точек нет.

Отметим точки на числовой прямой и исследуем знак первой производной при переходе через эти точки:



$x_1 = 1$ –точка максимума функции, $x_2 = 4$ – точка минимума функции.

Поставим значения x в исходное уравнение функции

для получения значения функции в точках максимума и минимума:

$y_{max}(1) = 2 - 15 + 24 + 1 = 12$;

$y_{min}(4) = 2 \cdot 64 - 15 \cdot 16 + 24 \cdot 4 + 1 = -15$.

Полученные данные занесём в таблицу:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	12	$\searrow$	-15	$\nearrow$
	ф-я возр.	$(\cdot)$ка max	ф-я убыв.	$(\cdot)$ка min	ф-я возр.

6)Интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

Найдем вторую производную:

$y'' = (6x^2 - 30x + 24)' = 12x - 30.$

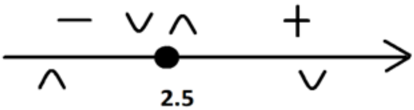
$y'' = 0;$

$12x - 30 = 0;$

$x = 2{,}5.$

$y''\nexists$, таких точек нет.

Нанесём полученные значения на числовую ось и исследуем знак второй производной функции:



$x = 2{,}5$ –точка перегиба.

Поставим значения x в исходное уравнение функции для получения значения функции в точке перегиба и все данные занесём в таблицу:
$y(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5^3 - 15 \cdot 2{,}5^2 + 24 \cdot 2{,}5 + 1 = -5{,}5.$

x	$(-\infty; 2{,}5)$	$2{,}5$	$(0; +\infty)$
y''	–	0	–
y	$\cap$	$-5{,}5$	$\cup$
	ф-я выпукла	точка перегиба	ф-я вогнута

7) Асимптоты графика функции.
Так как функция не имеет точек разрыва, то вертикальных асимптот у графика функции нет.

Найдём наклонные, горизонтальные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 15x^2 + 24x + 1}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$= \lim_{x \to \infty} \left(2x^2 - 15x + 24 + \frac{1}{x}\right) = \infty$, наклонных и горизонтальных асимптот нет.

8) Построение графика функции:

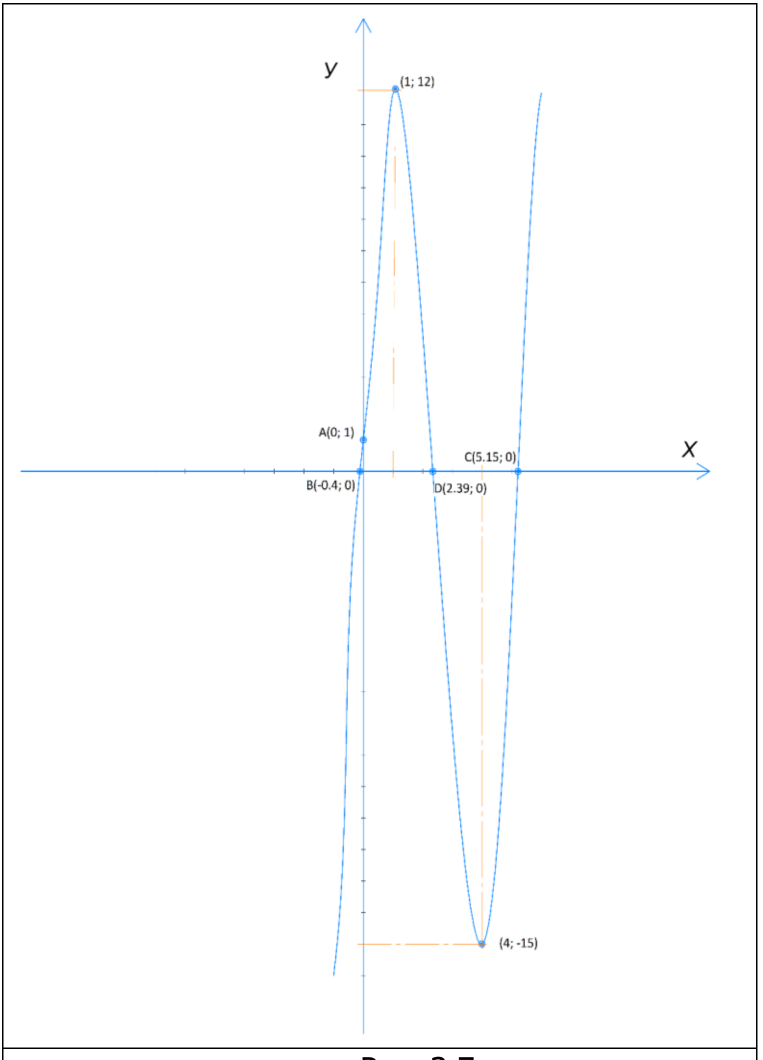


Рис. 3.7

б) 1) Область определения – вся числовая ось, кроме точки $x = -1$, в которой функция терпит разрыв, то есть $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;

2) Координаты точек пересечения с осями координат:

с осью $Ox: \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x^3}{2(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^3}{2(x+1)^2} = 0,$ при $x = 0$,то есть$(0;0)$ – точка пересечения с осью Ox;

с осью $Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^3}{2(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow y = 0$, то есть $(0;0)$ – точка пересечения с осью Oy;

3) $f(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x+1)^2} = -\frac{x^3}{2(x-1)^2} \neq$
$\neq f(x) \neq -f(x)$ – функция не является ни четной, ни нечетной;

4)Функция не периодична.

5)Промежутки убывания и возрастания функции, экстремумы.

Найдем первую производную функции:

$$y' = \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{3x^2(x+1)^2 - 2x^3(x+1)}{(x+1)^4}\right) =$$
$$= \frac{x^2(x+1)(3(x+1)-2x)}{2(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} = \frac{x^3+3x^2}{2(x+1)^3};$$

Найдем критические точки функции:

$y' = 0, \quad x^2(x+3) = 0,$

$x_1 = 0, x_2 = -3;$

$y' \nexists, \quad x_3 = -1;$

Отметим точки на числовой прямой и исследуем знак первой производной при переходе через эти точки.

При $x \epsilon (-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$ функция возрастает, на интервале $(-3; -1)$убывает. Следовательно, функция имеет максимум в точке

$x = -3, y_{max}(-3) = -3\frac{3}{8}.$

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	не сущ.	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$	$-3\frac{3}{8}$	$\searrow$	не сущ.	$\nearrow$	0	$\nearrow$
	ф-я возр.	$(\cdot)$ка max	ф-я убыв.	раз-рыва	ф-я возр.	экстр. нет	ф-я возр.

6)Интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^3+3x^2}{2(x+1)^3}\right)' = \frac{(3x^2+6x)(x+1)^3 - 3(x^3+3x^2)(x+1)^2}{2(x+1)^6} =$$

$$= \frac{3x(x+1)^2\left((x+2)(x+1) - x^2 - 3x\right)}{2(x+1)^6} =$$

$$= \frac{3x(x^2+3x+2-x^2-3x)}{2(x+1)^4} = \frac{3x}{(x+1)^4};$$

$y'' = 0,$ при $x = 0;$

$y''\nexists,$ при $x = -1.$

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y''	$-$	не сущ.	$-$	0	$+$
y	$\cap$	не сущ.	$\cap$	0	$\cup$
	ф-я выпукла	точка разрыва	ф-я выпукла	точка перегиба	ф-я вогнута

На интервалах $(-\infty;-1)\cup(-1;0)$ кривая выпукла, на интервале $(0;+\infty)$ функция вогнута.
$x = 0$ -является точкой перегиба графика функции.
Найдем ординату этой точки: $y(0) = 0$.

7)Вертикальные асимптоты:

Так как, $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\frac{1}{0} = -\infty$,то

$x = -1$ – вертикальная асимптота.

Горизонтальные и наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{2(x+1)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{2x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2};$$

$k \neq 0$,следовательно, горизонтальных асимптот нет;

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - (x^3 + 2x^2 + x)}{2(x^2 + 2x + 1)} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x}{x^2+2x+1} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1,$$

тогда $y = \frac{x}{2} - 1$ – наклонная асимптота.

8) Построение графика функции:

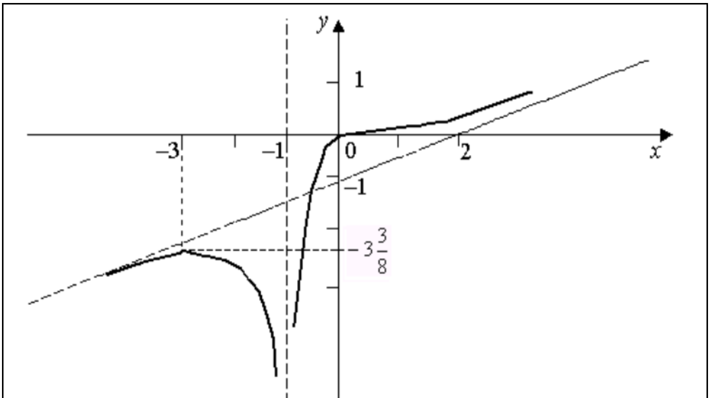


Рис. 3.8

Задания для самостоятельного решения.

4.Используя правило Лопиталя вычислить пределы:

1.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+e^{-x}-1}{x^2}$	**11.**	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2xtgx}\right)$
2.	$\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot \ln x$	**12.**	$\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)\cdot tg\dfrac{x}{2}$
3.	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+3^x)}$	**13.**	$\lim\limits_{x\to 0+0}\sin x\cdot \ln x$
4.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$	**14.**	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctgx}$
5.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$	**15.**	$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$
6.	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\ln^3 x}$	**16.**	$\lim\limits_{x\to 0}x^x$
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}$	**17.**	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$
8.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$	**18.**	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(tgx)^{\sin 2x}$
9.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$	**19.**	$\lim\limits_{x\to +0}(1+x)^{\ln x}$
10.	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$	**20.**	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

Ответы:

4.1.$\frac{1}{2}$.**4.2.**0.**4.3.**$\frac{\ln 3}{\ln 2}$.**4.4.**1.**4.5.**2.**4.6.** $+\infty$.**4.7.**2.**4.8.**1.**4.9.**0.

4.10.$\frac{1}{2}$.**4.11.**$\frac{1}{6}$.**4.12.**2.**4.13.**0.**4.14.**1.**4.15.**$\frac{1}{e}$.**4.16.**0.**4.17.** 1.**4.18.** 1.**4.19.**1.**4.20.**0.

5. (1), (2) Разложить функцию по формулам Тейлора в окрестности заданных точек;(3)-(6)

Вычислить используя разложение в ряды Тейлора и Маклорена;(8)-(10). Найти экстремумы функций; (11)-(16) Найти точки перегиба иинтервалы выпуклости функций;
(17)-(20) Найти асимптоты графиков функций.

1.	$f(x) = x^3 + 3x^2 + x - -6, x_0 = -1$	**11.**	$y = \frac{2x-1}{x+2}$
2.	$f(x) = ln(2x-1), x_0 = 1$	**12.**	$y = x^4 - 6x^2 + 4$
3.	$sin1^0$ с точностью до 0,0001	**13.**	$y = (x+1)^2 \cdot (x-2)$
4.	$cos10^0$ с точностью до 0,001	**14.**	$y = xarctgx$
5.	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - sinx}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$	**15.**	$y = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$
6.	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1+x) - x}{x^2}$	**16.**	$y = \frac{4x}{4+x}$
7.	$y = (x-5)^2 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}$	**17.**	$y = \frac{x^2+3}{x^2-9}$
8.	$y = \frac{x^3}{x^2-4}$	**18.**	$y = \frac{x^2-2x-2}{1+3x}$
9.	$y = x - e^x$	**19.**	$y = \frac{x^2}{x^2+1}$
10.	$y = \frac{x^2+1}{x}$	**20.**	$y = x + \frac{1}{x}$

Ответы:

5.1.$(x+1)^3 - 2(x+1) - 5.$

5.2.$2(x-1) - \frac{2^2(x-1)^2}{2} + \frac{2^3(x-1)^3}{3} + \cdots +$

$+ \frac{(-1)^{n+1}2^n(x-1)^3}{n} + 0((x-1)^n)$.**5.3.**0,0175 .**5.4.**0,985.

5.5.1.**5.6.**$-\frac{1}{2}$.**5.7.**2.**5.8.**на интервале

$\left(-\infty;-\sqrt{12}\right)\cup\left(\sqrt{12};+\infty\right)$ функция возрастает; на интервале $\left(-\sqrt{12};-2\right)\cup(-2;2)\cup\left(2;\sqrt{12}\right)$ функция убывает,$x_{max}=-\sqrt{12}$, $y_{max}\left(-\sqrt{12}\right)=-\frac{13\sqrt{12}}{12}$,
$x_{min}=\sqrt{12}$, $y_{min}\left(\sqrt{12}\right)=\frac{13\sqrt{12}}{12}$.**5.9.** на интервале $(-\infty;0)$ функция возрастает; на интервале $(0;+\infty)$ функция убывает,$x=0$ –точка максимума, $y_{max}(0)=-1$.**5.10.** на интервале $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ функция возрастает; на интервале$(-1;0)\cup(0;1)$ функция убывает,$x_{max}=-1$, $y_{max}(-1)=-2$, $x_{min}=1$, $y_{min}(1)=2$.**5.11.** на интервале $(-\infty;-2)$функция выпукла; на интервале $(-2;+\infty)$ функция вогнута; точек перегиба нет.**5.12.** на интервале $(-1;1)$функция выпукла; на интервале $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ функция вогнута; $(1;-4)$, $(-1;-4)$ –точки перегиба.**5.13.** на интервале $(-\infty;0)$функция выпукла; на интервале $(0;+\infty)$ функция вогнута; $(0;-2)$ –точка перегиба.**5.14.** на интервале $(-\infty;+\infty)$ функция вогнута; точек перегиба нет .**5.15.** на интервале $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$функция выпукла; на интервале $\left(\frac{1}{2};2\right)\cup(2;+\infty)$ функция вогнута; $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{9}\right)$ –точка перегиба.**5.16.** на интервале $(-4;+\infty)$функция выпукла; на интервале $(-\infty;4)$

функция вогнута; точек перегиба нет.

5.17. $x = \pm 3$ –вертикальные асимптоты; $y = 1$ –горизонтальная асимптота.**5.18.**$x = -\frac{1}{3}$ –вертикальная асимптота; $y = \frac{x}{3} - \frac{7}{9}$ –наклонная асимптота.

5.19. $y = 1$ -горизонтальная асимптота.**5.20.** $x = 0$ –вертикальная асимптота; $y = x$ –наклонная асимптота.

6.Типовой расчёт: провести полное исследование и построить график функции.

1.	$y = \dfrac{2x+1}{x^2}$	**11.**	$y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
2.	$y = \dfrac{1}{x^2-9}$	**12.**	$y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$
3.	$y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$	**13.**	$y = \dfrac{x^2-x-6}{x-2}$
4.	$y = \dfrac{x^2+5}{x+2}$	**14.**	$y = \dfrac{16-x^2}{16+x^2}$
5.	$y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$	**15.**	$y = x + \dfrac{4}{2+x}$
6.	$y = \dfrac{2}{x^2+2x}$	**16.**	$y = x - \dfrac{1}{x^3}$
7.	$y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$	**17.**	$y = \dfrac{x^2+8}{4-x^2}$
8.	$y = \dfrac{2}{x^2-1}$	**18.**	$y = \dfrac{3}{x^2+9}$
9.	$y = \dfrac{x-1}{x^2-2x}$	**19.**	$y = \dfrac{1}{x(x-8)}$

10.	$y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$	**20.**	$y = x + \dfrac{1}{x}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. Изд. 3-е. — Ростов н/Д, 2006. — 640 с.
2. Виленкин И.В., Гробер В.М. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов. Издательство «Феникс» — Ростов н/Д, 2004. — 415 с.
3. Письменный Д.Т., Конспект лекций по высшей математике (полный курс). 2-е изд. Москва: «Айриспресс», 2014.
4. Данко П.Е., Попов, А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах (1 том). — М.: Высш. шк., 2002.