ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

Высшая математика:

«Комплексные числа и действия над ними»

Автор

Ермилова О.В.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

В предлагаемом учебно-методическом пособии содержится теоретический и практический материал дисциплины «Высшая математика» по разделу «Комплексные числа и действия над ними». Пособие предназначено для преподавателей и студентов всех технических специальностей. В данной методичке каждое определение и доказательство дополнено примером, что значительно упрощает восприятие материала. В пособии содержится большое количество решенных практических задач, все теоретические вопросы подробно расписаны и доказаны, это поможет преподавателю сократить время на подготовку к лекционным и практическим занятиям. Благодаря тому, что в конце каждой главы представлены задания для самостоятельного решения с ответами, преподавателю не придётся тратить время на составление домашнего задания для студентов и его решение. За счет того, что в пособии довольно подробно изложен материал, с возможностью проверить правильность решения, оно поможет студентам закрепить и приумножить знания, полученные на практических и теоретических занятиях по данному разделу дисциплины «Высшая математика». Пособие предназначены для студентов очной формы обучения.

Автор

Старший преподаватель каф. «Прикладная математика»
Ермилова О.В.

Оглавление

ГЛАВА1.КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

1.1. Основные определения.

Комплексным числом z называется выражение вида

$$z = x + iy, \quad (1.1)$$

где x, y-действительные числа, i - мнимая единица, $i^2 = -1$.

Если $x = 0$, то число $0 + i \cdot y = iy$ называется **чисто мнимым**.

Если $y = 0$, то $x + i \cdot 0 = x$ отождествляется с **действительным числом** x. Таким образом, можно сказать, что комплексным числом называется упорядоченная пара действительных чисел $(x; y)$.

Числа x и y называют соответственно **действительной** и **мнимой** частями (компонентами) комплексного числа $z = x + iy$.

Обозначение: $x = \operatorname{Re} z$ читается «реальная часть z», $y = \operatorname{Im} z$ - «мнимая часть z».

Число $\bar{z} = x - iy$ (с противоположной мнимой частью) называется **сопряженным** к комплексному числу $z = x + iy$.

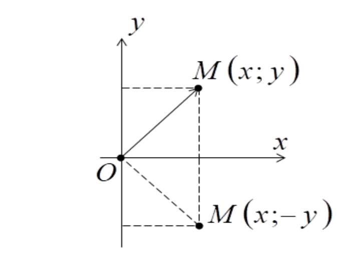


Рис. 1.1.

Пример 1.1. Дано комплексные число $z = -4 + 5i$. Найти: $\bar{z}, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$.

Решение.

Для того, чтобы найти $\bar{z}$ - число, сопряженное к числу $z = -4 + 5i$, необходимо поменять знак мнимой части на противоположный: $\bar{z} = \overline{-4 + 5i} = -4 - 5i$. Так как $x = \operatorname{Re} z$, то $\operatorname{Re} z = -4$, аналогично $y = \operatorname{Im} z$, следовательно $\operatorname{Im} z = 5$.

1.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

Любое комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости Oxy точкой $M(x; y)$ или радиус-вектором $\overline{OM} = (x; y)$ (рис. 1.1.).

Обратное так же верно. Это позволяет в дальнейшем точке $M(x; y)$ ставить в соответствие комплексное число $z = x + iy$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется **комплексной плоскостью.**

Ось Ox абсцисс называют **действительной осью,** так как там лежат чисто действительные комплексные числа $z = x$, ось ординат Oy - **мнимой,** так как там находятся мнимые числа $z = iy$.

Комплексно-сопряжённые числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ изображаются точками $M(x; y)$ и $M(x; -y)$ соответственно, симметричными друг другу относительно действительной оси (рис. 1.1.).

Пример 1.2. Найти значение комплексного числа $z = \overline{-1-3i}$ и изобразить его на комплексной плоскости.

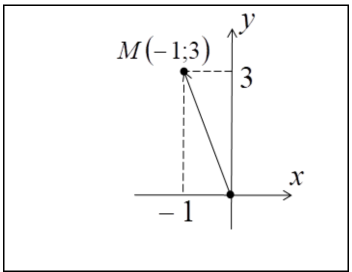


Рис. 1.2.

Решение.

$z = \overline{-1-3i} = -1+3i$ откладывая на координатных осях $x = -1, y = 3,$ как это сделано на рис. 1.2., получим точку $M(-1;3)$.

Длина вектора $\overline{OM}$ называется **модулем** (длиной) комплексного числа z (радиус-вектора).

Обозначение: $r = \left|\overline{OM}\right|$ - длина радиус-вектора.

Вычислим длину вектора $r = \left|\overline{OM}\right|$ по известным координатам: $r = \left|\overline{OM}\right| = |z| = |(x; y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$, получим равенство

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.2)$$

для нахождения **модуля** комплексного числа (радиус-вектора).

Угол, образованный вектором $\overline{OM}$ с положительным направлением оси Ox (рис. 1.3.), называется **аргументом** комплексного числа z .

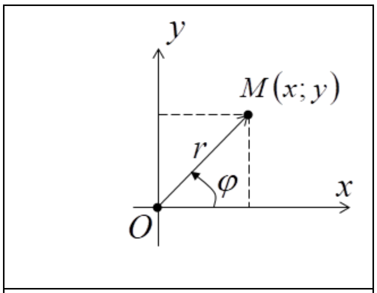


Рис. 1.3.

Обозначение: $Argz$ или φ

Любое комплексное число имеет бесконечное множество значений аргумента, отличающихся друг от друга на слагаемые вида $2\pi k, k \in Z$.

Одно из этих значений, принадлежащее полуоткрытому промежутку $[0;2\pi)$ называют **главным значе- нием аргумента** числа z .

Обозначение: $\arg z$ - главное значение аргумента комплексного числа z.

Таким образом, аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная:

$$\varphi = \arg z + 2\pi k, k \in Z \quad (1.3)$$

где $\arg z$ - главное значение аргумента принадлежит полуинтервалу $[0;2\pi)$, то есть $0 \leq \arg z < 2\pi$.

Замечание:

1) Иногда в качестве главного значения аргумента $\arg z$ удобно брать величину, принадлежащую промежутку $(-\pi;\pi]$, то есть $-\pi < \arg z \leq \pi$.

2) Для числа $z = 0$ модуль равен 0, а аргумент не определен.

1.3. Связь между декартовыми и полярными координатами точки.

Наряду с широко распространенной декартовой системой координат практически важной является полярная система координат. Она представляет собой выбранную на плоскости точку O, называемую **полюсом** и проходящую через эту точку полярную ось Op (луч Op).

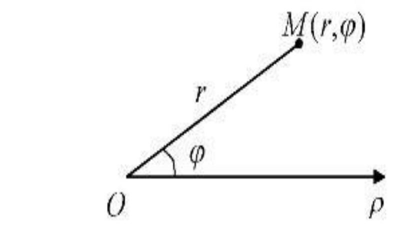


Рис. 1.4.

Положение точки $M(x;y)$, изображающей комплексное число $z = x + iy$ можно определять с помощью полярных координат $M(r;\varphi)$, где r – расстояние от начала координат $O(0;0)$ до точки $M(x;y)$, φ – угол между положительным направлением действительной оси Ox и радиус-вектором r точки z (рис. 1.4.).

Величины r и φ применительно к комплексному числу z называют **модулем** и **аргументом** числа z.

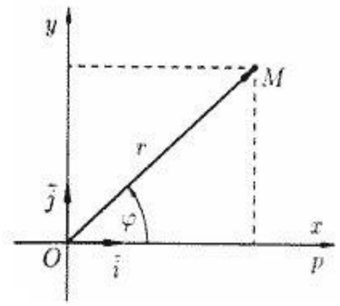


Рис. 1.5.

Установим связь между декартовыми $M(x;y)$ и полярными координатами точки $M(r;\varphi)$. Для этого совместим полюс O с началом координат системы Oxy ,а полярную ось Op – с положительной полуосью Ox. Из прямоугольного треугольника на рисунке 1.5. имеем $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, отсюда прямоугольные координаты точки M выражаются через полярные следующим образом:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad (1.4)$$

Возведем оба уравнения полученной системы в квадрат и сложив их, получим формулу для нахождения модуля:

$$x^2 + y^2 = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2,$$
$$x^2 + y^2 = r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi),$$
$$x^2 + y^2 = r^2,$$
$$\underline{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Зная, что тангенс данного угла – это отношение синуса к косинусу, получим формулу для определения аргумента комплексного числа z :

$$tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x}, \quad \underline{tg\varphi = \frac{y}{x}}$$

Итак, полярные координаты точки $M(r;\varphi)$ выражаются через ее декартовые координаты $M(x;y)$ по формулам:

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ tg\varphi=\dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad (1.5)$$

Аргумент φ можно найти из формулы $tg\varphi=\dfrac{y}{x}, \varphi=arctg\dfrac{y}{x}$, но так как данная формула работает только в правой полуплоскости, то есть при $x>0$ и $y>0$ (первая четверть) или $x>0$ и $y<0$ (четвертая четверть),а $0\le \arg z<2\pi$,то из формулы $tg\varphi=\dfrac{y}{x}$,получим, что:

$$\varphi=\begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, x>0, y>0(y<0) \\ arctg\dfrac{y}{x}+\pi, x<0, y>0 \\ arctg\dfrac{y}{x}-\pi, x<0, y<0, \end{cases} \qquad (1.6)$$

Таким образом, для нахождения аргумента по данной формуле необходимо установить четверть, в которой лежит искомый угол.

Замечание: иногда при вычислении аргумента нет необходимости применять соответствующую формулу, достаточно изобразить комплексное число радиус- вектором и определить угол φ .

Пример 1.3. Следующие комплексные числа изобразить векторами, найти модуль и аргумент комплексного числа: а) $z=-1+i$; б) $z=-\sqrt{3}+i$.

Решение.

а) Здесь $x=-1, y=1.$

Следовательно, $r=|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Изобразим комплексное число $z=-1+i$ на комплексной плоскости. На рисунке 1.6 видно, что угол между положительным направления оси Ox и радиус-вектором r равен: $\varphi=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$;

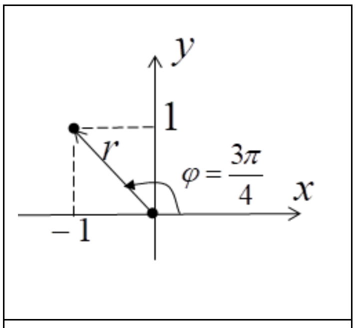


Рис. 1.6.

б) $x=-\sqrt{3}, y=1,\quad r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$. Поскольку по рисунку 1.7. не удалось однозначно определить аргумент, найдем аргумент φ двумя способами по формулам (1.4) и (1.6):

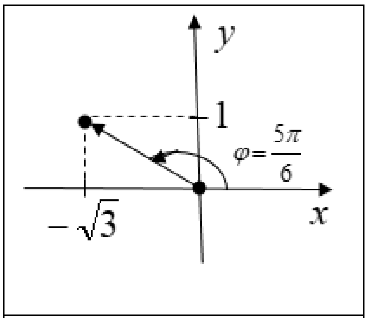


Рис. 1.7.

<u>1 способ:</u> (по формуле 1.4) $\begin{cases} \cos\varphi=\frac{x}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi=\frac{y}{r}=\frac{1}{2} \end{cases}$,

следовательно $\varphi=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$;

<u>2 способ:</u> учитывая, что $x<0, y>0$ (вторая четверть) угол φ находим по формуле (1.6): $\varphi=arctg\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)+\pi=-arctg\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi=-arctg\frac{\sqrt{3}}{3}+\pi=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$.

Пример 1.4. Для комплексного числа $z=-i^{36}$.Найти: $\bar{z}, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|, \arg z$.

Решение

Перейдём к алгебраической форме записи комплексного числа, учитывая, что $i^2=-1$:

$z=-i^{36}=-(i^2)^{18}=-(-1)^{18}=-1$, следовательно,

$\bar{z}=-1, Rez=-1, Imz=0, r=|z|=1, \varphi=\pi$.

Задания для самостоятельного решения.

1)-20) Найти: $\bar{z}, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|, \arg z.$

1) $z=5$	**11)** $z=-2+\sqrt{3}$
2) $z=-4i$	**12)** $z=(2-\sqrt{3})i$
3) $z=2-2i$	**13)** $z=-1+2i$
4) $z=-3+3\sqrt{3}i$	**14)** $z=2-i$
5) $z=-3-2i$	**15)** $z=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}i$
6) $z=2+2\sqrt{3}i$	**16)** $z=-\sqrt{3}+i$
7) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$	**17)** $z=1-i$
8) $z=2i$	**18)** $z=1+\sqrt{3}i$
9) $z=201$	**19)** $z=-1-i$
10) $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	**20)** $z=2+2i$

Ответы.

1) $\bar{z}=5, Rez=5, Imz=0,$ $r=\|z\|=5,\ \varphi=0$	**11)** $\bar{z}=-2+\sqrt{3}, Rez=-2+\sqrt{3},$ $Imz=0, r=\|z\|=\sqrt{3}-2, \varphi=\pi$
2) $\bar{z}=4i, Rez=0, Imz=-4,$ $r=\|z\|=4,\ \varphi=-\frac{\pi}{2}$	**12)** $\bar{z}=(\sqrt{3}-2)i, Rez=0,$ $Imz=2-\sqrt{3}, r=\|z\|=\sqrt{3}-2,$ $\varphi=\frac{\pi}{2}$
3) $\bar{z}=2+2i, Rez=2, Imz=2,$ $r=\|z\|=2\sqrt{2},\ \varphi=-\frac{\pi}{4}$	**13)** $\bar{z}=-1-2i, Rez=-1,$ $Imz=2, r=\|z\|=\sqrt{5},$ $\varphi=\pi-arctg2$
4) $\bar{z}=-3-3\sqrt{3}i, Rez=-3,$ $Imz=3\sqrt{3},$ $r=\|z\|=6,\ \varphi=\frac{2\pi}{3}$	**14)** $\bar{z}=2+i, Rez=2, Imz=-1,$ $r=\|z\|=\sqrt{5}, \varphi=arctg\left(-\frac{1}{2}\right)$

5) $\bar{z} = -3 + 2i, Rez = -3,$ $Imz = 2,$ $r = \lvert z \rvert = \sqrt{13}, \varphi = arctg\,\frac{2}{3} - \pi$	**15)** $\bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}i, Rez = \frac{\sqrt{3}}{8}, Imz = -\frac{1}{8},$ $r = \lvert z \rvert = \frac{1}{4}, \varphi = \frac{11\pi}{6}$
6) $\bar{z} = 2 - 2\sqrt{3}i, Rez = 2,$ $Imz = 2\sqrt{3},$ $r = \lvert z \rvert = 4, \varphi = \frac{\pi}{3}$	**16)** $\bar{z} = -\sqrt{3} - i, Rez = -\sqrt{3}, Imz = 1,$ $r = \lvert z \rvert = 2, \varphi = \frac{5\pi}{6}$
7) $\bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, Rez = \frac{\sqrt{3}}{2},$ $Imz = \frac{1}{2},$ $r = \lvert z \rvert = 1, \varphi = -\frac{\pi}{6}$	**17)** $\bar{z} = 1 + i, Rez = 1, Imz = -1,$ $r = \lvert z \rvert = \sqrt{2}, \varphi = -\frac{\pi}{4}$
8) $\bar{z} = -2i, \operatorname{Re} z = x = 0, \operatorname{Im} z = y = 2,$ $\lvert z \rvert = 2, \arg z = \frac{\pi}{2}$	**18)** $\bar{z} = 1 - \sqrt{3}i, Rez = 1, Imz = \sqrt{3},$ $r = \lvert z \rvert = 2, \varphi = \frac{\pi}{3}$
9) $\bar{z} = 201, \operatorname{Re} z = x = 201,$ $\operatorname{Im} z = y = 0, \lvert z \rvert = 201, \arg z = 0$	**19)** $\bar{z} = -1 + i, Rez = 1, Imz = -1,$ $r = \lvert z \rvert = \sqrt{2}, \varphi = \frac{5\pi}{4}$
10) $\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2},$ $\operatorname{Im} z = y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \lvert z \rvert = 1, \arg z = \frac{\pi}{3}$	**20)** $\bar{z} = 2 - 2i, Rez = 2, Imz = 2,$ $r = \lvert z \rvert = 2\sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$

1.4. Формы записи комплексных чисел.

Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют **алгебраической формой** комплексного числа.

Если декартовы координаты точки $M(x; y)$ в алгебраической форме заменить полярными координатами $M(r\cos\varphi\,; r\sin\varphi)$:

$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ получим **тригонометрическую форму** записи комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ (1.7)$$

где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - расстояние от начала координат $(0;0)$ до точки $M(x;y)$, φ – аргумент комплексного числа z.

Таким образом, чтобы записать комплексное число в тригонометрической форме необходимо найти аргумент и модуль комплексного числа.

Замечание: при переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа z ,то есть $\varphi = \arg z$.

Покажем в связи с чем это связано:

$$\varphi = \arg z + 2\pi k,$$
$$\cos\varphi = \cos(\arg z + 2\pi k) = \cos(\arg z),$$
$$\sin\varphi = \sin(\arg z + 2\pi k) = \sin(\arg z),$$
$$tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sin(\arg z)}{\cos(\arg z)} = tg((\arg z)), \underline{\varphi = \arg z}.$$

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, от тригонометрической формы $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ можно перейти к **показательной форме** записи комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi} \ (1.8).$$

Так как, $|e^{i\varphi}| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2} = 1$, то геометрически число $e^{i\varphi}$ изображается на единичной окружности с центром в начале координат, радиус-вектор которой образует с положительным направлением действительной оси Ox угол φ (рис. 1.8.).

Таким образом, имеется три формы записи комплексных чисел: $z = x + iy$ - алгебраическая, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - тригонометрическая и $z = re^{i\varphi}$ - показательная.

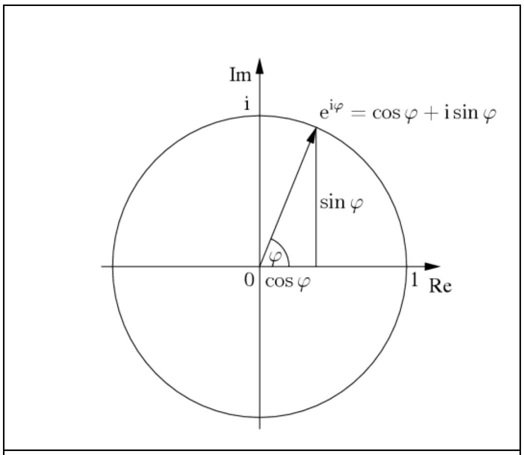


Рис. 1.8.

Каждая форма записи удобна для решения соответствующих задач, вы можете переводить комплексное число из одной формы в другую, в зависимости от поставленных перед вами условий.

Пример 1.5. Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометриче

ской и показательной форме: а) $z=-2$; б) $z=i$; в) $z=1-i$; г) $z=-1-i\sqrt{3}$; д) $z=3-i$.

Решение.

а) Для того, чтобы перейти к тригонометрической форме $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ найдем модуль и аргумент комплексного числа:

$x=-2, y=0 \Rightarrow r=|z|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$.

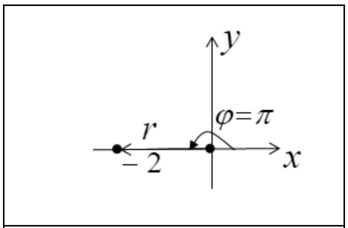


Рис. 1.9.

Изобразим $z=-2$ на комплексной плоскости. Из рисунка 1.9. видно, что $\varphi=\pi$ (угол между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором точки (-2;0)). Подставляя найденные значения r и φ в формулу (1.8), получаем искомую тригонометрическую форму комплексного числа

$z=-2$: $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Учитывая, что $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi$, перейдем к полярной записи комплексного числа $z=2e^{i\pi}$. Заметим, что для всех отрицательных действительных чисел $\varphi=\pi$.

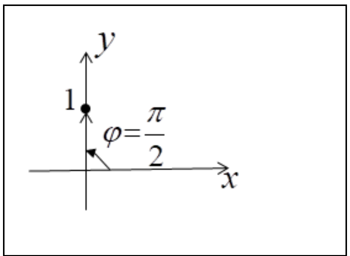


Рис. 1.10.

б) Имеем $x=0, y=1 \Rightarrow r=\sqrt{0^2+1^2}=1, \varphi=\dfrac{\pi}{2}$ (рис.1.10.),

$z=1\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$ тригонометрическая форма комплексного числа, $z=e^{i\frac{\pi}{2}}$ - показательная форма записи.

в) Имеем: $x=1, y=-1, r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$,

$\varphi=\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{4}$ (315^0), но в данном случае угол больше 180^0, поэтому его удобно записать со знаком минус и противоположной ориентацией $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$ (рис.1.11).

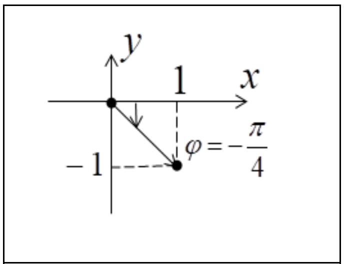


Рис. 1.11.

Итак, $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ - тригонометрическая форма, $z=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ -показательная форма;

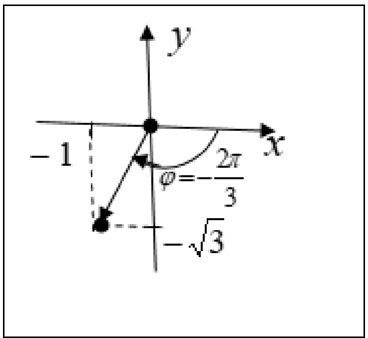
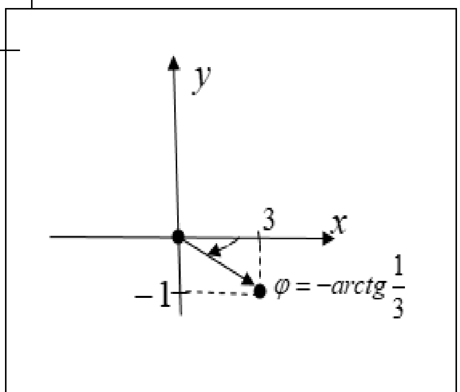


Рис. 1.12.



г) $x=-1, y=-\sqrt{3},\ \ r=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$ по ри- Рис. 1.13.

сунку 1.12. не удалось определить аргумент, найдем его аргумент φ по формуле (1.6) учитывая, что $x<0, y<0$ (третья четверть),

$\varphi=arctg\,\frac{y}{x}-\pi=arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right)-\pi=arctg\sqrt{3}-\pi=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$.

Итак, $z=2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$- тригонометрическая,

$z=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ - показательная форма;

д)Имеем: $x=3, y=-1,\ \ r=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$, $x>0, y<0$ (четвертая четверть),

$\varphi=arctg\left(\frac{-1}{3}\right)=-arctg\,\frac{1}{3}$, поскольку $arctg\,\frac{1}{3}$ не табличное значение, решение

запишем в виде $z=\sqrt{10}\left(\cos\left(-arctg\,\frac{1}{3}\right)+i\sin\left(-arctg\,\frac{1}{3}\right)\right)$ тригонометрическая

форма записи, $z=\sqrt{10}e^{i\left(-arctg\frac{1}{3}\right)}$ - показательная форма.

Пример 1.6. Записать комплексное число $z=-\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ в тригонометрической, алгебраической и показательной форме.

Решение.

Запись $z=-\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ не является алгебраической (см.формулу(1.1)), подставим в равенство значения $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и получим $z=-\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{\frac{3}{2}}+i\sqrt{\frac{3}{2}}$, $z=-\sqrt{\frac{3}{2}}+i\sqrt{\frac{3}{2}}$ - алгебраическую запись комплексного числа.

Запись $z=-\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ не является тригонометрической формой записи комплексного числа (см. формулу 1.8),поэтому перепишем z в виде $z=\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Здесь $\cos\varphi=-\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\varphi=\sin\frac{\pi}{4}$ учитывая, что $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}, \sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$, получим $\varphi=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$. Таким образом, тригонометрическая форма заданного числа имеет вид $z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Зная, что $e^{i\frac{3\pi}{4}}=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$ переходим к показательной форме комплексные числа $z=\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Пример 1.7. Дано комплексные число $z=2e^{1+0,5\pi i}$. Найти: $\bar{z}, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|, \arg z.$

Решение.

Перейдем к алгебраической форме записи комплексного числа и найдем $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, $|z| = r$, $\arg z = \varphi$:

$$z=2e^{1+0,5\pi i}=2e\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}=2e\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2ei,\ \bar{z}=\overline{2ei}=-2ei,$$

$$x=\operatorname{Re} z=0,\ y=\operatorname{Im} z=2e,\ \ |z|=\sqrt{0+(2e)^2}=2e,\qquad \varphi=\arg z=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 1.8. Изобразить на комплексной плоскости C множество точек, удовлетворяющих условиями: а) $|z-2i|=1$; б) $1<|z|\le 2$; в) $\frac{\pi}{4}<\arg z\le\frac{\pi}{2}$.

Решение.

а) Подставляя в исходное равенство $z=x+iy$ получим:

$$|z-2i|=|x+iy-2i|=|x+i(y-2)|=$$
$$=\sqrt{x^2+(y-2)^2}=1,$$

$x^2+(y-2)^2=1^2$-уравнение окружности с центром в $(\cdot)(0;2)$ и радиусом $R=1$.

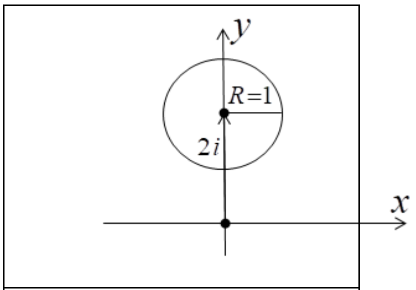


Рис. 1.14.

Таким образом, равенство $|z-2i|=1$ определяет на комплексной плоскости множество точек z, находящихся на расстоянии 1 от точки $z_0=2i$ (рис. 1. 14),то есть множество точек лежащих на окружности.

б) $|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$,

$1 < \sqrt{x^2+y^2} \le 2$,

$1^2 < x^2+y^2 \le 2^2$

$1 < x^2+y^2 \le 4$ - кольцо, заключенное между двумя окружностями $x^2+y^2=1^2$, $x^2+y^2=2^2$ с центром в начале координат, радиусов 1 и 2 соответственно. Таким образом, неравенство $1<|z|\le 2$ определяет на комплексной плоскости множество точек z,находящихся в кольце заключенном между двумя окружностями $x^2+y^2=1^2$, $x^2+y^2=2^2$,исключая точки, лежащие на окружности $x^2+y^2=1$(рис. 1.15);

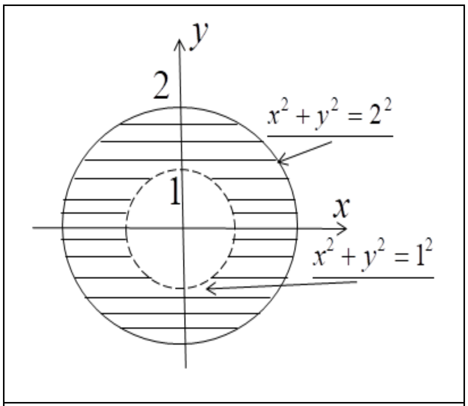


Рис. 1.15.

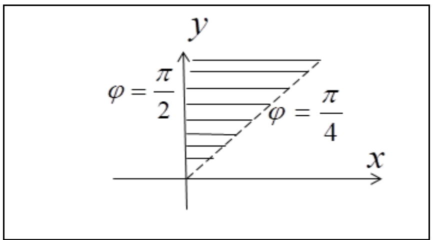


Рис. 1.16.

в) Бесконечный сектор, заключенный между лучами $\varphi=\frac{\pi}{4}$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}$,за исключением точек лежащие на луче $\varphi=\frac{\pi}{4}$ (рис. 1.16).

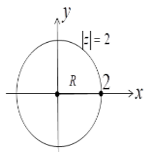
Задания для самостоятельного решения.

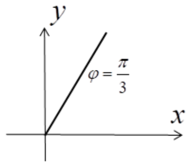
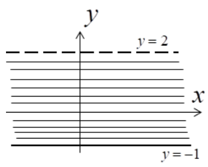
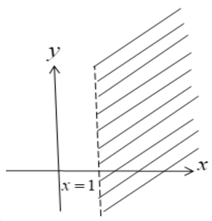
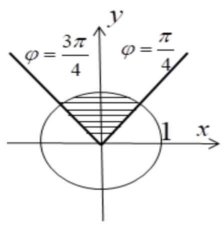
1)-15) Следующие комплексные числа записать в тригонометрической и показательной формах; **16)-20)** Изобразить на комплексной плоскости C множество точек, удовлетворяющих условиями.

1) $z=-3i$	**11)** $z=e^{-1-\pi i}$
2) $z=-1-i$	**12)** $z=-2\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)$
3) $z=\sqrt{3}+i$	**13)** $z=3\left(\cos 18^0 - i\sin 18^0\right)$
4) $z=-1+\sqrt{3}i$	**14)** $z=2cos\frac{\pi}{3}-2isin\frac{\pi}{3}$
5) $z=3-3\sqrt{3}i$	**15)** $z=1+itg1$

6) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$	**16)** $\lvert z\rvert = 2$
7) $z = 2i$	**17)** $\arg z=\frac{\pi}{3}$
8) $z = 1-\sqrt{3}$	**18)** $-1 \leq Imz < 2$
9) $z = 3-i$	**19)** $Rez > 1$
10) $z = 2+4i$	**20)** $\begin{cases} \lvert z\rvert \leq 1 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

Ответы.

1) $z=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $z=3e^{-i\frac{\pi}{2}}$	**11)** $z=\frac{1}{e}(cos(-\pi)+isin(-\pi))$, $z=\frac{1}{e}e^{-\pi i}$
2) $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$, $z=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$	**12)** $z=2\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$, $z=2e^{i\frac{4\pi}{5}}$
3) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z=e^{i\frac{\pi}{6}}$	**13)** $z=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right)$, $z=3e^{-i\frac{\pi}{10}}$
4) $z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $z=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$	**14)** $z=2\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, $z=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$
5) $z=6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, $z=6e^{-i\frac{\pi}{6}}$	**15)** $z=\frac{1}{cos1}(cos1+isin1)$, $z=\frac{1}{cos1}e^{i}$
6) $z=1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, $z=e^{-i\frac{\pi}{6}}$	 **16)** множество точек лежащих на окружности с центром в начале координат и радиуса 2;

7) $z=2\left(cos\frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2}\right),$ $z=2e^{\frac{\pi}{2}i}$	**17)** Множество точек, лежащих на луче $\varphi=\frac{\pi}{3}$ 
8) $z=(\sqrt{3}-1)(cos\pi+isin\pi),$ $z=(\sqrt{3}-1)e^{\pi i}$	**18)** Множество точек, лежащих внутри полосы $-1\leq y<2$; 
9) $z=\sqrt{10}(cos\left(-arctg\frac{1}{3}\right)+$ $+isin\left(-arctg\frac{1}{3}\right)),$ $z=\sqrt{10}e^{i\left(-arctg\frac{1}{3}\right)}$	**19)** Множество точек, расположенных справа от прямой $x=1$; 
10) $z=2\sqrt{5}(cos(arctg2)+$ $+isin(arctg2)),$ $z=2\sqrt{5}e^{i(arctg2)}$	**20)** Множество точек, лежащих внутри и на границе окружности с центром в начале координат и радиусом 1, заключенных между лучами $\varphi=\frac{\pi}{4}$ и  $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

2.ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

2.1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Основные действия над комплексными числами в алгебраической форме $z = x + iy$ производятся по обычным правилам алгебры с учётом той особенности, что $i^2 = -1$.

Пусть даны два числа в алгебраической форме $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Определим следующие действия:

Сравнение. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются **равными**, если равны их действительные и мнимые части, то есть

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}\right\} \quad (2.1)$$

Пример 2.1. Найти действительные решения уравнения: а) $-2x - 5iy = -4 - 15i$;б) $(1+i)x + (-2+5i)y = -4 + 17i$

Решение.

а) По определению равенства двух комплексных чисел получим систему: $\begin{cases} -2x = -4 \\ -5y = -15 \end{cases}$, решая систему получим действительные решения уравнения $x = 2, y = 3$;

б) Раскрываем скобки и отделяем мнимую часть от действительной:

$$x + ix - 2y + 5iy = -4 + 17i,$$
$$x - 2y + (x + 5y)i = -4 + 17i$$

По определению равенства двух комплексных чисел получим систему:

$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + 5y = 17 \end{cases}$, вычтем из первого уравнения второе, получим: $-7y = -21,\ y = 3 \Rightarrow x = -4 + 2y = -4 + 6 = 2$. Итак, $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (2.2)$$

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad (2.3)$$

Таким образом, при сложении (вычитании) комплексных чисел отдельно складываются (вычитаются) их действительные и мнимые части.

Пример 2.2. Вычислить $z_1 \pm z_2$,если $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 2i$.

Решение.

$$z_1 + z_2 = (2+1) + i(-3+2) = 3 - i,$$

$$z_1 - z_2 = (2-1) + i(-3-2) = 1 - 5i.$$

Замечание: модуль разности двух комплексных чисел z_1, z_2 позволяет выразить расстояние $r(z_1, z_2)$ между двумя точками z_1, z_2 комплексной плоскости:

$$r(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| =$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Например, равенство $|z - i| = 1$ определяет на комплексной плоскости множество точек z,находящихся на расстоянии 1 от точки $z_0 = i$, то есть окружность с центром в точке $z_0 = i$ и радиусом 1.

Умножением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + y_1x_2) \quad (2.4)$$

Действительно,

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i\,x_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Таким образом, умножение комплексных чисел проводится по правилам умножения алгебраических многочленов, при этом учитывается, что $i^2 = -1$.

Пример 2.3. Выполнить умножение чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = 1 + 2i$.

Решение.

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i)\cdot(1 + 2i) = 2 - 3i + 4i - 6i^2 = 8 + i.$$

Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению. Частным двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z, которое, будучи умноженным на z_2, дает число z_1, то есть $z = \frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = z \cdot z_2$.

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$, $z = x + iy$, то подставляя в равенство $z_1 = z \cdot z_2$ их значения получим $x_1 + iy_1 = (x+iy)(x_2 + iy_2)$, раскрываем скобки и отделяем мнимую часть от действительной имеем:

$$x_1 + iy_1 = xx_2 + i^2 yy_2 + ix_2 y + ixy_2,$$

$$x_1 + iy_1 = (xx_2 - yy_2) + i(x_2 y + xy_2),$$

по определению равенства двух комплексных чисел получим систему: $\begin{cases} x_1 = xx_2 - yy_2 \\ y_1 = x_2 y + xy_2 \end{cases}$. Решая систему, находим значения x и y:

$$\begin{cases} xx_2 = x_1 + yy_2 \\ xy_2 = y_1 - x_2 y \end{cases}, \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + yy_2}{x_2} & (1) \\ x = \dfrac{y_1 - x_2 y}{y_2} & (2) \end{cases}, (1) = (2) \Rightarrow \frac{x_1 + yy_2}{x_2} = \frac{y_1 - x_2 y}{y_2},$$

$$y_2(x_1 + yy_2) = x_2(y_1 - x_2 y), \quad yy_2^2 + x_1 y_2 = x_2 y_1 - x_2^2 y, \quad y(x_2^2 + y_2^2) = x_2 y_1 - x_1 y_2,$$

$y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$, подставляя y в (1) уравнение находим x:

$$x = \frac{x_1 + \dfrac{(x_2 y_1 - x_1 y_2) y_2}{x_2^2 + y_2^2}}{x_2} = \frac{x_1(x_2^2 + y_2^2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2) y_2}{x_2(x_2^2 + y_2^2)} =$$

$$= \frac{x_1 x_2^2 + x_1 y_2^2 + x_2 y_1 y_2 - x_1 y_2^2}{x_2(x_2^2 + y_2^2)} = \frac{x_2(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2(x_2^2 + y_2^2)} =$$

$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$, то есть $x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Таким образом, $z = \frac{z_1}{z_2} = x + iy = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Таким образом, деление комплексных чисел в алгебраической форме определяется формулой:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (2.5)$$

На практике удобнее всего деление комплексных чисел производить следующим образом: **умножить числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю**, после чего знаменатель станет положительным действительным числом (мнимость в знаменателе уйдет), что позволит нам разделить числитель на знаменатель, то есть выделить мнимую и действительную часть комплексного числа:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)\overline{(x_2+iy_2)}}{(x_2+iy_2)\overline{(x_2+iy_2)}}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=$$

$$=\frac{x_1x_2-x_1y_2i+x_2y_1i-i^2y_1y_2}{(x_2)^2-(iy_2)^2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)i}{{x_2}^2-i^2{y_2}^2}=$$

$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)i}{{x_2}^2+{y_2}^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}i.$$

Пример 2.4. Вычислить $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1=2-3i$ и $z_2=1+2i$.

Решение.

Для того, чтобы выполнить деление $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{1+2i}$,найдем число, сопряженное знаменателю $\overline{z_2}=\overline{1+2i}=1-2i$ и умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{1+2i}=\frac{(2-3i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)}=\frac{2-3i-4i+6i^2}{1-4i^2}=\frac{-4-7i}{5}=-\frac{4}{5}-\frac{7}{5}i.$$

Пример 2.5. Вычислить $\frac{z_3-2\overline{z_2}}{z_1-z_2}$,если $z_1=3i-1$, $z_2=-2-i$, $z_3=1+i$.

Решение.

$$\frac{z_3-2\overline{z_2}}{z_1-z_2}=\frac{1+i-2\cdot\left(\overline{-2-i}\right)}{3i-1-(-2-i)}=\frac{1+i-2\cdot(-2+i)}{1+4i}=\frac{5-i}{1+4i}=$$

$$=\frac{(5-i)\cdot\left(\overline{1+4i}\right)}{(1+4i)\cdot\left(\overline{1+4i}\right)}=\frac{(5-i)\cdot(1-4i)}{(1+4i)\cdot(1-4i)}=\frac{5-20i-i+4i^2}{1^2-(4i)^2}=$$

$$=\frac{1-21i}{1-16i^2}=\frac{1-21i}{17}=\frac{1}{17}-\frac{21}{17}i.$$

Пример 2.6. Вычислить $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

Решение.

Чтобы упростить решение, найдем частное комплексных чисел $\frac{1-i}{1+i}$:

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{(1-i)^2}{1-i^2}=\frac{1-2i+i^2}{2}=-\frac{2i}{2}=-i.$$

Подставляя $-i$ в исходное равенство, получим:

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3=(-i)^3=(-1)^3\cdot i^3=-i^3=-i\cdot i^2=i.$$

Пример 2.7. Вычислить: а) i^{30};б) i^{-51}; в) $i^4+i^{14}+i^{24}+i^{34}+i^{44}$.

Решение.

Учитывая, что $i^2=-1$ имеем:

а) $i^{30}=\left(i^2\right)^{15}=(-1)^{15}=-1;$

б) $-i^{51}=-i^{50}\cdot i=-(i^2)^{25}\cdot i=-(-1)^{25}\cdot i=i;$

в) $i^4+i^{14}+i^{24}+i^{34}+i^{44}=\left(i^2\right)^2+\left(i^2\right)^7+\left(i^2\right)^{12}+\left(i^2\right)^{17}+\left(i^2\right)^{22}=$

$=(-1)^2+(-1)^7+(-1)^{12}+(-1)^{17}+(-1)^{22}=1-1+1-1+1=1.$

Пример 2.8. Найти действительную и

мнимую части числа $z=\frac{(1+i)\cdot(3+i)}{3-i}-\frac{(1-i)\cdot(3-i)}{3+i}$.

Решение.

$$z=\frac{(1+i)\cdot(3+i)}{3-i}-\frac{(1-i)\cdot(3-i)}{3+i}=\frac{(1+i)\cdot(3+i)^2-(1-i)\cdot(3-i)^2}{(3-i)(3+i)}=$$

$$=\frac{(1+i)\cdot\left(9+6i+i^2\right)-(1-i)\cdot\left(9-6i+i^2\right)}{3^2-i^2}=\frac{(1+i)\cdot(8+6i)-(1-i)\cdot(8-6i)}{9-(-1)}=$$

$$=\frac{8+8i+6i+6i^2-\left(8-8i-6i+6i^2\right)}{10}=\frac{28}{10}i=\frac{14}{5}i=0+\frac{14}{5}i.$$

Итак, $x=0$ -действительная часть, $y=\frac{14}{5}$ -мнимая часть

комплексного числа.

Пример 2.9. Вычислить $(2-4i)^3$.

Решение.

Учитывая, что
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, имеем:
$(2-4i)^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2\cdot 4i + 3\cdot 2\cdot (4i)^2 -$
$-(4i)^3 = 8 - 48i - 96 + 64i = -88 + 16i.$

Задания для самостоятельного решения.

Вычислить:

1)	$\dfrac{1+i}{(\sqrt{3}+i)\cdot(1+i\sqrt{3})}$	**11)**	$\left(\dfrac{i^{16}+3}{i^6+3}\right)^5$
2)	$i^3+i^{13}+i^{23}+i^{33}+i^{43}+i^{53}$	**12)**	$\dfrac{1+2i}{3-i}+(1-i)^2$
3)	$(1-2i)^3$	**13)**	$\left(\dfrac{\sqrt{3}-i^{17}}{i^{18}}\right)^2$
4)	$\dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}$	**14)**	$i^2+i^3+i^4+i^5$
5)	$\dfrac{1}{i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}$	**15)**	$\dfrac{3+4i}{1+2i}$
6)	$\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}\right)^2$	**16)**	$\dfrac{3+4i}{4+5i}-i$
7)	$(\sqrt{3}+i)^2\cdot(1+\sqrt{3}i)$	**17)**	$\dfrac{1+2i}{1+i}-\dfrac{13+i}{7-6i}$
8)	$\dfrac{2+2i}{1-i}-\dfrac{1+i}{1-i}-\dfrac{1}{i}$	**18)**	$\dfrac{4+i}{3+2i}-\dfrac{14}{13}+\dfrac{18}{13}i$
9)	$\dfrac{2+3i}{1-5i}+i^4$	**19)**	$i^8+\dfrac{5+i}{1-3i}$
10)	$\dfrac{(2-i)^3}{2-11i}$	**20)**	$(2-i)^2\cdot(3+4i)$

Ответы.

1) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$	**11)** 32
2) 0	**12)** $\frac{1}{10}-\frac{13}{10}i$
3) $-11+2i$	**13)** $2-2\sqrt{3}i$
4) $2i$	**14)** 0
5) 0	**15)** $\frac{11}{5}-\frac{2}{5}i$
6) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	**16)** $\frac{32}{41}-\frac{40}{41}i$
7)8	**17)** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$
8) $2i$	**18)** i
9) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$	**19)** $\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i$
10)1	**20)**25

2.2. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Пусть даны два числа в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Определим следующие операции:

Сравнение. Два комплексных числа заданных в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ называются **равными**, тогда и только тогда, когда равны их модули и аргументы совпадают с точностью до слагаемого кратного 2π, то есть

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in Z \end{matrix} \right\} \quad (2.\ 6)$$

Например, числа $z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ и $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ равные, так как, $r_1 = r_2 = 2$, $\varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$, $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, действительно при $k = 1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\frac{3\pi}{2} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, аналогично $k = 2$.

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме определяется по формуле

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) \quad (2.7)$$

Действительно, при умножении $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ на $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ получим:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_2\sin\varphi_1 + i\sin\varphi_2\cos\varphi_1 + \\ &+ i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) = r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ &+ i(\cos\varphi_2\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2\cos\varphi)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \\ &+ i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Таким образом, **при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.**

Это правило распространяется на любое конечное число множителей.

В частности, если есть n множителей и все они одинаковые, то получим **формулу возведения комплексного числа в степень**

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad (2.8)$$

Формулу (2.8) еще называют **формулой Муавра**.

Пример 2.10. Вычислить: а) $z = 1 + i$, $z^{10} - ?$; б) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$, $z^5 - ?$.

Решение.

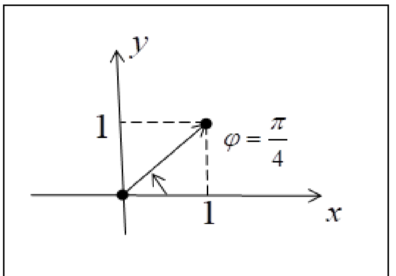


Рис. 2.1.

а) Представим комплексное число $1+i$ в тригонометрической форме и применим формулу Муавра: $x=1, y=1$, $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ (рис. 2.1.),

$$z^{10}=(1+i)^{10}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{10}=$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos 10\cdot\frac{\pi}{4}+i\sin 10\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2^5\left(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}\right)=$$

$$=32\left(\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=32\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=32i;$$

б) $z=2+2\sqrt{3}i$, $x=2, y=2\sqrt{3}$, $r=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{4\cdot 3+4}=4$. В данном случая геометрически определить угол сложно, поэтому применим аналитический способ нахождения угла по формуле (1.4).

Так как, $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\\ \sin\varphi=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$, следовательно $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

Итак, $z^5=\left(2+2\sqrt{3}i\right)^5=\left(4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^5=$

$$=4^5\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1024\left(\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=1024\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1024\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=512-512\sqrt{3}i.$$

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме определяется по формуле $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right)$ (2.9)

Действительно, при делении $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ на $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ получим:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_2\sin\varphi_1 - i\sin\varphi_2\cos\varphi_1 - i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 - i^2\sin^2\varphi_2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1))}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Таким образом, **при делении комплексных чисел их модули соответственно делятся, а аргументы, соответственно, вычитаются**.

Пример 2.11. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Найти $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i.$$

2.3. Действия над комплексными числами в показательной форме.

Пусть даны два числа в показательной форме $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$

Комплексные числами в показательной форме сравниваются аналогично тому, как они сравнивались в тригонометрической форме.

Умножение комплексных чисел в показательной форме определяется по формуле

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (2.10)$$

Действительно,

$$z_1 \cdot z_2 = \left(r_1e^{i\varphi_1}\right)\cdot\left(r_2e^{i\varphi_2}\right) = r_1r_2e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

В частности, если есть n множителей и все они одинаковые, то есть $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$, получим формулу

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi} \quad (2.\ 11)$$

Деление комплексных чисел $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ определяется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (2.\ 12)$$

Действительно,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Пример 2.12. Комплексные числа $z_1 = 1 - i, z_2 = -2i$ представить в показательной форме и вычислить $z_1 \cdot z_2, \dfrac{z_1^{\ 2}}{z_2}$.

Решение.

$$z_1 = 1 + i,\ \ r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \varphi = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$z_2 = -2i,\quad r = |z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 1, \varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow z_2 = 2 \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)},$$

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \cdot 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 2\sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} = 2\sqrt{2} e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)},$$

$$\frac{z_1^{\ 2}}{z_2} = \frac{\left(\sqrt{2} \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^2}{2 \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 e^{i\left(-2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)}}{2 \cdot e^{-\frac{\pi}{2} i}} = 1.$$

2.4. Свойства действий над комплексными числами.

Из определения операции сложения и умножения следуют следующие свойства:

1) $z_1+z_2=z_2+z_1$ (коммутативность сложения);

2) $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$ (коммутативность умножения);

3) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ (ассоциативность сложения);

4) $z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3$ (ассоциативность умножения);

5) $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$ (дистрибутивность)

Множество всех комплексных чисел с введёнными выше операциями сложения, вычитания, умножения и деления образует поле, называемое **полем комплексных чисел**.

Обозначение: C

Множество вещественных чисел **R** вложено во множество комплексных чисел **C**.

Обозначение: R $\subset$ C

Замечание: из определения сложения комплексных чисел следует, что геометрически комплексные числа складываются как векторы по известному правилу параллелограмма (рис. 2.2.), а операция умножения комплексного числа на действительное число, определяется – как операция умножения вектора на число.

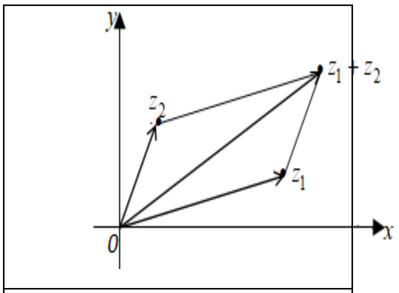


Рис. 2.2.

Задания для самостоятельного решения.

Вычислить.

1) $\left(-1-\sqrt{3}i\right)^{15}$	**11)** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$
2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{12}$	**12)** $\left(\sqrt{2}e^{\frac{2\pi}{9}i}\right)^{3}$
3) $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{8}$	**13)** $\left(cos\frac{\pi}{10}+isin\frac{\pi}{10}\right)^{5}$

4) $\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{9}\right)\right)^{12}$	**14)** $\frac{(1+i)^8}{(1-\sqrt{3}i)^6}$
5) $\frac{8\left(\cos 40^0+i\sin 40^0\right)}{16\left(\cos\left(-50^0\right)+i\sin\left(-50^0\right)\right)}$	**15)** $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^6$
6) $3e^{\frac{1}{5}\pi i}\cdot 4e^{\frac{4}{5}\pi i}$	**16)** $(-2-2i)^4$
7) $\left(e\cdot e^{-1+\frac{\pi}{2}i}\right)^{16}$	**17)** $\frac{2i}{3e^{2\pi i}}$
8) $\left(\frac{1}{e^{\pi i}}\right)^5$	**18)** $\frac{5e^{\frac{2\pi}{3}i}}{25e^{\frac{\pi}{3}i}}$
9) $\left(\frac{2i}{1-i}\right)^5$	**19)** $5e^{\frac{2\pi}{3}i}\cdot 25e^{\frac{\pi}{3}i}$
10) $\left(\frac{i}{\sqrt{3}-i}\right)^6$	**20)** $(-2+2i)^{-3}$

Ответы.

1) 2^{15}	**11)**-1
2) 1	**12)** $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$
3) 2^8	**13)** i
4) $-32-32\sqrt{3}i$	**14)** $\frac{1}{4}$
5) $\frac{i}{2}$	**15)**64
6) 12	**16)**-16

7) 1	**17)** $\frac{2i}{3}$
8) -1	**18)** $\frac{1}{10}+i\frac{\sqrt{3}}{10}$
9) $4+4i$	**19)**-125
10) $\frac{1}{2^6}$	**20)** $\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

2.5. Извлечение корня из комплексного числа

Пусть n – произвольное натуральное число. По определению корнем степени n из числа $z \in C$ называется число $\omega = \sqrt[n]{z}$ такое, что $\omega^n = z$:

$$\omega = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow \omega^n = z \quad (2.\ 13)$$

Пусть числа z и ω представлены в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \omega = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Подставляя их в равенство $z = \omega^n$ и учитывая, что $\omega^n = (\rho(\cos\psi + i\sin\psi))^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$ имеем:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Сравнивая модули и аргументы в левой и правой частях этого равенства, получаем $r = \rho^n$, $\varphi + 2\pi k = n\psi$, $k \in z$ (так как аргумент содержит неопределенное число слагаемых, кратных числу 2π). Отсюда $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$.

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = \omega$ принимает вид:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right)$$

Таким образом, получим **формула извлечения корня из комплексного числа**

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),$$ (2. 14) где $k = 0,1,2,\ldots,n-1$

Таким образом, корень n-той степени из комплексного числа $\sqrt[n]{z}$ имеет n различных значений корня ω_k получающихся при $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

Отметим, что все n различных значений z_k (корня $\sqrt[n]{z}$) располагаются в комплексной плоскости на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат и делят эту окружность на n равных дуг.

Извлечения корня из комплексного числа $z = r \cdot e^{i\varphi}$ в показательной форме имеет вид

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, k = 0,1,2,\ldots,n-1 \quad (2.\ 15)$$

Замечания:

1) При применении формулы (2.14) -извлечения корня из комплексного числа под корнем $\sqrt[n]{r}$ понимается арифметическое значение: $\sqrt[n]{r} \geq 0$;

2) Перед корнем $t^2 = z, t = \sqrt{z}$ знак $\pm$ не пишем, так как квадратный корень из комплексного числа всегда содержит в себе два значения.

Пример 2.13. Вычислить $\sqrt{-4}$ и изобразить все значения корня на комплексной плоскости.

Решение.

В действительных числах квадратный корень из отрицательного числа извлекать нельзя. Однако в комплексных числах можно ($i^2 = -1$), для этого применим формулу извлечения корня из комплексного числа, предварительно представив подкоренное выражение -4 в тригонометрической форме:

$x = -4,\ y = 0,\ r = |-4| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4, \varphi = \pi,$ следовательно, $-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$- тригонометрическая форма числа,

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}\right)$$

В этом примере $\sqrt{-4}$, $z=-4, n=2 \left(\sqrt[n]{z}=\omega\right)$, поэтому $k=0,1$ - уравнение имеет 2 корня, подставляя в полученную формулу $k=0$ получим первый корень ω_0, при подстановке $k=1$, получим второй корень ω_1:

$$k=0, \qquad \omega_0 = 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$

$$k=1, \qquad \omega_1 = 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i.$$

Выполним проверку, чтобы убедиться, что $\omega_0 = 2i$, $\omega_1 = -2i$ являются корнями уравнения, подставим полученные значение в исходное равенство $z=\sqrt{-4}$ ($z^2=-4$):

$\omega_0 = 2i$, $(2i)^2 = (2)^2\cdot i^2 = 4i^2 = -4,$

$\omega_1 = -2i$, $(-2i)^2 = (-2)^2\cdot i^2 = 4i^2 = -4,$ выполняется равенство, следовательно $\omega_0 = 2i$, $\omega_1 = -2i$ -корни уравнения.

Такие корни (с противоположной мнимой частью) являются **сопряженными комплексными корнями**. Зачастую используют сокращенную запись, корни записывают в одну строчку в таком виде: $\omega_{0,1} = \pm 2i$.

Изобразим значения $\omega_{0,1}$ корня $\sqrt{-4}$ на комплексной плоскости. Все значения корня лежат на окружности радиуса $\sqrt{|-4|}=\sqrt{4}=2$ с центром в начале координат и делят эту окружность на 2 равные дуги (рис. 2.3).

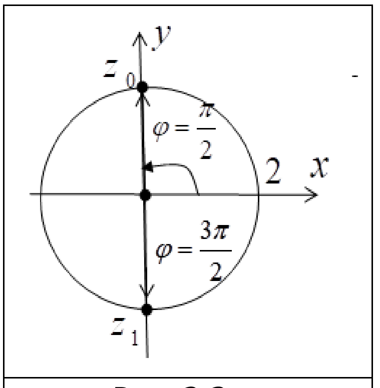


Рис. 2.3.

Пример 2.14. Решить уравнение: а) $z^2+3z+3=0$;
б) $z^3-3i=0$; в) $z^4-6iz^2-8=0$.

Решение.

а) Вычислим дискриминант уравнения $z^2+3z+3=0$, $D=3^2-4\cdot1\cdot3=-3<0$, уравнение имеет комплексные корни, найдем их: $z_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{3i^2}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}=-\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, следовательно $z_1=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i, z_2=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ -корни уравнения;

б) $z^3-3i=0$, $z^3=3i$, $z=\sqrt[3]{3i}$, $\sqrt[3]{3i}$ - корень третьей степени $n=3$, $k=0,1,2$, поэтому уравнение $z^3-3i=0$ имеет 3 корня, найдем их:

$3i=3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, так как $r=\sqrt{0^2+3^2}=3, \varphi=\dfrac{\pi}{2}$, применяя формулу (2. 14) имеем:

$$\sqrt[3]{3i}=\sqrt[3]{3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt[3]{3}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)\right),$$

$k=0,1,2;$

$$k=0,\ \omega_0=\sqrt[3]{3}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right)\right)=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right);$$

$$k=1,\ \omega_1=\sqrt[3]{3}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right)\right)=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{3}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt[3]{3}\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right);$$

$$k=2,\ \omega_2=\sqrt[3]{3}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)\right)=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-\sqrt[3]{3}i;$$

в) $z^4-6iz^2-8=0$, сделаем подстановку $t=z^2$ и решим полученное уравнение относительно t: $t^2-6it-8=0$,

$$D=(-6i)^2-4(-8)=36i^2+32=-36+32=-4=4i^2,$$

$t_{1,2}=\dfrac{6i\pm\sqrt{(2i)^2}}{2}=3i\pm i$, $t_1=4i, t_2=2i$, возвращаясь к старой переменной получим: $t_1=4i, z^2=4i, z=\sqrt{4i}$, $4i=4\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ -тригонометрическая форма комплексного числа, применяя формулу (2. 14) получим:

$\sqrt{4i}=\sqrt{4\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)}=2\left(\cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right)\right)$, где $k=0,1$;

$$k=0,\quad \omega_0=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}i,$$

$$k=1,\quad \omega_1=2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=$$

$$=2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i.;$$

$$t_2=2i,\quad z^2=2i,\quad z=\sqrt{2i},\quad 2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sqrt{2i}=\sqrt{2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right)\right),$$

$k=0,1;$

$$k=0,\quad \omega_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i;$$

$$k=1,\quad \omega_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=-1-i.$$

Задания для самостоятельного решения.

1)-5) Извлечь корень из комплексного числа, ответ получить в алгебраической форме;**6)-20)** Решить уравнение.

1) $\sqrt[4]{-16}$	**11)** $z^2+4i=0$
2) $\sqrt[3]{-i}$	**12)** $z^2+25=0$
3) $\sqrt[3]{1}$	**13)** $z^4+3z^2+2=0$
4) $\sqrt{i}$	**14)** $z^3+8i=0$
5) $\sqrt[3]{-125i}$	**15)** $z^2=1+\sqrt{3}i$
$z^2-8iz-15=0$ **6)**	**16)** $z^2+i=0$
7) $z^2-z+5=0$	**17)** $z^4+iz^2+2=0$
8) $z^2-16z+100=0$	**18)** $z^3+1=0$
$z^2-(5+5i)z+(-2+11i)=0$ **9)**	**19)** $(1+i)x+(1-i)y=3-i$
10) $\sqrt{25e^{\frac{\pi}{3}i}}$	**20)** $z^2-2z+10=0$

Ответы.

1) $\omega_0=\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\ \omega_1=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\ \omega_2=-\sqrt{2}-i\sqrt{2},$ $\omega_3=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$	**11)** $\omega_0=\sqrt{2}-\sqrt{2}i,\quad \omega_1=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$
2) $\omega_0=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ \omega_1=i,\ \omega_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$	**12)** $\omega_{0,1}=\pm 5i$

3) $\omega_0 = 1, \omega_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \omega_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	**13)** $\omega_{0,1} = \pm i, \omega_{2,3} = \pm\sqrt{2}i$
4) $\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \omega_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$	**14)** $\omega_0 = \sqrt{3} + i, \omega_1 = -\sqrt{3} + i,$ $\omega_2 = -2i$
5) $\omega_0 = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i, \omega_1 = 5i,$ $\omega_2 = -\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$	**15)** $\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i,$ $\omega_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$
6) $z_1 = 5i, z_2 = 3i$	**16)** $\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \omega_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
7) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i$	**17)** $\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \omega_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$ $\omega_2 = -2i, \omega_3 = -1 + i$
8) $z_{1,2} = 8 \pm 6i$	**18)** $\omega_0 = -1, \omega_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
9) $z_1 = 4 + 3i, z_2 = 1 + 2i$	**19)** $x = 1, y = 2$
10) $\omega_0 = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right), \omega_1 = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$	**20)** $z_{1,2} = 1 \pm 3i$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. В. Соболь, Н. Т. Мишняков, В. М. Поркшеян. Практикум по высшей математике. 3-е изд. Ростов н \ Д: Феникс, 2010.
2. Д. Т. Письменный. Конспект лекций по высшей математике (полный курс). 2-е изд. Москва: «Айрис-пресс», 2014.
3. Данко П. Е., Попов, А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах (1 том). — М.: Высш. шк., 2002.
4. Пантелеев А. В., Якимова А. С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. Издательство Высш. шк. М., 2002.