ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

**Учебно-методическое пособие**

по дисциплине

«Высшая математика»

# «Интегральное исчисление функций одной переменной»

Автор

Ермилова О.В.

Ростов-на-Дону, 2022

## Аннотация

Учебно-методическое пособие по одному из самых больших и сложных разделов высшей математики интегрирование предназначено для преподавателей и студентов всех технических направлений подготовки бакалавриата. Содержит теоретический материал, методические рекомендации по решению задач, типовые задачи с подробными решениями, варианты типовых заданий по разделу «Интегральное исчисление функций одной переменной». Составлено для проведения теоретических и практических работ по дисциплине «Высшая математика». Студентам это пособие поможет подготовиться к практическим, рейтинговым занятиям по данному разделу, а преподавателю сэкономит время на подготовку практических и домашних заданий.

## Автор

ст. преподаватель
Ермилова О.В.

# Оглавление

# ГЛАВА1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## 1.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла.

Разнообразные вопросы математического анализа и его приложения в геометрии, механике, физике и технике приводят к обратной задаче: по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$ ,производная от которой была бы равна функции $f(x)$ , то есть $F'(x) = f(x)$.
Таким образом, восстановление функции по известной производной этой функции - одна из задач интегрального исчисления.

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если для любого $x \in (a; b)$ выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$.

**Пример 1.1.** Показать, что функция $F(x) = \frac{X^4}{4}$ является первообразной для функции $f(x) = x^3$.

Решение.

Так как $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4}(x^4)' = \frac{1}{4}4x^3 = x^3 = f(x)$, то $F(x) = \frac{x^4}{4}$ является первообразной для функции $f(x) = x^3$. Очевидно, что первообразными будут так же любые функции вида $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, где $C = const$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3 = f(x)$.

**Теорема 1.1.** Если функция $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$ на $(a; b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где $C$-постоянное число.

Доказательство.

Пусть функция $\Phi(x)$ любая другая первообразная для функции $f(x)$ на $(a;b)$, то есть $\Phi'(x)=f(x)$. Тогда для любого $x \in (a;b)$ имеем: $\left(\Phi(x)-F(x)\right)'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$, следовательно

$\Phi(x)-F(x)=C$, то $\Phi(x)=F(x)+C$.

Совокупность всех первообразных $F(x)+C$, где $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$, $C=const$ называют **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$.

**Обозначение:** $\int \boldsymbol{f(x)dx=F(x)+C}$.

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $x$ – переменная интегрирования, $\int$ – знак неопределенного интеграла.

Операция нахождения первообразной для данной функции называется **интегрированием.**

**Геометрический смысл неопределенного интеграла** – это семейство параллельных интегральных кривых $y=F(x)+C$ , где каждому числовому значению $C$ соответствует определенная кривая семейства(рис.1).

График каждой первообразной (кривой) называется **интегральной кривой.**

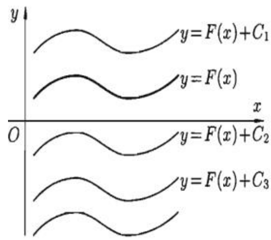


Рис.1

**Замечание:** Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

## 1.2. Свойства неопределенного интеграла.

Отметим свойства неопределенного интеграла, вытекающие из его определения.

**1.** Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, то есть

$$\left(\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}\right)' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = \left(F(x)\right)' + (C)' =$$
$$= F'(x) = f(x).$$

**2.** Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть

$$\boldsymbol{d}\left(\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}\right) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}.$$

Доказательство.

$$d(\textstyle\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx =$$
$$= F'(x)dx = f(x)dx.$$

**Замечание:** из данных свойств, следует, что интегрирование является обратной операцией к дифференцированию, обратное так же верно.

**Пример 1.2.** Проверить верно ли равенство $\int(2x + 3)dx = x^2 + 3x + C$.

Решение.

$d(x^2 + 3x + C) = (x^2 + 3x + C)'dx = (2x + 3)dx$, дифференциал правой части исходного равенства совпадает с подынтегральным выражением в левой части ,следовательно равенство верно.

**3.** Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции, то есть

$$\int \boldsymbol{dF}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}.$$

Доказательство.

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

**4.** Неопределенный интеграл от суммы (разности) функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций, то есть

$$\int \big(\boldsymbol{f(x) \pm g(x)}\big)\boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{f(x)dx} \pm \int \boldsymbol{g\,(x)dx}.$$

Доказательство.

Действительно, пусть $F(x), G(x)$ – первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то есть

$F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$, тогда,

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int \big(F'(x) \pm G'(x)\big)dx =$$

$$= \int \big(F(x) \pm G(x)\big)'dx = \int d\big(F(x) \pm G(x)\big) =$$

$$= F(x) \pm G(x) + C = (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) =$$

$$= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx, \text{где } C = C_1 \pm C_2.$$

**Замечание:** Это свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых функций, то есть

$$\int \big(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)\big)dx =$$

$$= \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2\,(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n\,(x)dx.$$

**5.** Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, то есть

$$\int \boldsymbol{kf(x)\,dx} = \boldsymbol{k} \int \boldsymbol{f(x)\,dx}, \text{ где } k - const.$$

Доказательство.

$$\int kf(x)\,dx = \int kF\,'(x)\,dx = \int \big(kF(x)\big)'\,dx =$$

$$= \int d\big(kF(x)\big) = kF(x) + C_1 = k\left(F(x) + \frac{C_1}{k}\right) =$$

$$= k(F(x) + C) = k\int f(x)\,dx\ , \text{ где } C = \frac{C_1}{k}.$$

**Замечание**: свойства 4 и 5 можно объединить и получить равенство

$\int \left(\boldsymbol{k_1 f(x) + k_2 g(x)}\right) \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{k_1} \int \boldsymbol{f(x)\, dx} +$
$+\boldsymbol{k_2} \int \boldsymbol{g\,(x) dx}$ –**линейности неопределённого интеграла**, данное равенство справедливо для любого конечного числа слагаемых функций.

**6.**Инвариантность формулы интегрирования:

Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее, то есть

Если $\int \boldsymbol{f(x) dx} = \boldsymbol{F(x) + C}$, то и $\int \boldsymbol{f(u) du} = \boldsymbol{F(u) + C}$, где $u = \varphi(x)$ произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Доказательство.

Пусть $x$ –независимая переменная, $f(x)$ –непрерывная функция и $F(x)$ –её первообразная, тогда как нам уже известно $\int f(x)dx = F(x) + C$.Положим теперь $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$-непрерывно дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F\big(\varphi(x)\big)$. В силу инвариантности дифференциала функции $dF(u) = F'(u)du = f(u)du$. Отсюда, $\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C$.

Так, например, если $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ , то

$\int cos^3 x d(cos\, x) = |u = cosx| = \int u^3\, du =$
$= \frac{u^4}{4} + C = \frac{cos^4 x}{4} + C.$

Таким образом, любая формула интегрирования остается справедливой при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции .

В частности, вместо буквы $x$ при интегрировании может быть использована любая другая буква, например $u, t, z$ и так далее.

Заменим в формуле $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, например $x$ на $u$: $\int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + C$.

## 1.3. Таблица неопределенных интегралов.

Пользуясь тем, что действие обратное интегрированию дифференцирование, можно составить таблицу основных интегралов с помощью которой получаем различные значения неопределенных интегралов от заданных функций.

**Таблица основных интегралов.**

**1.** $\int 0du = C, C = const;$

**2.** $\int du = u + C;$

**3.** $\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$

**4.** $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C;$

**5.** $\int a^u\, du = \frac{a^u}{lna} + C, a > 0, a \neq 1;$

**6.** $\int e^u du = e^u + C;$

**7.** $\int cosudu = sinu + C;$

**8.** $\int sinudu = -cosu + C;$

**9.** $\int \frac{du}{cos^2u} = tgu + C;$

**10.** $\int \frac{du}{sin^2u} = -ctgu + C;$

**11.** $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C;$

**12.** $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + C;$

**13.** «Длинный» логарифм:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+k}} = ln\left|u + \sqrt{u^2+k}\right| + C;$$

**14.** «Высокий» логарифм:

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$$

Интегралы в выше приводимой таблице называются **табличными**. Их следует знать наизусть.

Зная свойство неопределённого интеграла: производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, то есть$\left(\int f(u)du\right)' = f(u)$,

можно вывести каждую из формул приведённых в таблице основных интегралов.

Покажем, например, справедливость формулы

8) $\int sinudu = -cosu + C$,для этого достаточно показать, что производная правой части равенства, равна подынтегральной функции, находящейся в левой части равенства, то есть, то есть

$$(-cosu + C)' = -(cosu)' + (C)' = sinu = f(u).$$

Аналогично докажем, например, справедливость формул 4) и 12):

4)$\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$, подынтегральная функция $\frac{1}{u}$ определена для всех значений $u \neq 0$, возможны два случая:

а) Если $u > 0$, то $|u| = u$ и $ln|u| = ln\, u$, то $(ln|u| + C)' =$
$= (ln\, u + C)' = (lnu)' + (C)' = \frac{1}{u}$;

б) Если $u < 0$, то$|u| = -u$ и $ln|u| = ln(-u)$, то

$$(ln|u| + C)' = (ln(-u) + C)' = \frac{1}{-u}(-u)' = \frac{1}{u}\ .$$

В обоих случаях получили подынтегральную функцию $\frac{1}{u}$ , следовательно, формула верна;

12) $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$, $\left(\frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C\right)' =$

$$= \frac{1}{a}\left(arctg\frac{u}{a}\right)' + (C)' = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{u}{a}\right)^2}\right)\left(\frac{u}{a}\right)' =$$

$= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+\frac{u^2}{a^2}}\right)\frac{1}{a}(u)' = \frac{1}{a^2}\frac{a^2}{u^2+a^2} = \frac{1}{u^2+a^2}$ - получили подынтегральную функцию, формула верна.

Таким же образом, можно показать справедливость остальных формул, займитесь этим самостоятельно.

**Пример 1.3.** Используя таблицу и, основные свойства неопределенных интегралов найти интеграл:

а) $\int \sqrt{x^3}dx$ ; б) $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}} - 5 \cdot 2^x + 1\right)dx$;

в) $\int \left(\frac{4}{x^2+9} - \frac{3}{\sqrt{25-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx$.

Решение.

а) В таблице интегралов - интеграла от корня нет, зато есть интеграл от степенной функции (формула 3 в таблице интегралов), поэтому переходя от корня к степени и интегрируя, получим:

$$\int \sqrt{x^3}dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C;$$

б) Применяя свойства неопределенного интеграла и табличные формулы 3, 5,2 соответственно, имеем:

$$\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}} - 5 \cdot 2^x + 1\right)dx = 2\int x^{-\frac{5}{3}}dx - 5\int 2^x dx + \int dx =$$

$$= \left(-3x^{-\frac{2}{3}} + C_1\right) - \left(5 \cdot \frac{2^x}{ln\,2} + C_2\right) + (x + C_3);$$

**Замечание:** при каждом интегрировании мы получаем свою произвольную постоянную, но нет необходимости писать её при вычислении каждого интеграла. Достаточно написать ее после выполнений всех интегрирований, так как сумма (разность) постоянных является постоянной $C = C_1 - C_2 + C_3$.

Таким образом, имеем:

$$\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}} - 5 \cdot 2^x + 1\right)dx = -\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - 5\frac{2^x}{ln\,2} + x + C;$$

в) Применяя свойства неопределенного интеграла и табличные формулы, получим:

$$\int\left(\frac{4}{x^2+9}-\frac{3}{\sqrt{25-x^2}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx=4\int\frac{dx}{x^2+3^2}-$$
$$-3\int\frac{dx}{\sqrt{5^2-x^2}}+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{4}{3}arctg\left(\frac{x}{3}\right)-$$
$$-3arcsin\left(\frac{x}{5}\right)+2\,ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C.$$

**Пример 1.4.** Вычислить интеграл $\int(x^2-2sinx+$ $+3)dx$ и проверить результат дифференцированием.

Решение.

$$\int(x^2-2sinx+3)dx=\int x^2dx-2\int sinxdx+3\int dx=$$
$$=\frac{1}{3}x^3+2cosx+3x+C;$$

Проверка:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=\left(\frac{1}{3}x^3+2cosx+3x+C\right)'=\frac{1}{3}(x^3)'+$$
$$+2(cosx)'+3(x)'+(C)'=x^2-2sinx+3=f(x),$$

производная правой части полученного равенства совпадает с подынтегральной функцией, расположенной в левой части равенства $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$– значит интеграл вычислен правильно.

## ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

При интегрировании нет какого–либо общего приема вычисления интеграла. Имеется лишь ряд методов, позволяющих свести данный интеграл к табличному виду. Такими методами являются: метод непосредственного интегрирования, метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

## 2.1. Метод непосредственного интегрирования.

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредственным интегрированием.** Данный метод включает два основных приема:1) разложение интеграла на алгебраическую сумму;2) подведение функции под знак дифференциала. Эти приемы могут быть использованы как самостоятельно, так и в совокупности. Разберем каждый прием в отдельности, а затем рассмотрим совместное их применение.

### 1)Разложение интеграла на алгебраическую сумму.

Прием основан на том, что подынтегральная функция с помощью алгебраических преобразований и свойств неопределённого интеграла приводится к табличному виду.

**Пример 2.1.** Вычислить интеграл:

а) $\int \sqrt{x}(1+x^2)dx$;б)$\int \frac{x+2\sqrt{x}-7xe^x}{x}dx$; в)$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$.

Решение.

а) Раскрываем скобки и раскладываем полученное выражение на сумму интегралов (переходя от корня к степени), а затем воспользуемся таблицей интегралов (формула 3 в таблице):

$$\int \sqrt{x}(1+x^2)dx = \int \left(\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}\right)dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{2}}\right)dx =$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + C;$$

б) Разложив интеграл на сумму интегралов - разделив числитель на знаменатель и применив свойства неопределенного интеграла, получим:

$$\int \frac{x + 2\sqrt{x} - 7xe^x}{x}dx = \int \left(\frac{x}{x} + \frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{7xe^x}{x}\right)dx =$$

$$= \int (1 + 2x^{-\frac{1}{2}} - 7e^x)dx = \int dx + 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx - 7\int e^x dx =$$

$$= x + 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 7e^x + C = x + 4\sqrt{x} - 7e^x + C;$$

в) Раскладывая знаменатель (выражение под корнем) на множители и разделив числитель на знаменатель, получим табличные интегралы:

$$\int \frac{\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 + x^2}}{\sqrt{4 - x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 + x^2}}{\sqrt{2 - x^2} \cdot \sqrt{2 + x^2}}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = ln\left|x + \sqrt{2 + x^2}\right| +$$

$$+ arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

**2)Подведение функции под знак дифференциала**.

Пусть функция под знаком интеграла имеет не табличный вид $\int f\big(\varphi(x)\big)dx$ .

Главной задачей метода подведения функции под знак дифференциала является приведение исходного интеграла к табличному виду $\int f\big(\varphi(x)\big)d\big(\varphi(x)\big) = F\big(\varphi(x)\big) + C$ , при помощи следующих преобразований дифференциала:

1) $\boldsymbol{f(x)dx = d(\int f(x)\,dx)}$-**внесение функции под знак дифференциала**, когда мы вносим функцию под знак дифференциала, то мы её интегрируем;

2) $\boldsymbol{d\big(f(x)\big) = f'(x)dx}$ -**вынесение функции из под знака дифференциала**, когда выносим функцию из-под знака дифференциала (раскрываем дифференциал),то находим её производную.

**Пример 2.2.** Вычислить интеграл:

а) $\int cos(x^3)d(x^3)$;б) $\int 2x\, e^{x^2}\, dx$.

Решение.

а) Подынтегральное выражение уже является подведенным под знак дифференциала, по формуле интегрирования $\int cos\, udu = sin\, u + C$, где $u = u(x)$ имеем:

$\int cos(x^3)d(x^3) = sin(x^3) + C$;

б) Заметем, что $2xdx$ есть не что иное, как дифференциал $d(x^2)$,действительно, $d(x^2)=(x^2)'dx=2xdx$ , перепишем интеграл так: $\int e^{x^2}2x\,dx=\int e^{x^2}\,d\,(x^2)=e^{x^2}+C$.

**Пример 2.3.**Вычислить интеграл:
а) $\int\frac{dx}{e^{-\frac{x}{2}}}$;б) $\int\frac{dx}{3x-1}$;в) $\int\frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$ ;г) $\int\frac{2xdx}{x^4-1}$.

Решение.

а) Преобразуем подынтегральную функцию: $f(x)=\frac{1}{e^{-\frac{x}{2}}}=e^{\frac{x}{2}}$,получим интеграл $\int\frac{dx}{e^{-\frac{x}{2}}}=\int e^{\frac{x}{2}}\,dx$ далее смотрим в таблицу интегралов и находим наиболее подходящую формулу: $\int e^u du=e^u+C$ .Учитывая, что $\frac{1}{2}dx=d(\int\frac{1}{2}dx)=d\left(\frac{x}{2}\right)$,умножаем и делим полученный интеграл на два и вносим $\frac{1}{2}$ под знак дифференциала, получаем табличный интеграл:

$$\int\frac{dx}{e^{-\frac{x}{2}}}=\int e^{\frac{x}{2}}dx=2\int\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}dx=2\int e^{\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right)=2e^{\frac{x}{2}}+C;$$

б) Используя формулу $\int\frac{du}{u}=ln|u|+C$, приведем исходный интеграл к табличному виду $\int\frac{d(3x-1)}{3x-1}$, учитывая, что $3dx=d(\int 3dx)=d(3x)=d(3x-1)$ имеем:

$$\int\frac{dx}{3x-1}=\frac{3}{3}\int\frac{dx}{3x-1}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x-1)}{3x-1}=\frac{1}{3}ln|3x-1|+C;$$

в) Преобразуем подынтегральную функцию $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}=(\cos x)^{\frac{1}{3}}\sin x$. Учитывая, что $\sin x\,dx=$ $=d(\int\sin x\,dx)=-d(\cos x)$ и применяя табличную формулу $\int u^n\,du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+\ C$ ,имеем:

$$\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{\cos x}}=\int(\cos x)^{-\frac{1}{3}}\sin x\,dx=-\int(\cos x)^{-\frac{1}{3}}d(\cos x)=$$

$= -\frac{(\cos x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = -\frac{3(\cos x)^{\frac{2}{3}}}{2} + C;$

г) Учитывая, что $2xdx = d(\int 2xdx) = d(x^2)$ и применяя табличную формулу $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$ имеем:

$$\int \frac{2xdx}{x^4-1} = \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2-1^2} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C.$$

Посмотрим, на следующих примерах, как применяются совместно (в одном примере) два приёма- метод разложения на алгебраическую сумму и подведение функции под знак дифференциала.

**Пример 2.4.** Вычислить интеграл:

а) $\int \frac{x+2}{x+3} dx$;б) $\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1} dx$;в) $\int \frac{3\sqrt{x}-2\cos\frac{1}{x^2}}{x^3} dx$

Решение.

а) С помощью алгебраических преобразований построим в числителе знаменатель и почленно разделим, далее учитывая, что $d(x+3) = (x+3)'dx = 1dx = dx$ получим:

$$\int \frac{x+2}{x+3} dx = \int \frac{(x+3)-1}{x+3} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+3}\right) dx =$$

$$= \int dx - \int \frac{d(x+3)}{x+3} = x - ln|x+3| + C;$$

б) По формуле $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$имеем:

$e^{3x} - 1 = (e^x)^3 - 1^3 = (e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)$,тогда

$$\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1} dx = \int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^x-1} dx = \int (e^{2x}+e^x+1) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{2x} d(2x) + \int e^x dx + \int dx = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + x + C.$$

в) Почленно делим числитель на знаменатель и учитывая, что $x^{-3}dx = d(\int x^{-3}dx) = d\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) = -\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2}\right)$ имеем:

$$\int \frac{3\sqrt{x} - 2cos\frac{1}{x^2}}{x^3}dx = 3\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3}dx - 2\int \frac{cos\frac{1}{x^2}}{x^3}dx =$$

$$= 3\int x^{-\frac{5}{2}}dx - 2\int cos\frac{1}{x^2}\cdot x^{-3}dx = 3\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\left(-\frac{3}{2}\right)} +$$

$$+\int cos\frac{1}{x^2}d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} + sin\frac{1}{x^2} + C.$$

## Интегралы содержащие квадратный трехчлен.

Среди интегралов, вычисляемых методом непосредственного интегрирования, рассматривают интегралы содержащие квадратный трехчлен, то есть интегралы вида: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

**Правило вычисление интегралов вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ :**

1) Выделить полный квадрат в знаменателе, то есть

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a};$$

2) Свести преобразованный интеграл к одному из табличных интегралов 11)-14), учитывая, что $d\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)' dx = 1dx = dx$ .

Рассмотрим, как это сделать на примерах.

**Пример 2.5.** Вычислить интеграл: а) $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$.

Решение.

а) Выделяя полный квадрат, в знаменателе:

$$x^2 - 6x + 5 = (x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2) -$$

$-9 + 5 = (x-3)^2 - 4$ и применяя (в таблице основных интегралов) формулу $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$ , учитывая, что $d(x-3) = (x-3)'dx = 1dx = dx$ имеем:

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+5} = \int \frac{dx}{(x-3)^2-4} = \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2-2^2} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2} ln\left|\frac{x-3-2}{x-3+2}\right| + C = \frac{1}{4} ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C;$$

б) Выделяя полный квадрат в знаменателе

$$-x^2 - 2x = -(x^2 + 2x + 1) + 1 = 1^2 - (x+1)^2$$

и применяя (в таблице основных интегралов) формулу $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C$, имеем:

,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1^2-(x+1)^2}} = arcsin(x+1) + C;$$

в) В данной ситуации для того, чтобы привести данный интеграл к табличному виду $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k}} = ln\left|u + \sqrt{u^2+k}\right|$ ,достаточно вынести $\frac{1}{\sqrt{2}}$ за знак интеграла ($2$ под корнем в знаменателе). Таким образом, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left(x^2+\frac{3}{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} ln\left|x + \sqrt{x^2+\frac{3}{2}}\right| + C.$$

## 2.2. Метод замены переменной (метод подстановки).

Иногда для того, чтобы привести интеграл к табличному виду необходимо выполнить замену переменной (подстановку).Метод замены переменной заключается в введении новой переменной интегрирования $x = \varphi(t)$ или $t = \varphi(x)$, относительно которой исходный интеграл является табличным или сводящимся к табличному (в случае «удачной» подстановки), далее вычисляют полученный интеграл, а затем возвращаются к старой переменной.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$ .Сделаем подстановку(замену) $x = \varphi(t)$,где $\varphi(t)$- некоторая функция, имеющая непрерывную производную, тогда $dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt$ и согласно свойству инвариантности неопределенного интеграла получим формулу интегрирования подстановкой:

$$\int \boldsymbol{f(x)dx} = \int \boldsymbol{f(\varphi(t))\varphi'(t)dt} \quad \textbf{(2.1)}$$

Формула (2.1) так же называется **формулой замены переменной.**

**Замечание:** когда интеграл имеет вид$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, целесообразно сделать подстановку
$t = \varphi(x)$, отсюда $dt = d(\varphi(x)) = \varphi'(x)dx$ ,тогда

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)\,dt.$$

Запишем алгоритм вычисления неопределённого интеграла при использовании метода замены переменной.

**Алгоритм (замены переменной):**

1) Связать старую переменную интегрирования $x$ с новой переменной $t$ с помощью замены $t = \varphi(x)$;

2)Найти связь между дифференциалами
$dt = \varphi'(x)dx$;

3) Перейти к новой переменной $t$;

4)Проинтегрировать и вернуться к старой переменной $x$.
Для удобства, замену обычно пишут в прямых скобках | |.

**Пример 2.7.** Вычислить интеграл: а) $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}dx}{\sqrt{2x-1}}$;
б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-ln^2x}}$;в) $\int x(x^2+2)^{\frac{3}{2}}dx$.

Решение.

а) Вводим новую переменную и избавляемся от иррациональности:

$$\sqrt{2x-1}=t,$$
$$t^2=2x-1;$$

Продифференцировав обе части равенства $t^2=2x-1$ , получим:

$$d(t^2)=d(2x-1),$$
$$(t^2)'dt=(2x-1)'dx,$$
$$2tdt=2dx, \text{ откуда}$$
$$tdt=dx;$$

Переходим в исходном интеграле к новой переменной $t$ , заменяем $\sqrt{2x-1}$ на $t$,а $dx$ на $tdt$;

Интегрируем и возвращаемся к старой переменной.

Таким образом, получим:

$$\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}dx}{\sqrt{2x-1}}=\left|\begin{matrix} t=\sqrt{2x-1} \\ t^2=2x-1 \\ 2tdt=2dx \\ tdt=dx \end{matrix}\right|=\int \frac{e^t}{t}\cdot tdt=\int e^t dt=$$
$$=e^t+C=e^{\sqrt{2x-1}}+C;$$

б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-ln^2x}}=\int \frac{\frac{1}{x}dx}{\sqrt{1-(lnx)^2}}=\left|\begin{matrix} t=lnx \\ dt=\frac{1}{x}dx \end{matrix}\right|=$

$$=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=arcsint+C=arcsin(lnx)+C;$$

в) $\int x(x^2+2)^{\frac{3}{2}}dx = \begin{vmatrix} t = x^2+2 \\ dt = 2xdx \\ \frac{dt}{2} = xdx \end{vmatrix} = \int t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{3}{2}}dt =$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + C =$$

$$= \frac{1}{5}(x^2+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1} + C.$$

**Замечание:**

**1)**Пример 2.7. б), в) удобно решить иначе - методом подведения функции под знак дифференциала, внося $\frac{1}{x}$ и $2x$ под знак дифференциала соответственно:

б) $\frac{1}{x}dx = d\left(\int \frac{1}{x}dx\right) = d(lnx)$,тогда

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-ln^2x}} = \int \frac{\frac{1}{x}dx}{\sqrt{1-ln^2x}} = \int \frac{d(lnx)}{\sqrt{1-(lnx)^2}} =$$

$$= arcsin(lnx) + C;$$

в)$2xdx = d(\int 2xdx) = d(x^2) = d(x^2+2)$, тогда

$$\int x(x^2+2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+2)^{\frac{3}{2}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+2)^{\frac{3}{2}}d(x^2+2) = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C =$$

$= \frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$, принципиальной разницы нет, но с точки зрения оформления задания метод введения нового аргумента гораздо короче;

**2)** Метод подведения функции под знак дифференциала не универсален (не всегда работает ),так как

в некоторых случаях невозможно подвести функцию под знак дифференциала или внесение функции под дифференциал не приводит исходный интеграл к табличному виду, или является очень громоздким действием;
**3)** Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается с практикой.

## 2.3. Метод интегрирование по частям.

Еще один метод сведения некоторых интегралов к табличному виду. Метод основан на известной формуле производной произведения $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$
или в дифференциальной форме $d(uv)=vdu+udv$.
Проинтегрировав обе части последнего равенства, получим $\int d(uv)=\int vdu+\int udv$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла имеем:

$$uv=\int vdu+\int udv.$$

Откуда, получим формулу

$$\boldsymbol{\int udv=uv-\int vdu}\quad \textbf{(2.2)}$$

Формула (2.2) называется **формулой интегрирования по частям**.

Данная формула показывает, что нахождение интеграла $\int udv$ приводит к нахождению интеграла $\int vdu$,который окажется табличным или сводящимся к табличному (в случае правильных действий), в отличии от интеграла $\int udv$.

При применении формулы интегрирования по частям используют следующее правило.

**Правило интегрирования по частям:** за $u$ берем ту часть подынтегрального выражения, которая при дифференцировании упростится, за $dv$ интеграл от которой табличный или может быть приведен к табличному.

Рассмотрим **основные виды интегралов, интегрируемых по частям:**

**1)** $\int \boldsymbol{P_n(x)} \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{sinkx} \\ \boldsymbol{coskx} \\ \boldsymbol{e^{kx}} \end{Bmatrix} \boldsymbol{dx} =$

$$= \left| \begin{matrix} u = P_n(x) \;\Rightarrow\; du = P_n'(x)dx \\ dv = \begin{Bmatrix} sinkx \\ coskx \\ e^{kx} \end{Bmatrix} dx \;\Rightarrow\; v = \int \begin{Bmatrix} sinkx \\ coskx \\ e^{kx} \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{k}coskx \\ \frac{1}{k}sinkx \\ \frac{1}{k}e^{kx} \end{Bmatrix} \end{matrix} \right|$$

**2)** $\int \boldsymbol{P_n(x)} \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{lnkx} \\ \boldsymbol{arcsinkx} \\ \boldsymbol{arccoskx} \\ \boldsymbol{arctgkx} \\ \boldsymbol{arcctgkx} \end{Bmatrix} \boldsymbol{dx} =$

$$= \left| \begin{matrix} u = \begin{Bmatrix} lnkx \\ arcsinkx \\ arccoskx \\ arctgkx \\ arcctgkx \end{Bmatrix} \Rightarrow du = \begin{Bmatrix} (lnkx)' \\ (arcsinkx)' \\ (arccoskx)' \\ (arctgkx)' \\ (arcctgkx)' \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \frac{k}{kx} \\ \frac{k}{\sqrt{1-(kx)^2}} \\ \frac{-k}{\sqrt{1-(kx)^2}} \\ \frac{k}{1+(kx)^2} \\ \frac{-k}{1+(kx)^2} \end{Bmatrix} dx \\ dv = P_n(x)dx \;\Rightarrow\; v = \int P_n(x)\,dx \end{matrix} \right|$$

Здесь $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n+1} + \ldots + a_n -$ многочлен от $x$ степени $n$,где $n = 0,1,2 \ldots$

**Пример 2.8.** Вычислить интеграл: а)$\int xe^{5x}dx$;

б) $\int xlnxdx$;в)$\int arctgxdx$ ; г) $\int (x^2+1)\sin x\,dx$.

Решение.

а) Чтобы привести интеграл к табличному виду применяем метод интегрирование по частям, так как никакой другой метод не работает. Заметим, что $x$ при дифференцировании упрощается, действительно $x' = 1$ ,следовательно за $u$ принимаем $x$, а за $dV$ оставшуюся часть подынтегрального выражения, то есть $e^{5x}dx$,вычисляя $du$ и $v$ получим:

$$\int xe^{5x}dx = \left| \begin{matrix} u = x,\ du = dx \\ dv = e^{5x}dx, v = \int e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{5}xe^{5x} -$$

$$-\frac{1}{5}\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + C;$$

б) Здесь $x$ при дифференцировании упрощается, но при этом интеграл от $ln\,x$ не табличный, тогда:

$$\int x\,ln\,x\,dx = \left| \begin{matrix} u = ln\,x, \quad du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx, v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = ln\,x \cdot \frac{x^2}{2} -$$

$$-\int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = = \frac{1}{2}x^2\,ln\,x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2\,ln\,x - \frac{x^2}{4} + C =$$

$$= \frac{x^2}{4}(2\,ln\,x - 1) + C;$$

в) $\int arctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctg\,x,\ du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx, \quad v = \int dx = x \end{matrix} \right| =$

$$= x\,arctg\,x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\,arctg\,x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx =$$

$$= x\,arctg\,x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\,arctg\,x - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + C;$$

**Замечание:** формулу интегрирования по частям можно применять неоднократно. Рассмотрим, как это сделать на следующем примере.

г) Применяя, формулу интегрирования по частям дважды, имеем:

$$\int (x^2+1)sinxdx = \begin{vmatrix} u = x^2+1, & du = 2xdx \\ dv = sinxdx, & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$
$$= -(x^2+1)cosx - \int (-cosx)2xdx = -(x^2+1)cosx +$$
$$+2\int xcosxdx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = cosxdx, & v = sinx \end{vmatrix} =$$
$$= -(x^2+1)cosx + 2\left(xsinx - \int sinxdx\right) =$$
$$= -(x^2+1)cosx + 2(xsinx + cosx) + C.$$

Иногда повторное интегрирование по частям приводит к исходному интегралу, такие интегралы называются **круговыми или циклическими интегралами**.

Примерами круговых интегралов являются интегралы вида $\int e^{kx}\cos(\beta x)dx$, $\int e^{kx}\sin(\beta x)dx$, $\int \sin(lnk\,x)dx$, $\int \cos(lnk\,x)dx$ и так далее. Разберём на примере как они вычисляются.

**Пример 2.9.** Вычислить интеграл $\int e^{2x}cosxdx$.

Решение.

$$\int e^{2x}cosxdx = \begin{vmatrix} u = e^{2x}, & du = 2e^{2x}dx \\ dv = cosxdx, & v = sinx \end{vmatrix} =$$
$$= e^{2x}\,sinx - 2\int sinxe^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = e^{2x}, & du = 2e^{2x}dx \\ dv = sinxdx, & v = -cosx \end{vmatrix} =$$
$$= e^{2x}sinx - 2(-e^{2x}cosx + 2\int cosxe^{2x}dx) =$$
$$= e^{2x}sinx + 2e^{2x}cosx - 4\int cosx\,e^{2x}dx;$$

В результате повторного интегрирования по частям функцию не удалось привести к табличному виду. Однако последний интеграл ничем не отличается от исходного:

$\underline{\int e^{2x}cosxdx} = e^{2x}sinx + 2e^{2x}cosx - 4\underline{\int e^{2x}\cos x\,dx}$;

$$5\int e^{2x}cosxdx = e^{2x}(sinx + 2cosx);$$
$$\int e^{2x}cosxdx = \frac{e^{2x}}{5}(sinx + 2cosx) + C.$$

**Замечание:** как мы видим вычисление интегралов требует индивидуального подхода к каждой подынтегральной функции, соответствующие навыки приобретаются в результате значительного числа упражнений.

**Задания для самостоятельного решения.**

**1. Методом разложением на алгебраическую сумму вычислить следующие интегралы:**

| | |
|---|---|
| 1. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+5x\cos x-x+1}{x}dx$ | 14. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$ |
| 2. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$ | 15. $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$ |
| 3. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ | 16. $\int \frac{x^{\frac{3}{4}}+2+7\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$ |
| 4. $\int \frac{(3-x^2)^3}{x}dx$ | 17. $\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)^2 dx$ |
| 5. $\int \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 dx$ | 18. $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2}{x^2}dx$ |
| 6. $\int \frac{4-(2x-3)(x^2+16)}{x^2+16}dx$ | 19. $\int \frac{(x^3+2)^2}{\sqrt{x}}dx$ |
| 7. $\int \frac{(9x^2+4)\sin x-3}{9x^2+4}dx$ | 20. $\int \left(\frac{2}{4x^2+1}+\frac{9-x^2}{3+x}\right)dx$ |
| 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ | 21. $\int \frac{5+\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$ |
| 9. $\int \frac{6x^5-3^x x^3\ln 3+x^4}{x^3}dx$ | 22. $\int \left(x+\frac{2}{x}\right)^2 dx$ |
| 10. $\int 2^x\cdot 3^{2x}\,dx$ | 23. $\int \left(\frac{\sqrt{x}-5}{x}\right)^2 dx$ |
| 11. $\int \frac{3x^4-5x^2\cos x+7x}{x^2}dx$ | 24. $\int (x^2-1)(\sqrt{x}+4)\,dx$ |
| 12. $\int ctg^2 x\,dx$ | 25. $\int \frac{5+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ |
| 13. $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$ | 26. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$ |

**Ответы:**

**1.1.** $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + 5sinx - x + ln|x| + C$; **1.2.** $ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right| + C$ ;

**1.3.** $-ctgx - tgx + C$; **1.4.** $27\,ln|x| - \frac{27}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^4 - \frac{x^6}{6} + C$ ;

**1.5.** $x - cosx + C$; **1.6.** $arc\,tg\left(\frac{x}{4}\right) - x^2 + 3x + C$;

**1.7.** $sinx - \frac{1}{2}arcsin\left(\frac{3x}{2}\right) + C$; **1.8.** $tgx - ctgx + C$;

**1.9.** $2x^3 - 3^x + \frac{x^2}{2} + C$; **1.10.** $\frac{18^x}{ln18} + C$;

**1.11.** $x^3 - 5sinx + 7ln|x| + C$; **1.12.** $-ctgx - x + C$;

**1.13.** $\frac{1}{2}(x + sinx) + C$ ; **1.14.** $sinx - -cosx + C$;

**1.15.** $x + \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$; **1.16.** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{4}} + 7x + C$;

**1.17.** $\frac{x^5}{5} + \frac{4}{7}x^3\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$; **1.18.** $\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$;

**1.19.** $\frac{2}{13}x^6\sqrt{x} + \frac{8}{7}x^3\sqrt{x} + 8\sqrt{x} + C$; **1.20.** $arctg2x + 3x -$ $-\frac{x^2}{2} + C$; **1.21.** $-5ctgx - cosx + C$; **1.22.** $\frac{x^3}{3} + 4x - \frac{4}{x} + C$;

**1.23.** $ln|x| + \frac{20}{\sqrt{x}} - \frac{25}{x} + C$; **1.24.** $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 4x +$ $C$; **1.25.** $15x^{\frac{1}{3}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + C$; **1.26.** $C - \frac{2}{3x\sqrt{x}}$.

**2. Методом подведением функции под знак дифференциала вычислить следующие интегралы:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** | $\int \boldsymbol{sin(1-4x)dx}$ | **14.** | $\int \boldsymbol{\frac{x}{sin^2(x^2+1)}dx}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2. | $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}$ | 15. | $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx$ |
| 3. | $\int (0,7)^{1-2x}dx$ | 16. | $\int \frac{dx}{e^{-x}(1+e^x)}$ |
| 4. | $\int \frac{e^x dx}{e^x+4}$ | 17. | $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+3)}dx$ |
| 5. | $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$ | 18. | $\int \frac{x}{4+x^4}dx$ |
| 6. | $\int \frac{2dx}{5x-1}$ | 19. | $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ |
| 7. | $\int \frac{dx}{(x-1)^5}$ | 20. | $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}$ |
| 8. | $\int \frac{11dx}{(x+2)^3}$ | 21. | $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$ |
| 9. | $\int \frac{4dx}{x+3}$ | 22. | $\int \frac{tg^5 x}{\cos^2 x}dx$ |
| 10. | $\int \frac{dx}{x\ln x}$ | 23. | $\int \frac{dx}{ctg^2 x \sin^2 x}$ |
| 11. | $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ | 24. | $\int (2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$ |
| 12. | $\int 10^{2x+1}\,dx$ | 25. | $\int (4-x^2)^{11}2x\,dx$ |
| 13. | $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$ | 26. | $\int e^{-3x^2+5}\,xdx$ |

**Ответы**:

**2.1.** $\frac{1}{4}cos(1-4x)+C$;**2.2.**$-4\,ctg\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+C$ ;

**2.3.**$-\frac{1}{2\,ln\,0{,}7}(0{,}7)^{1-2x}+C$; **2.4.** $ln(e^x+4)+C$ ;

**2.5.** $\frac{2}{3}\sqrt{3x-4}+C$; **2.6.** $\frac{2}{5}ln|5x-1|+C$; **2.7.** $-\frac{1}{4(x-5)^4}+C$;

**2.8.** $-\frac{11}{2(x+2)^2}+C$; **2.9.** $4\,ln|x+3|+C$; **2.10.** $ln|lnx|+C$;

**2.11.** $-\frac{1}{lnx}+C$; **2.12.** $\frac{10^{2x+1}}{2ln10}+C$; **2.13.** $e^{tgx}+C$;

**2.14.** $-\frac{1}{2}ctg(x^2+1)+C$; **2.15.** $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C$;

**2.16.** $ln|1+e^x|+C$; **2.17.** $\frac{1}{3}tg(x^3+3)+C$;

**2.18.** $\frac{1}{4}arctg\left(\frac{x^2}{2}\right)+C$; **2.19.** $2\sqrt{lnx}+C$;

**2.20.** $-2\sqrt{cosx}+C$; **2.21.**$ln\left|x^2+\sqrt{x^4-1}\right|+C$;

**2.22.** $\frac{1}{6}tg^6x+C$; **2.23.** $\frac{1}{ctgx}+C$; **2.24.** $sin(x^2-x)+C$;

**2.25.** $-\frac{(4-x^2)^{12}}{12}+C$; **2.26.**$-\frac{1}{6}e^{-3x^2+5}+C$.

**3. Найти интегралы от выражений, содержащих квадратный трехчлен:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** | $\int\frac{dx}{x^2-6x+25}$ | **14.** | $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ |
| **2.** | $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+3}}$ | **15.** | $\int\frac{dx}{2x^2+8x}$ |
| **3.** | $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$ | **16.** | $\int\frac{dx}{\sqrt{9+8x+x^2}}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **4.** | $\int \frac{3dx}{x^2+4x+13}$ | **17.** | $\int \frac{dx}{x^2+5x}$ |
| **5.** | $\int \frac{dx}{x^2+4x}$ | **18.** | $\int \frac{5dx}{x^2+4x+5}$ |
| **6.** | $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ | **19.** | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+3}}$ |
| **7.** | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ | **20.** | $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ |
| **8.** | $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ | **21.** | $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-2x}}$ |
| **9.** | $\int \frac{dx}{x^2-2x-8}$ | **22.** | $\int \frac{dx}{x^2-4x-5}$ |
| **10.** | $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}$ | **23.** | $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$ |
| **11.** | $\int \frac{5}{x^2+4x}dx$ | **24.** | $\int \frac{dx}{x^2-2x-1}$ |
| **12.** | $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$ | **25.** | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ |
| **13.** | $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$ | **26.** | $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2+1}}$ |

**Ответы**:

**3.1.** $\frac{1}{4}arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C$;**3.2.**$ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+3}\right|+C$ ;

**3.3**. $arcsin(x-2)+C$; **3.4.** $arctg\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$;

**3.5.** $\frac{1}{4}ln\left|\frac{x}{x+4}\right|+C$; **3.6** $arcsin(2x-1)+C$;

**3.7.** $\frac{5}{2}ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$;

**3.8.** $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$; **3.9.** $\frac{1}{6}ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|+C$;

**3.10.** $ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2+1}\right|+C$; **3.11.** $\frac{5}{2}ln\left|\frac{x}{x+4}\right|+C$;

**3.12.** $\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x+1}{3}\right)+C$; **3.13.**$arcsin\left(\frac{2x+3}{5}\right)+C$;

**3.14.** $arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$; **3.15.** $\frac{1}{8}ln\left|\frac{x}{x+4}\right|+C$;

**3.16.** $ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+9}\right|+C$; **3.17.** $\frac{2}{5}\ arctg\left(\frac{2x+5}{5}\right)+C$; **3.18.** $5arctg(2+x)+C$; **3.19.** $ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+3}\right|+C$; **3.20.** $arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$;

**3.21.**$arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)+C$; **3.22.** $\frac{1}{6}ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C$;

**3.23.** $arctg(x-3)+C$; **3.24.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}ln\left|\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}\right|+C$;

**3.25.** $ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$; **3.26.** $arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C$.

**4.Найти интегралы методом замены переменной:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** | $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$ | **14.** | $\int x\sqrt{2-x}\ dx$ |
| **2.** | $\int e^{sin^2 x}\, sin(2x)\,dx$ | **15.** | $\int \frac{3arctg^2 x}{x^2+1}dx$ |
| **3.** | $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ | **16.** | $\int x\sqrt{x-1}\ dx$ |
| **4.** | $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx$ | **17.** | $\int \sqrt{5x-3}\ dx$ |
| **5.** | $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$ | **18.** | $\int \frac{xdx}{4x^2-1}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **6.** | $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^4}dx$ | **19.** | $\int \frac{tg^6 2x dx}{cos^2 2x}$ |
| **7.** | $\int \frac{cos(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ | **20.** | $\int \frac{dx}{(x+1)ln(x+1)}$ |
| **8.** | $\int x\sqrt[4]{x^2+4}dx$ | **21.** | $\int \frac{ctg^7 3x dx}{sin^2 3x}$ |
| **9.** | $\int x\sqrt{x-5}dx$ | **22.** | $\int \frac{x}{x^4+1}dx$ |
| **10.** | $\int x(x+1)^{10}dx$ | **23.** | $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}}dx$ |
| **11.** | $\int \frac{e^x dx}{10-6e^x}$ | **24.** | $\int (5x-1)^8 x dx$ |
| **12.** | $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2}$ | **25.** | $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$ |
| **13.** | $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}dx$ | **26.** | $\int e^{-x^3}x^2\,dx$ |

**Ответы**:

**4.1.** $-\sqrt{4-x^2}+C$; **4.2.** $e^{\sin^2 x}+C$;

**4.3.** $\frac{1}{2}arcsin(x^2)+C$; **4.4.** $\frac{(2\ln x+3)^4}{8}+C$;

**4.5.** $\frac{1}{4}\,arcsin(x^4)+C$; **4.6.** $-\frac{1}{9(x^3+3x+1)^3}+C$;

**4.7.** $3\sin(\sqrt[3]{x})+C$; **4.8.** $\frac{2}{5}(x^2+4)^{\frac{5}{4}}+C$;

**4.9.** $\frac{2}{5}\sqrt{(x-5)^5}+\frac{10}{3}\sqrt{(x-5)^3}+C$;

**4.10.** $\frac{1}{12}(x+1)^{12}-\frac{1}{11}(x+1)^{11}+C$;

**4.11.** $-\frac{1}{6}ln|10-6e^x|+C$; **4.12.** $\frac{1}{2}(x-1)^2+3(x-1)+3ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$; **4.13.** $2\sqrt{(x+1)^3}-8\sqrt{x+1}+C$;

**4.14.** $\frac{2}{5}\sqrt{(2-x)^5}-\frac{4}{3}\sqrt{(2-x)^3}+C$; **4.15.** $arctg^3x+C$;

**4.16.** $\frac{2}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1}+\frac{2}{3}\sqrt{x-1}(x-1)+C$;

**4.17.** $\frac{2}{15}\sqrt{5x-3}(5x-3)+C$; **4.18.** $\frac{1}{8}ln|4x^2-1|+C$;

**4.19.** $\frac{1}{14}tg^7 2x+C$; **4.20.** $ln|ln(x+1)|+C$;

**4.21.** $-\frac{1}{24}ctg^8 3x+C$; **4.22.** $\frac{1}{2}arctg(x^2)+C$;

**4.23.** $\frac{1}{3}arcsin\left(\frac{x^3}{2}\right)+C$; **4.24.** $\frac{1}{25}\left(\frac{(5x-1)^{10}}{10}+\frac{(5x-1)^9}{9}\right)+C$;

**4.25.** $-\frac{1}{2}\sqrt{5-4x}+C$; **4.26.** $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$.

**5.Найти интегралы, используя формулу интегрирование по частям:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** | $\int xe^{-x}dx$ | **14.** | $\int (4x+1)e^{-2x}dx$ |
| **2.** | $\int (x+3)\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$ | **15.** | $\int (x^2+3)lnxdx$ |
| **3.** | $\int x\ln^2 x\,dx$ | **16.** | $\int (x^2+2)cosxdx$ |
| **4.** | $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$ | **17.** | $\int (12x+3)e^x dx$ |
| **5.** | $\int \arcsin x\,dx$ | **18.** | $\int x2^x dx$ |
| **6.** | $\int (x^2+2x+3)\cos x\,dx$ | **19.** | $\int arccos4xdx$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **7.** | $\int x^2 \ln x dx$ | **20.** | $\int (5x+2)\cos 3x dx$ |
| **8.** | $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$ | **21.** | $\int \ln^2 x dx$ |
| **9.** | $\int (x+1)\sin(2x+1)dx$ | **22.** | $\int \operatorname{arctg} 2x dx$ |
| **10.** | $\int (1-x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$ | **23.** | $\int (2x+3)3^{2x}dx$ |
| **11.** | $\int (3x-1)\sin 2x dx$ | **24.** | $\int \cos(\ln x)dx$ |
| **12.** | $\int (2x+1)\ln x dx$ | **25.** | $\int e^x \sin x\, dx$ |
| **13.** | $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ | **26.** | $\int x^2 \arccos 3x dx$ |

**Ответы:**

**5.1.** $-e^{-x}(x+1)+C$;**5.2.** $-2(x+3)\cos\left(\frac{x}{2}\right)+4\sin\left(\frac{x}{2}\right)+C$;

**5.3.**$\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+C$;

**5.4.** $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$; **5.5.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$;

**5.6** $(x^2+2x+3)\sin x-(2x+2)\cos x+2\sin x+C$;

**5.7.** $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$; **5.8.** $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}(x-\operatorname{arctg} x)+C$; **5.9.** $-\frac{1}{2}(x+1)\cdot\cos(2x+1)+\frac{1}{4}\sin(2x+1)+C$;

**5.10.** $2(1-x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)-4\cos\left(\frac{x}{2}\right)+C$; **5.11.** $\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+C$; **5.12.** $(x^2+x)\ln x-x-\frac{x^2}{2}+C$;

**5.13.** $2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$;**5.14.** $-e^{-2x}\left(2x+\frac{3}{2}\right)+C$;

**5.15.** $\left(\frac{x^3}{3}+3x\right)lnx-\frac{x^3}{9}-3x+C$; **5.16.** $x^2sinx+2xcosx+C$; **5.17.** $e^x(12x-9)+C$; **5.18.** $\frac{2^x(xln2-1)}{ln^2 2}+C$;

**5.19.** $xarccos4x-\frac{1}{4}\sqrt{1-16x^2}+C$; **5.20.** $\frac{1}{3}(5x+2)sin3x+\frac{5}{9}cos3x+C$; **5.21.** $x(ln^2x--2lnx+2)+C$;

**5.22.** $xarctg2x-\frac{1}{4}ln(1+4x^2)+C$ ; **5.23.** $(2x+3)\cdot\frac{3^{2x}}{2ln3}-\frac{3^{2x}}{2ln^2 3}+C$; **5.24.** $\frac{x}{2}(cos(ln\,x)+\ +sin(ln\,x))+C$;

**5.25.** $\frac{e^x}{2}(sin\,x-cos\,x)+C$;**5.26.** $\frac{1}{3}\ x^3arccos3x+$ $+\frac{1}{243}(1-9x^2)\sqrt{1-9x^2}-\frac{1}{81}\sqrt{1-9x^2}+C.$

# ГЛАВА 3. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим методы интегрирования различных классов функций: дробно-рациональных, тригонометрических и иррациональных функций. Интегралы от данных функций сводятся к табличным соответствующей подстановкой для данного типа подынтегрального выражения.

## 3.1. Интегрирование дробно-рациональных функций.

**Дробно-рациональной функций (рациональной дробью)** называется функция, равная отношению двух многочленов, то есть функция вида

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}}\quad \textbf{(3.1)},$$

где $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $Q_m(x)=b_0x^m+$ $+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$ –многочлены от переменной $x$ степени $m,n$ соответственно, $m,n\in N$ -натуральные числа.

Рациональная дробь называется **правильной**, если $m < n$ и **неправильной**, если $m \geq n$.

Например, дробь $\frac{2x^2+x}{x^3-2x+1}$ –правильная, так как $m = 2 < n = 3$, где $Q_2(x) = 2x^2 + x$,$P_3(x) = x^3 - 2x + 1$;

дробь $\frac{5x^3-2x-1}{x^2(x+1)}$ неправильная, так как $m = n = 3$, $Q_3(x) = 5x^3 - 2x - 1$, $P_3(x) = x^2(x+1) = x^3 + x^2$ .

Как мы узнаем далее, всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа так называемых **простейших рациональных дробей —** это правильные рациональные дроби следующих четырех типов:

1) $\frac{A}{x-a}$;2) $\frac{A}{(x-a)^n}$;3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$;4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$,

где $a, p, q, A, B$— действительные числа, $n = 2,3 \ldots$

В дробях 3),4) предполагается, что квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней, то есть $D = p^2 - 4q < 0$.

Если мы научимся интегрировать простейшие рациональные дроби и раскладывать правильную рациональную дробь на сумму простейших, то задача интегрирования рациональных дробей будет решена.

**Интегрирование простейших рациональных дробей.**

Рассмотрим, как интегрируются простейшие (элементарные) рациональные дроби.

<u>Интегрирование элементарной дроби вида</u> **1)** $\boldsymbol{\frac{A}{x-a}}$.

Для того чтобы вычислить интеграл от элементарной дроби $\int \frac{Adx}{x-a}$ ,достаточно подвести единицу под знак дифференциала $dx = d(x-a)$ :

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = Aln|x-a| + C.$$

Интегрирование элементарной дроби вида **2)** $\frac{A}{(x-a)^n}$.

Учитывая, что $dx = d(x-a)$ имеем:

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C.$$

**Замечание:** интегралы от элементарных дробей $\int \frac{Adx}{x-a}, \int \frac{Adx}{(x-a)^n}$ можно привести к табличному и другому способу, с помощью замены $x-a$ ,просто это займет немного больше времени. Покажем, как это работает:

1)$\int \frac{Adx}{x-a} = \begin{vmatrix} t = x-a \\ dt = dx \end{vmatrix} = A\int \frac{dt}{t} = Aln|t| + C = Aln|x-a| + C;$

2)$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n} dx = \begin{vmatrix} t = x-a \\ dt = dx \end{vmatrix} =$

$$=A\int t^{-n}\,dt = A\frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C.$$

**Пример 3.1.** Вычислить интеграл: а) $\int \frac{2dx}{x-7}$;б) $\int \frac{dx}{x^2-6x+9}$.

Решение.

а) 1 способ: (подведение функции под знак дифференциала)

Учитывая, что $dx = d(x-7)$ имеем:

$$\int \frac{2dx}{x-7} = 2\int \frac{d(x-7)}{x-7} = 2ln|x-7| + C;$$

2 способ: (замена переменной)

Сделав замену переменной $t = x-7$ имеем:

$$\int \frac{2dx}{x-7} = \begin{vmatrix} t = x-7 \\ dt = dx \end{vmatrix} = 2\int \frac{dt}{t} = 2ln|t| + C =$$
$$2ln|x-7| + C;$$

б) 1 способ:(подведение функции под знак дифференциала)

Для начала преобразуем подынтегральную функцию-выделим полный квадрат и заметим, что перед нами простейшая рациональная дробь второго вида, приведём его к табличному виду путем подведения единицы под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+9} = \int \frac{dx}{(x-3)^2} = \int (x-3)^{-2}\, d(x-3) =$$
$$= \frac{(x-3)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x-3} + C;$$

<u>2 способ:</u> (замена переменной)

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+9} = \int \frac{dx}{(x-3)^2} = \left|\begin{matrix} t = x-3 \\ dt = dx \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\, dt =$$
$$= \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x-3} + C.$$

<u>Интегрирование элементарной дроби вида</u> **3)** $\boldsymbol{\frac{Ax+B}{x^2+px+q}}$ .

Дробь третьего вида) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ интегрируется $\int$) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ по следующему алгоритму:

1)Находим производную знаменателя:

$(x^2+px+q)' = 2x+p$;

2) Строим в числителе производную знаменателя:

$Ax + B = \frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B = \frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Mp}{2}\right)$;

3)Разбиваем преобразованный интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q};$$

первый из них путем внесения числителя под знак дифференциала$(2x+p)dx = d(x^2+px+q)$, сводится к табличному интегралу, а во втором интеграле необходимо выделить полный квадрат и проинтегрировать, используя одну из формул 11)-14) в таблице интегралов.

Рассмотрим, как это сделать на примерах.

**Пример 3.2.** Вычислить интеграл: а) $\int \frac{7x+4}{x^2+8x+25}dx$;б) $\int \frac{5x-2}{x^2+4x+5}dx$;в) $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$;

Решение.

а)1) Находим производную знаменателя:

$$(x^2+8x-9)' = 2x+8;$$

2)В числителе строим производную знаменателя:

$$7x+4 = \frac{7}{2}(2x+8) - 28 + 4 = \frac{7}{2}(2x+8) - 24;$$

3) Разбиваем преобразованный интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{7x+4}{x^2+8x+25}dx = \int \frac{\frac{7}{2}(2x+8)-24}{x^2+8x+25}dx =$$

$$= \frac{7}{2}\int \frac{2x+8}{x^2+8x+25}dx - 24\int \frac{dx}{x^2+8x+25} =$$

$$= \frac{7}{2}\int \frac{d(x^2+8x+25)}{x^2+8x+25} - 24\int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2+3^2} =$$

$$= \frac{7}{2}ln|x^2+8x+25| - 8\,arctg\,\frac{x+4}{3} + C;$$

б) Находим производную знаменателя:

$$(x^2+4x+5)' = 2x+4;$$

В числителе строим производную знаменателя:

$$5x-2 = \frac{5}{2}(2x+4) - 12;$$

Разбиваем преобразованный интеграл на сумму двух:

$$\int \frac{5x-2}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)-12}{x^2+4x+5}dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx - 12\int \frac{dx}{x^2+4x+5} =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5} - 12\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1^2} =$$

$$= \frac{5}{2}ln|x^2+4x+5| - 12\,arctg\,(x+2) + C;$$

в) Повторяя аналогичный алгоритм решения, имеем:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}-1}{x^2-x+1}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{3}{2}ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C =$$

$$= \frac{3}{2}ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

**Замечание:** интегралы от рациональных дробей третьего вида $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$, можно решить и другим способом-методом замены переменной-для этого необходимо выделить в знаменателе полный квадрат, выражение в скобках будет новой переменной, относительно которой исходный интеграл сводится к табличному виду. Покажем, как это сделать на следующем примере.

**Пример 3.3.** Вычислить интеграл $\int \frac{2x+1}{x^2+6x+10}dx$.

Решение.

Под знаком интеграла, простейшего

Решим его методом замены переменной:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+6x+10}dx = \int \frac{2x+1}{(x+3)^2+1}dx = \begin{vmatrix} t = x+3 \\ dt = dx \\ x = t-3 \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{2(t-3)+1}{t^2+1}dt = \int \frac{2t-5}{t^2+1}dt = \int \frac{2t}{t^2+1}dt -$$

$$-5\int\frac{dt}{t^2+1^2}=\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}-5arctgt=ln(t^2+1)-$$
$$-5arctgt+C=ln((x+3)^2+1)-5arctg(x+3)+C.$$

**Замечание:** интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ интегрируются аналогично простейшим дробям третьего вида.

**Пример 3.4.** Вычислить интеграл $\int\frac{4x}{\sqrt{-4x^2-8x+24}}dx$.

Решение.

Немного преобразуем подынтегральную функцию (вынесем 2 в знаменателе за знак интеграла - 4 под корнем), а далее применим аналогичный алгоритм решения, что и для рациональных дробей третьего вида $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$:

$$\int\frac{4x}{\sqrt{-4x^2-8x+24}}dx=\int\frac{4x}{\sqrt{4(-x^2-2x+6)}}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{4x}{\sqrt{-x^2-2x+6}}dx=\int\frac{2x}{\sqrt{-x^2-2x+6}}dx=$$
$$=-\int\frac{(-2x-2)+2}{\sqrt{-x^2-2x+6}}dx=-\int\frac{(-2x-2)dx}{\sqrt{-x^2-2x+6}}-$$
$$-2\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+6}}$$
$$=-\int(-x^2-2x+6)^{-\frac{1}{2}}d(-x^2-2x+6)-$$
$$-2\int\frac{dx}{\sqrt{7-(x^2+2x+1)}}=-\frac{(-x^2-2x+6)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-$$
$$-2\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(\sqrt{7})^2-(x+1)^2}}=-2\sqrt{-x^2-2x+6}-2arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{7}}\right)+C.$$

**4)** $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$**.**

Интегрирование простейших дробей четвертого вида $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$ является довольно громоздким, требующим более сложных вычислений.
Рассмотрим частный случай при $A=0, B=1$.
Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата
$x^2+px+q = \left(x^2+2\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q =$
$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$, где $a^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ и замены
$t = x+\frac{p}{2}, dt = dx$, представить в виде $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ и получить для него рекуррентную формулу. Для этого применим к интегралу $I_{n-1} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}$ формулу интегрирования по частям:

$$I_{n-1} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} = \int ((t^2+a^2)^{n-1})^{-1}dt =$$

$$= \int (t^2+a^2)^{1-n}dt = \left| \begin{matrix} u=(t^2+a^2)^{1-n}, du = \dfrac{2(1-n)tdt}{(t^2+a^2)^n} \\ dv=dt, \quad v=\displaystyle\int dt = t \end{matrix} \right|$$

$$= (t^2+a^2)^{1-n}\,t - \int \frac{2(1-n)t^2dt}{(t^2+a^2)^n} = t((t^2+a^2)^{n-1})^{-1} +$$
$$+2(n-1)\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} +$$
$$+2(n-1)\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} +$$
$$+2(n-1)\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} - a^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}\right);$$

Учитывая, что $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ получим:

$$I_{n-1}=\frac{t}{(t^2+\ a^2)^{n-1}}+2(n-1)(I_{n-1}-\ a^2 I_n)$$

$$I_{n-1}=\frac{t}{(t^2+\ a^2)^{n-1}}+2(n-1)I_{n-1}-2\,a^2(n-1)I_n$$

Находим из последнего равенства $I_n$:

$$2\,a^2(n-1)I_n=\frac{t}{(t^2+\ a^2)^{n-1}}-I_{n-1}+2nI_{n-1}-2I_{n-1}$$

$$2\,a^2(n-1)I_n=\frac{t}{(t^2+\ a^2)^{n-1}}-3I_{n-1}+2nI_{n-1}$$

$$a^2(2n-2)I_n=\frac{t}{(t^2+\ a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}|:\ a^2(2n-2)$$

$$\boldsymbol{I_n}=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{a^2(2n-2)(t^2+a^2)^{n-1}}}+\frac{\boldsymbol{2n-3}}{\boldsymbol{a^2(2n-2)}}\boldsymbol{I_{n-1}}\qquad \textbf{(3.2)}$$

Получили рекуррентную формулу, позволяющую вычислить интеграл $I_n$, если мы знаем интеграл$I_{n-1}$ .

Рассмотрим теперь интеграл от элементарной дроби четвёртого вида в общем случае, то есть интеграл $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=$$

$$=\frac{A}{2}\int(x^2+px+q)^{-n}d(x^2+px+q)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)^n}=\left|\begin{array}{c} t=\ x+\frac{p}{2}\\ dt=dx\\ a^2=q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\end{array}\right|=$$

$$=\frac{A}{2}\frac{(x^2+px+q)^{-n+1}}{-n+1}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n};$$

Итак, $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{A\left(x^2+px+q\right)^{1-n}}{2(1-n)} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) I_n$

Далее к полученному интегралу $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ применяется рекуррентная формула (3.2).

Рассмотрим на практике интегрирование простейшей дроби четвертого типа.

**Пример 3.5.** Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Решение.

Здесь $A = 0, B = 1$.Согласно формуле

$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{a^2(2n-2)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} I_{n-1}$ ,в нашем случае $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1^2)^2}, n = 2, a = 1$,поэтому имеем:

$$I_2 = \frac{x}{1^2(2\cdot 2-2)(x^2+1^2)^{2-1}} + \frac{2\cdot 2-3}{1^2(2\cdot 2-2)} I_1,$$

$I_2 = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} I_1$ , где $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = arctgx + C$.

Таким образом,$I_2 = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} arctgx + C$.

**Пример 3.6.** Вычислить интеграл$\int \frac{4x+1}{(x^2-4x+8)^2}dx$.

Решение.

$$\int \frac{4x+1}{(x^2-4x+8)^2}dx = \int \frac{2(2x-4)+9}{(x^2-4x+8)^2}dx =$$

$$= 2\int \frac{(2x-4)dx}{(x^2-4x+8)^2} + 9\int \frac{dx}{(x^2-4x+8)^2} =$$

$$= 2\int (x^2-4x+8)^{-2}\, d(x^2-4x+8) + 9\int \frac{dx}{((x-2)^2+4)^2}$$

$$= 2\frac{(x^2-4x+8)^{-1}}{-1} + 9\int \frac{dx}{((x-2)^2+4)^2} = \left| \begin{matrix} t = x-2 \\ dt = dx \end{matrix} \right| =$$

$= -\frac{2}{x^2-4x+8} + 9\int \frac{dt}{(t^2+4)^2} = -\frac{2}{x^2-4x+8} + 9\, I_2;$

Далее к интегралу $I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+4)^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2^2)^2}$, где $n = 2$, $a = 2$ применяется рекуррентная формула

$$I_n = \frac{t}{a^2(2n-2)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} I_{n-1} \quad (3.2):$$

$I_2 = \frac{t}{4(2\cdot2-2)(t^2+4)^{2-1}} + \frac{2\cdot2-3}{4(2\cdot2-2)} I_1$ , $I_2 = \frac{t}{8(t^2+4)} + \frac{1}{8} I_1$ ,где

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{t}{2}\right) + C,$$

$$I_2 = \frac{t}{8(t^2+4)} + \frac{1}{16}\, arctg\left(\frac{t}{2}\right) + C;$$

Возвращаясь к старой переменной, имеем:

$$I_2 = \frac{x-2}{8((x-2)^2+4)} + \frac{1}{16}\, arctg\left(\frac{x-2}{2}\right) + C;$$

Возвращаясь к исходному интегралу, окончательно имеем:

$$\int \frac{4x+1}{(x^2-4x+8)^2} dx = -\frac{2}{x^2-4x+8} + 9\left(\frac{x-2}{8((x-2)^2+4)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{16}\, arctg\left(\frac{x-2}{2}\right)\right) + C.$$

**Замечание:** в рациональных дробях вида $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$, при $n = 2$ можно обойтись и без рекуррентной формулы (3.2), преобразовав подынтегральное выражение и применив формулу интегрирование по частям. Рассмотрим, как это сделать на примере 3.7.

**Пример 3.7.** Вычислить интеграл $\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+2)^2} dx$.

Решение.

$$\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+2)^2} dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x-2)+8}{(x^2-2x+2)^2} dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{(x^2-2x+2)^2} + 8\int \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2} =$$

$$= \frac{5}{2}\int (x^2-2x+2)^{-2}\, d(x^2-2x+2) + 8\int \frac{dx}{((x-1)^2+1)^2}$$

$$= \left|\begin{matrix} t = x-1 \\ dt = dx \end{matrix}\right| = -\frac{5}{2(x^2-2x+2)} + 8\int \frac{dt}{(t^2+1)^2};$$

Проинтегрируем отдельно $\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$:

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \int \frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= arctgt - \int \frac{t\cdot tdt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = t, \qquad du = dt \\ dv = \frac{t}{(t^2+1)^2}dt, \quad v = \frac{1}{2}\int (t^2+1)^{-2}d(t^2+1) = -\frac{1}{2(t^2+1)} \end{matrix}\right|$$

$$= arctgt + \frac{t}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + \frac{t}{2(t^2+1)} -$$

$$-\frac{1}{2}arctgt = \frac{1}{2}arctgt + \frac{t}{2(t^2+1)} + C;$$

Возвращаясь к старой переменной, окончательно получим:

$$\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+2)^2}dx = -\frac{5}{2(x^2-2x+2)} +$$

$$+8\left(\frac{1}{2}arctg(x-1) + \frac{x-1}{2((x-1)^2+1)}\right) + C =$$

$$= -\frac{5}{2(x^2-2x+2)} + 4arctg(x-1) + \frac{4(x-1)}{((x-1)^2+1)} + C.$$

**Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.**

Интегрировать простейшей дроби мы уже умеем. Рассмотрим, как проинтегрировать рациональную дробь, которая не является элементарной.

**Теорема 3.1:** Всякую правильную рациональную дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ можно представить единственным образом, в виде суммы простейших дробей типов 1) — 4) этом:
а) Каждому неповторяющемуся множителю вида $(x-a)$ в разложении знаменателя правильной рациональной дроби соответствует одна простейшая дробь вида $\frac{A}{x-a}$;
б) Каждому неповторяющемуся множителю вида $(x-a)^n$ в разложении знаменателя правильной рациональной дроби соответствует сумма простейших дробей
$\frac{A_1}{(x-a)^1}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$;
в) Каждому неповторяющемуся множителю вида
$(x^2+px+q)$,в разложении знаменателя правильной рациональной дроби соответствует одна простейшая дробь вида$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$;
г) Каждому неповторяющемуся множителю вида $(x^2+px+q)^n$ в разложении знаменателя правильной рациональной дроби соответствует сумма простейших дробей
$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^1}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{A_nx+B_n}{(x^2+px+q)^n}$ .
**Замечания:** в разложениях б), в) предполагается, что квадратный трёхчлен$x^2+px+q$ не имеет вещественных корней, то есть $D=p^2-4q<0$.

Постоянные $A, A_1, A_2$,..., $B, B_1, B_2$, ...называют **неопределенными коэффициентами.**

Например, если правильная дробь $m<n$,имеет вид

$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{Q_m(x)}{(x-a)(x-b)^2(x^2+px+q)^2}$, то её разложение на простейшие дроби имеет вид:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \frac{C_1x+C_2}{x^2+px+q} + \frac{C_3x+C_4}{(x^2+px+q)^2};$$

**Теорема 3.2:** Всякую неправильную рациональную дробь $f(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ $, m \geq n$,можно разложить, и притом единственным образом, на сумму многочлена $M_{m-n}(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{Q_k(x)}{P_n(x)}$ $(k < n)$,то есть представить в виде

$$\boldsymbol{\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{Q_k(x)}{P_n(x)}},$$ где $M_{m-n}(x)$-целая часть, а $Q_k(x)$- остаток от деления $Q_m(x)$ на $P_n(x)$.

**Правило (интегрирования рациональных дробей):**

1) Если подынтегральная дробь неправильная, то ее необходимо представить в виде суммы многочлена $M_{m-n}(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{Q_k(x)}{P_n(x)}$ (разделив $Q_m(x)$на $P_n(x)$ уголком, из неё выделяют целую часть$M_{m-n}(x)$, которая интегрируется непосредственно, и правильную рациональную дробь $\frac{Q_k(x)}{P_n(x)}$);

2) Раскладываем знаменатель правильной дроби $\frac{Q_k(x)}{P_n(x)}$ на множители и представляем правильную рациональную дробь $\frac{Q_k(x)}{P_n(x)}$ в виде суммы простейших дробей 1)— 4) применяя теорему 3.1., находим коэффициенты $A, A_1, A_2,\ldots, A, A_1, A_2,\ldots, B, B_1, B_2 \ldots$ по следующему алгоритму:

а) Сумму всех простейших дробей привести к общему знаменателю;

б) Числитель получившейся дроби приравнять числителю исходной дроби.

в)Найти коэффициенты одним из методов: **метод неопределённых коэффициентов** -приравнять коэффициенты при одинаковых степенях многочленов в левой и правой частях равенства, полученную систему уравнений решить относительно неизвестных коэффициентов, входящих в числители простейших дробей; либо **методом произвольных значений-** в уравнение подставляются поочередно несколько (по числу неопределенных коэффициентов) произвольных вещественных значений $x$ и находят коэффициенты( в качестве произвольных значений принимаются значения $x$ при которых знаменатель обращается в ноль);

3) Простейшие дроби интегрируют по отдельности, с помощью соответствующих методов интегрирования.

**Пример 3.8.** Представить дробь в виде суммы простейших дробей: а) $\frac{x^2+3}{x^3-2x^2-3x}$; б) $\frac{x^2+1}{x^3-1}$; в) $\frac{1}{(x^3-x)(x-1)}$

Решение.

а) Представлена правильная рациональная дробь, так как $m=2<n=3$ ,разложим её знаменатель на множители $x^3-2x^2-3x=x(x^2-2x-3)$.

Получим первый корень $x_1=0$, для разложения квадратного трёхчлена в скобках решим квадратное уравнение: $x^2-2x-3=0$ , $D=(-2)^2-4(-3)=16>0$ ,

$x_{2,3}=\frac{2\pm4}{2}$, $x_2=3, x_3=-1$, то есть имеем дело со случаем, когда многочлен $x^3-2x^2-3x$ имеет простые действительные корни $x_1=0, x_2=3, x_3=-1$, следовательно разложение знаменателя на множители имеет вид: $x^3-$

$2x^2-3x=x(x+1)(x-3)$. Разложение исходной дроби в соответствии с теоремой 3.1.а) будет следующим:

$\frac{x^2+3}{x^3-2x^2-3x}=\frac{x^2+3}{x(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}$;

Найти коэффициенты $A, B, C$ ,как нам было известно ранее, можно одним из методов: методом неопределённых коэффициентов или методом произвольных значений. Для того, чтобы воспользоваться данными методами необходимо для начала, правую часть полученного выше равенства привести к общему знаменателю:

$\frac{x^2+3}{x^3-2x^2-3x}=\frac{A(x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+1)}{x^3-2x^2-3x}$;

Так как две дроби с одинаковыми знаменателями равны, то тождественно равны их числители:

$$x^2+3=A(x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+1);$$

Найдем коэффициенты $A, B, C$ двумя способами:

<u>1 способ</u> (метод произвольных значений)- находим $x$ при которых знаменатель дроби равен нулю, подставляя их значения поочередно в левую и правую часть полученного равенства, имеем:

$$x=0, \qquad -3A=3, \qquad \underline{A=-1};$$

$$x=-1, \qquad 4B=4, \qquad \underline{B=1};$$

$$x=3, \qquad 12C=12, \qquad \underline{C=1};$$

Следовательно, $\frac{x^2+3}{x^3-2x^2-3x}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-3}$;

2 способ (метод неопределённых коэффициентов)- раскрываем скобки в уравнении

$$x^2+3=A(x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+1);$$
$$x^2+3=A(x^2-2x-3)+B(x^2-3x)+C(x^2+x);$$
$$(A+B+C)x^2+(-2A-3B+C)x^1+(-3A)x^0=$$
$$=1x^2+0x^1+3x^0;$$

Числа, обозначенные большими буквами $A, B, C$-коэффициенты, пока неизвестны. Находим их методом неопределенных коэффициентов, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$:

$x^2$: $A+B+C=1$
$x^1$: $-2A-3B+C=0$
$x^0$: $-3A=3$

Решаем полученную систему $\begin{cases} A+B+C=1 \\ -2A-3B+C=0 \\ A=-1 \end{cases}$,чтобы исключить $C$ из первого уравнения, вычтем из него второе уравнение и найдем $B$: $3A+4B=1$, $-3+4B=1$,

$B=1$. Подставляя в первое уравнение $A=-1$ и $B=1$ найдем$C$, $C=1-(A+B)=1$.

Итого, $\frac{x^2+3}{x^3-2x^2-3x}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-3}$,результаты совпали.

б) Представлена правильная рациональная дробь, так как $m=2<n=3$ ,для того, чтобы представить данную правильную дробь в виде суммы простейших дробей,

разложим её знаменатель на множители

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Получим первый корень $x_1=1$ –простой вещественный, для разложения квадратного трёхчлена на множители $x^2+x+1$ решим квадратное уравнение: $x^2+x+1=0$ ,

$D=1^2-4=-3<0$ , то есть имеем дело с комплексно-сопряжёнными корнями, следовательно разложение исходной дроби на сумму простейших дробей в соответствии с теоремой 3.1. будет иметь вид:

$\frac{x^2+1}{x^3-1}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$;

Переходим к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+1}{x^3-1}=\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{x^3-1};$$

Поскольку имеются комплексно-сопряжённые корни, коэффициенты $A, B, C$ удобнее найти методом неопределённых коэффициентов:

$$A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)=x^2+1,$$

$$Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx-Bx-C=x^2+1$$

$$(A+B)x^2+(A-B+C)x^1+(A-C)x^0=x^2+0x^1+x^0;$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases}, \begin{cases} B=1-A & (1) \\ A-B+C=0 & (2) \\ C=A-1 & (3) \end{cases},$$

Для того, чтобы найти $A$ подставим равенства $(1)$и

$(3)$во второе уравнение системы:

$$A-(1-A)+A-1=0, \qquad 3A=2, \qquad A=\frac{2}{3},$$

Следовательно, $C = A - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$,

$$B = 1 - A = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

Таким образом, разложение правильной дроби $\frac{x^2+1}{x^3-1}$ на простейшие имеет вид:

$$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}}{x^2+x+1};$$

в) Так как $m = 0 < n = 4$, то дробь правильная, разложим её знаменатель на множители:

$$(x^3 - x)(x - 1) = x(x^2 - 1)(x - 1) =$$

$$= x(x-1)(x+1)(x-1) = x(x-1)^2(x+1);$$

Получили следующие корни:

$$x_1 = 0, x_{2,3} = 1, n = 2, x_4 = -1$$

следовательно разложение исходной дроби на сумму простейших дробей в соответствии с теоремой 3.1. будет иметь вид:

$$\frac{1}{(x^3 - x)(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)^2(x+1)} =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x+1};$$

$$\frac{1}{(x^3 - x)(x-1)} = \frac{A(x-1)^2(x+1) + Bx(x-1)(x+1) + Cx(x+1) + Dx(x-1)^2}{x(x-1)^2(x+1)};$$

$$A(x-1)^2(x+1) + Bx(x-1)(x+1) + Cx(x+1) + Dx(x-1)^2 = 1,$$

Поскольку в разложении знаменателя на множители фигурируют только вещественные корни, для нахождения коэффициентов используем метод частных значений:

$$x = 0, \qquad A = 1; x = 1, 2C = 1, C = \frac{1}{2};$$

$$x = -1, \qquad -4D = 1, D = -\frac{1}{4};$$

Найдём$B$ ,положив $x = 2$:

$A(2-1)^2(2+1)+2B(2-1)(2+1)+2C(2+1)+2D(2-1)^2=1,$

$$3A+6B+6C+2D=1,$$

$$3+6B+6\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=1,$$

$$6B=-\frac{9}{2}, B=-\frac{3}{4}.$$

Таким образом, $\frac{1}{(x^3-x)(x-1)}=\frac{1}{x}+\frac{-\frac{3}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+1}$;

**Пример 3.9.** Вычислить интеграл $\int\frac{2-x}{x^3+4x^2+8x}dx$.

Решение.

1)Под знаком интеграла правильная рациональная дробь $m=1<n=3$ ,поэтому переходим к следующему этапу;

2)Разложим знаменатель дроби на множители, для этого вынесем за скобки $x$ ,а затем найдем корни квадратного уравнения в скобках:

$x^3+4x^2+8x=x(x^2+4x+8),$
уравнение $x^2+4x+8$ не имеет вещественных корней, так как $D=4^2-4\cdot8=-16<0$, то есть имеем дело со случаем, когда многочлен в знаменателе имеет комплексно-сопряженные корни. Оба сомножителя $x$ и $x^2+4x+8$ присутствуют в знаменателе в первой степени, поэтому раз-

ложение исходной дроби на простейшие дроби в соответствии с теоремой 3.1. а), в) соответственно будет следующим:

$\frac{2-x}{x^3+4x^2+8x}=\frac{2-x}{x(x^2+4x+8)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+8}$, переходя к общему знаменателю получим, $\frac{2-x}{x^3+4x^2+8x}=\frac{Ax^2+4Ax+8A+Bx^2+Cx}{x^3+4x^2+8x}$, приравнивая числители имеем:

$$Ax^2+4Ax+8A+Bx^2+Cx=2-x;$$

$$(A+B)x^2+(4A+C)x^1+(8A)x^0=0x^2-1x^1+2x^0;$$

$x^2$: $A+B=0$;
$x^1$: $4A+C=-1$;
$x^0$: $8A=2$.

Получим систему $\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+C=-1 \\ 8A=2 \end{cases}$, решая её найдём $A, B, C$:

$$\begin{cases} B=-A \\ C=-1-4A; \\ A=\frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} B=-\frac{1}{4} \\ C=-2; \\ A=\frac{1}{4} \end{cases}$$

3)Возвращаясь к исходному интегралу, получим:

$$\int \frac{2-x}{x^3+4x^2+8x}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x}+\frac{-\frac{1}{4}x-2}{x^2+4x+8}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\frac{x+8}{x^2+4x+8}dx=\frac{1}{4}ln|x|-\frac{1}{4}\int\frac{x+8}{x^2+4x+8}dx;$$

Проинтегрируем отдельно простейшую рациональную дробь третьего вида $\int \frac{x+8}{x^2+4x+8}dx$,используя метод замены переменной:

$$\int \frac{x+8}{x^2+4x+8}dx = \int \frac{x+8}{(x+2)^2+2^2}dx = \begin{vmatrix} t = x+2 \\ dt = dx \\ x = t-2 \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{t-2+8}{t^2+2^2}dt = \int \frac{t+6}{t^2+4}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+4}dt +$$

$$+6\int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} + \frac{6}{2}arctg\frac{t}{2} = \frac{1}{2}ln|t^2+4| +$$

$$+3arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}ln|(x+2)^2+4| + 3arctg\left(\frac{x+2}{2}\right) + C.$$

Итого,$\int \frac{2-x}{x^3+4x^2+8x}dx = \frac{1}{4}ln|x| - \frac{1}{8}ln((x+2)^2+4) -$

$$-\frac{3}{4}arctg\left(\frac{x+2}{2}\right) + C.$$

**Пример 3.10.** Вычислить$\int \frac{dx}{x^4-x^2}$ .

Решение.

1)Дробь под знаком интеграла является правильной, так как $m = 0 < n = 4$, поэтому переходим к следующему этапу;

2) Разложим знаменатель дроби $\frac{1}{x^4-x^2}$ на множители:

$$x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$$

имеем вещественный корень $x_1 = 0, n = 2$(кратность корня) случай б) в теореме 3.1 и вещественные корни

$x_{1,2} = \pm 1, n = 1$ случай а) в теореме 3.1. Получим следующее разложение на простейшие дроби:

$$\frac{1}{x^4 - x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

Переходя к общему знаменателю и приравнивая числители, имеем:

$A\,x(x^2-1) + B(x^2-1) + Cx^2(x+1) + Dx^2(x-1) = 1;$

Находим коэффициенты $A, B, C, D$. В данном случае (вещественном) для их нахождения, удобнее применить метод произвольных значений:

$x = 0, \quad -B = 1, \; B = -1;$

$x = 1, \qquad 2C = 1, \; C = \dfrac{1}{2};$

$x = -1, \; -2D = 1, \; D = -\frac{1}{2}.$

Зная $B, C, D$ полагая, например, $x = 2$ найдем $A$ :

$$x = 2, \qquad 6A + 3B + 12C + 4D = 1,$$

$$6A + 3(-1) + 12 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$6A - 3 + 6 - 2 = 1,$$

$$6A + 1 = 1, A = 0;$$

3)Возвращаясь к исходному интегралу, получим:

$$\int \frac{dx}{x^4 - x^2} = \int \left( \frac{0}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx =$$

$$= -\int x^{-2} dx + \frac{1}{2}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x+1)}{x+1} =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2} ln|x-1| - \frac{1}{2} ln|x+1| + C.$$

**Замечание:** для упрощения решения системы, состоящей из коэффициентов, иногда полезно группировать два метода нахождения коэффициентов, рассмотренных выше. Как это сделать рассмотрим на примере 3.11.

**Пример 3.11.** Вычислить интеграл $\int \frac{x^7}{x^3-x^2+x-1}dx$.

Решение.

1)Так как, дробь неправильная $(m = 7 > n = 3)$, то предварительно следует, выделить у нее целую часть путем деления многочлена на многочлен «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^7 & x^3-x^2+x-1 \\
\cline{2-2}
\underline{x^7-x^6+x^5-x^4} & x^4+x^3+1 - \text{целая часть} \\
-\,x^6-x^5+x^4 & \\
\underline{x^6-x^5+x^4-x^3} & \\
-\,x^3 & \\
\underline{x^3-x^2+x-1} & \\
x^2-x+1 - \text{остаток} &
\end{array}
$$

$$\int \frac{x^7}{x^3-x^2+x-1}dx = \int \left(x^4 + x^3 + 1 + \frac{x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}\right)dx =$$
$$= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + x + \int \frac{x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}dx;$$

2)Осталось проинтегрировать правильную дробь $\frac{x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}$,для этого разложим знаменатель полученной дроби на множители и найдем коэффициенты, комбинируя два способа нахождения коэффициентов:

$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$,

$x_1 = 1$ вещественный корень; уравнение $x^2 + 1$ не имеет вещественных корней, действительно $D < 0$, то есть имеются комплексно-сопряженные корни.

В соответствии с теоремой 3.1. в) получим разложение на простейшие дроби:

$$\frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$x^2-x+1= A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

Применяя для начала метод произвольных значений, полагая $x=1$ в подчеркнутом уравнении, найдем $A$:

$$x=1,\ \ 2A=1,\ \ A=\tfrac{1}{2}\,.$$

Оставшиеся коэффициенты данным методом найти не получается, для их нахождения, применим метод неопределенных коэффициентов, раскрываем скобки в последнем уравнении и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях имеем:

$$x^2-x+1= Ax^2+A+Bx^2-Bx+Cx-C;$$

$$x^2-x+1= (A+B)x^2+(C-B)x^1+(A-C)x^0;$$

$x^2$: $A+B=1$

$x^1$: $C-B=-1$

$x^0$: $A-C=1$

Подставляя $A=\frac{1}{2}$ ( найденное ранее методом частных значений) в полученную систему

$$\begin{cases} A+B=1 \\ C-B=-1 \\ A-C=1 \end{cases}$$ имеем:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}+B=1 \\ C-B=-1, \\ \frac{1}{2}-C=1 \end{cases}\begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \\ C=-\frac{1}{2} \end{cases}$$, коэффициенты найдены;

3)Возвращаясь, к правильной дроби, получим:

$$\int\frac{x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{x-1}{x^2+1}dx\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int\frac{dx}{x^2+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(ln|x-1|+\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}-arctgx\right)=\frac{1}{2}ln|x-1|+$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{1}{2}arctgx=\frac{1}{2}ln|x-1|+\frac{1}{4}ln(x^2+1)-$$
$$-\frac{1}{2}arctgx+C;$$

В итоге, имеем:

$$\int\frac{x^7}{x^3-x^2+x-1}dx=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+x+\int\frac{x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}dx=$$
$$=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+x+\frac{1}{2}ln|x-1|+\frac{1}{4}ln(x^2+1)-\frac{1}{2}arctgx+C.$$

**Пример 3.12.** Вычислить интеграл $\int\frac{x^3-x^2-x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx$.

Решение.

1)Так как,$(x-1)(x+2)(x-3)=(x^2+x-2)(x-3)=$ $=x^3-3x^2+x^2-3x-2x+6=x^3-2x^2-5x+6$, то дробь неправильная $(m=n=3)$, выделим целую часть и перейдём к правильной дроби, в данном случае это удобно сделать путём алгебраических преобразований-построив в числителе знаменатель:

$$\frac{x^3-x^2-x+2}{x^3-2x^2-5x+6}=\frac{(x^3-2x^2-5x+6)+x^2+4x-4}{x^3-2x^2-5x+6}=1+\frac{x^2+4x-4}{x^3-2x^2-5x+6}=$$
$$=1+\frac{x^2+4x-4}{x^3-2x^2-5x+6};$$

Таким образом, $\int\frac{x^3-x^2-x+2}{x^3-2x^2-5x+6}dx=\int\left(1+\frac{x^2+4x-4}{x^3-2x^2-5x+6}\right)dx=$

$$= \int dx + \int \frac{x^2 + 4x - 4}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} dx$$
$$= x - \int \frac{x^2 + 4x - 4}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} dx;$$

2)Осталось проинтегрировать правильную дробь$\frac{x^2+4x-4}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{x^2+4x-4}{(x-1)(x+2)(x-3)}$,для этого разложим дробь на простейшие дроби, в соответствии с теоремой 3.1. а) имеем:

$$\frac{x^2 + 4x - 4}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} =$$
$$= \frac{A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)};$$

$$x^2 + 4x - 4 = A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2);$$

Применяя метод произвольных значений, для нахождения коэффициентов $A, B, C$имеем:

$x = 1, -6A = 1, A = -\frac{1}{6};$

$x = -2, 15B = -8, B = -\frac{8}{15};$

$x = 3, 10C = 17, C = \frac{17}{10};$

$$\int \frac{x^2 + 4x - 4}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx = \int \left( \frac{-\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{-\frac{8}{15}}{x+2} + \frac{\frac{17}{10}}{x-3} \right) dx =$$
$$= -\frac{1}{6} \int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{8}{15} \int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{17}{10} \int \frac{d(x-3)}{x-3} =$$
$$= -\frac{1}{6} ln|x-1| - \frac{8}{15} ln|x+2| + \frac{17}{10} ln|x-3| + C.$$

## 3.2. Интегрирование тригонометрических функций.

Интегралы вида $\int R(sinx; cosx)\, dx$ называются **интегралами от тригонометрических функций**.

Здесь $R(sinx; cosx)$ – обозначение некоторой функции от переменных $sinx$ и $cosx$ над которыми выполняются рациональные действия (сложение, вычитание, умножение и деление).

Интегралы вида $\int R(sinx; cosx)\, dx$ всегда можно проинтегрировать с помощью **универсальной тригонометрической подстановки** $\boldsymbol{t = tg\frac{x}{2}}$. Для данной подстановки имеем:

$$\frac{x}{2} = arctgt,\ x = 2arctgt,\ \ dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ cosx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

В результате исходное выражение приводится к интегралу от рациональной функции переменной $t$:

$\int R(sinx; cosx)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$ . А как интегрируются рациональные функции мы уже знаем (см. главу 3.1.)

**Замечание:** универсальная подстановка весьма громоздка, поэтому на практике применяют и другие более простые подстановки, в зависимости от вида подынтегральной функции, позволяющие рационализировать исходный интеграл.

Рассмотрим различные виды интегральных функции и запишем соответствующие им подстановки:

1) <u>Подынтегральная функция нечетная относительно $cosx$</u>, то есть $R(sinx; -cosx) = -R(sinx; cosx)$,тогда интеграл $\int R(sinx; cosx)\, dx$, рационализируется при помощи подстановки $\boldsymbol{t = sinx}$ .

В частности, интегралы вида $\int cos^{2n-1}x \cdot sin^{\alpha}x\,dx$ ,где $n \in N, \alpha \in R$ интегрируются аналогично, только при $n = 2,3,\ldots$, необходимо выделить множитель $cos^2x = 1 - sin^2x$.

2)<u>Подынтегральная функция нечетная относительно $sinx$</u>,то есть $R(-sinx; cosx) = -R(sinx; cosx)$ , то необходимо сделать подстановку $\boldsymbol{t = cosx}$,

В частности, интегралы вида $\int sin^{2n-1}x \cdot cos^{\alpha}x\,dx$ ,где $n \in N, \alpha \in R$ интегрируются аналогично, только при $n = 2,3,\ldots$, необходимо выделить множитель $sin^2x = 1 - cos^2x$.

3)<u>Функция под знаком интеграла четная относительно $sinx$ и $cosx$</u>, то есть $R(-sinx; -cosx) = R(sinx; cosx)$, тогда для преобразования подынтегральной функции в рациональную используется подстановка $\boldsymbol{t = tgx}$.

Для данной подстановки имеем:

$$x = arctgt,\ dx = \frac{1}{1+t^2}dt\ , sinx = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$cosx = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Таким образом:

$$\int R(sinx; cosx)\,dx = \int R\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\frac{1}{1+t^2}dt.$$

В частности, при вычислении интегралов вида $\int cos^{2n}xdx$ , $\int sin^{2m}x\,dx$ , где $m, n \in N$ , удобнее применять формулы понижения степени: $cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$ , $sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}$.

**Замечание**: иногда при интегрировании тригонометрических функций данного вида (четных относительно $sinx$ и $cosx$) удобно применить формулы $sin\,2x = 2sinxcosx$ и $sin^2x + cos^2x = 1$.

4)<u>Интегралы произведения синусов и косинусов</u> <u>различных аргументов</u> $\boldsymbol{\int cos\,mxcos\,nxdx, \int sin\,mxcos\,nxdx,}$

$\int \boldsymbol{\sin mx \sin nx dx}$ приводятся к табличным с помощью формул преобразования произведения синусов, косинусов в сумму (разность):

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x);$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x);$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x).$$

5)<u>Для интегралов вида $\int \boldsymbol{tg^n x dx}, \int \boldsymbol{ctg^n x dx}$</u>,где $n \in N$. Необходимо выделить множитель $tg^2x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ или $ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, в зависимости от вида подынтегральной функции.

**Пример 3.13.** Вычислить интеграл:а) $\int \frac{\sin x}{2\cos x + \cos^2 x} dx$;

б)$\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^4 x}$; в)$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}$; г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$;д) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}$;

е) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ ; ё) $\int \sin 5x \sin 2x dx$; ж) $\int \sin^2 3x dx$;

з) $\int \cos^4 x dx$ ; и)$\int ctg^3 x dx$; й) $\int tg^2 2x dx$;

к) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$;л) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - \sin x \cos x}$;м) $\int \frac{dx}{9 + \cos x}$.

Решение.

а)Так как подынтегральная функция $R(\sin x; \cos x)$=$\frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}$ - нечетная относительно $\sin x$,действительно, $R(-\sin x; \cos x) = \frac{-\sin x}{\cos x + \cos^2 x} =$ $= -\frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x} = -R(\sin x; \cos x)$, поэтому делаем подстановку $t = \cos x$ имеем:

$$\int \frac{\sin x}{2\cos x + \cos^2 x} dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ -dt = \sin x dx \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{2t + t^2} =$$

$$= -\int \frac{dt}{(t^2 + 2t + 1) - 1} = -\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - 1^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1-1}{t+1+1} \right| + C = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t}{t+2} \right| + C =$$

$= -\frac{1}{2} ln\left|\frac{cosx}{cosx+2}\right| + C;$

б) Так как, подынтегральная функция

$R(sinx; cosx) = \frac{cos^5x}{sin^4x}$ нечетная относительно косинуса ,то есть $R(sinx; -cosx) = \frac{(-cosx)^5}{sin^4x} = -\frac{cos^5x}{sin^4x} = -R(sinx; cosx)$, при этом $n = 3$,предварительно преобразовав подынтегральную функцию, выделив множитель

$cos^2x = 1 - sin^2x$ , а сделав подстановку $t = sinx$, имеем:

$$\int \frac{cos^5x}{sin^4x} dx = \int \frac{cos^4x cosx}{sin^4x} dx = \int \frac{(cos^2x)^2 cosx}{sin^4x} dx =$$

$$= \int \frac{(1 - sin^2x)^2 cosxdx}{sin^4x} = \left| \begin{matrix} t = sinx \\ dt = cosxdx \end{matrix} \right| = \int \frac{(1 - t^2)^2 dt}{t^4} =$$

$$= \int \frac{(1 - 2t^2 + t^4)dt}{t^4} = \int (t^{-4} - 2t^{-2} + 1)\, dt =$$

$$= \frac{t^{-3}}{-3} + 2t^{-1} + t + C = -\frac{1}{3t^3} + \frac{2}{t} + t + C =$$

$$= -\frac{1}{3sin^3x} + \frac{2}{sinx} + sinx + C;$$

в) Под знаком интеграла четная относительно $sinx$ и $cosx$ функция, то есть $R(-sinx; -cosx) =$

$= \frac{1}{(-sinx)^4(-cosx)^4} = \frac{1}{sin^4x \cdot cos^4x} = R(sinx; cosx)$, поэтому данное выражение рационализируется при помощи подстановки $t = tg\, x$:

$$\int \frac{dx}{sin^4x \cdot cos^4x} = \left| \begin{matrix} t = tg\, x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ sin^4x = \frac{t^4}{(1+t^2)^2} \\ cos^4x = \frac{1}{(1+t^2)^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2}} =$$

$$= \int \frac{(1 + t^2)^3}{t^4} dt = \int \frac{1 + 3t^2 + 3(t^2)^2 + (t^2)^3}{t^4} dt$$

$$= \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{t^4}dt = \int (t^{-4}+3t^{-2}+3+t^2)dt =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{3}{t} + 3 + \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3\,tg^3x} - \frac{3}{tg\,x} + 3tgx +$$

$+\frac{tg^3x}{3} + C;$

г) Функция под знаком интеграла чётная относительно $sinx$ и $cosx$,так как $R(-sinx;-cosx) =$ $= R(sinx;cosx)$, но здесь нет необходимости делать подстановку $t = tgx$, гораздо удобнее преобразовать подынтегральную функцию, используя основное тригонометрическое тождество $sin^2x + cos^2x = 1$,в итоге получим:

$\int \frac{sin^2x+cos^2xdx}{sin^2xcos^2x} = \int \frac{dx}{\frac{1}{4}sin^2 2x} = 4\int \frac{dx}{sin^2 2x} = 2\int \frac{d(2x)}{sin^2 2x} =$

$= -2ctg2x + C;$

д) Функция под знаком интеграла чётная $R(-sinx;-cosx) = R(sinx;cosx)$,рационализируется при помощи подстановки $t = tg\,x$,но в данном случае имеет смысл воспользоваться тождеством $sin^2x + cos^2x = 1$, тогда имеем:

$$\int \frac{dx}{sin^4xcos^2x} = \int \frac{(sin^2x+cos^2x)dx}{sin^4xcos^2x} = \int \frac{dx}{sin^2xcos^2x} +$$

$$+\int \frac{dx}{sin^4x} = 4\int \frac{dx}{sin^2 2x} + +\int \frac{1}{sin^2x}\cdot\frac{1}{sin^2x}dx =$$

$$= 2\int \frac{d(2x)}{sin^2x} - \int \frac{1}{sin^2x}d(ctgx) = -2ctg2x -$$

$$-\int (ctg^2x+1)d(ctgx) = -2ctg2x - \int (ctgx)^2 d(ctgx) -$$

$-\int d(ctgx) = -2ctg2x - \frac{1}{3}ctg^3x - ctgx + C;$

е) Функция под знаком интеграла чётная

$R(-sinx;-cosx) =$

$R(sinx; cosx)$,рационализируется при помощи подстановки $t = tg\,x$,но в данном случае имеет смысл воспользоваться тождеством $sin\,2x = 2sinxcosx$,
а именно преобразуем подынтегральную функцию

$$sin^2xcos^2x = (sinxcosx)^2 = \frac{1}{4}(2sinxcosx)^2 =$$

$= \frac{1}{4}sin^2 2x$, и учитывая, что, $sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}$ имеем:

$$\int sin^2xcos^2xdx = \frac{1}{4}\int sin^2 2xdx = \frac{1}{4}\int \frac{1-cos4x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - cos4x)\,dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}sin4x\right) + C;$$

ё) Преобразовывая произведение синусов в разность косинусов $sin\,5x\,sin\,2x = \frac{1}{2}(cos(5x - 2x) - cos(5x + 2x)) =$
$= \frac{1}{2}(cos(3x) - cos(7x))$, получим:

$$\int sin5x\,sin\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int (cos3x - cos7x)dx = \frac{1}{2}\int cos3x\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int cos7x\,dx = \frac{1}{6}\int cos3x\,d(3x) - \frac{1}{14}\int cos7x\,d(7x) =$$

$$= \frac{1}{6}sin\,3x - \frac{1}{14}sin\,7x + C;$$

ж)Так как подынтегральная функция$f(x) = sin^2\,3x$ имеет вид$\int sin^{2m}x\,dx,$ , где $m \in N$ ,то применяя формулу понижения степени $sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}$ , $sin^2 3x = \frac{1-cos6x}{2}$ ,получим:

$$\int cos^2 3x\,dx = \int \frac{1}{2}(1 + cos6x)dx = \frac{1}{2}(\int dx + \int cos\,6x\,dx) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\int cos(6x)\,d(6x)\right) = \frac{x}{2} - \frac{sin6x}{12} + C;$$

з) $\int cos^4\,xdx = \int (cos^2x)^2dx = \frac{1}{4}\int (1 + cos\,2x)^2\,dx =$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\,cos\,2x + cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int cos\,2x\,dx +$$

$$+\frac{1}{4}\int cos^2 2x\,dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{8}\int (1 + cos\,4x)dx =$$

$$=\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{8}\left(\int dx+\frac{1}{4}\int cos4x\,d(4x)\right)=\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}+$$
$$+\frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin 4x}{4}\right)+C;$$

и) Интеграл имеет вид $\int ctg^n x dx$,где $n=3\in N$.Необходимо выделить множитель $ctg^2x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$:

$$\int ctg^3x\,dx=\int ctg^2xctgx\;dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2x}-1\right)ctgx\,dx\;=$$
$$=\int\frac{1}{\sin^2x}ctgx\,dx-\int ctgx\,dx=-\int(ctgx)^1d(ctgx)-$$
$$-\int\frac{cosx}{\sin x}dx=-\frac{ctg^2x}{2}-\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=-\frac{ctg^2x}{2}-$$
$$-\ln|\sin x|+C;$$

й) $\int tg^2 2x\,dx=\int\left(\frac{1}{cos^2 2x}-1\right)dx=\int\frac{1}{cos^2 2x}dx-$
$-\int dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{cos^2 2x}-x=\frac{tg2x}{2}-x+C;$

к) Подынтегральная функция общего вида (ни чётная,ни нечётная), то есть не обладает ни одним из перечисленных выше свойств, поэтому применяем универсальную подстановку $t=tg\frac{x}{2}$:

$$\int\frac{dx}{4sinx+3cosx+5}=\left|\begin{matrix}t=tg\frac{x}{2},dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ sinx=\frac{2t}{1+t^2},cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|==$$
$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)+3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+5}=$$
$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}+\frac{5+5t^2}{1+t^2}}=$$
$$=2\int\frac{dt}{\frac{(1+t^2)(2t^2+8t+8)}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+4t+4}=$$

$$= \int \frac{dt}{(t+2)^2} = \int (t+2)^{-2} d(t+2) = -\frac{1}{t+2} + C =$$
$$= -\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)+2} + C;$$

л) Функция под знаком интеграла чётная относительно $sinx$ и $cosx$,так как $R(-sinx; -cosx) =$ $= R(sinx; cosx)$, то есть необходимости делать подстановку $t = tg\ x$, но в данном случае можно упростить решение путём преобразования подынтегральной функции:

$$\int \frac{dx}{sin^2x - 4sinxcosx} = \int \frac{dx}{cos^2x\left(\frac{sin^2x}{cos^2x} - \frac{4sinxcosx}{cos^2x}\right)} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{cos^2x}dx}{tg^2x - 4tgx} = \int \frac{d(tgx)}{tg^2x - 4tgx} = |t = tgx| =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 4t} = \int \frac{dt}{(t-2)^2 - 4} = \int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2 - 2^2} =$$
$$= \frac{1}{2\cdot 2} ln\left|\frac{t-2-2}{t-2+2}\right| + C = \frac{1}{4} ln\left|\frac{t-4}{t}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{4} ln\left|\frac{tgx-4}{tgx}\right| + C;$$

м) Аналогично, применяем универсальную подстановку:

$$\int \frac{dx}{9 + cos\,x} = \left| \begin{matrix} t = tg\frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(9 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{9+9t^2+1-t^2}{1+t^2}\right)} =$$
$$= 2\int \frac{dt}{8t^2+10} = \int \frac{dt}{4t^2+5} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{5}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} arctg\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right) + C = \frac{1}{2\sqrt{5}} arctg\left(\frac{2t}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

## 3.3. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Перед тем как находить интеграл от иррациональной функции, вспомним ее определение. Функция называется **иррациональной**, если переменная величина находится под знаком корня.

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой, может быть найден как известно всегда.

Рассмотрим подстановки для интегрирования различных типов иррациональных функций:

**1)** Рассмотрим интеграл

$\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b}; (\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b})^{\frac{\boldsymbol{m_1}}{\boldsymbol{n_1}}}; (\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b})^{\frac{\boldsymbol{m_2}}{\boldsymbol{n_2}}}; \dots ; (\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b})^{\frac{\boldsymbol{m_k}}{\boldsymbol{n_k}}}\right) \boldsymbol{dx}$**,** где

$R$ — рациональная функция, $m_1, n_1, m_2, n_2, \dots$ — целые числа, $a, b$- действительные числа.

Подстановка, рационализирующая подынтегральную функцию, имеет вид: $\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t^S}$ , $adx = st^{S-1}dt, dx = \frac{s}{a}t^{s-1}dt$, где $s$ — наименьшее общее кратное (НОК)

чисел $n_1, n_2, \dots, n_k$, то есть, наименьшее натуральное число, делящееся нацело на $n_1, n_2, \dots, n_k$.

**Пример 3.14.** Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[6]{x-1}} dx$**.**

Решение.

Переходя от корня к степени имеем: $\int \frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}+(x-1)^{\frac{1}{4}}}{(x-1)^{\frac{1}{6}}} dx$ заметим,что $n_1 = 3, n_2 = 4, n_3 = 6, \text{НОК}(3,4,6) = 12 = s$,следовательно данное выражение рационализируется с помощью подстановки $x - 1 = t^{12}$ :

$$\int \frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}+(x-1)^{\frac{1}{4}}}{(x-1)^{\frac{1}{6}}} dx = \left| \begin{array}{c} x-1 = t^{12}, t = \sqrt[12]{x-1} \\ dx = 12t^{11}dt \\ (x-1)^{\frac{1}{3}} = (t^{12})^{\frac{1}{3}} = t^4 \\ (x-1)^{\frac{1}{4}} = (t^{12})^{\frac{1}{4}} = t^3 \\ (x-1)^{\frac{1}{6}} = (t^{12})^{\frac{1}{6}} = t^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t^4+t^3}{t^2} 12t^{11}dt = 12\int (t^4+t^3)t^9\, dt =$$

$$= 12\int (t^{13}+t^{12})\, dt = 12\left(\frac{t^{14}}{14}+\frac{t^{13}}{13}\right) + C =$$

$$= 12\left(\frac{\sqrt[12]{(x-1)^{14}}}{14}+\frac{\sqrt[12]{(x-1)^{13}}}{13}\right) + C =$$

$$= \frac{6}{7}(x-1)\sqrt[6]{x-1} + \frac{12}{13}(x-1)\sqrt[12]{x-1} + C.$$

**Замечание:** аналогично рационализируются интегралы вида $\int R\left(\frac{ax+b}{cx+d}; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}; \ldots; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$,то есть при помощи подстановки $\boldsymbol{\frac{ax+b}{cx+d} = t^s}$.

**Пример 3.15.** Найти интеграл $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{(x-1)^2}$

Решение.

Переходя от корня к степени, имеем: $\int\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{(x-1)^2}$ заметим, что $n=3$,НОК(3) =3=s, следовательно данное выражение рационализируется с помощью подстановки $\frac{x+1}{x-1}=t^3$ , учитывая, что $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{(x+1)'(x-1)-(x-1)'(x+1)}{(x-1)^2}=$ $=\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}$ имеем:

$$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(x-1)^2}=\left|\begin{array}{c}\frac{x+1}{x-1}=t^3,t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\\ -\frac{2}{(x-1)^2}dx=3t^2dt\\ \frac{dx}{(x-1)^2}=-\frac{3}{2}t^2dt\end{array}\right|=$$

$$=\int t\left(-\frac{3}{2}t^2\right)dt=-\frac{3}{2}\int t^3dt=-\frac{3}{8}t^4+C=$$

$$=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}+C=-\frac{3}{8}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

**2)**Интегралы вида $\int\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x};\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{x}^2}\right)\boldsymbol{dx}$, $\int\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x};\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{x}^2}\right)\boldsymbol{dx}$, $\int\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x};\sqrt{\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{a}^2}\right)\boldsymbol{dx}$ рационализируются при помощи соответствующей тригонометрической подстановки :

| | вид | подстановка |
|---|---|---|
| **1** | $\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{x}^2}$ | $\underline{\boldsymbol{x=asint}}$<br>$\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{x}^2}=\boldsymbol{acost},\boldsymbol{dx}=\boldsymbol{acostdt}$ |
| **2** | $\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{x}^2}$ | $\underline{\boldsymbol{x=atgt}},\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{a}^2}=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{cost}},\boldsymbol{dx}=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{cos^2t}}\boldsymbol{dt}$ |
| **3** | $\sqrt{\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{a}^2}$ | $\underline{\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{cost}}},\sqrt{\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{a}^2}=\boldsymbol{atgt},\boldsymbol{dx}=\frac{\boldsymbol{atgt}}{\boldsymbol{cost}}\boldsymbol{dt}$ |

Опираясь на формулы$sin^2x+cos^2x=1$ и $1+tg^2x=\frac{1}{cos^2x}$, разберём как получены эти формулы, рассмотрим для примера 1 случай $\boldsymbol{\sqrt{a^2-x^2}, a>0}$:

Наша задача задача-избавиться от знака корня для этого делаем замену $x=asint$:

$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-(asint)^2}=\sqrt{a^2(1-sin^2t)}=$

$=\sqrt{a^2cos^2t}=\sqrt{(acost)^2}=|acost|$;

Учитывая, что $a^2-x^2\geq 0, x^2\leq a^2, -a\leq x\leq a$,но саму первообразную будем искать на промежутке $-a<x<a$, то есть $x\epsilon(-a;a)$,это делается для того, чтобы исключить нули знаменателя$\sqrt{a^2-x^2}$.

Определим промежуток изменения новой переменной $t$,для этого в неравенство$-a<x<a$ подставим $x=asint$:

$$-a<asint<a|:a,$$

$$-1<sint<1,\text{отсюда}$$

$$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\text{ или } t\epsilon\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом,$\sqrt{a^2-x^2}=|acost|=acost$, так как $a>0$,а $cost>0$,при $t\epsilon\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Осталось определить выражение для $dx$:

$$dx=d(asint),$$

$$dx=(asint)'dt,$$

$$dx=acostdt.$$

Итак, $\boldsymbol{\sqrt{a^2-x^2}=acost, dx=acostdt}$,что и требовалось показать.

**Замечания:**

**1)**указанные радикалы(корни) могут стоять как в числителе, так и в знаменателе, так и вообще без знака корня;

**2)**при решении таких интегралов можно обойтись без тригонометрической подстановки применяя формулу интегрирования по частям.

**Пример 3.16.** Вычислить интеграл $\int\sqrt{4-x^2}dx$.

Решение.

Интеграл $\int\sqrt{2^2-x^2}dx$ имеет вид $\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)du$ , где $a=2$,следовательно, интеграл рационализируется при помощи тригонометрической подстановки $x=2sint$:

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=\left|\begin{matrix} x=2sint \\ dx=2costdt \\ \sqrt{4-x^2}=2cost \\ t=arcsin\dfrac{x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int 2\,cost\cdot 2\,costdt=4\int cos^2tdt=$$

$$=2\int(1+cos2t)dt=2\int dt+\int cos2td(2t)=$$

$$=2t+sin2t+C=2t+2sintcost+C=2t+2sint\cdot$$

$$\cdot\sqrt{1-sin^2t}+C=2arcsin\frac{x}{2}+x\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+C=$$

$$=2arcsin\frac{x}{2}+x\cdot\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}+C=2arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$$

**Замечание:** данный пример можно решить и другим способом-методом интегрирование по частям, покажем, как это сделать

$$I=\int\sqrt{4-x^2}dx=\left|\begin{matrix} u=\sqrt{4-x^2}, & du=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx \\ dv=dx, & v=\displaystyle\int dx=x\end{matrix}\right|=$$

$$=x\sqrt{4-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=x\sqrt{4-x^2}-$$

$$-\int \frac{(4-x^2)-4}{\sqrt{4-x^2}}dx = x\sqrt{4-x^2} - \int \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx +$$

$$+4\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = x\sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2}dx +$$
$$+4arcsin\frac{x}{2};$$

Итак, $\int \sqrt{4-x^2}dx = x\sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2}dx +$
$+4arcsin\frac{x}{2}$ или $I = x\sqrt{4-x^2} - I + 4arcsin\frac{x}{2}$,

$$2I = x\sqrt{4-x^2} + 4arcsin\frac{x}{2} \ |:2,$$

$$2I = x\sqrt{4-x^2} + 4arcsin\frac{x}{2} \ |:2,$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2arcsin\frac{x}{2} + C.$$

Итак, $\int \sqrt{4-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2arcsin\frac{x}{2} + C.$

**Пример 3.17.** Вычислить интеграл: а)$\int \sqrt{x^2-1}\,dx$;
б)$\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{1+x^2}}$; в) $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^2\cdot\sqrt{4-x^2}}$.

Решение.

а) Интеграл $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$ имеет вид $\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ ,где $a=3$,следовательно, интеграл рационализируется при помощи подстановки $x = \frac{3}{cost}$:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \left| \begin{array}{c} x = \dfrac{3}{cost}, \\ dx = \dfrac{3sint}{cos^2t}dt, \\ \sqrt{x^2-9} = \sqrt{\dfrac{9}{cos^2t}-9} = \\ = \sqrt{9\left(\dfrac{1}{cos^2t}-1\right)} = \\ = \sqrt{9tg^2t} = 3tgt, \\ cost = \dfrac{3}{x} \\ t = arccos\left(\dfrac{3}{x}\right) \end{array} \right| =$$

$$= \int 3tgt\frac{3sintcost}{3cos^2t}dt = 3\int tg^2tdt = 3\int\left(\frac{1}{cos^2t}-1\right) =$$

$$= 3(tgt-t)+C = 3\left(\frac{sint}{cost}-t\right)+C = 3\left(\frac{sint}{cost}-t\right)+C =$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{1-cos^2t}}{cost}-t\right)+C = 3\left(\frac{\sqrt{1-\left(\frac{3}{x}\right)^2}}{\frac{3}{x}}-arccos\left(\frac{3}{x}\right)\right)+C$$

$$=$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}-arccos\left(\frac{3}{x}\right)\right)+C$$

$$= \sqrt{x^2-9}-3arccos\left(\frac{3}{x}\right)+C;$$

б) Интеграл $\int \frac{dx}{x^{2}\cdot\sqrt{1^2+x^2}}$ имеет вид $\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ ,где $a=1$ ,следовательно, интеграл рационализируется с помощью подстановки $x=tgt$:

$$\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{c} x=tgt, \\ dx=\dfrac{1}{cos^2t}dt, \\ \sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+tg^2t}= \\ =\sqrt{\dfrac{1}{cos^2t}}=\dfrac{1}{cost} \\ t=arctgx \end{array} \right| ==$$

$$=\int \frac{dt}{tg^2t\cdot cos^2t\cdot\dfrac{1}{cost}}=\int\frac{dt}{tg^2tcost}=\int\frac{dt}{\dfrac{sin^2t}{cos^2t}cost} =$$

$$=\int\frac{dt}{\dfrac{sin^2t}{cost}}=\int\frac{cost}{sin^2t}dt==\int(sint)^{-2}d(sint)=$$

$$=-\frac{1}{sint}+C=-\frac{1}{\dfrac{sint}{cost}}\cdot\frac{1}{cost}+C=-\frac{1}{tgt}\cdot\frac{1}{cost}+C$$

$$=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C;$$

в) $$\int\frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\left| \begin{array}{c} x=2sint, sint=\frac{x}{2}, \\ dx=2costdt, \\ \sqrt{4-x^2}=2cost, \\ t=arcsin\frac{x}{2} \end{array} \right| =$$

$$=\int\frac{8sin^3t+1}{2cost\cdot 4sin^2t}2costdt=\int\frac{8sin^3t+1}{4sin^2t}dt=$$

$$=\int\left(2sint+\frac{1}{4sin^2t}\right)dt=2cost-\frac{1}{4}ctgt+C=$$

$$= 2\sqrt{1-sin^2t} - \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{sin^2t}-1} + C = 2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} -$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}-1} + C = \sqrt{4-x^2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C.$$

**3)**Интегралы вида $\int \boldsymbol{R\left(x;\sqrt{x^2+px+q}\right)dx}$ рационализируется по следующему правилу.

**Правило:** выделяем полный квадрат в квадратном трехчлене $x^2+px+q$ и вводим новую переменную $\boldsymbol{u}$ (выражение в скобках, выделенного квадрата) ,получим интеграл одного из трех видов (относительно новой переменной $u$): $\int \boldsymbol{R\left(u;\sqrt{a^2-u^2}\right)du}$ , $\int \boldsymbol{R\left(u;\sqrt{a^2+u^2}\right)du}$ ,

$\int \boldsymbol{R\left(u;\sqrt{u^2-a^2}\right)du}$ , после чего делаем соответствующие тригонометрические замены:

$$u = asint \ ,$$

$$u = atgt\,, u = \frac{a}{cost}.$$

**Пример 3.18.** Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x-4)^2\sqrt{x^2-8x+15}}$

Решение.

Преобразуем подынтегральную функцию выделяя полный квадрат под корнем: $x^2-8x+15=(x-4)^2-1$.Сделав подстановку $u=x-4, du=dx$ имеем:

$$\int \frac{dx}{(x-4)^2\sqrt{x^2-8x+15}} = \int \frac{dx}{(x-4)^2\sqrt{(x-4)^2-1}} =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x-4 \\ du = dx \end{matrix}\right| = \int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-1}};$$

Заметим, что полученный интеграл $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-1}}$имеет вид$\int R\left(u;\sqrt{u^2-a^2}\right)du$, где $u=x-4, a=1$,следовательно интеграл рационализируется с помощью подстановки $u = \frac{1}{cost}$:

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-1}} = \left| \begin{array}{c} u = \dfrac{1}{cost} \\ du = ((cost)^{-1})'dt \\ du = \dfrac{sint}{cos^2t}dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{sint}{cos^2t}dt}{\left(\frac{1}{cost}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{cos^2t}-1}} = -\int \frac{sintdt}{cos^2t\frac{1}{cos^2t}\sqrt{tg^2t}} =$$

$$= \int \frac{sint}{tgt}dt = \int costdt = sint + C = \sqrt{1-cos^2t} + C =$$

$$= \left| u = \frac{1}{cost}, cost = \frac{1}{u} \right| = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{u}\right)^2} + C = -\sqrt{1-\frac{1}{(x-4)^2}} + C.$$

## 3.4. «Берущиеся» и «не берущиеся» интегралы.

Как уже отмечалось выше, операция интегрирования функций значительно сложнее операции дифференцирования функций. Не всегда выбранный путь интегрирования является наилучшим, более коротким, простым. Интегрирование часто может быть выполнено не единственным способом. Многое зависит от знания рекомендуемых искусственных приемов интегрирования и от практических навыков решения интегралов.

**Пример 3.19.** Вычислить $\int \frac{dx}{cos^4x}$.

Решение.

$\int \frac{dx}{cos^4x}$, можно найти, не используя рекомендуемую подстановку $t = tgx$, а применив искусственный прием:

$$\int \frac{dx}{cos^4x} = \int \frac{(sin^2x + cos^2x)dx}{cos^4x} =$$

$$= \int \left( \frac{sin^2x}{cos^2x} \cdot \frac{1}{cos^2x} + \frac{cos^2x}{cos^4x} \right) dx = \int tg^2x \cdot \frac{1}{cos^2x} dx +$$

$$+ \int \frac{dx}{cos^2x} = \int (tgx)^2 d(tgx) + tgx = \frac{tg^3x}{3} + tgx + C.$$

**Пример 3.20**. Вычислить $\int \frac{3x^2+8x+4}{x(x^2+4x+4)} dx$.

Решение.

Вряд ли стоит вычислять интеграл $\int \frac{3x^2+8x+4}{x(x^2+4x+4)} dx$ раскладывая подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{3x^2 + 8x + 4}{x(x^2 + 4x + 4)} = \frac{3x^2 + 8x + 4}{x(x + 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{(x + 2)^2};$$

Заметив, что числитель $3x^2 + 8x + 4$ является производной знаменателя $x(x^2 + 4x + 4) = x^3 + 4x^2 + 4x$, легко получить табличный интеграл:

$$\int \frac{3x^2 + 8x + 4}{x(x^2 + 4x + 4)} dx = \int \frac{3x^2 + 8x + 4}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx =$$

$$= ln|x^3 + 4x^2 + 4x| + C.$$

Рассмотренные методы интегрирования позволяют во многих случаях вычислить неопределенный интеграл. Говорят, что $\int f(x)dx$ **берется** (вычисляется), если интеграл выражается через элементарные функции. Если интеграл не выражается через элементарные функции, то интеграл **не берется** (или его нельзя найти).

Не могут быть выражены через элементарные функции следующие интегралы (так как не существует элементарной функции, производная от которой была бы равна подынтегральному выражению):

1) $\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона;
2) $\int sin(x^2)dx$, $\int cos(x^2)dx$ - интегралы Френеля;
3) $\int \frac{dx}{lnx}$ - интегральный логарифм;
4) $\int \frac{e^x}{x} dx$ - приводится к интегральному логарифму;

5) $\int \frac{sinx}{x}dx$, $\int \frac{cosx}{x}dx$ - интегральный синус и косинус соответственно.

**Замечание:** первообразные от функций 1)-5), хорошо изучены, для них составлены подробные таблицы значений для различных значений аргумента.

**Задания для самостоятельного решения.**

**6.Найти интегралы от выражений, содержащих квадратный трехчлен:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** | $\int \frac{xdx}{\sqrt{-5-4x+x^2}}$ | **14.** | $\int \frac{3xdx}{x^2+2x+2}$ |
| **2.** | $\int \frac{6x}{x^2+2x+5}dx$ | **15.** | $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{9+4x+x^2}}$ |
| **3.** | $\int \frac{2x-3}{x^2+4x+1}dx$ | **16.** | $\int \frac{(4x-5)dx}{x^2-6x+10}$ |
| **4.** | $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{x^2-5}}$ | **17.** | $\int \frac{(6x+5)dx}{x^2+4x+9}$ |
| **5.** | $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}$ | **18.** | $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ |
| **6.** | $\int \frac{3x-4}{x^2-4}dx$ | **19.** | $\int \frac{(5x-10)dx}{x^2-6x+25}$ |
| **7.** | $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2+2x+2}$ | **20.** | $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{3-x^2}}$ |
| **8.** | $\int \frac{(6x-7)dx}{x^2+4x+13}$ | **21.** | $\int \frac{(4x+11)dx}{\sqrt{x^2+8x+7}}$ |
| **9.** | $\int \frac{(5x-1)dx}{\sqrt{4-x^2}}$ | **22.** | $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ |
| **10.** | $\int \frac{(4-x)dx}{\sqrt{6x-8-x^2}}$ | **23.** | $\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **11.** | $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ | **24.** | $\int \frac{(5x-2)dx}{\sqrt{-x^2-4x}}$ |
| **12.** | $\int \frac{(4x-1)dx}{x^2-2x+10}$ | **25.** | $\int \frac{(3x-4)dx}{2x^2+5x+10}$ |
| **13.** | $\int \frac{(x-2)dx}{2x^2+5}$ | **26.** | $\int \frac{(x-3)dx}{x^2+6x+10}$ |

**Ответы:**

**6.1.** $\sqrt{x^2-4x-5}+2ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-5}\right|+C;$

**6.2.** $3ln|x^2+2x+5|-3arctg\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$ ;

**6.3.** $ln|x^2+4x+1|-\frac{7}{2\sqrt{3}}ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|+C;$

**6.4.** $4\sqrt{x^2-5}+3ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right|+C;$

**6.5.** $\sqrt{x^2+2x-1}-2\ ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right|+C;$

**6.6.** $\frac{1}{2}\ (ln|x-2|+5ln|x+2|)+C;$

**6.7.** $\frac{3}{2}ln|x^2+2x+2|-4arctg(x+1)+C;$

**6.8.** $3\ ln|x^2+4x+13|--\frac{19}{3}arctg\left(\frac{x+2}{3}\right)+C;$

**6.9.** $-5\sqrt{4-x^2}-arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+C;$

**6.10.** $\sqrt{6x-8-x^2}+arcsin(x-3)+C;$

**6.11.** $\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C;$

**6.12.** $2ln(x^2-2x+10)+\ arctg\left(\frac{x-1}{3}\right)+C;$

**6.13.** $\frac{1}{4}ln(2x^2+5)+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\ arctg\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}\right)+C;$

**6.14.** $\frac{3}{2} ln(x^2 + 2x + 2) - 3\, artg(x + 1) + C$;

**6.15.** $2\sqrt{x^2 + 4x + 9} - ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 9}\right| + C$;

**6.16.** $2ln(x^2 - 6x + 10) + 7arctg(x - 3) + C$;

**6.17.** $3ln(x^2 + 4x + 9) - \frac{7}{\sqrt{5}}\, arctg\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right) + C$;

**6.18.** $\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 2ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right| + C$;

**6.19.** $\frac{5}{2} ln(x^2 - 6x + 25) + \frac{5}{4}\, arctg\left(\frac{x-3}{4}\right) + C$;

**6.20.** $-\sqrt{3 - x^2} + arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$;

**6.21.** $4\sqrt{x^2 + 8x + 7} - 5ln\left|x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 7}\right| + C$;

**6.22.** $\sqrt{3 - 2x - x^2} - 4arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$;

**6.23.** $5\sqrt{x^2 + 4x + 10} - 7ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 10}\right| + C$;

**6.24.** $-5\sqrt{-x^2 - 4x} - 8arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$;

**6.25.** $\frac{3}{4} ln(2x^2 + 5x + 10) - \frac{31}{2\sqrt{55}}\, arctg\left(\frac{4x+5}{\sqrt{55}}\right) + C$;

**6.26.** $\frac{1}{2} ln(x^2 + 6x + 10) - 6\, arctg(x + 3) + C$.

## 7. а) Найти интегралы от правильных рациональных дробей:

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$ | **14.** $\int \frac{x^2+x+2}{x^3-x} dx$ |
| **2.** | $\int \frac{dx}{x^3 - x}$ | **15.** $\int \frac{5x^3+8x^2-1}{(x^3-x^2)(x+1)} dx$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **3.** | $\int \frac{4x^2+13x}{(x+2)(x^2-x-6)}dx$ | **16.** | $\int \frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx$ |
| **4.** | $\int \frac{2x^2+5}{(x^2+2)(x^2+3)}dx$ | **17.** | $\int \frac{x^2-19x+6}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx$ |
| **5.** | $\int \frac{x^2+2}{(x-2)(x^2+2x+1)}dx$ | **18.** | $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$ |
| **6.** | $\int \frac{3x}{x^3+x^2+2x+2}dx$ | **19.** | $\int \frac{x^2-38x+157}{(x+4)(x-9)(x-1)}dx$ |
| **7.** | $\int \frac{x}{x^3-1}dx$ | **20.** | $\int \frac{2x^2-5x+6}{x^3+x^2-6x}dx$ |
| **8.** | $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$ | **21.** | $\int \frac{3x^2+15}{(x^2+4x+13)(x-1)}dx$ |
| **9.** | $\int \frac{x^3+x^2-x+1}{x^4-1}dx$ | **22.** | $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x+1}$ |
| **10.** | $\int \frac{3x^2+3x+2}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$ | **23.** | $\int \frac{x^2+2}{x^3-2x^2+x}dx$ |
| **11.** | $\int \frac{x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}dx$ | **24.** | $\int \frac{x^2}{(x^2-3x+2)(x-3)}dx$ |
| **12.** | $\int \frac{dx}{x^5-x^2}$ | **25.** | $\int \frac{dx}{x^4-1}$ |
| **13.** | $\int \frac{3x-16}{x^3+8x^2+16x}dx$ | **26.** | $\int \frac{7x^2-1}{x^4+4x^2-5}dx$ |

**б) Найти интегралы от неправильных рацио-нальных дробей:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** | $\int \frac{x^2-2}{x+1}dx$ | **14.** | $\int \frac{x^3-12x^2-42}{x-3}dx$ |
| **2.** | $\int \frac{x^3}{x-2}dx$ | **15.** | $\int \frac{x^3+1}{x^2-2}dx$ |
| **3.** | $\int \frac{x^4}{x^2-1}dx$ | **16.** | $\int \frac{x^3+4x-13}{x^3-3x^2+4x-12}dx$ |
| **4.** | $\int \frac{x^2}{x^2-1}dx$ | **17.** | $\int \frac{x^3-2x^2+3x}{x+1}dx$ |
| **5.** | $\int \frac{x^3}{x-3}dx$ | **18.** | $\int \frac{4x^3-1}{x+1}dx$ |
| **6.** | $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$ | **19.** | $\int \frac{x^5}{x-1}dx$ |
| **7.** | $\int \frac{4x^3-1}{x+1}dx$ | **20.** | $\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$ |
| **8.** | $\int \frac{2x^3+x}{x-1}dx$ | **21.** | $\int \frac{x^2+1}{2x^2+4x+2}dx$ |
| **9.** | $\int \frac{x^2}{x^2-9}dx$ | **22.** | $\int \frac{3x^3+4x^2}{3x+2}dx$ |
| **10.** | $\int \frac{x^2+x}{x^2+1}dx$ | **23.** | $\int \frac{x^3}{1-x}dx$ |
| **11.** | $\int \frac{x^3}{x-2}dx$ | **24.** | $\int \frac{x^3}{x^2+4x+8}dx$ |
| **12.** | $\int \frac{4x^3-1}{x+1}dx$ | **25.** | $\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx$ |
| **13.** | $\int \frac{x^4}{x^2+3}dx$ | **26.** | $\int \frac{x^6}{x-1}dx$ |

**Ответы:**

**7.1.а)** $\frac{1}{3}ln|x+1|-\frac{1}{6}ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

**б)**$\frac{x^2}{2}-x-\ ln|x+1|+C$; **7.2.а)** $\frac{1}{2}ln|x^2-1|-ln|x|+C$;

**б)** $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+8\,ln|x-2|+C$;

**7.3.а)** $ln|x+2|+3ln|x-3|-\frac{2}{x+2}+C$;

**б)** $\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$;

**7.4.а)** $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$;

**б)** $x+\frac{1}{2}\ ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$;

**7.5.а)** $\frac{2}{3}ln|x-2|+\frac{1}{3}ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$;

**б)** $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+9x+27\,ln|x-3|+C$;

**7.6.а)** $-3ln|x+1|+\frac{3}{2}ln|x^2+2|+3\sqrt{2}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$;

**б)** $\frac{x^3}{3}-x+arctgx+C$ ;

**7.7. а)** $\frac{1}{3}ln|x-1|-\frac{1}{6}ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$;

**б)** $\frac{4x^3}{3}-2x^2+4x-\ ln|x+1|+C$;

**7.8. а)** $-\frac{1}{x}-arctgx+C$;**б)** $\frac{2x^3}{3}+x^2+3x+\ ln|x-1|+C$;

**7.9. а)** $\frac{1}{2}(ln|x-1|-ln|x+1|+\ln(x^2+1))+C$;

**б)** $x+\frac{3}{2}ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$;

**7.10. а)** $ln|x-1| + ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$; **б)** $x + \frac{1}{2}ln(x^2+1) + arctgx + C$;

**7.11.а)** $2ln|x| - \frac{1}{x} - 2ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C$;

**7.12. а)** $\frac{1}{x} + \frac{1}{6}\ ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$ ;

**б)** $\frac{x^3}{3} + 4x - 2x^2 - 5\ ln|x+1| + C$ ;

**7.13. а)** $- ln|x| + ln|x+4| - \frac{7}{x+4} + C$;

**б)** $\frac{x^3}{3} - 3x + 3\sqrt{3}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$;

**7.14.а)** $- 2ln|x| + ln|x+1| + 2ln|x-1| + C$

**б)** $\frac{x^3}{3} - 27x — \frac{9}{2}x^2 - 123\ ln|x-3| + C$;

**7.15.а)** $ln|x| + 3ln|x-1| - \frac{1}{x+1} + ln|x+1| + C$;

**б)** $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + ln|x^2-2| + C$;

**7.16.а)** $5ln|x-2| + 3ln|x-4| + \frac{1}{2}ln(x^2+4) + arctg\frac{x}{2} + C$;

**б)** $x + 2ln|x-3| + \frac{1}{2}ln|x^2+4| + \frac{3}{2}arctg\frac{x}{2} + C$;

**7.17.а)** $- ln|x-1| - 16ln|x+2| + 18ln|x+3| + C$ ; **б)** $\frac{x^3}{3} + 6x - \frac{3}{2}x^2 - 6\ ln|x+1| + C$; **7.18.а)** $2ln|x+2| + 3ln|x-4| - \frac{1}{2}ln(x^2-2x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$; **б)** $\frac{x^3}{3} + 3x + \frac{3}{2}x^2 -$

$3\,ln|x-1|+C$ ;**7.19.а)** $-3ln|x-1|+5ln|x+4|-$ $ln|x-9|+C$ ; **б)**$\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ +ln|x-1|+C$;

**7.20.а)** $-ln|x|+ +3ln|x-2|+\frac{3}{2}ln|x+3|+C$;

**б)** $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}ln(x^2+1)+C$;**7.21.а)** $ln|x-1|-ln(x^2+4x+13)-\frac{10}{3}arctg\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$; **б)** $\frac{1}{2}\left(x-ln(x^2+2x+1)-\frac{2}{x+1}\right)+C$; **7.22.а)** $\frac{1}{2}ln|x+1|-\frac{1}{4}ln(x^2+1)+\frac{1}{2}arctgx+C$;

**б)** $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{3}-\frac{4}{9}x+\frac{8}{27}\ ln|3x+2|+C$ ; **7.23.а)** $2ln|x|-ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C$ ;**б)**$-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x-\ ln|x-1|+C$ ;

**7.24.а)** $\frac{1}{2}ln|x-1|-4ln|x-2|+\frac{9}{2}ln|x-3|+C$ ;

**б)**$\frac{x^2}{2}-4x+4ln(x^2+4x+8)+8arctg\left(\frac{x+2}{2}\right)+C$;

**7.25.а)** $\frac{1}{4}\ ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}arctgx+C$;**б)**$\frac{x^2}{2}+arctgx+C$;

**7.26.а)** $\frac{1}{2}\ ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{6}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C$;

**б)** $\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ ln|x-1|+C$.

**8. Найти интегралы от тригонометрических функций**:

| | |
|---|---|
| **1.** $\int\frac{cos^3x}{sin^2x}dx$ | **14.** $\int\frac{dx}{4-cosx}$ |
| **2.** $\int sin^3xcos^4x\,dx$ | **15.** $\int\frac{dx}{sin^2x+2sinxcosx-cos^2x}$ |

| | |
|---|---|
| **3.** $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$ | **16.** $\int \frac{\sin x+\sin^3 x dx}{2\cos^2 x-1}$ |
| **4.** $\int \cos^2 4x\,dx$ | **17.** $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}\,dx$ |
| **5.** $\int \frac{\cos^4 3x}{\sin^6 3x}\,dx$ | **18.** $\int \sin^3 x\cos^8 x\,dx$ |
| **6.** $\int tg^5 x\,dx$ | **19.** $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$ |
| **7.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^4 x}$ | **20.** $\int \sin^2\frac{3x}{2}\,dx$ |
| **8.** $\int \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}\right)dx$ | **21.** $\int tg^2\frac{x}{2}\,dx$ |
| **9.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x+1}$ | **22.** $\int \sin^6 x\cos^3 x\,dx$ |
| **10.** $\int \frac{dx}{\sin x+2}$ | **23.** $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$ |
| **11.** $\int \sin^2 10x\,dx$ | **24.** $\int \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$ |
| **12.** $\int \sin 3x\cos 7x dx$ | **25.** $\int \frac{\sin^3 x dx}{1+\cos^2 x}$ |
| **13.** $\int \sqrt[3]{\sin x}\cos x\,dx$ | **26.** $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$ |

**Ответы**:

**8.1.** $-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C$;**8.2.** $\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$;

**8.3.** $\frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin 4x+C$;**8.4.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{16}\sin 8x+C$;

**8.5.**$-\frac{1}{15}ctg^5 3x+C$;**8.6.** $\frac{1}{4}tg^4 x-\frac{1}{2}tg^2 x-\ln|\cos x|+C$;

**8.7.** $tgx-\frac{1}{3}tg^3 x-2ctg2x+C$;**8.8.** $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$;

**8.9.** $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tgx)+C$;**8.10.** $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{3}}\right)+C$;

**8.11.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{40}sin20x+C$;**8.12.** $\frac{1}{8}cos4x-\frac{1}{20}cos10x+C$;

**8.13.** $\frac{3}{4}sin^{\frac{4}{3}}x+C$;**8.14.** $\frac{2}{\sqrt{15}}arctg\left(\frac{\sqrt{5}}{3}tg\frac{x}{2}\right)+C$;

**8.15.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}ln\left|\frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1+\sqrt{2}}\right|+C$;**8.16.**$\frac{1}{2}cosx-\frac{3}{4\sqrt{2}}ln\left|\frac{\sqrt{2}cosx-1}{\sqrt{2}cosx+1}\right|+C$;

**8.17.**$-\frac{3}{\sqrt[3]{cosx}}-\frac{3}{5}cosx\cdot\sqrt[3]{cos^2x}+C$;**8.18.** $\frac{1}{11}cos^{11}x-\frac{1}{9}cos^9x+C$;**8.19.** $\frac{1}{2}arctg\left(2tg\frac{x}{2}\right)+C$;**8.20.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}sin3x+C$; **8.21.** $2tg\frac{x}{2}-x+C$; **8.22.** $\frac{1}{7}sin^7x-\frac{1}{9}sin^9x+C$;

**8.23.** $-\frac{1}{3sin^3x}+\frac{1}{sinx}+C$;**8.24.** $\frac{1}{\sqrt{3}}arctg(\sqrt{3}tgx)+C$;

**8.25.** $cosx-2arctg(cosx)+C$; **8.26.** $x-tg\frac{x}{2}+C$.

**9.Найти интегралы от иррациональных функций**:

| | |
|---|---|
| **1.** $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$ | **14.** $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$ |
| **2.** $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ | **15.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ |
| **3.** $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}+\sqrt[4]{1-2x}}$ | **16.** $\int\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}}dx$ |
| **4.** $\int\sqrt{\frac{x}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x^2}$ | **17.** $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ |
| **5.** $\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ | **18.** $\int\frac{1-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x^2}}dx$ |
| **6.** $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$ | **19.** $\int\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$ |
| **7.** $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}dx$ | **20.** $\int\frac{\sqrt{x}}{x+16}dx$ |
| **8.** $\int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$ | **21.** $\int\frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}dx$ |

| | |
|---|---|
| **9.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2}$ | **22.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx$ |
| **10.** $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{x+\sqrt{x}}dx$ | **23.** $\int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{dx}{(2-x)^2}$ |
| **11.** $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}dx$ | **24.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ |
| **12.** $\int \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}dx$ | **25.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx$ |
| **13.** $\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$ | **26.** $\int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{x+1}}$ |

**Ответы:**

**9.1.** $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C;$

**9.2.** $x-+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6arctg\left(\sqrt[6]{x}\right)+C;$

**9.3.** $-(1-2x)^{\frac{1}{2}}--2(1-2x)^{\frac{1}{4}}-2ln\left|(1-2x)^{\frac{1}{4}}-1\right|+C;$

**9.4.** $2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+C;$ **9.5.** $3x-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+6arctg\left(\sqrt[6]{x}\right)+C;$

**9.6.** $\frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}}-ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right)+C;$**9.7.** $6\cdot\left(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}+\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{1}{3}\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}+\frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|\right)+C;$**9.8.** $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C;$ **9.9.** $2\left(\sqrt{x}-2ln\left|\sqrt{x}+2\right|\right)+C;$ **9.10.** $4x^{\frac{1}{4}}+2ln\left|x^{\frac{1}{2}}+1\right|+4arctg\left(x^{\frac{1}{4}}\right)+C$ ;

**9.11.** $-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C;$**9.12.** $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C;$

**9.13.** $-2(\sqrt{x}+ln|\sqrt{x}-1|)+C;$**9.14.** $\left(1+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2+ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+C;$ **9.15.** $2arctg\left(\sqrt{x+1}\right)+C;$**9.16.** $x-$

$\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+C$;**9.17.**$-2arctg\left(\sqrt{1-x}\right)+C$;**9.18.** $\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}-\frac{15}{11}x^{\frac{11}{15}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$;**9.19.** $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2(x-1)^{\frac{1}{2}}+C$;

**9.20**. $2\sqrt{x}-8\,arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{4}\right)+C$; **9.21.**$-\frac{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}{12x^3}+C$;

**9.22.** $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-2\sqrt{x}+C$;**9.23.**$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}+C$; **9.24.** $tg(arcsinx)+C$ ; **9.25.**$-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+C$; **9.26.**$-\frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}+2}\right|+C$.

# ГЛАВА 4. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## 4.1. Определение определенного интеграла и геометрический смысл.

Рассмотрим задачу о вычислении площади **криволинейной трапеции** –фигуры, ограниченной двумя вертикальными прямыми $x=a, x=b$, осью $Ox$ и кривой $y=f(x)$ , где $y=f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b]$ функция (рис.2).

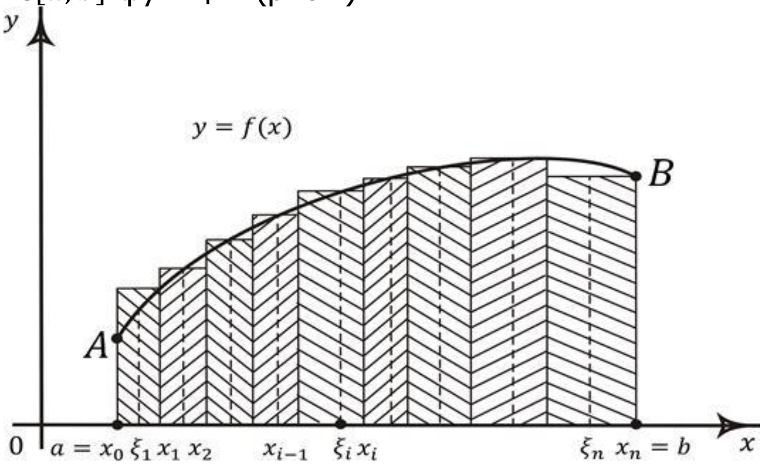


Рис.2.

Для определенности будем считать, что функция $y = f(x)$неотрицательна. Разобьем отрезок $[a;b]$ на $n$ частей с помощью точек $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ (рис.2). Из каждого отрезка $[x_{i-1}; x_i], i = 1,2, \ldots, n$ возьмем произвольную точку $\xi_i$ и вычислим $f(\xi_i)$.Умножим найденное значение функции $f(\xi_i)$ на длину частичного отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$:

$f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

Криволинейная трапеция разобьется на $n$ элементарных полос шириной $\Delta x_i$ и высотой $f(\xi_i)$, площадь каждой из которых приближенно равна $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

Образуем сумму всех таких произведений:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (4.1)$$

Сумма вида (4.1) называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ соответствующей данному разбиению отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $\Delta x_i$ и данному выбору промежуточных точек $\xi_i$ .

Геометрический смысл суммы $S_n$ очевиден: это сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_i$ и высотами $f(\xi_i)$.

Обозначим через $\Delta = max \Delta x_i$ длину наибольшего частичного отрезка разбиения ,если $\Delta = max \Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка $[a;b]$ стремится к бесконечности ( $n \to \infty$).

**Определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм при стремлении к нулю длины наибольшего частичного отрезка разбиения, если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки, ни от выбора в каждом из них точки $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \quad \textbf{(4.2)}$$

Функции $f(x)$ называется **интегрируемой** на отрезке $[a; b]$ .Числа $a$ и $b$ называются соответственно **нижним и верхним пределами интегрирования** соответственно, а отрезок $[a; b]$ – **отрезком интегрирования**. Функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, $f(x)dx$ **– подынтегральным выражением,** $x$ **– переменной интегрирования**.

Из определения определенного интеграла, следует **геометрический смысл определенного интеграла:** определенный интеграл от неотрицательной функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$ численно равен площади криволинейной трапеции, то есть

$$S \approx S_n = \int_a^b f(x)dx.$$

Так же из определения следует, что определенный интеграл представляет собой некоторое число и не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = C$$

Какими свойствами должна обладать функция на отрезке, чтобы существовал определенный интеграл от этой функции на данном отрезке? Ответ на данный вопрос дает теорема Коши.

**Теорема Коши** (теорема о существования определенного интеграла):
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке$[a;b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.
Примем её без доказательства.
**Замечание:** непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости.

## 4.2. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$.
**Теорема 4.1.**Если функция $f(x)$, непрерывна на отрезке$[a;b]$, а $F(x)$— первообразная для функции $f(x)$ ,то $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Доказательство.

Разобьем отрезок$[a;b]$ на $n$ частей точками $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_n = b$,как показано на рис.2. Рассмотрим тождество:

$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \big(F(x_n) - F(x_{n-1})\big)+\ldots+$ $+\big(F(x_1) - F(x_0)\big)$. Преобразуем каждую разность в скобках, по формуле Лагранжа
$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$, $\xi\epsilon[a;b]$, получим:

$$F(b) - F(a) = F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})+\ldots+F'(\xi_1)(x_1 - x_0) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad .$$

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$,то она интегрируема на отрезке $[a;b]$. Поэтому существует предел интегральной суммы равный определенному интегралу от $f(x)$ на $[a;b]$.

Переходя в равенстве $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ к пределу при $\Delta = max\Delta x_i \to 0$, получаем

$\lim\limits_{\Delta\to 0}\big(F(b)-F(a)\big)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ , то есть

$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$ .Теорема доказана.

Введем обозначение: $F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$,тогда равенство выше можно переписать так:

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \boldsymbol{F(x)}|_a^b = \boldsymbol{F(b)} - \boldsymbol{F(a)} \quad \textbf{(4.3)}$$

Полученная формула (4.3) называется **формулой Ньютона — Лейбница** или основной формулой интегрального исчисления*.*

**Алгоритм решения определенного интеграла:**

1) Сначала находим первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$;

2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: $F(b)$;

3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: $F(a)$;

4) Рассчитываем разность $F(b)-F(a)$, то есть, находим число - определенный интеграл.

**Замечание:** формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

**Пример 4.1.** Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интеграл: а) $\int_1^2 x^5dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

в) $\int_0^{lg2} 2^x\cdot 5^x dx$.

Решение.

а) Подынтегральная функция $f(x)=x^5$на отрезке $[1;2]$ имеет первообразную $F(x)=\frac{x^6}{6}$, тогда по формуле (4.3) получим:

$\int_1^2 x^5dx = \frac{x^6}{6}\Big|_1^2 = \frac{2^6}{6}-\frac{1^6}{6} = \ = \frac{63}{6} = 10{,}5$;

б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = arcsin\frac{1}{2} - arcsin\frac{0}{2} = \frac{\pi}{6}$ ;

в) Как известно интеграла от произведения не существует, поэтому после преобразования получим:

$$\int_0^{lg2} 2^x \cdot 5^x dx = \int_0^{lg2} (2\cdot 5)^x dx = \int_0^{lg2} 10^x dx = \frac{10^x}{ln10}\Big|_{\mathbf{0}}^{lg2} =$$

$$= \frac{1}{ln10}(10^{lg2} - 1) = \frac{1}{ln10}.$$

## 4.3. Свойства определенного интеграла.

Вычисление определенного интеграла очень часто проводится с использованием первых пяти свойств, свойства определённого интеграла позволяют упрощать непосредственное вычисление интегралов, так что мы будем при надобности на них ссылаться. Остальные свойства определенного интеграла, в основном, применяются для оценки различных выражений. Прежде чем перейти к свойствам определенного интеграла, условимся, что функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$интегрируемы на отрезке$[a; b]$ и имеют первообразные $F(x), G(x)$соответственно.

**1.**При перемене верхнего и нижнего пределов интегрирования местами значение определенного интеграла меняется на противоположное, то есть

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.}$$

Доказательство.

По формуле Ньютона-Лейбница получим:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) =$$

$$= -F(x)|_b^a = -\int_b^a f(x)dx.$$

**2.** Определенный интеграл с совпадающими пределами интегрирования равен нулю, то есть

$$\int_a^a \boldsymbol{f(x)dx = 0}.$$

Доказательство.

Это свойство содержится в самом определении определённого интеграла. Однако его можно получить и по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$$

**3.**Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, то есть

$$\int_a^b \boldsymbol{kf(x)dx = k}\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx\,, k = const}.$$

Доказательство.

Составим интегральную сумму для подынтегральной функции $kf(x)$:

$\sum_{i=1}^n k\, f(\xi_i)\Delta x_i = k\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ ,где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,

тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n k\, f(\xi_i)\Delta x_i = k \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i =$

$= k\int_a^b f(x)dx$,то есть функция $kf(x)$интегрируема на $[a; b]$.Таким образом ,выполняется равенство

$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

**4.** Интеграл суммы (разности) нескольких функций равен сумме (разности) интегралов от каждой из них:

$$\int_a^b \boldsymbol{\big(f(x) \pm g(x)\big)dx} = \int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \pm \int_a^b \boldsymbol{g(x)dx}.$$

Доказательство.

Доказательство этого свойства, абсолютно схоже с предыдущим:

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \big(f(\xi_i) \pm g(\xi_i)\big)\Delta x_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i =$$
$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

**Замечание**: данное свойство справедливо для суммы (разности) любого конечного числа слагаемых.

**Пример 4.2.**Вычислить$\int_1^2 (4x^3 - 6x^2 + 2x + 1)dx;$ .

Решение.

Применяя свойства 3),4) получим табличные интегралы:

$$\int_1^2 (4x^3 - 6x^2 + 2x + 1)dx = (x^4 - 2x^3 + x^2 + x)|_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} =$$
$$= 2^4 - 2\cdot 2^3 + 2^2 + 2 - (1^4 - 2\cdot 1^3 + 1^2 + 1) = 5;$$

**5.** Если отрезок интегрирования разбит на части, то определённый интеграл по всему отрезку равен сумме определённых интегралов по его частям, то есть если $c\epsilon[a;b]$,то

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.}$$

Доказательство.

Пусть $c = x_m$- точка деления отрезка $[a;b]$ на части (это можно сделать в виду независимости предела интегральной суммы от способа разбиения отрезка $[a;b]$),тогда интегральную сумму можно разбить на две суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i;$$

Каждая из сумм является интегральной суммой отрезков $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$, соответственно. Переходя к пределу в последнем равенстве при $n\to\infty$,получим:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

, то есть $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
**Замечание**: это свойство справедливо при любом расположении точек $a, b, c$ (как для $c\epsilon[a; b]$,так и для $c \leq a$ или $c \geq b$).

**6. «Теорема о среднем».** Определённый интеграл равен произведению длины отрезка интегрирования на значение подынтегральной функции в некоторой точке внутри него, то есть, если $c\epsilon[a; b]$, то

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).}$$

Доказательство.

По формуле Ньютона-Лейбница:
$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F'(x) = f(x)$,по формуле Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$,
$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a)$=$f(c)(b-a)$,
следовательно$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$;

**7.** Если функция $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$ $(\boldsymbol{f(x) \leq 0})$ для любого значения аргумента $x\epsilon[a; b]$,то$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx \geq 0}$ $\left(\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx \leq 0}\right)$**.**

Доказательство.

По «теорема о среднем» (свойство 6):
$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$,где $c\epsilon[a; b]$;
Рассмотрим случай, когда $f(x) \geq 0$ для всех $x\epsilon[a; b]$, то и $f(c) \geq 0$, при $b - a > 0$.
Поэтому $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \geq 0$.

Аналогично для случая $f(x) \leq 0$.
**Следствия**:
1)Если $f(x) \leq g(x)$для всех $x\epsilon[a;b]$,то
$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$;
2)Если $f(x) \geq g(x)$для всех $x\epsilon[a;b]$,то
$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
Это означает, что можно интегрировать неравенства. Отметим, что дифференцировать неравенства нельзя.

**8.** Модуль определенного интеграла не превосходит интеграл от модуля подынтегральной функции, то есть

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx;$$

Доказательство.

Проинтегрируем очевидное неравенство

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ получим:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

, следовательно$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

**9.** Если функция $f(x)$принимает на отрезке $[a;b]$ свои наименьшее $m$ и наибольшее значение $M$ , то имеет место неравенство $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Доказательство.

Так как для любого $x\epsilon[a;b]$ , $m \le f(x) \le M$,интегрируя неравенство получим:

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx,$$

$$mx|_a^b \le \int_a^b f(x)dx \le Mx|_a^b,$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

## 4.4. Методы вычисления определенного интеграла.

Так как формула Ньютона–Лейбница сводит задачу вычисления определенного интеграла от непрерывной функции к нахождению первообразной, то все основные методы вычисления неопределенных интегралов переносятся и на задачу вычисления определенных интегралов. Сформулируем эти методы с учетом специфики определенных интегралов.

**1) Метод непосредственного интегрирования**-определенного интеграла состоит в том, что путем тождественных преобразований и применения свойств определенного интеграла, исходный интеграл приводится к одному или нескольким табличным интегралам, которые вычисляются по формуле Ньютона-Лейбница, то есть данный метод в определенном интеграле работает так же как и в неопределенном, только добавляются пределы интегрирования.

Рассмотрим как работает этот метод на примерах.

**Пример 4.3.** Вычислить интеграл:

а) $\int_1^2 x(x^2-2)^2dx$ ;б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ctgxdx}{sin^2x}$ ;в) $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$ ;

г) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sin^2x-sin^4x}$ ;д) $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+cos2x}{2}}\, dx$.

Решение.

а) $\int_1^2 x(x^2-2)^2dx = \int_1^2 x(x^4-4x^2+4)dx =$

$$= \int_1^2 (x^5-4x^3+4x)dx = \left(\frac{x^6}{6} - x^4 + 2x^2\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{64}{6} - 16 + 8 - \left(\frac{1}{6} - 1 + 2\right) = \frac{63}{6} - 9 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5;$$

б) Так как $\frac{1}{sin^2x}dx = -d(ctgx)$ имеем:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ctgxdx}{sin^2x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctgx \cdot \frac{1}{sin^2x}\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} ctgx\, d(ctgx) =$$

$$= -\frac{ctg^2x}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}ctg^2x\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\left(ctg^2\frac{\pi}{2} - ctg^2\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2};$$

в) Так как $xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d(x^2+1)$ имеем:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{-2}\; d(x^2+1) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2(x^2+1)}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

г) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sin^2x-sin^4x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sin^2x(1-sin^2x)} =$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sin^2xcos^2x} = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{(2sinxcosx)^2} = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sin^2 2x} =$$

$$= \ 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(2x)}{sin^2 2x} = -\ 2ctg2x|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -2\left(ctg\frac{2\pi}{3} - ctg\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}};$$

д) $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+cos2x}{2}}\,dx = \int_0^{\pi} \sqrt{cos^2x}\,dx = \int_0^{\pi} |cosx|dx;$

Так как, $cosx > 0$,при$x\epsilon \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$,то$|cosx|$ на данном промежутке равен$cosx$,то есть$|cosx| = cosx$,а при $x\epsilon \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, $cosx < 0$, то есть$|cosx| = -cosx$ ,отсюда имеем:

$$\int_0^{\pi} |cosx|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-cosx)dx = sinx|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-sinx|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = sin\frac{\pi}{2} - sin0 - \left(sin\pi - sin\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2.$$

**2)Замена переменной в определенном интеграле.**

Пусть для вычисления интеграла$\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \ \varphi(t)$.

**Теорема 4.2.** Если функция $y = f(x)$непрерывна на отрезке$[a;b]$,а функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $x' = \ \varphi'(t)$ на отрезке $[t_1;t_2]$ , где $a = \ \varphi(t_1), b = \ \varphi(t_2)$и при этом сложная функция $f(\varphi(t))$определена и непрерывна на$[t_1;t_2]$,тогда справедливо следующее равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad \textbf{(4.4)}$$

Доказательство.

Пусть $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Так как
$\left(F\big(\varphi(t)\big)\right)' = F'\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$, то
$F\big(\varphi(t)\big)$ является первообразной для функции
$f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t),\ t\epsilon[t_1;t_2]$. Поэтому по формуле Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ имеем:

$$\int_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = F\big(\varphi(t)\big)\Big|_{t_1}^{t_2} = F\big(\varphi(t_2)\big) - F\big(\varphi(t_1)\big) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Формула (4.4) называется **формулой замены переменной** в определенном интеграле.
Подобно тому, как это было в случае неопределенного интеграла, использование замены переменной позволяет упростить интеграл, приблизив его к табличному виду. При этом не следует забывать о том, что при переходе к новой переменной интегрирования необходимо обязательно пересчитать пределы интегрирования.

**Пример 4.4.** Вычислить интеграл: а) $\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$;
б) $\int_0^1 x(2-x^2)^7\,dx$; в) $\int_0^{ln2}\frac{dz}{e^z+1}$; г) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$;
д) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+tg^2x}{(1+tgx)^2}dx$.

Решение.

а) Сделав замену $t = \sqrt{x-1}$ , не забудем заменить пределы интегрирования, если $x = 2$, то
$t(2) = \sqrt{2-1} = 1$, если $x = 5$ , то $t(5) = \sqrt{5-1} = 2$.
Таким образом, решение имеет вид:

$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = \left|\begin{gathered} t=\sqrt{x-1} \\ t^2 = x-1 \\ t^2+1 = x \\ 2tdt = dx \\ t(2)=1, t(5)=2 \end{gathered}\right| = \int_1^2 \frac{t^2+1}{t}\cdot 2tdt =$$

$$= 2\int_1^2 (t^2+1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Bigg|_1^2 = 2\left(\frac{8}{3}+2-\left(\frac{1}{3}+1\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{7}{3}+1\right) = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3};$$

б) $$\int_0^1 x(2-x^2)^7\,dx = \left|\begin{gathered} t=2-x^2 \\ dt=-2xdx \\ xdx = -\frac{dt}{2} \\ t(0)=2 \\ t(1)=1 \end{gathered}\right| = -\frac{1}{2}\int_2^1 t^7\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^8}{8}\Bigg|_2^1 = -\frac{1}{16}t^8|_2^1 = -\frac{1}{16}(1-2^8) = \frac{255}{16};$$

в) Сделав подстановку $t=e^z$ получим:

$$\int_0^{ln2}\frac{dz}{e^z+1} = \left|\begin{gathered} t=e^z \\ lnt = lne^z \\ lnt = z \\ \frac{1}{t}dt = dz \\ t(0)=1 \\ t(ln2)=2 \end{gathered}\right| = \int_1^2 \frac{\frac{1}{t}dt}{t+1} =$$

$$= \int_1^2 \frac{dt}{t^2+t} = \int_1^2 \frac{dt}{\left(t^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot t+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\frac{1}{4}} =$$

$$= \int_1^2 \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right|\Bigg|_1^2 =$$

$$= ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Bigg|_1^2 = ln\frac{2}{3} - ln\frac{1}{2} = ln\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = ln\frac{4}{3};$$

г) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x = sint \\ dx = costdt \\ t = arcsinx \\ t(0) = 0, \\ t(1) = arcsin1 = \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right| =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-sin^2t}\,costdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos2t}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}sin2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}sin\pi\right) = \frac{\pi}{4};$$

д) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+tg^2x}{(1+tgx)^2}dx = \left|\begin{matrix} t = tgx \\ x = arctgt \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ t\left(\frac{\pi}{4}\right) = tg\frac{\pi}{4} = 1 \\ t\left(\frac{\pi}{3}\right) = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{matrix}\right| =$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(1+t^2)dt}{(1+t^2)(1+t)^2} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(1+t)^2} =$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} (1+t)^{-2}d(1+t) = -\frac{1}{1+t}\Bigg|_1^{\sqrt{3}}$$

$$= -\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\sqrt{3}}.$$

**Замечание:** при замене переменной в определенном интеграле следует помнить, что вводимая функция должна быть непрерывна на отрезке интегрирования.

**3)Интегрирование по частям в определенном интеграле.**

При выводе формулы интегрирования по частям в неопределенном интеграле было получено равенство $udv = d(uv) - vdu$. Проинтегрировав его в пределах от $a$ до $b$ в соответствии со свойствами определенного интеграла имеем:

$$\int_a^b udv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b vdu = uv|_a^b - \int_a^b vdu; \text{ или}$$

$$\boldsymbol{\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu} \quad \textbf{(4.5)}$$

Формула (4.5) называется **формулой интегрирования по частям** в определенном интеграле.

**Пример 4.5**. Вычислить интеграл: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin\frac{x}{2}dx$;

б) $\int_0^1 ln(1+x)\,dx$; в) $\int_1^2 (x^2-1)e^x dx$ ;г) $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

Решение.

а) Интегрируем по частям, получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin\frac{x}{2}dx = \left| \begin{matrix} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin\frac{x}{2}dx, v = \int \sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= -2x\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}dx = -2\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} - 0\right) +$$

$$+4\sin\frac{x}{2}\Big|_{\mathbf{0}}^{\frac{\pi}{2}} = -2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 4\left(\sin\frac{\pi}{4} - 0\right) = -\frac{\sqrt{2}\pi}{2} + 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(4-\pi);$$

б) $$\int_0^1 ln(1+x)\,dx = \left| \begin{matrix} u = ln(1+x), \; du = \frac{1}{1+x}dx \\ dv = dx, v = \int dx = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\,ln(1+x)|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x+1}dx = ln2 - 0 -$$

$$-\int_0^1 \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = ln2 - \int_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= ln2 - \left(x - ln(x+1)\right)\Big|_0^1 = ln2 - (1 - ln2 - 0 + ln1) =$$

$$= 2ln2 - 1;$$

в) $\int_1^2 (x^2-1)e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2-1, \ du = 2xdx \\ dv = e^x dx, v = \int e^x dx = e^x \end{vmatrix} =$

$$= (x^2-1)e^x|_1^2 - 2\int_1^2 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x, \qquad du = dx \\ dv = e^x dx, v = \int e^x dx = e^x \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$= (4-1)e^2 - 0 - 2\left(xe^x|_1^2 - \int_1^2 e^x dx\right) = 3e^2 -$$

$$-2(2e^2 - e - e^x|_1^2) = 3e^2 - 4e^2 + 2e + 2e^2 - 2e = e^2;$$

г) $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx =$

$$= \begin{vmatrix} u = x^2, \qquad du = 2xdx \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, v = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1+x^2) = \sqrt{1+x^2} \end{vmatrix} =$$

$$= x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}\Big|_0^2 - \int_0^2 2x \cdot \sqrt{1+x^2}\,dx = 4\sqrt{5} -$$

$$-\int_0^2 (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2) = 4\sqrt{5} - \frac{2}{3}(1+x^2)\cdot\sqrt{1+x^2}\Big|_0^2 =$$

$$= 4\sqrt{5} - \frac{2}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right) = \frac{2}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{5}+1\right).$$

## 4.5.Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах интегрирования.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке$[-a;a]$ симметричном относительно $(\cdot)x = 0$. Докажем, следующее:

$$\int_{-a}^{a} \boldsymbol{f(x)\,dx} = \begin{cases} \boldsymbol{2\int_0^a f(x)\,dx}, & \text{если } \boldsymbol{f(x)} - \text{чётная} \\ \boldsymbol{0}, & \text{если } \boldsymbol{f(x)} - \text{нечётная} \end{cases} \qquad \textbf{(4.6)}$$

Разобьем отрезок интегрирования$[-a;a]$ на части $[-a;0]$ и$[0;a]$.Тогда используя свойства определенного интеграла имеем:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad (4.7)$$

Сделаем в первом интеграле (в сумме) подстановку $x = -t$ получим:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} x = -t \\ dx = -dt \\ t = -x \\ t(-a) = a \\ t(0) = 0 \end{matrix} \right| = \int_{a}^{0} f(-t)\,(-dt) =$$

$= \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$ (определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования);

Вернемся к равенству (4.7):

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx;$$

Если функция $f(x)$ –чётная, то есть $f(-x) = f(x)$,то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx;$$

Если функция $f(x)$ –нечётная, то есть $f(-x) = -f(x)$,то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Таким образом, равенство (4.7) принимает вид (4.6).

**Пример 4.6.** Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Решение.

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ является четной, так как $f(-x) = \frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = f(x)$. Следовательно, по формуле (4.6) получим:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = 2arctgx|_0^1 =$$

$$= 2(arctg1 - arctg0) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

**Пример 4.7.** Найти интегралы: а) $\int_{-2}^{2} x^3 dx$;
б) $\int_{-\pi}^{\pi} sin^3x \cdot cos^2xdx$; в) $\int_{-4}^{4} x^5 \cdot e^{-x^2} dx$.

Решение.

а) Благодаря формуле (4.6) можно не вычисляя интеграл сказать, что он равны нулю, так как, подынтегральная функция $f(x) = x^3$ нечетная, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$,а пределы интегрирования симметричны.

Итак, $\int_{-2}^{2} x^3 dx = 0$;

б)$\int_{-\pi}^{\pi} sin^3x \cdot cos^2xdx = 0$, так как функция $f(x) = sin^3x \cdot cos^2x$ –нечётная,$f(-x) = sin^3(-x) \cdot cos^2(-x) = -sin^3x \cdot cos^2x = -f(x)$;

в)Аналогично, $\int_{-4}^{4} x^5 \cdot e^{-x^2} dx = 0$, , $f(x) = x^5 \cdot e^{-x^2}$,

$$f(-x) = (-x)^5 \cdot e^{-(-x)^2} = -x^5 \cdot e^{-x^2} = -f(x).$$

## 4.6. Несобственные интегралы.

Пусть, функция $f(x)$, определена и непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$(рис.3). Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$, то его называют **несобственным интегралом первого рода.**

**Обозначение:** $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$.

Если этот предел существует и равен некоторому числу, а не бесконечности, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, а число, которому равен предел, принимается за его значение. В противном случае интеграл называется **расходящимся** и ему не приписывается никакого значения.

**Замечание:** Несобственный интеграл первого рода выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции (рис.3)

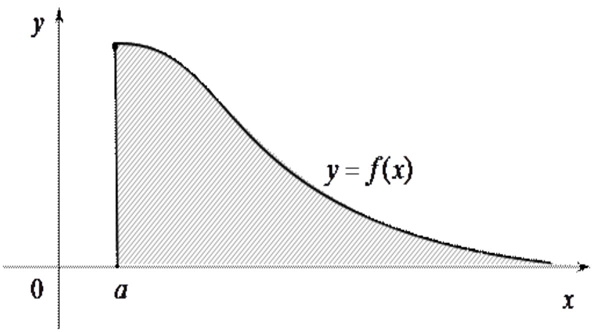



Рис.3

Аналогично определяется несобственные интеграл на промежутке$(-\infty; b)$:$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$;

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования, обозначаемый символом$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ , нужно предварительно представить в виде суммы двух несобственных интегралов, один из которых с конечным верхним пределом интегрирования, другой - с конечным нижним пределом интегрирования:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$, где $c = const$, интеграл слева сходится, если сходятся оба интеграла справа.

**Замечание:** в качестве внутренней точки удобно взять значение $c = 0$ при условии, что подынтегральная функция непрерывна в этой точке.

**Пример 4.8.** Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:
а) $\int_{-\infty}^{0} cosxdx$; б) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; в) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$;
г) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)}$.

Решение.

а) $\int_{-\infty}^{0} cosxdx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} cosxdx = \lim\limits_{a\to-\infty} sinx|_a^0 =$
$= \lim\limits_{a\to-\infty}(sin0 - sina) = 0 - \lim\limits_{a\to-\infty} sina = \nexists$, так как при $a \to -\infty$ функция $sina$ не имеет предела, сследовательно, интеграл расходится;

б) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \lim\limits_{b\to+\infty} arctg(x+1)|_1^b =$
$\lim\limits_{b\to+\infty}(arctg(b+1) - arctg2) = arctg(+\infty) - arctg2 =$
$= \frac{\pi}{2} - arctg2$;

в) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_{a}^{-1} x^{-2}dx = -\lim\limits_{a\to-\infty} \frac{1}{x}\Big|_a^{-1} =$
$= -\lim\limits_{a\to-\infty}\left(-1 - \frac{1}{a}\right) = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{a}\right) = 1$;

г) Поскольку оба предела интегрирования (верхний и нижний) бесконечны разбиваем интеграл на два несобственных интеграла, если они оба сходятся, то исходный интеграл сходится:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)} = \int_{-\infty}^{0} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)} \quad +$$

$$+\int_{0}^{+\infty} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)} \quad = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)} +$$

$+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)}$, но в данном случае это не рационально, так как подынтегральная функция $f(x) = \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)}$ является четной $f(-x) = f(x)$ с симметричными пределами интегрирования, будет удобным воспользоваться формулой (4.6), то есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)} \quad =$$

$$= 2\lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)};$$

Под знаком интеграла рациональная дробь, поэтому применяя алгоритм интегрирования рациональных дробей, получим:

$$\frac{2x^2+5}{(x^2+2)(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

(так как, знаменатель полученной дроби имеет комплексные корни $D<0$)

$$(Ax+B)(x^2+3)+(Cx+D)(x^2+2) = 2x^2+5$$

$$(A+C)x^3+(B+D)x^2+(3A+2C)x+3B+2D = 2x^2+5$$

$x^3$: $A+C=0$,

$x^2$: $B+D=2$,

$x^1$: $3A+2C=0$,

$x^0$: $3B+2D=5$.

Получим систему $\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=2 \\ 3A+2C=0 \\ 3B+2D=5 \end{cases}$, решая её получим $\begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=0 \\ D=1 \end{cases}$.Коэффициенты найдены, вернемся к вычислению предела:

$$2\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)} = 2\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b \frac{dx}{x^2+(\sqrt{2})^2} + \right.$$

$$\left. + \int_0^b \frac{dx}{x^2+(\sqrt{3})^2}\right) = 2\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^b + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^b\right) = 2\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(arctg\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) - arctg0\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right) - arctg0\right)\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\pi.$$

**Пример 4.9.** При каких значениях $\alpha$ несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ сходится и при каких расходится?

Решение.

Если $\alpha \neq 1$, то $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\alpha}\,dx =$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \infty, & \alpha < 1 \\ -\dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Если $\alpha = 1$,то $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} ln|x|\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}(lnb - ln1) = \infty.$

Таким образом, интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

**Замечание:** в некоторых задачах нет необходимости вычислять интеграл. Достаточно лишь знать, сходится он или расходится.

Сформулируем признаки сходимости несобственных интегралов первого рода.

**Теорема 4.3.** (признак сравнения).
Если на промежутке $[a;+\infty)$ непрерывные функции $f(x)$, $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и интеграл $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ тоже сходится, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$.

**Теорема 4.4.** (предельный признак ). Если существует предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = k,\ 0 < k < +\infty$,
$(f(x) > 0,\ \varphi(x) > 0)$, то интегралы $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

**Замечание:** В качестве эталона для сравнения функций часто берут функцию $\varphi(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.В примере 4.9 показано, что несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

**Пример 4.10.** Исследовать сходимость интеграла:
а) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(2^x+1)}$ ; б) $\int_1^{+\infty}ln\frac{x^2+1}{x^2}dx$;в) $\int_{-2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+2}}$;
г) $\int_1^{+\infty}\frac{arctgx}{x}dx$ ;д) $\int_1^{+\infty}\frac{2+sinx}{\sqrt{x}}dx$.

Решение.

а)Сравним функцию $f(x)=\frac{1}{x^2(2^x+1)}$ с функцией $\varphi(x)=\frac{1}{x^2}$.Как известно, интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, так как $\alpha=2>1$.На промежутке $x\in[1;+\infty)$ имеем $f(x)=\frac{1}{x^2(2^x+1)}<\varphi(x)=\frac{1}{x^2}$,следовательно интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(2^x+1)}$сходится по признаку сравнения (из сходимости большего интеграла следует сходимость меньшего);

б) Здесь подынтегральная функция $f(x)=ln\frac{x^2+1}{x^2}>0,$ при $x\in[1;+\infty)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\frac{1}{x^2}>0,$ интеграл от которой сходиться $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ $(\alpha=2>1)$. А так как существует предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$(используем предельный признак):

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{b\to+\infty}\frac{ln\dfrac{x^2+1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{b\to+\infty}\frac{ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x^2}}=1,$$

следовательно исходный интеграл $\int_1^{+\infty}ln\frac{x^2+1}{x^2}dx$ сходится.

Оставшиеся несобственные интегралы: в) $\int_{-2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+2}}$;г) $\int_1^{+\infty}\frac{arctgx}{x}dx$ ;д) $\int_1^{+\infty}\frac{2+sinx}{\sqrt{x}}dx$, рекомендуется исследовать на сходимость самостоятельно, для закрепления изученного материала.

## Несобственные интегралы второго рода.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке$[a;b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x=b$ (рис.4). Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$, то его называют **несобственным интегралом второго рода**.

**Обозначение:** $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

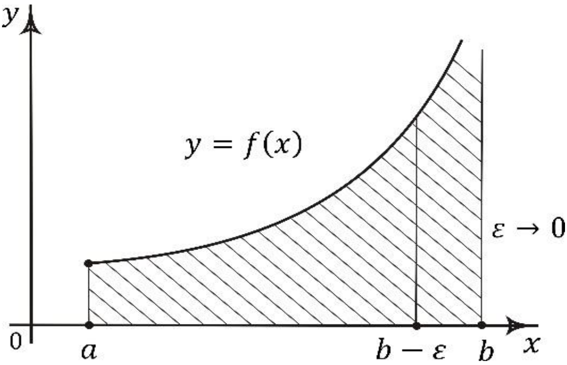



Рис.4

**Замечание:** несобственный интеграл второго рода выражает площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции (рис.4)

Аналогично, если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке$(a;b]$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$ , то $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$.

Если функция $f(x)$ имеет разрыв во внутренней точке $c$ отрезка $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{, где } c = const.$$

Если сходятся оба интеграла справа, то сходится и суммарный интеграл слева.

**Замечание:** точек разрыва внутри отрезка может быть несколько. В частности, если подынтегральная функция разрывна на концах интервала то есть одновременно при $x = a$ и при $x = b$,то необходимо сместиться в окрестности этих точек справа и слева соответственно, то есть

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)dx$, Если сходятся оба интеграла справа, то сходится и суммарный интеграл слева.

**Пример 4.11.** Вычислить несобственные интегралы второго рода или установить их расходимость:

а) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2}$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{lnx}}$; в) $\int_{-1}^1 \frac{3xdx}{x^2-1}$; г) $\int_{-\frac{1}{8}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение.

а) Так как подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ разрывна в $(\cdot)x = 2$, смещаемся в окрестность точки слева:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon}(x-2)^{-2}d(x-2) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(x-2)}\Big|_0^{2-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2-\varepsilon-2} - \frac{1}{0-2}\right) = \frac{1}{0} + \frac{1}{2} = \infty,$$

следовательно, исходный интеграл расходится;

б) Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{lnx}}$ разрывна в $(\cdot)x = 1$,так как О.О.Ф: $\begin{cases} x\sqrt{lnx} \neq 0 \\ lnx \geq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x \neq 0, \sqrt{lnx} \neq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$,

$\begin{cases} x \neq 0, x \neq 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x > 1}$.

В соответствии с правилом вычисления несобственных интегралов второго рода, имеем:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{lnx}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^e \frac{1}{x}(lnx)^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^e (lnx)^{-\frac{1}{2}}d(lnx) =$$

$$= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{lnx}\Big|_{1+\varepsilon}^e = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{lne} - \sqrt{ln(1+\varepsilon)}\right) = 2;$$

в) Подынтегральная функция $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$ разрывна на концах интервала, то есть при $x = \pm 1$,поэтому имеем:

$$\int_{-1}^1 \frac{3xdx}{x^2-1} = \int_{-1}^0 \frac{3xdx}{x^2-1} + \int_0^1 \frac{3xdx}{x^2-1} =$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{2xdx}{x^2-1}+\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{2xdx}{x^2-1}=$$
$$=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{d(x^2-1)}{x^2-1}+\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{d(x^2-1)}{x^2-1}=$$
$$=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(ln|x^2-1|\Big|_{-1+\varepsilon}^{0}+ln|x^2-1|\Big|_{0}^{1-\varepsilon}\right)=$$
$$=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}(ln|0^2-1|-ln|(-1+\varepsilon)^2-1|+$$
$$+ln|(1-\varepsilon)^2-1|-ln|0^2-1|)=\frac{3}{2}(-ln0+ln0),$$

интеграл слева расходится, так как оба интеграла справа расходятся ($ln0$– не существует);

г)Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ разрывна во внутренней $(\cdot)x=0$. Поэтому,

$$\int_{-\frac{1}{8}}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\int_{-\frac{1}{8}}^{0}x^{-\frac{1}{3}}dx+\int_{0}^{1}x^{-\frac{1}{3}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\frac{1}{8}}^{0-\varepsilon}x^{-\frac{1}{3}}dx+$$
$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-\frac{1}{8}}^{0-\varepsilon}+\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{0+\varepsilon}^{1}=$$
$$=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left((0-\varepsilon)^{\frac{2}{3}}-\left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)+\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1^{\frac{2}{3}}-(0+\varepsilon)^{\frac{2}{3}}\right)=$$
$$=\frac{3}{2}\left(0-\left(-\frac{1}{2}\right)^{3\cdot\frac{2}{3}}\right)+\frac{3}{2}=-\frac{3}{8}+\frac{3}{2}=\frac{9}{8}.$$

**Пример 4.12.** При каких значениях $\alpha$ несобственный интеграл$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx$ сходится и при каких расходится?

Решение.

Функция $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$разрывна в $(\cdot)$ $x=0$. Рассмотрим случаи:

Если $\alpha\neq 1$, то $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}x^{-\alpha}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{0+\varepsilon}^{1}=$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty, & \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & 0 < \alpha < 1 \end{cases};$$

Если $\alpha = 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} ln|x|\Big|_{0+\varepsilon}^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\big(ln1 - ln(0+\varepsilon)\big) = \infty.$$

Таким образом, интеграл сходится $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

**Замечание:** в некоторых задачах интегрирования нет необходимости вычислять интеграл, достаточно установить его сходимость или расходимость. Сформулируем признаки сходимости несобственных интегралов второго рода.

**Теорема 4.5.** ( признак сравнения)

Пусть непрерывные на промежутке $[a;b)$ функции $f(x)$, $\varphi(x)$, при $x = b$ терпят бесконечный разрыв и удовлетворяют условию

$0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$. Из сходимости интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$ , а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$.

**Теорема 4.6.** (предельный признак)

Пусть функции $f(x), \varphi(x)$ непрерывны на промежутке $[a;b)$, в точке $x = b$ терпят разрыв. Если существует предел $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = k,\ 0 < k < b$, то интегралы $\int_a^b \varphi(x)dx$ и $\int_a^b f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

**Замечание:** в качестве эталона для сравнения функций часто берут функцию $\varphi(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$.В примере 4.12 показано, что несобственный интеграл$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

**Пример 4.13.** Исследовать сходимость интеграла:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x}}$.;б) $\int_0^1 \frac{dx}{tgx}$;в) $\int_0^1 \frac{sin2x}{\sqrt[3]{x}} dx$;г) $\int_0^{\frac{1}{\ln 2}} \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^3}$.

Решение.

а) Подынтегральная функция$f(x) = \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x}}$ разрывна в точке $x = 0$.Сравним ее с функцией $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ интеграл от которой$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx$ сходится, так как $\alpha = \frac{1}{3} < 1$.Очевидна такая оценка на промежутке $(0; 1]$: $f(x) = \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x}} < \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ , следовательно, несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x}}$ сходится ( по признаку сравнения);

б) Функция $f(x) = \frac{1}{tgx}$ разрывна в точке $x = 0$.Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, интеграл от которой$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ расходится, так как $\alpha = 1$. А так как существует предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{tgx} = 1 \neq 0 \neq \infty$, то по предельному признаку интеграл$\int_0^1 \frac{dx}{tgx}$ расходится.

Следующие несобственные интегралы, для закрепления изученного материала, рекомендуется исследовать на сходимость самостоятельно: в) $\int_0^1 \frac{sin2xdx}{\sqrt[3]{x}}$;г) $\int_0^{\frac{1}{\ln 2}} \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^3}$.

**Задания для самостоятельного решения**

**10.Вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница, применив один из методов интегрирования:**

| | |
|---|---|
| **1.** $\int_0^{\pi}(2x+\sin 2x)dx$ | **14.** $\int_1^{e}\frac{1+\ln^3 x}{x}dx$ |
| **2.** $\int_0^{3}x\sqrt{x+1}dx$ | **15.** $\int_0^{1}\frac{xdx}{(x^2+1)^2}$ |
| **3.** $\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\sin 2x}{2}}dx$ | **16.** $\int_1^{3}\frac{dx}{(x-5)^2}$ |
| **4.** $\int_1^{2}\frac{dx}{x^3+x}$ | **17.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2tgxdx}{\cos^2 x}$ |
| **5.** $\int_{-4}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ | **18.** $\int_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}dx$ |
| **6.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2xdx$ | **19.** $\int_0^{2}\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ |
| **7.** $\int_1^{e}x\ln xdx$ | **20.** $\int_0^{1}x\,arctgxdx$ |
| **8.** $\int_1^{e}\frac{\sin(\ln x)dx}{x}$ | **21.** $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$ |
| **9.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 2x\cos 8xdx$ | **22.** $\int_1^{2}xe^{x}dx$ |
| **10.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xdx$ | **23.** $\int_0^{1}(2x-1)^6dx$ |
| **11.** $\int_4^{9}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$ | **24.** $\int_0^{2}\sin^3 x\cos xdx$ |
| **12.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 xdx}{\sin^4 x}$ | **25.** $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{6xdx}{(3x^2-1)^4}$ |

| | |
|---|---|
| **13.** $\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$ | **26.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x\,(1+2\cos x\,)\,dx$ |

**Ответы**:

**10. 1.** $\pi^2$; **10.2.**$\frac{116}{15}$; **10.3.**2; **10.4.** $\frac{1}{2}ln\frac{8}{5}$; **10.5.** $\arcsin\frac{2}{3}$;

**10.6.**$-\frac{1}{2}$;**10.7.**$\frac{1}{4}(e^2+1)$;**10.8.** $1-cos1$; **10.9.**$-\frac{17}{120}$;

**10.10.**$\frac{2}{3}$; **10.11.**$7+\ 2ln2$; **10.12.** $\frac{1}{3}$; **10.13.** $\frac{\pi}{8}$; **10.14.** $\frac{5}{4}$;

**10.15.** $\frac{1}{4}$;**10.16.** $\frac{1}{4}$;**10.17.** 1;**10.18.**$\pi$ ;**10.19** $\frac{\pi}{6}$;**10.20.** $\frac{\pi-2}{4}$;

**10.21.**$\frac{ln2}{2}$;**10.22.**$e^2$;**10.23.**$\frac{1}{7}$;**10.24.** $\frac{1}{4}$;**10.25.** 21;

**10.26.** $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

**11.Вычислить несобственные интегралы первого рода или установить их расходимость:**

| | |
|---|---|
| **1.** $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ | **14.** $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{xln^2x}$ |
| **2.** $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(1-x)^2}$ | **15.** $\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^6}$ |
| **3.** $\int_1^{+\infty} \frac{ln\,x}{x}dx$ | **16.** $\int_7^{+\infty} \frac{dx}{(x-5)^2}$ |
| **4.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+12}$ | **17.** $\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2}dx$ |
| **5.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ | **18.** $\int_8^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{4+x^2}}$ |
| **6.** $\int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{x^2+1}dx$ | **19.** $\int_0^{+\infty} e^{-5x}dx$ |
| **7.** $\int_0^{+\infty} 2x\sin xdx$ | **20.** $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5}$ |
| **8.** $\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^2+2x+10}$ | **21.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ |
| **9.** $\int_1^{+\infty} \frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$ | **22.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+2}$ |

| | |
|---|---|
| **10.** $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4}$ | **23.** $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$ |
| **11.** $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^3+5}$ | **24.** $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$ |
| **12.** $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ | **25.** $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ |
| **13.** $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ | **26.** $\int_{-\infty}^{0}x^3e^{-x^2}dx$ |

**Ответы**:

**11.1.**$\frac{1}{2}$;**11.2.**1;**11.3.**расходится;**11.4.**$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$;**11.5.**$\frac{\pi}{2}$; **11.6.**расходится;**11.7.**расходится;**11.8.**$\frac{\pi}{4}$;**11.9.**расходится;**11.10.** $\frac{\pi}{4}$;**11.11.**расходится;**11.12.** $\frac{\pi}{4}$; **11.13.**расходится;**11.14.**1;**11.15.** $\frac{\pi}{12}$;**11.16.**$\frac{1}{2}$;**11.17.**1;**11.18**.расходится;**11.19.** $\frac{1}{5}$;**11.20.** $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-arctg2\right)$;**11.21.** $\pi$;**11.22.** $\frac{\pi}{2}$;
**11.23.**$\frac{1}{2}$; **11.24.** 2; **11.25.** расходится; **11.26.** $-\frac{1}{2}$.

**12.Вычислить несобственные интегралы второго рода или установить их расходимость:**

| | |
|---|---|
| **1.** $\int_{0}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$ | **14.** $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| **2.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ | **15.** $\int_{1}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$ |
| **3.** $\int_{0}^{1}\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$ | **16.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1-\cos 2x}$ |
| **4.** $\int_{3}^{7}\frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}$ | **17.** $\int_{2}^{5}\frac{dx}{(x-4)^2}$ |

| | |
|---|---|
| **5.** $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$ | **18.** $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$ |
| **6.** $\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$ | **19.** $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$ |
| **7.** $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{sin^2(4x)}$ | **20.** $\int_5^6 \frac{dx}{(x-5)^2}$ |
| **8.** $\int_0^1 \ln x dx$ | **21.** $\int_0^1 x\ln x dx$ |
| **9.** $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}$ | **22.** $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ |
| **10.** $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{1+cosx}$ | **23.** $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[4]{\ln x}}$ |
| **11.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ | **24.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg\, xdx$ |
| **12.** $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ | **25.** $\int_2^6 \frac{dx}{(x-3)^2}$ |
| **13.** $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{\frac{1}{x}+3}dx}{x^2}$ | **26.** $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+8x-15}}$ |

**Ответы**:

**12.1.** расходится; **12.2.** $\frac{\pi}{2}$; **12.3.** расходится**12.4.** $\frac{384}{5}$;

**12.5.**$2\sqrt{2}$;**12.6.** расходится;**12.7.** расходится;**12.8.**-1;

**12.9.**расходится;**12.10.**расходится;**12.11.** $\pi$;**12.12**. 2;

**12.13.**расходится;**12.14.** $\frac{\pi}{2}$;**12.15**. $\frac{8}{3}$;**12.16.**расходится;

**12.17.**расходится;**12.18**. $\frac{3}{2}$;**12.19** 4;**12.20.**расходится;

**12.21.**$-\frac{1}{4}$;**12.22.** $\frac{\pi}{2}$;**12.23.**$\frac{4}{3}$;**12.24.**расходится;

**12.25.**расходится; **12.26.** $\pi$.

# ГЛАВА 5. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Определённый интеграл используется в различных приложениях: при вычислении площадей плоских фигур, длин дуг плоских кривых, объемов тел вращения и др.

## 5.1. Вычисление площадей плоских фигур

**Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат.**

Вычисление площадей плоских фигур основано на геометрическом смысле определенного интеграла: как уже было установлено, он численно равен площади криволинейной трапеции,расположенной выше оси абсцисс, то есть площадь фигуры ограниченной линиями

$y = f(x) \geq 0, x = a, x = b, y = 0$(рис.5),вычисляется по формуле (5.1):

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\,dx} \quad \textbf{(5.1)}$$

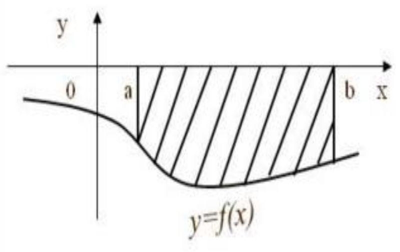



Рис.6.

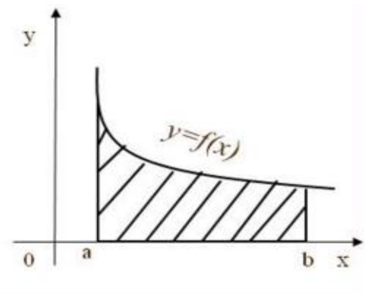



Рис.5.

Если график расположен ниже оси Ох, то есть $f(x) \leq 0$ при $x \epsilon [a; b]$ (рис.6), то площадь вычисляется по формуле (5.2):

$$\boldsymbol{S = -\int_a^b f(x)\,dx} \quad \textbf{(5.2)}$$

**Замечание:**

**1)** Если Вам предложено решить просто определенный интеграл без всякого геометрического смысла, то он может быть отрицательным;

**2)** Если Вам предложено найти площадь фигуры с помощью определенного интеграла, то площадь всегда положительна! Именно поэтому в только что рассмотренной формуле фигурирует минус (см. формулу 5.2).

Учитывая, что $|f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) < 0 \end{cases}$, формулы (5.1) и (5.2) можно объединить в одну:

$$\boldsymbol{S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|} \quad \textbf{(5.3)}$$

Если плоская фигура ограничена линиями $y = f_1(x), y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \epsilon [a; b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис.7), то ее площадь вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx} \quad \textbf{(5.4)}$$

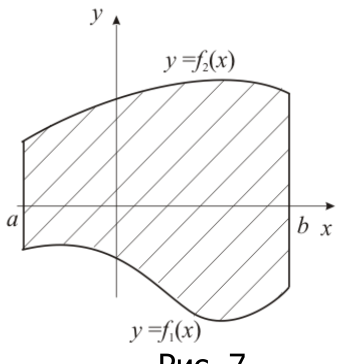



Рис .7.

**Пример 5.1.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x, x\epsilon[0;3]$.

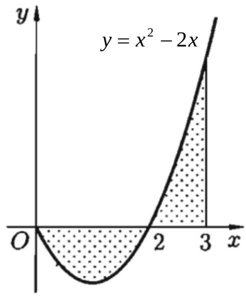



Рис 8.

Решение.

Так как на промежутке $x\epsilon[0;2]$ функция отрицательна

$y = x^2 - 2x < 0$ , а на промежутке $x\epsilon[2;3]$ положительна (см.рис.8), то применяя формулу (5.3) имеем:

$$S = -\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx =$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_2^3 = -\left(\frac{8}{3} - 4\right) +$$

$$+9 - 9 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}(\text{ед.}^2).$$

**Пример 5.2.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = 3 - x^2, y = 2x.$

Решение.

Найдем точки пересечения прямой $y = 2x$ и параболы $y = 3 - x^2$,для этого решим систему уравнений:

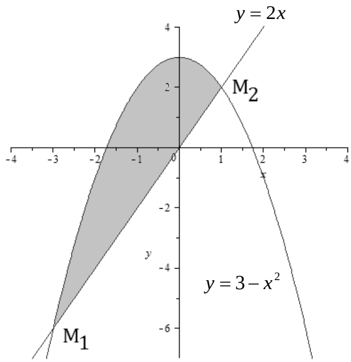



Рис .9.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 3 - x^2, \end{cases} \quad 2x = 3 - x^2,$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0,$$

$$x_1 = -3, x_2 = 1, y_1 = -6, y_2 = 2.$$

Таким образом, получим две точки пересечения $M_1(-3;-6), M_2(1;2)$(рис.9).

Строим по данным точкам прямую $y = 2x$ и параболу $y = 3 - x^2$.Площадь полученной фигуры найдем по формуле (5.4),где $f_1(x) = 2x,\ \ f_2(x) = 3 - x^2, f_2(x) \geq f_1(x),\ x\epsilon[-3; 1]$ :

$$S = \int_{-3}^{1} (3 - x^2 - 2x)\, dx = \left(3x - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= 3 - \tfrac{1}{3} - 1 - (-9 + 9 - 9) = 11 - \tfrac{1}{3} = 10\tfrac{2}{3}(\text{ед.}^2).$$

**Замечание:** в некоторых случаях, при нахождении площади фигуры, ограниченной функцией $y = f(x)$ заданной в декартовой системе координат, удобно переходить к параметрическому заданию линии, то есть, представить функциональную зависимость $y = f(x)$ через параметр $t$ (все эти функции хорошо изучены).

**Площадь фигуры,ограниченной параметрически заданной функцией.**

Если криволинейная трапеция ограниченна сверху кривой, задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, y(t) \geq 0, t\epsilon[t_1; t_2],$ прямыми $x = a, x = b$ и осью $0x$(рис.10), то её площадь вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{S = \left|\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt\right| \quad (5.5)}$$

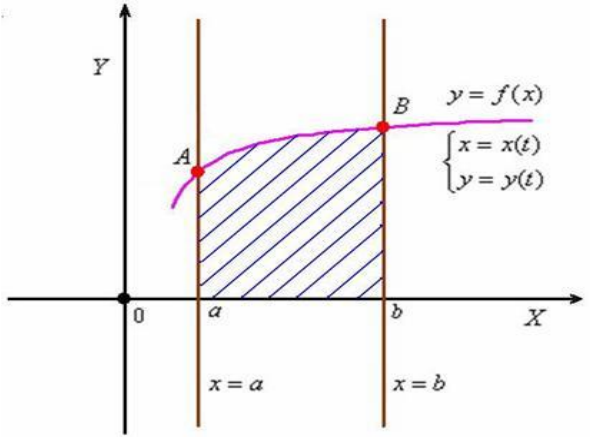



Рис.10

, где $t_1$ и $t_2$определяются из равенств $x(t_1) = a$ и $x(t_2) = b$,при некотором вполне конкретном значении параметра $t_1$ параметрические уравнения будут определять координаты точки $A$, а при другом значении $t_2$ координаты точки$B$. .

Действительно, сделав подставку $x = x(t)$и $y = y(t)$ в формуле (5.3), учитывая, что $dx = x'(t)dt$ , $t\epsilon[t_1; t_2]$получим:

$$S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \\ dx = x'(t)\,dt \\ x(t_1) = a \\ x(t_2) = b \end{matrix}\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt\right|.$$

**Пример 5.3.** Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Решение.

Поскольку вычислении площади эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$,

$$\frac{y^2}{9}=1-\frac{x^2}{4}|\cdot 9,$$

$$y^2=9-\frac{9}{4}x^2,$$

$y=\pm\sqrt{9-\frac{9}{4}x^2}$ , $x\epsilon[-2;2]$ –вычисление интеграла от данной функции довольно громоздко, поэтому целесообразно перейти к параметрическому заданию эллипса.

Известно, что эллипс задается параметрически уравнением $\begin{cases} x=acost \\ y=bsint \end{cases}, t\epsilon[0;2\pi]$,где $a,b$ полуоси эллипса, в нашем случае $a=2, b=3$ ,следовательно, исходное уравнение в параметрической форме имеет вид: $\begin{cases} x=2cost \\ y=3sint \end{cases}, t\epsilon[0;2\pi]$.

Действительно, если составить таблицу значений координат $(x;y)$ точек кривой, соответствующих различным значениям параметра $t, 0\le t\le 2\pi$:

| $t$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $2$ | $\sqrt{2}$ $\approx 1{,}4$ | $0$ | $-\sqrt{2}$ | $-2$ | $-\sqrt{2}$ | $0$ | $\sqrt{2}$ | $2$ |
| $y$ | $0$ | $\sqrt{2}$ $\approx 1{,}4$ | $3$ | $\sqrt{2}$ | $0$ | $-\sqrt{2}$ | $-3$ | $-\sqrt{2}$ | $0$ |

Нанести точки $(x;y)$ на координатную плоскость $Oxy$ и соединить их линией. Когда параметр $t$ изменяется от 0 до $2\pi$, соответствующая точка $(x;y)$ описывает эллипс с полуосями $a=2, b=3$ (рис.11).

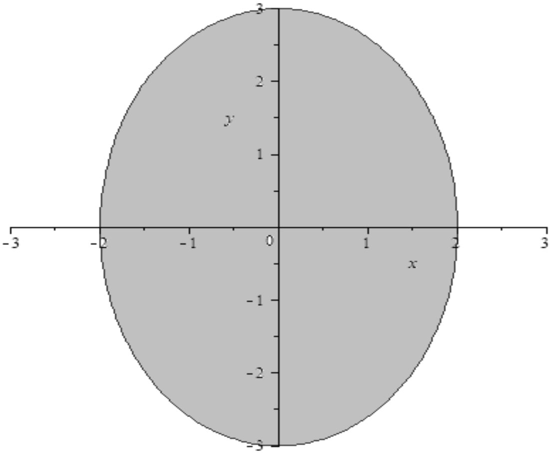



Рис. 11

Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей, найдем площадь четвертой части эллипса $\frac{1}{4}S$ ,здесь $x$ изменяется от 0 до 2, при этом $t$ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0 . Согласно формуле (5.5) получим:

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(t)x'(t)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 3sint(-2sint)dt =$$

$$= -6\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin^2tdt = 6\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos2t}{2}dt = 3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2t)dt =$$

$$= 3\left(t - \frac{1}{2}sin2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}sin\pi - 0 + \frac{1}{2}sin0\right) = \frac{3\pi}{2};$$

Таким образом, площадь всей фигуры равна:

$S = 4 \cdot \frac{3\pi}{2} = 6\pi(\text{ед.}^2)$.

**Пример 5.4.** Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды, уравнение которой задано параметрически: $\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}, t\epsilon[0;2\pi]$.

Решение.

Для построения фигуры, заданной параметрически, составим таблицу значений координат $(x;y)$ точек кривой, соответствующих различным значениям параметра $t$,

$0 \le t \le 2\pi$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $x$ | $0$ | $a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \approx 0{,}57a$ | $a\pi$ | $a\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right) \approx 5{,}71a$ | $2\pi a$ |
| $y$ | $0$ | $a$ | $2a$ | $0$ | $0$ |

Нанесем точки $(x;y)$ на координатную плоскость $XOY$ и соединим их линией. Когда параметр $t$ изменяется от 0 до $2\pi$, соответствующая точка $(x;y)$ описывает арку циклоиды (рис.12)

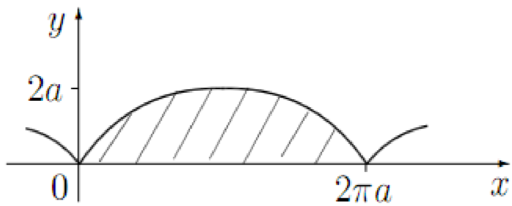



Рис. 11

Согласно формуле (5.5) получим:

$$S = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,dx = \int_0^{2\pi} a(1 - cost)\big(a(t - sint)\big)'dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - cost)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2cost + cos^2 t)dt =$$

$$=a^2 \left(\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi} costdt + \int_0^{2\pi} cos^2 tdt\right) =$$

$$= a^2(t|_0^{2\pi} - 2sint|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + cos2t)dt) =$$

$$= a^2\left(2\pi - 0 - 2(sin2\pi - sin0) + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}sin2t\right)\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

$$= a^2\left(2\pi + \frac{1}{2}\left(2\pi + \frac{1}{2}sin4\pi - 0 - \frac{1}{2}sin0\right)\right) = 3a^2\pi.$$

Таким образом, площадь одной арки циклоиды равна: $S = 3a^2\pi(\text{ед.}^2)$.

По сути, мы вывели формулу для нахождения площади одной арки циклоиды в общем виде. И если на практике вам встретится задача с конкретным значением параметра $a$, то вы легко сможете проверить результат вычисления. Так, например при $a = 3$,

$$S = 3 \cdot 3^2 \cdot \pi = 27\pi(\text{ед.}^2)$$

**Вычисление площадей фигур заданных в полярной системе координат.**

Для нахождения площадей ограниченных кривыми заданных в полярной системе координат нам пригодятся навыки построения графиков функций в данной системе координат, поэтому необходимо вспомнить, что же такое полярная система координат.

<u>Полярная система координат. Криволинейный сектор и сегмент.</u>

Любая точка в полярной системе координат определятся с помощью полярных координат $M(r;\varphi)$, где $r$ – расстояние от начала координат $O(0;0)$ (полюса) до точки $M(r;\varphi)$, $\varphi$ – угол между положительным направлением действительной оси $Ox$ и(движемся против часовой стрелки) радиус-вектором $r$ точки $M$ (рис. 13).

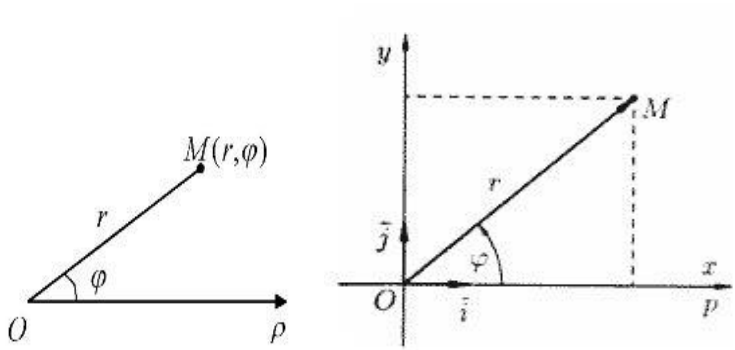



Рис. 13

Формулы перехода от декартовой системы координат к полярной системе координат: $\begin{cases} x = r cos\varphi \\ y = r sin\varphi \end{cases}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$;
Рассмотрим некоторую функцию $r = r(\varphi) \geq 0$ заданную в полярной системе координат принимающую неотрицательные значения на отрезке $\varphi \in [\alpha; \beta]$ , где $r = r(\varphi)$- длина радиус – вектора, соединяющего полюс О с произвольной точкой кривой $r$, а $\varphi$ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси Ор.

В полярной системе может быть задан криволинейный сектор или сегмент.

**Криволинейный сектор** – это фигура, ограниченная лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и некоторой линией $r = r(\varphi) \geq 0$ , которая непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$ (рис. 14).

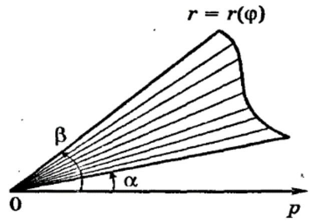



Рис. 14

**Площадь криволинейного сектора** может быть найдена по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi \quad \textbf{(5.6)}$$

**Сегмент-**это часть сектора, то есть фигура, ограниченная кривыми $r = r(\varphi), \rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ (рис.15). **Площадь сегмента** может быть найдена по формуле

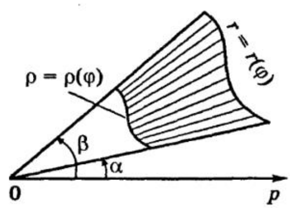


Рис.15

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(r^2(\varphi) - \rho^2(\varphi)\right) d\varphi \textbf{(5.7)}$$

**Пример 5.5.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 2\varphi, \varphi \in [0; 3\pi]$.

Решение.

Известно, что уравнение $r = a\varphi$ задает кривую в полярных координатах, которая называется спиралью Архимеда. В нашем случае $a = 2$, изобразим фигуру- отметим полюс, изобразим полярную ось Ор, начертим угловые направления $\varphi$ (рис.16).Отметим найденные точки $(r; \varphi)$ и соединим их линией (рис. 17):

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ |
| $r$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\frac{5\pi}{2}$ | $3\pi$ | $\frac{7\pi}{2}$ | $4\pi$ |

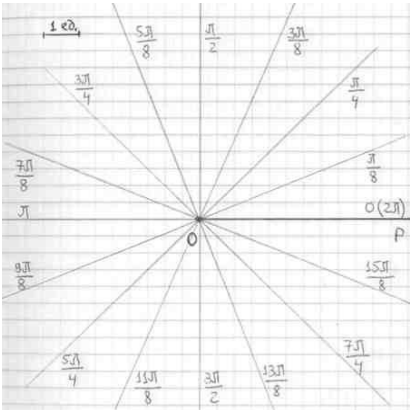



Рис.16

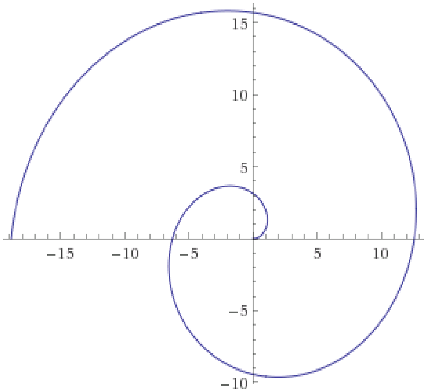



Рис.17

Площадь полученного сектора находим по формуле (5.6):

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{3\pi} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{3\pi}} (2\varphi)^2 d\varphi = 2\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{3\pi}} \varphi^2 d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\varphi^3\Big|_0^{\mathbf{3\pi}} = \frac{2}{3}(3\pi)^3 = 18\pi^3(\text{ед.}^2).$$

**Замечание:** если в условии не указан диапазон значений угла, то либо этот диапазон совпадает с областью определения функции $r = r(\varphi)$,либо принимается равным отрезку$[0; 2\pi]$.

**Пример 5.6.** Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 1 + cos\varphi$.

Решение.

Поскольку $r = 1 + cos\varphi$ чётная функция, действительно, $r(-\varphi) = 1 + cos(-\varphi) = 1 + cos\varphi = r(\varphi)$,а как известно, четная функция симметрична относительно оси $Ox$ ,поэтому достаточно построить половину фигуры на промежутке $\varphi \in [0; \pi]$:

| $\varphi$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | 2 | $1+\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}9$ | $1+\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}7$ | $\frac{3}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $1-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}3$ | $1-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}1$ | 0 |

Оставшуюся половину $\varphi \in [\pi; 2\pi]$ отображаем симметрично относительно оси $Ox$ (рис.18)

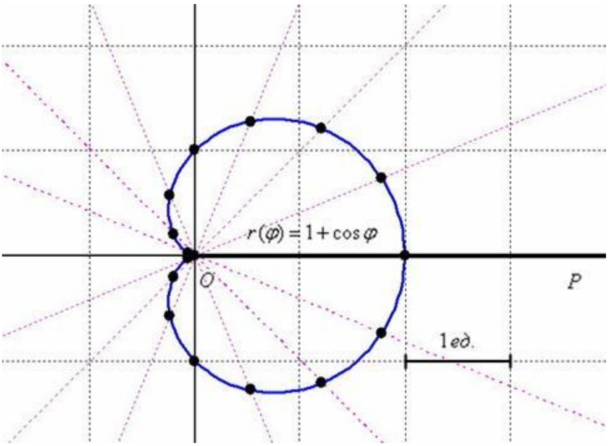



Рис. 18

Поскольку фигура симметрична относительно оси $Ox$, по формуле (5.6) для начала найдем половину площади $\frac{1}{2}S$:

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+2cos\varphi+cos^2\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi+2sin\varphi)\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}(\pi - 2sin\pi - 0 + 2sin0) +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+cos2\varphi)d\varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\left(\varphi+\frac{1}{2}sin2\varphi\right)\Big|_0^{\pi}=$$
$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\left(\pi+\frac{1}{2}sin2\pi-0-\frac{1}{2}sin0\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Таким образом, $S=2\cdot\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$ (ед.$^2$).

**Пример 5.7.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $r=1, r=3, \varphi=\frac{\pi}{4}, \varphi=\frac{\pi}{3}$.

Решение.

Посмотрим как это выглядят заданные линии $r=1, r=3$ в декартовой системе координат, для этого сделаем подстановку $r=\sqrt{x^2+y^2}$:

$r=1, \sqrt{x^2+y^2}=1,$

$\underline{x^2+y^2=1^2}$ ;

$r=3, \sqrt{x^2+y^2}=3,$

$\underline{x^2+y^2=3^2}$ .

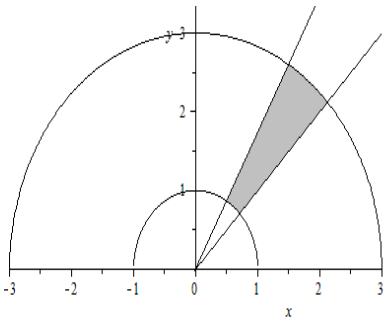



Рис.19

Получили окружности с центром в начале координат и радиусами 1,3 соответственно. Построим данные линии, учитывая, что угол изменяется от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{3}$ (рис.19), получили сегмент, его площадь находим по формуле (5.7):

$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(r^2(\varphi)-\rho^2(\varphi)\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(3^2-1^2)d\varphi=$$
$$=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi=4\,\varphi|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=4\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=4\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}\text{ (ед.}^2\text{)}.$$

## 5.2. Вычисление длины дуги плоской кривой

Помимо нахождения площади, определённый интеграл позволяет рассчитать и другие показатели, в частности длину дуги кривой, то есть числовую характеристика протяжённости этой кривой.

**Длиной дуги** кривой линии называют предел, к которому стремится длина вписанной в нее ломаной линии при неограниченном увеличении числа ее звеньев, при этом длина наибольшего звена стремиться к нулю.

**Вычисление дуги плоской кривой в декартовых координатах.**

Покажем, что если функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$, непрерывны при всех $x \in [a; b]$, то длина дуги $AB$ (рис.20) этой кривой, вычисляется по формуле: $\boldsymbol{l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx}$ **(5.8)**

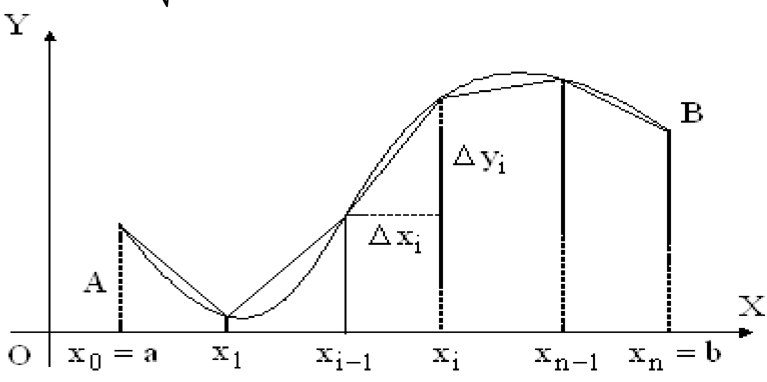



Рис. 20

1. Для нахождения длины кривой разобьем ее на $n$ маленьких кусочков, то есть разобьем отрезок $[a; b]$ на $n$ частей точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$(рис.20).Пусть этим точкам соответствуют точки $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$. При большом числе разбиения дугу можно спрямить кусочком прямой

(хорды) близкой по размеру. Для этого проведем хорды $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$,длины которых обозначим соответственно через $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n$. Получим ломанную $M_0M_1M_1M_2 \dots M_{n-1}M_n$, длина которой равна

$$L_n = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \dots + \Delta L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i\,;$$

2. Длину хорды (звена ломанной) $\Delta L_i (i = 1,2, \dots, n)$ можно найти применяя теорему Пифагора из прямоугольника с катетами$\Delta x_i, \Delta y_i$:

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{\Delta x_i{}^2\left(1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right)} =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i = \sqrt{1 + \left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)^2}\,\Delta x_i =$$

$= \sqrt{1 + (f'(x_i))^2}\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,
$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$,а длина всей ломанной $M_0M_1M_1M_2 \dots M_{n-1}M_n$ равна

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta x_i \ (5.9),$$

где $c_i \epsilon (x_{i-1}; x_i)$

3.Длина $l$ кривой $AB$ по определению равна $l = \lim\limits_{max\Delta L_i \to 0} L_n = \lim\limits_{max\Delta L_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i$, заметим, что при

$\Delta L_i \to 0$ также и $\Delta x_i \to 0$.Функция$\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}$ непрерывна на отрезке$[a; b]$,так как по условию непрерывна функция$f'(x)$.Следовательно, существует предел интегральной суммы$(5.9)$,когда $max\,\Delta x_i \to 0$:

$$l = \lim\limits_{\substack{max\Delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx.$$

**Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически.**

Если кривая $y = f(x)$ задана параметрически уравнением $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \epsilon [t_1; t_2]$ и функции $x(t), y(t)$ имеют непрерывные производные при всех $t \epsilon [t_1; t_2]$,то длина дуги $AB$ этой кривой, вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt} \quad \textbf{(5.10)}$$

Покажем это, длина дуги параметрической кривой, получается из формулы (5.8) подстановкой $x = x(t)$ , $y = y(t)$.Известно, что производной параметрически заданной функции вычисляется по формуле $y'(x) = \frac{y\prime(t)}{x\prime(t)}$ и $dx = x'(t)dt$ ,поэтому имеем:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx = \begin{vmatrix} x = x(t) \\ x = x(t) \\ dx = x'(t)dt \\ y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\, x'(t)dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}{\left(x'(t)\right)^2}}\, x'(t)dt =$$

$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\ dt$, что и требовалось показать.

**Замечание:** длина дуги пространственной параметрической кривой $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ вычисляется аналогично, то есть по формуле

$$\boldsymbol{l} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t})\right)^2 + \left(\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{t})\right)^2 + \left(\boldsymbol{z}'(\boldsymbol{t})\right)^2} \boldsymbol{dt} \quad \textbf{(5.11)}$$

**Вычисление длины дуги кривой, заданной в полярных координатах.**

Длина дуги кривой $AB$ заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{l} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\boldsymbol{r}')^2 + \boldsymbol{r}^2} \boldsymbol{d\varphi} \quad \textbf{(5.12)}$$

Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке$[\alpha; \beta]$.Если в равенствах связывающих полярные и декартовы координаты$\begin{cases} x = r cos\varphi \\ y = r sin\varphi \end{cases}$,угол $\varphi$ считать параметром,то кривую $AB$ можно задать параметрически $\begin{cases} x(\varphi) = r(\varphi) cos\varphi \\ y(\varphi) = r(\varphi) sin\varphi \end{cases}$,тогда $x'(\varphi) = r'(\varphi) cos\varphi - r(\varphi) sin\varphi$, $y'(\varphi) = r'(\varphi) sin\varphi + r(\varphi) cos\varphi$ , применяем формулу (5.10) для нахождения длины дуги имеем:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(\varphi)\right)^2 + \left(y'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi =$$

$$= \int_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}} \sqrt{(r'(\varphi) cos\varphi - r(\varphi) sin\varphi)^{\mathbf{2}} + (r'(\varphi) sin\varphi + r(\varphi) cos\varphi)^{\mathbf{2}}}\, d\varphi$$

$= \int_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}} \sqrt{\left(r'(\varphi)\right)^{\mathbf{2}} + \left(r(\varphi)\right)^{\mathbf{2}}} d\varphi$, где $\varphi \in [\alpha; \beta]$,что и требовалось показать.

**Замечание:** в практических примерах при нахождении длины дуги, как правило, не нужно строить чертеж. Иллюстрация приведена только для некоторых примеров (для наглядности).

**Пример 5.8.** Найти длину дуги кривой:

а) $x^2 + y^2 = a^2$ ; б) $y^2 = (x+1)^3, x \in [0;4]$ ;в) $\begin{cases} x = acos^3 t \\ y = asin^3 t \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$; г) $r = a(1 + cos\varphi)$ , $\varphi \in [0;2\pi]$.

Решение.

а) Уравнение $x^2 + y^2 = a^2$ задаёт окружность, с центром в начале координат и радиусом $a$ в декартовой системе координат, поэтому длину её дуги будем вычислять по формуле (5.8), поскольку она симметрично задана, достаточно вычислить четвертую часть длины дуги $\frac{1}{4}l$ $(x \in [0;a])$ и результат умножить на четыре.

Для этого найдем $y$ из уравнения $x^2 + y^2 = a^2$ , $y^2 = a^2 - x^2$, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ и $y' = \left((a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(-2x)(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ и подставим в формулу (5.8):

$$\frac{1}{4}l = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}dx = \int_0^a \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2}dx =$$

$$= \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}dx = \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2}}dx =$$

$$= a\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a\,arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = a(arcsin1 - arcsin0) =$$

$$= a\frac{\pi}{2} = \frac{a\pi}{2}.$$

Тогда $l = 4 \cdot \frac{a\pi}{2} = 2a\pi(\text{ед.})$, получили общеизвестную формулу длины окружности, формулу для вычисления длины дуги окружности с центром в начале координат произвольного радиуса. Если в данном примере положить $a = 1$,получим окружность с единичным радиусом, длина дуги которой будет равна $l = 2\pi$. При различных значениях параметра $a$ (радиуса)длина окружности будет изменяться;

б)$y^2=(x+1)^3, x\in[0;4]$ – кривая задана в декартовых координатах, поэтому найдем $y, y'$ и подставим в формулу (5.8):

$$y=\sqrt{(x+1)^3}=(x+1)^{\frac{3}{2}},$$

$$y'=\left((x+1)^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}},$$

$$l=\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=$$

$$=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}(x+1)}dx=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{13+9x}dx=$$

$$=\frac{1}{18}\int_0^4(13+9x)^{\frac{1}{2}}d(13+9x)=\frac{1}{18}\frac{(13+9x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{1}{27}(13+9x)\sqrt{13+9x}\ \Big|_0^4=\frac{1}{27}\left(49\sqrt{49}-13\sqrt{13}\right)=$$

$$=\frac{1}{27}\left(343-13\sqrt{13}\right);$$

**Замечание:** в случаи симметричной фигуры заданной параметрический или в полярных координатах необходимо найти часть длины дуги, иначе мы можем прийти к противоречию -нулевому результату(поскольку работаем с тригонометрическими функциями), покажем это на примере в).

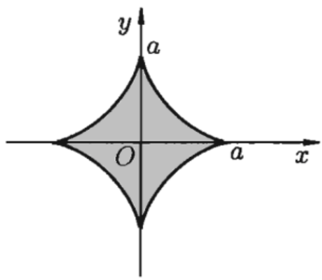


Рис. 21

в) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ - это кривая называется астроида (рис.21) задана параметрически, поэтому длину дуги будем находить по формуле (5.10),

для этого найдем $x'(t), y'(t)$, $\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2$, и подставим в формулу:

$$x'(t)=a((cost)^3)'=-3acos^2tsint,$$

$$y'(t)=a((sint)^3)'=3asin^2tcost$$

$$\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2=(-3acos^2tsint)^2+(3asin^2tcost)^2=$$

$$=9a^2cos^4tsin^2t+9a^2sin^4tcos^2t=9a^2sin^2tcos^2t(cos^2t+$$

$$+sin^2t)=\frac{9a^2}{4}4sin^2tcos^2t=\left(\frac{3a}{2}\right)^2(2sintcost)^2=$$

$$=\left(\frac{3a}{2}\right)^2(sin2t)^2=\left(\frac{3a}{2}sin2t\right)^2;$$

<u>1способ</u>: (Найдем $l$, $t\in[0;2\pi]$;)

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt=\frac{3a}{2}\int_0^{2\pi}sin2t\,dt=$$

$=-\frac{3a}{4}cos2t|_0^{2\pi}=-\frac{3a}{4}(cos4\pi-cos0)=0$, пришли к противоречию;

<u>2 способ:</u> (найдем $\frac{1}{4}\ l$, $t\in\left[\frac{\pi}{2};0\right]$)

Заметим, что фигура симметрична относительно координатных осей, поэтому для начала найдем $\frac{1}{4}\ l$:

$$\frac{1}{4}l=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt=\frac{3a}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}sin2t\,dt=$$

$$=-\frac{3a}{4}cos2t|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=-\frac{3a}{4}(cos0-cos\pi)=-\frac{3a}{4}(-2)=\frac{3a}{2},$$

следовательно $l=4\cdot\frac{3a}{2}=6a$;

г) Кардиоида $r=a(1+cos\varphi)$, $\varphi\in[0;2\pi]$ задана в полярных координатах, следовательно, длину дуги данной кривой находим по формуле (5.12).В силу симметрии фигуры (рис.18),найдем $\frac{1}{2}l$, для этого вычислим $\sqrt{(r')^2+r^2}$, и подставим в формулу (5.12):

$$r^2 = a^2(1+cos\varphi)^2 = a^2(1+2cos\varphi+cos^2\varphi),$$
$$(r')^2 = (a(1+cos\varphi)')^2 = (-asin\varphi)^2 = a^2sin^2\varphi,$$
$$\sqrt{(r')^2+r^2} = \sqrt{a^2sin^2\varphi + a^2(1+2cos\varphi+cos^2\varphi)} =$$
$$= \sqrt{a^2sin^2\varphi + a^2 + 2a^2cos\varphi + a^2cos^2\varphi} =$$
$$= \sqrt{a^2(sin^2\varphi+cos^2\varphi) + a^2 + 2a^2cos\varphi} =$$
$$= \sqrt{a^2+a^2+2a^2cos\varphi} = \sqrt{2a^2(1+cos\varphi)} =$$
$$= \sqrt{4a^2cos^2\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\left(2acos\frac{\varphi}{2}\right)^2} = 2acos\frac{\varphi}{2},$$
$$\frac{1}{2}l = \int_0^{\pi}\sqrt{(r')^2+r^2}d\varphi = 2a\int_0^{\pi}cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$
$$= 4a\int_0^{\pi}cos\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 4a\,sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a\left(sin\frac{\pi}{2} - sin0\right) =$$

$= 4a$, отсюда $l = 2\cdot 4a = 8a$.

## 5.3. Вычисление объемов тел вращения

Представьте некоторую плоскую фигуру на координатной плоскости. Её площадь мы уже находили. Но, кроме того, данную фигуру можно ещё и вращать, причем вращать двумя способами: вокруг оси абсцисс, вокруг оси ординат. В данном разделе будут разобраны оба случая.

Рассмотрим кривую, заданную уравнением $y = f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями $a$ и $b$ вращать вокруг оси $Ox$ ,то получим так называемое **тело вращения**.

Так как, каждое сечение этого тела плоскостью ,перпендикулярной оси $Ox$ ,то есть плоскостью $x = C = const$ , представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$,с площадью
$S(x) = \pi R^2 = \pi f^2(x)$, то объем тела вращения может быть найден по формуле

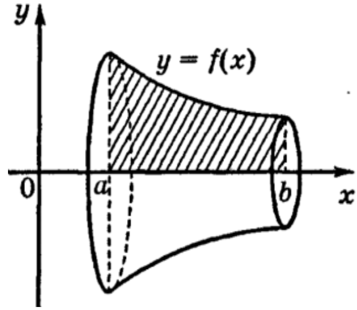



Рис. 22

$$V = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Итак, объем тела, полученного вращением вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a, x = b, y = 0, y = f(x) \geq 0$ (рис.22), вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \quad (5.13)}$$

**Замечание:**

**1)**В практических заданиях плоская фигура иногда может располагаться и ниже оси $Ox$
$(y = f(x) \leq 0)$. Это ничего не меняет – подынтегральная функция в формуле возводится в квадрат $f^2(x)$ (интеграл всегда неотрицателен).

Аналогично размышляя, получим формулу(5.14) для вычисления объема тела, полученного вращением вокруг оси $Oy$ криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = c, y = d, x = 0, x = f(y) \geq 0$ (рис. 23),

$$\boldsymbol{V = \pi \int_c^d f^2(y)dy} \quad (\mathbf{5.14})$$

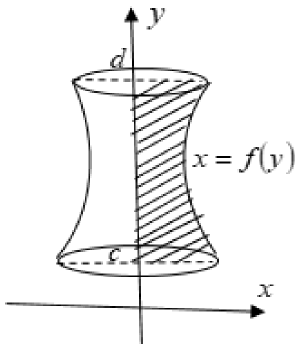


Рис. 23

**2)**Объём кольца, образованного вращением вокруг оси плоской фигуры, ограниченной непрерывными неотрицательными на $[a; b]$ функциями $y = f(x), y = g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, и прямыми $x = a, x = b$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx} \quad (\mathbf{5.15})$$

**3)** Если вращается криволинейная трапеция вокруг оси $Ox$ ,ограниченная линией заданной параметрически ,то чтобы рассчитать объём тела в формулу $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_a^b y^2 dx$ подставляем параметрические функции $x = x(t), y = y(t)$ , а также соответствующие пределы интегрирования $t_1, t_2$:

$$V = \pi \int_a^b \left(y(t)\right)^2 d\left(x(t)\right) = \pi \int_a^b y^2(t)x'(t)dt \quad (5.16)$$

**Пример 5.9.** Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}, y = 0, x \geq 0$.

Решение.

Построим фигуру, ограниченную линиями $y = e^{-x}$, $y = 0, x \geq 0$. Искомая плоская фигура заштрихована (рис. 24), именно она и вращается вокруг оси $Ox$. В результате вращения получается воронка, которая симметрична относительно оси $Ox$.

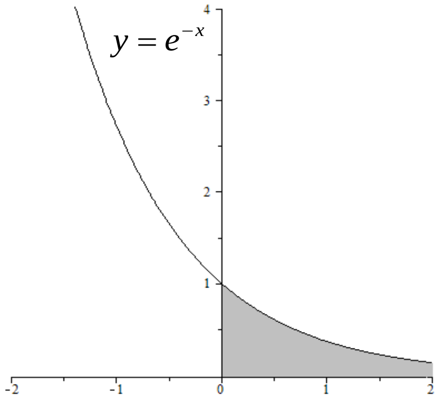



Рис. 24

Объем тела вращения вычисляем по формуле $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ ,в нашем случае $a = 0, b = +\infty$, $f(x) = e^{-x}$, так как плоская фигура ограничена графиком экспоненты $y = e^{-x}$ сверху. В итоге искомый объем равен:

$$V = \pi \int_0^{+\infty} (e^{-x})^2 \, dx = \pi \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-2x} \, dx =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-2x} \, d(-2x) = -\frac{\pi}{2} \lim_{b\to+\infty} e^{-2x}\Big|_0^b =$$

$$= -\pi \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}}\Big|_0^b = -\frac{\pi}{2} \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{e^{2b}} - 1\right) = \frac{\pi}{2} \text{ (ед.}^3\text{)}.$$

**Пример 5.10.** Вычислить объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 0, y = 8$, вокруг оси $Oy$.

Решение.

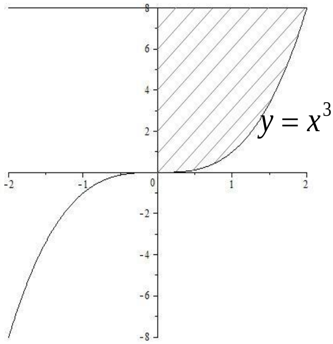



Рис. 25

На рис.25, плоская фигура заштрихована, именно она и вращается вокруг оси $Oy$.В результате вращения получается ограниченная сверху парабола, которая симметрична относительно оси $Oy$ . Так как, фигура вращается вокруг оси $Oy$, то и интегрировать будем по переменной $y$ применяя формулу $V = \pi \int_c^d f^2(y)dy$ ,в нашем случае $0 \le y \le 8$,то есть $c = 0, d = 8$, $f(y) = \sqrt[3]{y}$ ,действительно, если выразить $x$ через $y$ получим $x = \sqrt[3]{y}$, подставляя $x = \sqrt[3]{y}$в формулу находим объем:

$$V = \pi \int_0^8 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{3\pi}{5} y \cdot y^{\frac{2}{3}} \Big|_0^8 =$$

$$= \frac{3\pi}{5} 8 \cdot 8^{\frac{2}{3}} = \frac{24\pi}{5} \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}} = \frac{24\pi}{5} \cdot 4 = \frac{96\pi}{5} (\text{ед.}^3).$$

**Замечание:** пределы интегрирования по оси $Oy$ следует расставлять строго снизу вверх.

**Пример 5.11.** Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси $Ox$ плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x, y = 3x$.

Решение.

Для построения чертежа плоской фигуры найдем точки пересечения параболы $y^2 = 9x$ с вершиной в начале координат симметричной относительно оси $Ox$ и прямой $y = 3x$ проходящей через начало координат решив уравнение:

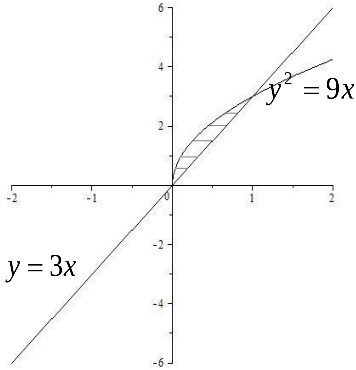


Рис. 26

$\begin{cases} y^2 = 9x \\ y = 3x \end{cases}, (3x)^2 = 9x,$

$9x^2 - 9x = 0, 9x(x-1) = 0,$

$x_1 = 0, x_2 = 1$

$y_1 = 0, y_2 = 3.$

Следовательно, имеется две точки пересечения (0;0), (1;3), отмечаем данные точки на чертеже и через точки пересечения проводим кривые. Кривые в пересечении образуют область заключенную между линиями

$y = 3\sqrt{x}$ (ветвь параболы $y^2 = 9x$) и прямой

$y = 3x$(рис. 26), при этом $3\sqrt{x} \geq 3x$,поэтому объем находим как разность объёмов $V = V_1 - V_2$,где

$V_1 = \pi \int_0^1 9x dx$ , $V_2 = \pi \int_0^1 (3x)^2 dx$ .

В итоге искомый объём равен:

$$V = \pi \int_0^1 (9x - (3x)^2) dx = 9\pi \int_0^1 (x - x^2) dx =$$

$$= 9\pi \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_0^1 = 9\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} (\text{ед.}^3).$$

**Пример 5.12.** Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2, y = \frac{2}{1+x^2}$.

Решение.

Выполним чертеж, для этого найдем точки пересечения заданных линий: $\begin{cases} y = \frac{2}{1+x^2}, \\ y = x^2 \end{cases}$

$$\frac{2}{1+x^2} = x^2, 2 = x^2(1+x^2),$$
$$x^4 + x^2 - 2 = 0, \qquad t = x^2,$$
$$t^2 + t - 2 = 0, t_1 = -2, t_2 = 1$$

При $t_1 = -2$ , $x^2 = -2$- вещественных корней нет;

При $t_2 = 1$ , $x^2 = 1$,

$x_{1,2} = \pm 1$, тогда $y_{1,2} = 1$.

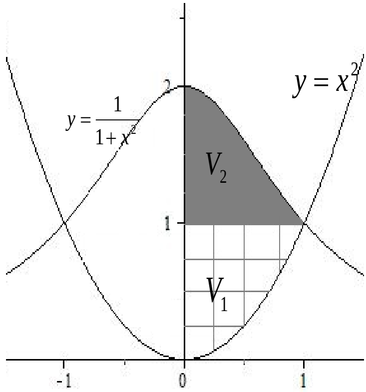



Рис. 27

Итак, имеется две точки пересечения (1;1), (-1;1), отмечаем данные точки, при этом заметим, что функции $y = x^2, y = \frac{2}{1+x^2}$ чётные, то есть симметричны относительно начала координат. Заметим, что функция $y = \frac{2}{1+x^2}$ пересекает ось $Oy$ в точке (0;2), действительно, при $x = 0$ , $y = \frac{2}{1+0^2} = 2$.

Для нахождения объема тела вращения достаточно использовать правую половину фигуры, так как полученная фигура симметрична относительно начала координат. Таким образом, заштрихованная правая часть, вращаясь вокруг оси $Oy$ совпадёт с левой не заштрихованной частью (рис. 27).

Перейдем к обратным функциям, то есть, выразим $x$ через $y$: $y = x^2, x = \pm\sqrt{y}$. Обратите внимание, что правой ветви параболы $y = x^2$ соответствует обратная функция $x = \sqrt{y}$,а левой (не используемой) ветви параболы соответствует обратная функция $x = -\sqrt{y}$.

Аналогично для $y = \frac{2}{1+x^2}$, $1 + x^2 = \frac{2}{y}, x^2 = \frac{2}{y} - 1$,

$x = \pm\sqrt{\frac{2}{y} - 1}$.Объем тела вращения необходимо искать по формуле (5.13) как сумму объемов тел вращений: $V = V_1 + V_2$ ,где $V_1 = \pi\int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy$,так как на отрезке$[0;1]$ расположен график функции $x = \sqrt{y}$;

$V_2 = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{2}{y} - 1}\right)^2 dy$ , так как на отрезке $[1;2]$ расположен график функции$x = \sqrt{\frac{2}{y} - 1}$.

Вычисляя данные интегралы получим:

$V_1 = \pi\int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy = \pi\int_0^1 ydy = \frac{\pi}{2}y^2|_0^1 = \frac{\pi}{2}$;

$$V_2 = \pi\int_1^2 \left(\sqrt{\frac{2}{y} - 1}\right)^2 dy = \pi\int_1^2 \left(\frac{2}{y} - 1\right) dy =$$

$$= \pi(2ln|y| - y)|_1^2 = \pi(2ln2 - 2 - 2ln1 + 1) =$$

$$= \pi(2ln2 - 1);$$

Таким образом,

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{2} + \pi(2ln2 - 1) = \pi\left(2ln2 - \frac{1}{2}\right)(\text{ед.}^3).$$

**Пример 5.13.** Вычислить объем эллипсоида, полученного вращением вокруг оси $Ox$ эллипса$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

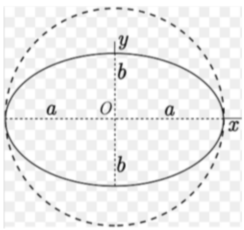
Решение. 


Рис. 28

Решение упростится, если перейти к параметрическому заданию уравнения эллипса $\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}$, в силу симметрии полученной фигуры, найдём $\frac{1}{2}V$:

$$\frac{1}{2}V = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y^2(t)x'(t)dt = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b^2 sin^2t\cdot(-asint)dt =$$

$$= -ab^2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin^2t\cdot sintdt = ab^2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-cos^2t)d(cost) =$$

$$= ab^2\pi\left(cost - \frac{cos^3t}{3}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = ab^2\pi\left(cos0 - \frac{cos^3 0}{3}\right) =$$

$$= ab^2\pi\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}ab^2\pi.$$

Таким образом, $V = \frac{4}{3}ab^2\pi(\text{ед.}^3)$.

### Задания для самостоятельного решения

**13.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

| | |
|---|---|
| **1.** | $y = sinx, y = cosx, x = 0,$ |
| **2.** | $y = sinx, y = cosx, y = 0$ |
| **3.** | $y = x^2 - 1, y = x + 1$ |
| **4.** | $y = x^2, y = \sqrt{x}$ |
| **5.** | $y = tgx, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$ |
| **6.** | $y = x^2 + 1, y = -x + 3$ |
| **7.** | $y = 4 - x^2, y = 3x, y \geq 0$ |
| **8.** | $y = -x, y = -\frac{1}{x}, x = 2$ |
| **9.** | $y = \frac{2}{x}, y = 5e^x, y = 2, y = 5$ |
| **10.** | $y = x^2, y = 2x$ |
| **11.** | $y = x^2 - 2, y = 3 + 2x$ |

| | |
|---|---|
| **12.** | $y = \sqrt{x}, y = \frac{x}{2}$ |
| **13.** | $y = sinx, x = \frac{\pi}{2}, y = 0$ |
| **14.** | $y = x^2 - 1, y = 1 - x$ |
| **15.** | $y = x^2, y = 2 - x$ |
| **16.** | $y = x^2, y = x + 2$ |
| **17.** | $y = x^2, y = 2 - x^2$ |
| **18.** | $y = x^2 - 1, y = x + 5$ |
| **19.** | $y = 3\sqrt{x}, y = \frac{3}{x}, x = 4$ |
| **20.** | $x = 5 - y^2, x = -4y$ |
| **21.** | $y = \frac{x^2}{3}, y^2 = 3x$ |
| **22.** | $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4$ |
| **23.** | $\begin{cases} x = 2cost \\ y = 2sint \end{cases}$ |
| **24.** | $r = 1 - \cos\varphi$ |
| **25.** | $r = \varphi^2, 0 \le \varphi \le \pi$ |
| **26.** | $y = -x^2 + 2x + 3, y = x^2 - 4x + 3$ |

**Ответы:**

**13.1.**$\sqrt{2} - 1$;**13.2.**$2 - \sqrt{2} - 1$;**13.3.**4,5;**13.4.** $\frac{1}{3}$;

**13.5.** $\frac{1}{2} ln2$ **13.6.** 4,5; **13.7.** $\frac{19}{6}$; **13.8.** $\frac{3}{2} ln2$; **13.9.**3;

**13.10.** $\frac{4}{3}$. **13.11.**$20\frac{5}{6}$; **13.12.** $1\frac{1}{3}$: **13.13.**1;

**13.14.**4,5; **13.15.** $\frac{7}{6}$; **13.16.** 4,5; **13.17.** $2\frac{2}{3}$;

**13.18.** $20\frac{5}{6}$; **13.19.** $14 - 3ln4$; **13.20.**30;

**13.21.** $3$; **13.22.** $\frac{16}{3}$; **13.23.** $4\pi$; **13.24.** $\frac{3\pi}{4}$;

**13.25.** $\frac{\pi^5}{10}$; **13.26.** $9$.

**14.** Вычислить длину дуги линии:

| | |
|---|---|
| **1.** | $y = ln(sin\,x)\,, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ |
| **2.** | $y = \sqrt{x^3}, 0 \leq x \leq 1$ |
| **3.** | $y = ln(1 - x^2), 3 \leq x \leq 4$ |
| **4.** | $\begin{cases} x = 1 - cos\,t \\ y = t - sin\,t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ |
| **5.** | $\begin{cases} x = 3\,cos\,t \\ y = 3\,sin\,t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ |
| **6.** | $\begin{cases} x = 2cos^3 t \\ y = 2sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ |
| **7.** | $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} + 2 - t \\ y = 5 + t^2 \end{cases}, 0 \leq t \leq 2$ |
| **8.** | $r = 2(1 - cos\,\varphi)\,, 0 \leq \varphi \leq \pi$ |
| **9.** | $r = 1 + cos\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$ |
| **10.** | $r = \varphi^2, 0 \leq \varphi \leq \sqrt{5}$ |
| **11.** | $y = \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ |
| **12.** | $y = ln(cos\,x)\,, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ |
| **13.** | $y = 2\sqrt{x}, \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{8}$ |
| **14.** | $\begin{cases} x = 2\,cos\,t \\ y = 2\,sin\,t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ |
| **15.** | $\begin{cases} x = 9(t - sint) \\ y = 9(1 - cost) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ |

| | |
|---|---|
| **16.** | $r = 1 - sin\varphi,\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$ |
| **17.** | $r = 3cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$ |
| **18.** | $r = 2sin\varphi,\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$ |
| **19.** | $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t\ , 0 \le t \le 2\pi \\ z = 4t \end{cases}$ |
| **20.** | $y = \frac{x^2}{4} - \frac{lnx}{2}, 1 \le x \le e$ |
| **21.** | $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, 0 \le t \le 1$ |
| **22.** | $r = e^{\varphi},\ 1 \le r \le e$ |
| **23.** | $r = 6sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$ |
| **24.** | $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, 0 \le t \le \pi$ |
| **25.** | $y = x\sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 5$ |
| **26.** | $y = 1 - \ln x, \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$ |

**Ответы**:

**14.1.**$ln3$;**14.2.**$\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$;**14.3.**$1 + ln\frac{6}{5}$;**14.4.**$8$;**14.5.**$\pi$;

**14.6.**$\frac{3}{2}$;**14.7.**$4\frac{2}{3}$;**14.8.**$8$;**14.9.**$2$;**14.10.**$\frac{19}{3}$;**14.11.** $\frac{\pi}{6}$;

**14.12.** $\frac{ln3}{2}$; **14.13.**$2 + ln\ \frac{3}{2}$; **14.14.** $\frac{2\pi}{3}$;**14.15.** $72$; **14.16.**$2$;

**14.17.** $\pi$;**14.18.** $\pi$;**14.19.** $10\pi$ ;**14.20.** $\frac{e^2+1}{4}$;

**14.21.**$\sqrt{2}(e-1)$;**14.22.** $\sqrt{2}(e-1)$; **14.23.** $2\pi$;

**14.24.** $\frac{\pi^3}{3}$; **14.25.** $\frac{343}{27}$; **14.26.** $1 + \frac{1}{2}ln\ \frac{3}{2}$.

**15.**Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями:

| | |
|---|---|
| **1.** | $x^2 - y = 0, x = -2, y = 0$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **2.** | $x^2 + y = 0, x = 1$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **3.** | $y = x^2,\ y^2 = x$ **(вокруг оси**$Ox$ **)** |
| **4.** | $y = -x^3, x = 1, y = 0$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **5.** | $y = 2x - x^2, y = 0$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **6.** | $y = e^x, y = 1, x = 0$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **7.** | $y^2 = (x+4)^3, x = 0$ **(вокруг оси** $Oy$**)** |
| **8.** | $y = x^2, y = x^3$**(вокруг оси** $Oy$**)** |
| **9.** | $y = \frac{x^2}{4}, y = 0, 2x + y - 12 = 0$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **10.** | $y = x^3, x = 1, y = 0$**(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **11.** | $y = 1 + 8x^3, x = -\frac{1}{2}, y = 1$**(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **12.** | $y^2 + x = 0, x = 0, y = 1$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **13.** | $y^2 + x = 0, x = -1$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **14.** | $y = -4x^3, x = 1, y = 0$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **15.** | $y = 1 + 8x^3, x = 0, y = 9$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **16.** | $x - y^2 = 0, x = 0, y = -1$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **17.** | $y = 4x^3, x = 0, y = 4$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **18.** | $x^2 - y = 0, y = 1$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **19.** | $x^2 - y = 0, x = -1, y = 0$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **20.** | $y = -x^3, x = 1, y = 0$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **21.** | $y = sinx, x = 0, x = \pi, y = 0$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **22.** | $y = lnx, x = e, y = 0$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **23.** | $y = \frac{2}{x}, x = 1, y = 1$ **(вокруг оси** $Ox$**)** |
| **24.** | $y^2 = 4 - x, x = 0$ **(вокруг оси** $Oy$**)** |
| **25.** | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, y = \pm b$ **(вокруг оси** $Oy$**)** |
| **26.** | $x^2 - y = 0, y = 1, x \geq 0$**(вокруг оси** $Ox$**)** |

**Ответы**:

**15.1.** $\frac{32\pi}{5}$; **15.2.** $\frac{\pi}{5}$; **15.3.** $\frac{3\pi}{10}$; **15.4.** $\frac{\pi}{7}$; **15.5.** $\frac{16\pi}{15}$; **15.6.** $\frac{\pi(e^2-3)}{2}$; **15.7.** $\frac{2048\pi}{35}$; **15.8.** $\frac{\pi}{10}$; **15.9.** $\frac{352\pi}{15}$; **15.10.** $\frac{\pi}{7}$; **15.11.** $\frac{5\pi}{28}$; **15.12.** $\frac{\pi}{2}$; **15.13.** $\pi$; **15.14.** $\frac{16\pi}{7}$; **15.15.** $\frac{468\pi}{7}$; **15.16.** $\frac{\pi}{2}$; **15.17.** $\frac{96\pi}{7}$; **15.18.** $\frac{8\pi}{5}$; **15.19.** $\frac{\pi}{5}$; **15.20.** $\frac{\pi}{7}$; **15.21.** $\frac{\pi^2}{2}$; **15.22.** $\pi(e-2)$; **15.23.** $\pi(3-4ln\,2)$; **15.24.** $\frac{512\pi}{15}$; **15.25.** $\frac{8\pi a^2 b}{3}$; **15.26.** $\frac{4\pi}{5}$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б.В.Соболь, Н. Т. Мишняков, В.М. Поркшеян, Практикум по высшей математике .3-е изд. Ростов н \ Д :Феникс, 2010.

2. Д.Т.Письменный, Конспект лекций по высшей математике (полный курс). 2-е изд. Москва: «Айрис-пресс», 2014.

3. Данко П.Е., Попов, А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах (1 том). — М.: Высш. шк., 2002.