ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Теория вероятностей и математическая статистика»

Автор
Ермилова О.В.

Ростов-на-Дону, 2023

Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения всех технических направлений подготовки бакалавриата. Эта книга не только учебник, но и краткое руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. Излагаемые основы теории вероятностей и математической статистики сопровождаются большим количеством задач, приводимых с решениями. Для закрепления материала представлено достаточное количество задач для самостоятельной решения, чтобы у студента была возможность проверить правильность полученного решения для каждого задания записан ответ. Составлено для проведения теоретических и практических работ по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика».

Цель пособия — помочь студентам в формировании математического мышления, в выработке практических навыков решения вероятностных и статистических задач.

Автор

Старший преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Ермилова О.В.

Оглавление

ГЛАВА1.СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Предмет теории вероятностей и математической статистики.

Теория вероятностей, как следует из названия, имеет дело с вероятностями. Нас окружают множество вещей и явлений, о которых, как бы ни была развита наука, нельзя сделать точных прогнозов. Мы не знаем, какую карту вытянем из колоды наугад или сколько дней в году будет идти дождь, но, имея некоторую дополнительную информацию, можем строить прогнозы и вычислять вероятности этих случайных событий.
Теория вероятностей изучает математические законы распределения случайных событий, и фактически является теоретической базой для математической статистики.

Математическая статистика — это раздел математики, который изучает методы сбора, систематизации, обработки и использования статистических данных для получения научно обоснованных выводов и принятия на их основе решений.

Почему же для обработки простых наборов данных требуется целая наука? Потому, что эти данные, как бы мы не старались, никогда не являются точными, содержат случайные ошибки. Это могут быть и погрешности измерительных приборов, и ошибки человеческие, и неоднородность данных или, конечно, их недостаточность.

Исследователь многократно повторяет свой опыт, получая большое количество однотипных данных, которые теперь надо обработать и сделать верные вы-воды, которые позволят продвинуться глубже в изучении предмета, сделать прогнозы, принять важные экономические решения и так далее.

Именно математическая статистика дает методы для обработки данных, алгоритмы для проверки статистических гипотез, критерии адекватности и значимости выбранной модели или закона, обоснованные границы точности для параметров распределения, которые мы можем получить исходя из наших данных. Но, если в теории вероятностей обычно распределение задано тем или иным образом, и требуется найти вероятности, числовые характеристики (например, математическое ожидание, дисперсию и т.д.), построить графики функций и плотности распределения, то в задачах математической статистики, напротив, известны данные (выборка), собранные по результатам какого-то эксперимента или наблюдения, по которым следует определить закон распределения, наиболее подходящий в данном случае, числовые характеристики и так далее.

1.2. Комбинаторика

Большинство задач классической теории вероятности используют правила и формулы комбинаторики. Комбинаторика — это раздел математики, изучающий задачи выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам.
В комбинаторике есть два важных правила, часто применяемых к решению комбинаторных задач, при подсчете числа объектов: правила суммы и правила произведения.

1)Правило суммы: если из некоторого множества первый объект (элемент)- x можно выбрать n_1 способами, а второй объект -y можно выбрать n_2 способами, то любой из указанных объектов (либо x, либоy) можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

2)Правило произведения: если из некоторого множество первый объект (элемент)- x можно выбрать n_1 способами, а объект -y можно выбрать n_2 способами, то оба объекта (x иy) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Замечание:

1)Эти правила распространяются на любое конечное число объектов;

2) Число способов выбора второго элемента не зависит от того, как именно выбран первый элемент.

Пример 1.1. Сколько существует способов выбора книги или диска из 10 книг и 12 дисков.

Решение.

Первый объектx- книгу, можно выбрать n_1=10 способами, второй объектy- диск можно выбрать n_2 =12 способами. Следовательно, выбрать диск или книгу (из данного количества) можно

$N = n_1 + n_2 = 10 + 12 = 22$

способами.

Пример 1.2. Бросают две различные игральные кости. Сколько существует вариантов того, что ровно на одной из двух костей выпала шестерка.

Решение.

Ровно на одной из двух костей выпадет шестерка означает, что или на первой кости выпадет шестерка, или на второй.

Если шестерка выпадает на первой кости, то существует $n_1 = 5$ вариантов допустимых значений для выпадения второй игральной кости (вторая кость в подсчитываемых комбинациях может принимать значения 1,2, 3, 4 и 5). Аналогично, если шестерка выпадает на второй кости, первая кость в подсчитываемых комбинациях может принимать значения 1,2, 3, 4 и 5, то есть$n_2 = 5$. Поскольку одновременное выпадение шестерок не рассматривается, по правилу суммы искомое число способов равно:
$N = n_1 + n_2 = 10.$

Пример 1.3. Сколько есть двузначных чисел, у которых обе цифры четные.

Решение.

Обе цифры четные: первая четная x и вторая четная y.Поскольку существует пять четных цифр:0,2,4,6,8. Первую цифру можно заполнить $n_1 = 4$ способами (ноль исключаем), а вторую пятью$n_2 = 5$. Таким образом, двузначных чисел у которых обе цифры четные всего:
$N = n_1 \cdot n_2 = 4 \cdot 5 = 20.$

Пример 1.4. Сколько существует семизначных телефонных номеров.

Решение.

Семизначный номер представляет собой комбинацию семи ячеек, каждую из которых мы можем заполнить одной из 10 цифр:0,1, 2…,9. Только в первой ячейке не должно быть нуля, следовательно, первую ячейку можно заполнить $n_1 = 9$способами, для оставшихся ячеек имеем $n_2 = n_3 = \cdots = n_7 = 10,$ по правилу произведения получим:
$N = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000000$способов.

Пример 1.5. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

Решение.

Первое письмо имеет $n_1 = 2$ альтернативы – либо его относит к адресату первый почтальон, либо второй. Для второго письма также есть $n_2 = 2$ альтернативы и так далее, то есть $n_1 = n_2 = \cdots = n_{10} = 2$. Следовательно, в силу правила умножения общее число способов распределений писем между двумя почтальонами равно:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{10} = 2^{10} = 1024.$$

Пример 1.6. В студенческой группе 14 девушек,6 юношей. Сколькими способами можно выбрать для выполнения различных заданий, двух студентов одного пола.

Решение.

Два студента одного пола — это либо две студентки, либо два студента.

Выбор девушек:

$N_1 = 14 \cdot 13 = 182$ способа;

Выбор юношей: $N_2 = 6 \cdot 5 = 30$;

Следовательно, студентов одного пола, можно выбрать:

$N = N_1 + N_2 = 182 + 30 = 212$ способами.

Перестановки, сочетания и размещения без повторений.

Набор элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ из множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$называется **выборкой** объема k из n элементов.

Выборка называется **упорядоченной**, если в ней задан порядок следования элементов, в противном случае выборка называется **неупорядоченной**. Две упорядоченные выборки, различающиеся лишь порядком следования элементов, считаются различными.

В выборках могут допускаться или не допускаться повторения элементов.

Пусть дано множество A из n различных элементов и случайным образом мы выбираем из него k элементов $(0 \le k \le n)$. Эти k-элементные выборки (подмножества) могут отличаться: составом элементов, порядком их следования, объемом подмножества.

В соответствии с этим выделяют три вида комбинаций (подмножеств): размещения, перестановки, сочетания.

1)Размещения.

Размещением из n элементов по k называется набор из k элементов, выбранных из n-элементного множества, в котором учитывается состав элементов и порядок их расположения. Число всех размещений из nэлементов по k элементов (без повторений), вычисляются по формуле (1.1):

$$\boxed{A_n^k = \frac{n\,!}{(n-k)\,!}} \quad \textbf{(1.1)}$$

Попытаемся разобраться каким образом получена данная формула: первым элементом можно взять любой из n элементов множества A, вторым элементом-любой из $(n-1)$оставшихся в A элементов ,третий -$(n-2)$ способами,…., элемент $k-1$можно выбрать$(n-k)$ способами, элемент k можно выбрать$(n-k+1)$ способами. В соответствии с правилом умножения, число размещений из n элементов по k равно:

$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Действительно,

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k)} =$$
$$= (n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Пример 1.7. Составить различные размещения по два из элементов множества $M = \{a, b, c\}$.

Решение.

Так как, эти двойки отличаются друг от друга либо составом, либо порядком, то их количество вычисляем по формуле размещений, при $n = 3, k = 2$:

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Отметим, что здесь не составило особого труда перечислить все возможные случаи выбора из трех элементов двух и без комбинаторики, действительно их всего 6: $(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (a,c), (c,a)$.

Замечание: в случае если в выборке содержится большое количество элементов перечислить все возможные случаи выбора сложно, без формулы размещения не обойтись, так как это значительно упростит решение.

Пример 1.8. Сколькими способами 3 награды (за первое, второе, третье места) могут быть распределены между 10 участниками соревнований (каждый участник может получить не более одной награды).

Решение.

Так как призовые тройки отличаются друг от друга либо составом участников, либо порядком их расположения, то искомое количество способов равно:

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720.$$

Пример 1.9. На станции 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?

Решение.

Выбираем из 7 запасных путей 4 пути для размещения на них поездов, порядок выбора имеет значение, поэтому число способов равно:

$A_7^4 = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840.$

2)Перестановки.
Пусть имеется n различных объектов. Будем переставлять их всеми возможными способами, при этом число объектов остается неизменными, меняется только их порядок.
Число всех перестановок из n элементов (без повторений) вычисляется по формуле 1.2.

$$\boxed{P_n = n!} \textbf{(1.2)}$$

Действительно, первый элемент выбираем n способами, второй $(n-1)$ способами, и так пока не останется единственный вариант выбора, в соответствием с правилом умножения число всех перестановок из n элементов равно: $P_n = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.
Замечание: перестановки — это частный случай размещений, когда $k = n$:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!,(0!=1).$$

Пример 1.10. Сколькими способами можно поставить 7 человек в очередь.

Решение.

Количество способов расстановки 7 человек в очередь равно числу всех перестановок из семи элементов: $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$

Обратите внимание, что здесь не имеет значения вид очереди, важно лишь количество объектов и их взаимное расположение.

Пример 1.11. Определить, сколько четырехзначных чисел можно составить с помощью цифр 1,2,3,4 при условии, что каждая цифра входит в изображение числа только один раз.

Решение.

$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ -число всех перестановок из 4 элементов.

Пример 1.12. В соревнованиях участвуют пять команд. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

Решение.

Для под счётом вариантов распределения мест между командами используем формулу перестановок без повторений:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

3)Сочетания.

Сочетанием из n элементов по k называется набор из k элементов, выбранных из n-элементного множества, в котором учитывается только состав элементов, а порядок следования элементов не важен.

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов (без повторений), вычисляются по формуле 1.3:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}} \quad \textbf{(1.3)}$$

Замечание: в сочетании, в отличие от размещения, порядок следования элементов не учитывается. Из одного сочетания из n элементов по k получается $k!$ размещений. Отсюда для числа сочетаний из n элементов по k получается формула: $C_n^k = A_n^k \cdot \dfrac{1}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Пример 1.13. Сколькими способами из группы 25 человек случайным образом можно вызвать двух человек к доске?

Решение.

Так как важно только то, какие два человека будут выбраны, а порядок следования не важен, то число способов равно:

$$C_{25}^2 = \frac{25!}{(25-2)!\,2!} = \frac{25!}{23!\,2!} = 12 \cdot 25 = 300.$$

Пример 1.14. В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?

Решение.

Выбираем 2 учащихся из 7, порядок выбора не имеет значения (оба выбранных пойдут на олимпиаду как полностью равноправные), только состав. Количество способов выбора равно числу сочетаний из 7 по 2:

$$C_7^2 = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5! \cdot 1 \cdot 2} = 21.$$

Пример 1.15. Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирают пять человек для приготовления ужина. Сколько существует способов, при которых в эту «пятерку» попадут: **а)** одни девушки; **б)** 3 юноши и 2 девушки; **в)** 1 юноша и 4 девушки; **г)** 5 юношей.

Решение.

а) Пять девушек можно выбрать из семи девушек (порядок не важен, только состав):

$$C_7^5 = \frac{7\,!}{5\,!\,2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 3 \cdot 7 = 21;$$

б) Выбрать двух девушек можно C_7^2 способами и 3 юношей- C_{12}^3 способами. Таким образом, количество способов при которых в эту «пятерку» попадут 3 юноши и 2 девушки равно:

$$C_7^2 \cdot C_{12}^3 = \frac{7\,!}{5\,!\,2\,!} \cdot \frac{12\,!}{9\,!\,3\,!} = 21 \cdot 220 = 4620;$$

в) Аналогично размышляя, получим:

$$C_7^4 \cdot C_{12}^1 = \frac{7\,!}{4\,!\,3\,!} \cdot \frac{12\,!}{11\,!} = 35 \cdot 12 = 420;$$

г) Выбираем пять юношей из двенадцати:

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{7!\,5!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8 \cdot 9 \cdot 11 = 792.$$

Рассмотренные выше комбинации относятся к так называемому **выбору без возвращения**-входящие в их состав элементы не повторяются.
Кроме того, комбинаторика рассматривает случаи с повторением элементов, входящих в рассматриваемые подмножества - так называемый **выбор с возвращением.**

Перестановки, сочетания и размещения с повторениями.

4) Размещения с повторениями— это упорядоченные k -элементные подмножества n-элементного мно-

жества, которые отличаются составом элементов, порядком их расположения и возможностью повтора элементов.
Число всех размещений с повторениями из n элементов по k элементов, вычисляются по формуле (1.4):

$$\overline{A}_n^k = n^k \quad \textbf{(1.4)}$$

Для подсчета числа размещений с повторениями из n элементов по k используем правило произведения. При построении конкретного размещения первым элементом в нем можно взять любой из n элементов множества A ,вторым элементом-также любой из n элементов множества A и так далее. Таким образом, число размещений с повторениями из n элементов по k равно: $\overline{A}_n^k = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$.
Пример 1.16. Определить количество трехзначных чисел, записываемых нечетными цифрами 1,3,5,7,9, при условии, что цифры в числе могут повторяться.

Решение.

Из данного набора цифр можно составить трехзначные числа, например 131, 155 и так далее. Цифры каждого такого числа образуют выборку: (1,3,1), (1,5,5). Таким образом, мы должны выбрать из пяти элементов три элемента, при этом цифры в числах могут повторяться, поэтому мы имеем дело с выборками с повторениями. Порядок расположения цифр в числе важен, например, 131 и 113– разные числа. Следовательно, общее количество искомых трехзначных чисел найдём с помощью формулы размещения из пяти элементов по три (с повторениями): $N = \overline{A}_5^3 = 5^3 = 125$.
Пример 1.17. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 9 вагонам?

Решение.

1 способ: поскольку по условию задачи в один вагон могут сесть несколько человек, и поскольку рассадка зависит от того, кто в каком вагоне находится, то используем формулу размещения с повторениями:

$$N = \overline{A}_9^7 = 9^7 = 4782969;$$

2 способ: Эту же задачу можно решить, применяя комбинаторный принцип умножения: действие – рассадить 7 человек распадается на 7 этапов: первый этап – разместить первого пассажира можно 9 способами, разместить второго пассажира можно так же 9 способами, …, разместить седьмого пассажира 9 способами: $N = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^7$.

Пример 1.18. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по всем номинациям установлены различные премии?

Решение.

Каждый из вариантов распределения призов представляет собой комбинацию 5 фильмов из 10, отличающуюся от других комбинаций, как составом, так и их порядком. Так как каждый фильм может получить призы как по одной, так и по нескольким номинациям, то одни и те же фильмы могут повторяться. Поэтому число таких комбинаций равно числу размещений с повторениями из 10 элементов по 5: $N = \overline{A}_{10}^5 = 10^5 = 100000$.

5)Перестановки с повторениями.

Перестановками с повторениями элементов множества A называется упорядоченная выборка из n элементов, с возможностью повтора элементов.

Число перестановок из n элементов, в которых элемент a_1 повторяется n_1 раз, a_2 повторяется n_2

раза,…, a_k повторяется n_k раз вычисляется по формуле (1.5):

$$\boxed{\overline{P_n}(n_1;n_2;\ldots;n_k)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}} \quad \textbf{(1.5)}$$

Пример 1.19. Определить сколько существует различных семизначных чисел, состоящих из цифр 1,3,5 в которых цифра 1 повторяется 2 раза, цифра 3-3 раза, 5-2 раза.

Решение.

Пример искомых семизначных чисел 1315353, 3133155 и так далее. Цифры каждого такого числа образуют выборку: (1,3,1,5,3,5,3), (3,1,3,3,1,5,5) и т.д. Следовательно, каждая из семизначных чисел отличается от остальных порядком следования цифр, при этом цифры могут повторяться. Количество таких чисел найдём с помощью формулы перестановки с повторениями:

$$N=\overline{P_7}(2;3;2)=\frac{7!}{2!\,3!\,2!}=5\cdot6\cdot7=210.$$

Таким образом, из заданных цифр можно составить 210 семизначных чисел.

Пример 1.20. Сколько слов (буквенных комбинаций) можно получить, переставляя буквы слова: **а)** «МАРТ»; **б)** «МАМА»; **в)** «ПАРАБОЛА».

Решение.

а) Поскольку все четыре элемента(буквы) слова «МАРТ» различны, то переставляя элементы, получим: $N=P_4=4!=2\cdot3\cdot4=24$ - различных буквенных комбинаций;

б) Если же некоторые переставляемые предметы одинаковы, то получается меньше перестановок – некоторые перестановки совпадают друг с другом.

При перестановке букв слова «МАМА» применяем формулу перестановки с повторением, так как буква М - повторяется два раза, буква А-повторяется два раза:

$$N = \overline{P}_4(2;2) = \frac{4!}{2!2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = 6;$$

в) Всего восемь элементов (букв), всего один элемент (буква А)-повторяется три раза, поэтому имеем: $N = \overline{P}_8(3) = \frac{8!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 6720.$

Пример 1.21. Сколькими способами можно собрать гирлянду из 4 красных, 4 синих и 8 желтых флажков?

Решение.

У нас имеется объекта $n_1 = 4$первого типа (x - красные флажки), $n_2 = 4$ объекта второго типа (y -синие флажки) и $n_3 = 8$ объектов третьего типа (желтые флажки).Все эти $n = n_1 + n_2 + n_3 = 16$ флажков нужно развесить на веревке всеми возможными способами. Поскольку есть возможность повтора флажков (по цвету) применяем формулу числа перестановок с повторениями: $N = \overline{P}_{16}(4;4;8) = \frac{16!}{4!4!8!} = 900900.$

6)Сочетания с повторениями.

Сочетанием с повторениями называются комбинации, составленные из n элементов по k элементов, которые отличаются только составом элементов и возможностью повтора.

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов с повторениями вычисляется по формуле 1.6:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k \quad \textbf{(1.6)}$$

Пример 1.22. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Сколько различных наборов по 4 пирожных можно составить при том, что пирожные могут быть в наборе одинаковыми.

Решение.

Поскольку при составлении набора порядок расположения пирожных не важен, то используем для подсчета формулу сочетаний с повторениями:

$$N = \overline{C}_7^4 = C_{7+4-1}^4 = C_{10}^4 = \frac{10!}{6!\,4!} = 7 \cdot 3 \cdot 10 = 210.$$

Пример 1.23. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем: **а)** 12 открыток; **б)**8 открыток; **в)**8 различных открыток.

Решение.

а) Данная задача на отыскание числа сочетаний с повторениями из 10 элементов по 12. Следовательно,

$$N = \overline{C}_{10}^{12} = C_{10+12-1}^{12} = C_{21}^{12} = \frac{21!}{12!\,9!} = 293930.$$

б) Поскольку открытки могут совпадать применяем формулу сочетаний с повторениями:

$$N = \overline{C}_{10}^{8} = C_{10+8-1}^{8} = C_{17}^{8} = \frac{17!}{8!\,9!} = 24310.$$

в) В случае, когда требуется купить 8 различных открыток, получим сочетания без повторений: $N = C_{10}^8 = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$

Пример 1.24. В магазине продаются платки четырёх цветов, которые лежат вперемешку в огромной корзине. Женщина не может определиться с выбором, и поэтому решается довериться случаю – выбрать не глядя три платка. Определить число различных вариантов покупки трёх платков.

Решение.

Так как не важно, в какой последовательности женщина будет выбирать платки, то нам нужно определить число сочетаний с повторениями покупки трёх платков четырёх возможных цветов, то есть n=4, а $k = 3$.В соответствии с формулой 1.6 имеем:

$$N = \bar{C}_4^3 = C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Задания для самостоятельного решения

1.Используя комбинаторные понятия и методы, найти решения следующих задач:

1. На столе лежали яблоко, груша и банан. Сколькими способами можно выбрать: **а)** один фрукт; б) два фрукта; **в)** три фрукта; **г)** хотя бы один фрукт.
2. Сколькими способами можно рассадить 4 человека за столом.
3. Сколькими способами можно расставить на полке 5 книг.
4. Сколько имеется пятизначных чисел, все цифры у которых различны.
5. Сколькими способами можно выбрать один цветок из корзины, в которой имеется 12 гвоздик,15 роз и 7 хризантем.

6. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. Сколько бригад можно составить по 7 человек при условии, что в каждой бригаде должно быть 4 мужчины.
7. В классе изучают 10 предметов. В понедельник 6 уроков, причём все различны. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник.
8. На карточке спортлото 36 клеток. Играющий должен отметить 4. Каково число всех возможных вариантов.
9. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материя 5 различных цветов.
10. Если подбросить одновременно три игральные кости, то сколько имеется различных комбинаций выброшенных очков.
11. В автомашине пять мест. Сколькими способами пять человек могут усесться в эту машину, если занять место водителя могут только двое из них.
12. Абонент забыл две последние цифры номера телефона, но помня, что они различны, набирает их наудачу. Каково наибольшее число безуспешных попыток абонента.
13. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5.
14. Для участия в соревнованиях тренер выбирает 5 спортсменов из 12. Сколькими способами он может это сделать.
15. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «ТЕАТР».
16. Сколько пятизначных чисел можно составить из множества цифр {5,7,2}.
17. У мамы было 2 одинаковых яблока, 3 одинаковых груши и 4 одинаковых апельсина. Каждый день она

давала ребенку по одному фрукту. Сколькими способами она могла это сделать.

18. На конфетном заводе имеется конвейер, по которому движутся конфеты четырёх сортов. Некто запускает руки в этот поток и вытаскивает двадцать штук. Сколько всего различных "конфетных комбинаций" может оказаться в горсти.

19. Сколькими способами можно разместить 8 пассажиров по трем вагонам?

20. Сколькими способами можно расположить в электрической цепи при последовательном соединении три синие и пять желтых лампочек?

21. В группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту и профорга. Сколькими способами можно это сделать?

22. В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

23. У мальчика остались от набора для настольной игры штампы с цифрами 1, 3 и 7. Он решил с помощью этих штампов нанести на все книги пятизначные номера – составить каталог. Сколько различных пятизначных номеров может составить мальчик?

24. В магазине продавались четыре вида тортов: наполеон, рыжик, графские развалины, вдохновение. Сколькими способами можно купить 7 тортов?

25. Даны цифры 1,2,3,4. Сколько различных двузначных чисел можно составить, если цифры в числе могут повторяться?

Ответы: 1.1.а)3; **б)**3; **в)**1; **г)**7.**1.2.**24.**1.3.**120. **1.4.**27216. **1.5.**34.**1.6.**60. **1.7.**151200.**1.8.**58905.

1.9.60.**1.10.**216.**1.11.**48.**1.12.**89.**1.13.**18000.**1.14.** 792.**1.15.**60.**1.16.**243.**1.17.**1260.**1.18.**1771. **1.19.**6561.**1.20.**56.**1.21.**870.**1.22.**11880.**1.23.**243. **1.24.**120.**1.25.**16.

1.3. Случайные события и их классификация.

Одним из основных понятий теории вероятности является случайное событие.

Случайное событие – это любой факт, который может произойти или не произойти при выполнении некоторого комплекса условий. При этом выполнения некоторого комплекса условий отождествляется с проведением испытания (опыта).

Любой результат испытания называется **исходом**, который, влечёт за собой появление определённого события.

Например, в урне имеются цветные шары. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара из урны есть испытание. Появление шара определенного цвета событие.

В частности, при подбрасывании монеты возможно 2 исхода (случайных события): выпадет орёл, выпадет решка. Естественно, подразумевается, что данное испытание проводится в таких условиях, что монета не может встать на ребро или, скажем, зависнуть в невесомости.

Итак, **случайным событием** называется любой исход опыта, который может произойти или не произойти в результате испытания.

События обозначают большими латинскими буквами, либо теми же буквами с индексами.

Обозначение: $A, B, C, \ldots$ или $A_1, A_2, A_3, \ldots$

События бывают составными и элементарными. Если исход опыта только один мы имеем дело с **элементарным событием**, непосредственные исходы опыта называются **элементарными событиями**.

Обозначение: ω

Событие, состоящее из нескольких элементарных, называется **составным**.

Например, событие B-выпадение орла при бросании монеты, элементарное событие; событие A -сумма очков, выпавшая при бросании двух игральных кубиков, равна шести, составное событие, состоящее из пяти элементарных:

$\omega_1 = (1; 5), \omega_2 = (5; 1), \omega_3 = (3; 3), \omega_4 = (2; 4),$
$\omega_5 = (4; 2).$

Множество всех элементарных событий называется **пространством элементарных событий** или **пространством исходов**.

Обозначение: Ω .

Например, пусть событие ω_i означает, что в результате бросания одного кубика выпало i очков, $i = 1,2,3,4,5,6.$ Пространство элементарных событий таково:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Событие называют **достоверным**, если оно обязательно наступит в результате данного опыта.

Обозначается: Ω .

Например, событие A -извлечение белого шара из урны с десятью белыми шарами, событие достоверное.

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдёт в результате испытания**.**

Обозначение: $\varnothing$.

Например, событие A -извлечение белого шара из урны с десятью красными шарами невозможное.

События A и B называются **тождественными (равными)**, если событие A происходит тогда и только тогда, когда происходит событие B .

Обозначение: $A = B$.

Например, пусть имеется 10 карточек с номерами от 0 до 9,определим событие A -извлечение карточек под номерами 3,6,9 и B -извлечение карточек с номерами кратными трём (делятся на три), равные события $A = B$.

Два или большее количество событий называют **равновозможными**, если по условиям испытания нет оснований считать какое-либо из них более возможным.

Примеры равновозможных событий: появление двойки, туза или валета при вынимании карты из колоды; выпадение решки или орла, при бросании монеты; выпадение любого из чисел от 1 до 6 при бросании игрального кубика и так далее.

Ответим, на такой вопрос: могут ли быть те же события не равновозможными? Да, могут. Например, если у монеты или игрального кубика смещён центр тяжести, то гораздо чаще будут выпадать вполне определённые грани.

Два события называют **несовместными**, если в одном и том же испытании появление одного из событий исключает появление другого события, то есть не могут произойти вместе в опыте. В противном случае события называются совместными.

Таким образом, события называются **совместными**, если в отдельно взятом испытании появление одного из них не исключает появление другого (могут произойти одновременно).

Например, рассмотрим опыт: из колоды извлекается карта, событие A – извлечение дамы, B – извлечение короля, C – извлечение карты пиковой масти. События A и B несовместные, так как не могут произойти одновременно (извлеченная карта не может быть одновременно королем и дамой), события A и C, C и B – совместные так как могут произойти одновременно(извлеченная карта-дама, король может быть пиковой масти)

Простейшим примером несовместных событий является пара противоположных событий.

1.4. Операции над событиями.

Введем основные операции над событиями. События и действия над ними можно наглядно иллюстрировать с помощью диаграммы Эйлера – Венна - геометрические схемы, которые используется в математике и других прикладных направлениях. Достоверное событие Ω изображают в виде прямоугольника, случайное событие в виде кругов внутри прямоугольника (например, событие A)

(рис.1.1), элементарные случайные события точками внутри прямоугольника.

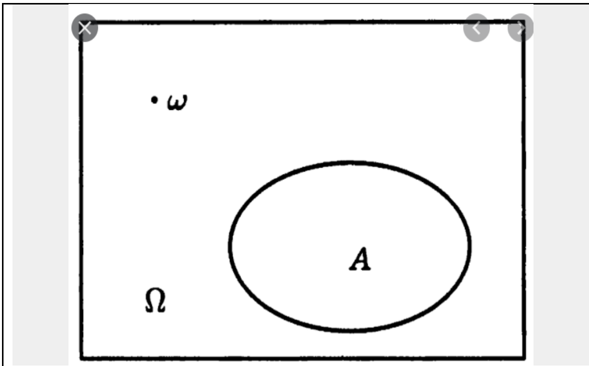


Рис.1.1.

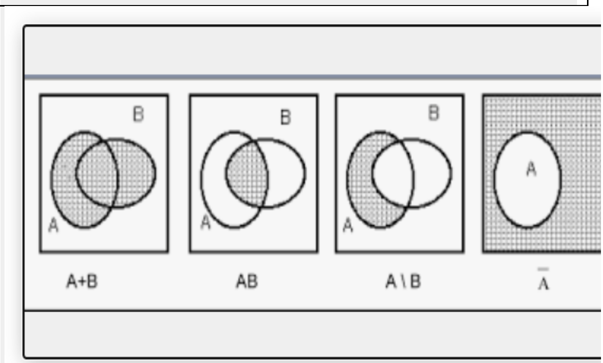


Рис.1.2.

1) **Суммой** двух событий A и B называется событие $A+B$ которое состоит в том, что наступит или событие A или событие B или оба события одновременно(см. рис.1.2).

Замечание:

1)в том случае, если события несовместны, последний вариант отпадает, то есть может наступить или событие A ,или событие B .

2) правило распространяется на любое конечное количество слагаемых, например, событие $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$ состоит в том, что произойдёт хотя бы одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Например ,событие A -при броске игральной кубика не выпадет 5 очков, состоит в том, что выпадет или 1(A_1), или 2(A_2), или 3(A_3), или 4(A_4), или 6 очков(A_5), то есть $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$.

2) **Произведением** двух событий A и B называют событие $A \cdot B$, которое состоит в совместном появлении этих событий, иными словами, умножение $A \cdot B$ означает, что при некоторых обстоятельствах наступит и событие A , и событие B (см. рис.1.2). Аналогичное утверждение справедливо и для любого конечного количества событий. Так, например, произведение

$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6$ подразумевает, что при определённых условиях произойдёт и событие A_1 , и событие A_2 , и событие A_3 ,

…, и событие A_6.

Например, событие A — извлечение короля, B — извлечение карты червовой масти, то событие $A \cdot B$ извлечение червового короля;

3)Разностью событий A и B называется событие $A - B\,(A \setminus B)$, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A ,но не происходит событие B (см. рис.1.2).

Например, A — извлечение короля, B — извлечение карты червовой масти, то $A - B$ -извлечение любого короля, кроме червового;

4)Событие $\overline{A}$ называется **противоположным** событию A , если не произошло событие A (см. рис.1.2). Например, если A-попадание в мишень при одном выстреле, то $\overline{A}$ — промах.

Замечание: совершено ясно, что в отдельно взятом испытании попадание по цели исключает промах (и наоборот), поэтому противоположные события являются несовместными.

Пример 1.25. Из колоды извлекается карта, событие A — извлечение дамы, B — извлечение короля, C — извлечение карты пиковой масти. $A+B, A\cdot C, A-C, (A+B)\cdot C$.

Решение.

$A+B$ - извлечение дамы или короля любой масти;

$A \cdot C$-извлечение пиковой дамы;

$A-C$ -извлечение дамы не пиковой масти;

$(A+B)\cdot C$ - извлечение дамы или короля пиковой масти.

Свойства операций над событиями.

Операции над событиями обладают следующими свойствами:

1) $A\cdot B=B\cdot A$, $A+B=B+A$ (переместительное);

2) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$, $A+(B+C)=(A+B)+C$ (сочетательное);

3) $A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$, $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ (распределительное);

4) $A\cdot\varnothing=\varnothing$, $A+\varnothing=A$, $A\cdot\Omega=A$, $A+\Omega=\Omega$;

5) $A\cdot A=A$, $A+A=A$;

6) $A\cdot\overline{A}=\varnothing$, $A+\overline{A}=\Omega$;

7) $\overline{\varnothing}=\Omega$, $\overline{\Omega}=\varnothing$, $\overline{\overline{A}}=A$;

8) $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ (законы де Моргана);

9) $A-B=A\cdot\overline{B}$.

Справедливость каждого тождества проверяется построением диаграмм Эйлера – Венна, отдельно для левой и правой частей, с последующим сравнением результатов. Совпадения конечных диаграмм доказывает рассмотренное тождество.

Пример 1.26. Доказать тождество $B=A\cdot B+\overline{A}\cdot B$.

Решение.

Используя введенные выше свойства, имеем: $A\cdot B+\overline{A}\cdot B=B(A+\overline{A})=B\cdot\Omega=B$.

Полная группа событий.

Несколько событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют **полную группу несовместных событий**, если любые два из них несовместны и хотя бы одно непременно должно произойти в результате отдельно взятого испытания, то есть $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$-полнота выполняется и $A_i \cdot A_j = \varnothing$-попарная несовместность.

Например, события A_i -в результате бросания кубика выпадет i-очков, образуют полную группу событий. Действительно, события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_6$ попарно несовместны $A_i \cdot A_j = \varnothing$ -поскольку появление какой-либо грани исключает одновременное появление других граней и образуют полную группу событий $\sum_{i=1}^{6} A_i = \Omega$,так как в результате испытания непременно появится одно из этих шести событий.

Очевидно, что любая пара противоположных событий образует полную группу событий.

1.5. Классическое определение вероятности.

В практической деятельности для исследования очень важно иметь некоторую количественную оценку позволяющую сравнивать события по степени возможности наступления. Для этого введём понятие вероятности события.

Вероятность события — это численная мера объективной возможности его наступления.

Вероятность события A равна отношению числа благоприятствующих событию A исходов к общему числу исходов опыта, то есть

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad \textbf{(1.7)}$$

где m - число благоприятных исходов опыта; n - общее число исходов опыта.

При этом полагают, что: 1) испытание содержит конечное число исходов;2) все испытания равновозможные и несовместны.

Исход опыта называется **благоприятным (благоприятствующим)** для события A, если при этом исходе опыта появилось событие A.

Например, если событие A - появление карты красной масти, то появление туза бубновой масти – исход, благоприятный событию A.

Свойства вероятности события.

1. **Вероятность любого события заключена между нулем и единицей**, то есть $0 \le P(A) \le 1$.

Доказательство.

Так как число благоприятных исходов не может превышать общего числа исходов испытания, то есть $0 \le m \le n \,\Big|: n,\ \ 0 \le \frac{m}{n} \le 1$, следовательно $0 \le P(A) \le 1$.

2. **Вероятность достоверного события** Ω **равна единице**, то есть $P(\Omega) = 1$.

Доказательство.

В данном случае все исходы являются благоприятными, поэтому $m = n$, $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$.Таким образом, $P(\Omega) = 1$;

3. **Вероятность невозможного события** $\varnothing$ **равна нулю**, то есть $P(\varnothing) = 0$.

Доказательство.

Так как нет ни одного благоприятного исхода, то $m = 0$, $P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0$, то есть $P(\varnothing) = 0$.

4. **Сумма вероятностей противоположных событий равна 1**, то есть $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Доказательство.

Так как противоположные события образуют полную группу событий, то $A + \overline{A} = \Omega$,это означает, что $P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$,где $\overline{A}$ – противоположное событие к событию A.

Замечание: часто для вычисления вероятности события A используют формулу $P(A) = 1 - P(\overline{A})$,которая позволяет по вероятности события найти вероятность противоположного события и наоборот.

Пример 1.27. Найти вероятность выпадения 5 очков на грани кубика при однократном его бросании.

Решение.

Рассмотрим событие A - выпадения 5 очков на грани кубика (при однократном бросании), вероятность от которого мы будем искать. Поскольку кубик может упасть любой из 6 граней к верху, а 5 очков находятся только на одной грани, то вероятность выпадения 5 очков на грани кубика равна: $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{6}$.

Пример 1.28. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что: **а)** хотя бы один раз появится «орёл»; **б)** только один раз появится «орёл».

Решение.

Рассмотрим события: A-появление орла хотя бы один раз, B -появление орла только один раз.

Перечислим все возможные исходы (общее количество исходов) при двукратном подбрасывании монеты, их всего 4: $(\text{о},\text{р}),(\text{о},\text{о}),(\text{р},\text{р}),(\text{р},\text{о}), n=4$.

а) Определим событие A-появление орла хотя бы один раз, то есть появление орла один раз и более, следовательно число благоприятствующих исходов $m=3$, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{4}$;

б) Событие B- только один раз появится «орла» означает однократное появление орла, следовательно $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Пример 1.29. Бросаются два игральных кубика. Определить вероятность того, что: **а)** сумма числа очков не превосходит 8; **б)** сумма числа очков равна 8; **в)** сумма числа очков равна 8, а разность 4;**г)** произведение числа очков не превосходит 8; **д)** произведение числа очков делится на 8.

Решение.

а) Введем событие A-сумма числа очков на обеих игральных кубиках не превосходит 8. Найдем вероятность события A по классическому определению вероятности $P(A) = \frac{m}{n}$,для этого составим таблицу всех возможных комбинаций очков при броске двух кубиков и соответствующих сумм (рис.1.3):

1-ая кость / 2-ая кость	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Рис.1.3.

Получим: $n = 6 \cdot 6 = 36$- всего различных комбинаций при броске двух кубиков (на первом кубике выпадает одно из шести чисел и на втором выпадает одно из шести чисел); $m = 26$ -количество комбинаций, в которых сумма не более 8 (см. благоприятствующие исходы- выделенные красным числа в таблице рис.1.3).

Таким образом, искомая вероятность равна:

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$.

б) Введем событие B - сумма числа очков равна 8. Найдем вероятность события В по классическому определению вероятности:

n = 36 - число различных комбинаций при броске двух кубиков, m =5– событию B- число очков равно 8, благоприятствует 5 исходов (см.рис.1.3.).

Таким образом, искомая вероятность равна:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36};$$

в) Введем событие C - сумма равна 8, а разность 4,то есть исходы благоприятствующие событию, для которого, сумма очков равна 8 и при этом разность (разница) числа очков равна 4,таких исходов всего два (2;6),(6;2). Найдем вероятность события по классическому определению вероятности:

$$P(C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18};$$

г) Введем событие D- произведение числа очков не превосходит 8. Для удобства нахождения числа исходов, благоприятствующих событию D составим таблицу всех возможных комбинаций очков при броске двух игральных кубиков и соответствующих им произведений (см.рис.1.4):

1-ая кость / 2-ая кость	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Рис.1.4.

$$P(D) = \frac{m}{n} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9};$$

д) Введем событие E- произведение числа очков делится на 8. Число исходов, благоприятствующих событию E (произведение числа очков делится на 8) равно пяти (на 8 делится 8,8,16,24,24).

Пример 1.30. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и помня лишь, что эти цифры различны набирал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение.

Событие A-набраны три нужные цифры. Определимся для начала с общим количеством исходов n.Так как три цифры можно выбрать из десяти и при этом важен состав и порядок их следования, то общее количество исходов совпадает с количеством размещений из десяти по три $n = A_{10}^{3} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$.Событию A благоприятствует лишь один исход (нам подходит только один вариант расположения цифр),поэтому $m = 1$,следовательно $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$.

Пример 1.31. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: **а)** нет бракованных; **б)** нет годных.

Решение.

A - извлекли 4 годных деталей;
B -извлекли 4 бракованных деталей.
В ящике 100 -10=90 годных,10- бракованных.

Общее количество исходов, равно $n = C_{100}^{4}$ количеству всех возможных сочетаний из 100 по 4.

а) Четыре годные можно извлечь только из годных, порядок следования не важен поэтому,

$$m = C_{90}^{4}, P(A) = \frac{C_{90}^{4}}{C_{100}^{4}};$$

б) Четыре бракованных можно извлечь только из бракованных, поэтому $m = C_{10}^{4}, P(A) = \frac{C_{10}^{4}}{C_{100}^{4}}$.

Ответы вычислите самостоятельно.

Пример 1.32. В ящике из N деталей имеется n стандартных деталей. Наудачу и без возвращения вынимают m деталей. Найти вероятность того, что из отобранных деталей будет выбрано ровно k стандартных.

Решение.

Сначала найдем общее число исходов - это число всех различных способов выбрать любые m деталей из общего множества деталей N (без учета порядка), то есть число сочетаний C_N^m (см. подробнее про сочетания-раздел комбинаторика).

Теперь посчитаем число исходов благоприятствующих событию A- из m отобранных деталей будет выбрано ровно k стандартных : k стандартных деталей можно выбрать из n стандартных деталей C_n^k способами при этом оставшиеся $m-k$ деталей должны быть нестандартными: выбрать $m-k$нестандартных деталей можно из нестандартных$N-n$ деталей C_{N-n}^{m-k}способами. По правилу произведения- перемножая полученные значения, получим число исходов, благоприятствующих событию A:

$$C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}$$

Применяя классическое определение вероятности - поделив число благоприятствующих исходов на общее число исходов, получим искомую формулу:

$$P(A) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

Замечание: заместо деталей могут фигурировать изделия, болты, холодильники и так далее; детали могут быть стандартными и бракованными, или годными и дефектными, и так далее. Главное, чтобы они были двух типов, тогда один тип вы считаете условно "стандартными", второй - "бракованными" и используете формулу для решения, которую мы получили выше (см. пример 1.33).

Пример 1.33.В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

Решение.

Определим событие A - среди 9 отобранных студентов 5 отличников. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно выбрать 9 студентов из 12, то есть числу сочетаний из 12 элементов по 9 элементов:

$$n = C_{12}^{9} = \frac{12!}{9!\,3!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3} = 220.$$

Определяем число исходов, благоприятствующих событию A. Пять отличников можно выбрать из восьми и учитываем оставшихся студентов (не отличников):

$$m = C_8^5 \cdot C_{12-8}^{9-5} = C_8^5 \cdot C_4^4 = \frac{8!}{5!\,3!} \cdot \frac{4!}{0!\,4!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 56.$$

Таким образом, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$.

Пример 1.34. В ящике лежат 12 красных,7синих,

5 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Найти вероятность того, что вынут 1 зеленый,2 красных,3 синих шара.

Решение.

Определим событие A-из шести извлеченных шаров 1 зеленый,2 красных и 3 синих.

Общее количество исходов, поскольку из 24 шаров извлекли 6 (порядок расположения шаров не важен, только состав), вычисляется по формуле:

$$n = C_{24}^{6} = \frac{24!}{18!6!} = \frac{18!19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24}{18!1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} =$$
$$= 19 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 4 = 134596;$$

Учитывая, что

1 зеленый можно выбрать из 5 зеленых - C_5^1,

2 красных можно выбрать из 12 красных- C_{12}^2,3 синих из 7 синих- C_7^3.По правилу умножения комбинаторики, число исходов, благоприятствующих событию A имеет вид:

$$m = C_5^1 \cdot C_{12}^2 \cdot C_7^3 = \frac{5!}{4!\,1!} \cdot \frac{12!}{10!\,2!} \cdot \frac{7!}{3!\,4!} = \\ = 5 \cdot 66 \cdot 35 = 11550;$$

, следовательно,

$$P(A) = \frac{11550}{134596}.$$

Упростите дробь самостоятельно.

Пример 1.35. В ящике лежат 10 заклепок, отличающихся друг от друга только материалом:5 железных, 3 латунных и 2 медных. Наугад берут две заклепки. Найти вероятность того, что они будут из одного материала.

Решение.

A -две извлеченные заклепки из одного материала (либо две медных, либо латунных, либо железные). Общее число исходов будет равно:

$$n = C_{10}^2 = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45.$$

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих событию A :

2 медные заклепки, можно выбрать из 2 медных- C_2^2 ,

2 латунные можно выбрать из 3 - C_3^2 ,

2 железные из 5- C_5^2 .

По правилу сложения комбинаторики имеем:

$m = C_2^2 + C_3^2 + C_5^2 = 1 + 3 + 30 = 34.$

Таким образом, $P(A) = \dfrac{34}{45}.$

Пример 1.36. В коробке шесть одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены три изделия. Найти вероятность того, что среди трех извлеченных изделий хотя бы одно окрашено.

Решение.

Определим события: A - хотя бы одно изделие из трех извлеченных окрашено, тогда $\overline{A}$ - ни одно из трех извлеченных изделий не окрашено, то есть извлечены три неокрашенных изделия.

Решим данную задачу используя 4) свойство вероятности $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Найдем вероятность противоположного события $\overline{A}$ - извлечены три неокрашенных изделия:

$$P\left(\overline{A}\right)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}.$$

Искомая вероятность $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$.

Пример 1.37. На карточках написаны буквы К, Л, М, О, О, О, Т. Карточки перемешивают и кладут в порядке их появления. Какова вероятность того, что получится слово «МОЛОТОК», если использовали все карточки.

Решение.

Определим событие A - появление слова «МОЛОТОК», данному событию благоприятствует один исход, то есть $m = 1$. Найдём общее число равновозможных исходов опыта, для этого вычислим число перестановок из этих семи букв с повторениями по формуле (1.5) при n = 7, буква О встречается 3 раза, то есть $n_1 = 3$,следовательно

$$n = \bar{P}_7(3) = \frac{7!}{3!} = 4\cdot5\cdot6\cdot7 = 840.$$

Таким образом,

$$P(A) = \frac{1}{840}.$$

Пример 1.38. Из 6 карточек с буквами Л, И, Т, Е, Р, А выбираются наугад в определенном порядке четыре. Найти вероятность того, что при этом получится слово «ТИРЕ».

Решение.

Определим событие A -появление слова «ТИРЕ».

Воспользуемся классическим определением вероятности$P(A) = \frac{m}{n}$. Число всех возможных исходов равно $n = A_6^4 = \frac{6!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 3600$ -число всех возможных размещений 4 букв из 6(важен состав и порядок расположения букв). Число благоприятствующих исходов $m = 1$,так как количество способов выбора букв Т,И,Р,Е (в указанном порядке) равно одному. Таким образом,

$$P(A) = \frac{1}{360}.$$

Задания для самостоятельного решения

2.Вычислить вероятность события используя классическое определение вероятности:

1. В урне 12 шаров, из которых 5 – черные, остальные красные. Найти вероятность извлечения красного шара.

2. В колоде 36 карт после извлечения и возвращения карты, колода перемешивается. Найти вероятность совпадения мастей.

3. Задумано двузначное число. Найти вероятность, что задуманное число окажется: **а)** случайно названое двузначное; **б)** случайно названое двузначное, цифры которого различны.

4. В ящике лежат 10шаров: 6 белых,4 черных шаров. Наудачу вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

5. Имеется шесть карточек с буквами Н, М, И, Я, Л, О. Найти вероятность того, что получится слово: **а)** МОЛНИЯ; **б)** ЛОМ.

6. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

7. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу кинескопов окажутся три кинескопа Львовского завода.

8. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди взятых наугад 6 деталей 4 окажется стандартными.

9. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: **а)** одно окрашенное изделие; **б)** два окрашенных изделия; **в)** хотя бы одно окрашенное изделие.

10. Из десяти билетов выигрышными являются только два. Чему равна вероятность того, что среди взятых наугад пяти билетов один выигрышный.

11. Студент знает 15 из 20 экзаменационных вопросов. Какова вероятность, что он ответит на два вопроса заданные экзаменатором.

12. В ящике находятся 15 шаров, из которых 10 красных, остальные синие. Из ящика вынимают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых 2 шара синего цвета?

13. Преподаватель предлагает каждому из трех студентов задумать любое число от 1 до 10. Считая, что выбор каждым из студентов любого числа из заданных равновозможен, найти вероятность того, что у кого-то из них задуманные числа совпадут.

14. В ящике находится 15 красных, 9 синих и 6 зелёных шаров. Наугад извлекают 6 шаров. Найти вероятность того, что вынуты 1 зелёный, 2 синих и 3 красных шара.

15. Для того чтобы открыть камеру хранения, используется комбинация из 4 цифр, набираемая на 4 колесиках. Найти вероятность: **а)** наугад открыть камеру хранения; **б)** наугад открыть камеру хранения, если дополнительно стало известно, что все цифры на правильном номере разные.

16. В пачке 20 перфокарт, помеченных номерами 101, 102, ..., 120 и произвольно расположенных. Перфораторщица наудачу извлекает две карты. Найти вероятность того, что извлечены перфокарты с номерами 101 и 120.

17. В конверте среди 100 фотографий находится разыскиваемая фотография. Из конверта наудачу извлечены десять фотографий. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

18. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

19. В группе 25 студентов, в том числе Петров и Иванов. Какова вероятность, что Петров и Иванов будут выбраны делегатами на конференцию (выбирают двух делегатов и выбор случаен)?

20. Есть 7 тетрадей в линейку и 8 в клетку. Наудачу выбирают 3 тетради. Найти вероятность того, что среди извлечённых все тетради оказались в клетку.

21. На семи одинаковых карточках написаны буквы: Т, Б, И, Л, И, С, И. Выкладывают наудачу эти карточки в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово ТБИЛИСИ?

22. Среди кандидатов в профбюро факультета 2 первокурсника, 3 второкурсников и 4 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают пять человек. Найти вероятность того, что все первокурсники войдут в профбюро?

23. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Покупатель выбил чек на три пирожных. Найти вероятность того, что пирожные будут разных видов.

24. Среди 25 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрывается 5 билетов. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 2 девушки.

25. В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбираются 3 фрукта. Какова вероятность, что все три фрукта – апельсины?

Ответы: 2.1. $\frac{7}{12}$. **2.2.** $\frac{1}{4}$. **2.3. а)** $\frac{1}{90}$; **б)** $\frac{1}{81}$. **2.4.** $\frac{1}{3}$.

2.5. а) $\frac{1}{720}$; **б)** $\frac{1}{120}$. **2.6.** $\frac{1}{2}$. **2.7.** $\frac{400}{1001}$. **2.8.** $\frac{1}{2}$. **2.9.а)** $0{,}6$;

б) $0{,}3$; **в)** $0{,}9$. **2.10.** $\frac{140}{252}$. **2.11.** $\frac{21}{38}$. **2.12.** $0{,}4196$.
2.13. 0,28. **2.14.** $\approx 0{,}17$; **2.15.** а) $0{,}0001$; б) $0{,}0002$.
2.16. $\frac{1}{190}$. **2.17.** 0,1. **2.18.** $\frac{1}{60}$. **2.19.** $\frac{1}{300}$. **2.20.** $\frac{56}{455}$. **2.21.** $\frac{1}{840}$.

2.22. $\frac{35}{126}$ **. 2.23.** $\frac{35}{84}$ **.2.24.** $\frac{195}{506}$**.2.25.**0,12 **.**

1.6. Геометрическое определение вероятности.

Классическое определение вероятности применяется, когда пространство всех элементарных событий Ω является конечным, при этом все исходы равновозможные. Однако, не всегда пространство всех элементарных событий Ω является конечным.

Например, в качестве Ω можно взять ограниченное множество точек на плоскости или отрезок на прямой. В качестве события A можно рассмотреть любую подобласть области Ω. Например, фигуру внутри исходной фигуры на плоскости или отрезок, лежащий внутри исходного отрезка на прямой. Так как на отрезке, как и в области бесконечно много точек $n \to \infty$,то применить формулу $P(A) = \frac{m}{n}$ мы не можем, поэтому нам на помощь приходит другой подход, называемый **геометрической вероятностью-**вероятность попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и так далее).

Пусть случайное испытание можно представить как бросание точки наудачу в некоторую геометрическую область Ω (на прямой, плоскости или пространстве). Элементарные исходы – это отдельные точки Ω, любое событие A – это подмножество этой области, пространства исходов Ω.

Рассмотрим на плоскости некоторую область Ω имеющую площадь $S(\Omega)$и в ней меньшую область D с площадью $S(D)$.В области Ω наудачу выбирается точка. Событие A -попадание точки в область D ,при этом попадание точки в область Ω достоверное событие, в область D случайное событие.

Геометрической вероятностью события A называется отношение площади области D к площади области Ω ,то есть

$$\boxed{P(A)=\frac{S(D)}{S(\Omega)}} \quad \mathbf{(1.8)}$$

при этом вероятность попадания случайно взятой точки в область размерности меньшей, чем n, например, в границу области, равна нулю.

Формулу (1.8) можно переписать в виде (1.9)

$$\boxed{P(A)=\frac{mesD}{mes\Omega},} \quad \mathbf{(1.9)}$$

где mes — это мера (S, L, V) площадь, длина, объем.

Замечание: для простоты будем считать, что все точки Ω «равноправны» (выбор точек равномерен внутри области Ω) и вероятность попадания точки в некоторое подмножество D пропорционально его мере (длине, площади, объему) и не зависит от его расположения и формы.

Геометрическая вероятность обладает всеми свойствами присущими классическому определению вероятности, то есть $0 \le P(A) \le 1$, $P(\varnothing)=0, P(\Omega)=1$.

В качестве примера решения задачи на основе геометрической вероятности, как правило рассматривается **задача о встрече**

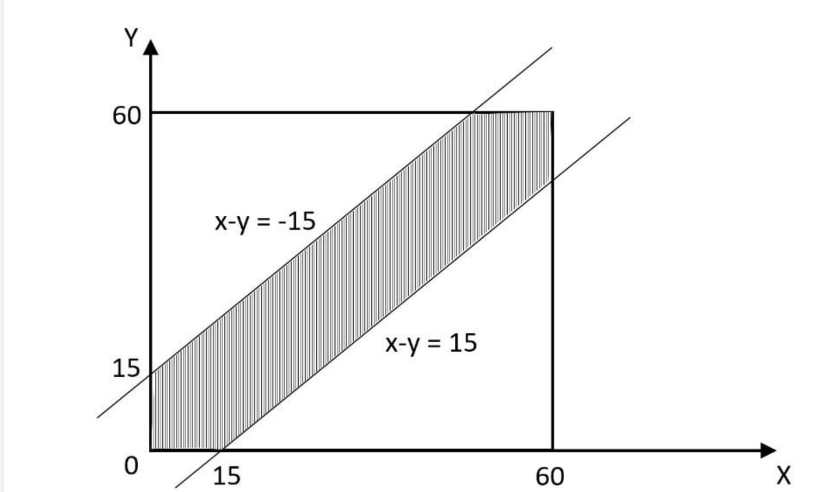


Рис.1.5.

Пример 1.39. (**Задача о встрече).** Два друга условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 15 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если приход каждого из друзей случаен и моменты приходов независимы.

Решение.

Пусть x, y -моменты приходов двух друзей: x – время прихода первого друга, а y – время прихода второго, пары$(x; y)$- все возможные приходы друзей.

Выберем в качестве множества элементарных событий Ω квадрат со стороной 60 (см. рис.1.5) ,то есть область $\Omega = \{(x; y): 0 \le x \le 60,\ 0 \le y \le 60\}$-все возможные приходы друзей в промежутке с 12 и 13 часами дня (1 час = 60 минут).

Определим событие A -друзья встретятся (встреча произойдет если разница между их приходами будет не более 15 минут), то есть область

$D = \{(x; y): |x - y| \le 15\}$- подмножество области Ω. Разберёмся, что собой представляет область D, для этого рассмотрим неравенство $|x - y| \le 15$:

$-15 \le x - y \le 15.$

.

Таким образом, область D представляет собой полосу заключённую между двумя прямыми $x - y = -15$ и $x - y = 15$(см. рис.1.5-заштрихованная область). Встреча состоится, если точка$(x; y)$ попадет в область D. Искомая вероятность равна отношению площади области D к площади квадрата Ω. Площадь квадрата Ω равна 60^2, а площадь области D можно определить как разность площади квадрата и суммарной площади двух прямоугольных треугольников, изображенных на рис.1.5.

Таким образом, имеем:

$$P(A) = \frac{S(D)}{S(\Omega)} = \frac{S_{\text{кв.}} - 2S_{\Delta}}{S_{\text{кв.}}} = \frac{60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 45}{60^2} = 1 - \left(\frac{45}{60}\right)^2 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}.$$

Пример 1.39. Пусть на отрезок $\Omega = [0;1]$на удачу поставлена точка. Какова вероятность того, что она попадет в промежуток $A = [0{,}4; 0{,}7]$.

Решение.

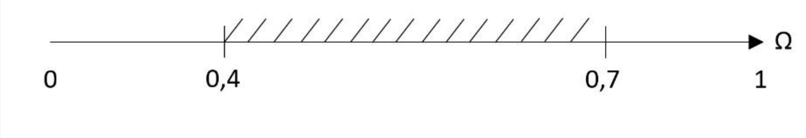


Рис.1.6

Так как на отрезке$\Omega = [0;1]$бесконечно много точек$n \to \infty$,то здесь нельзя применить формулу

$P(A)=\frac{m}{n}$, применима формула $P(A)=\frac{l}{L}$, где l-длина вложенного отрезка, L - длина большего отрезка(см.рис.1.6), следовательно,

$$P(A)=\frac{0{,}7-0{,}4}{1}=\frac{0{,}3}{1}=\frac{3}{10}=0{,}3.$$

Пример 1.40. Метровый шнур случайным образом разрезают ножницами. Найти вероятность того, что длина обрезка составит не менее 70 см.

Решение.

Сделаем рисунок 1.7:

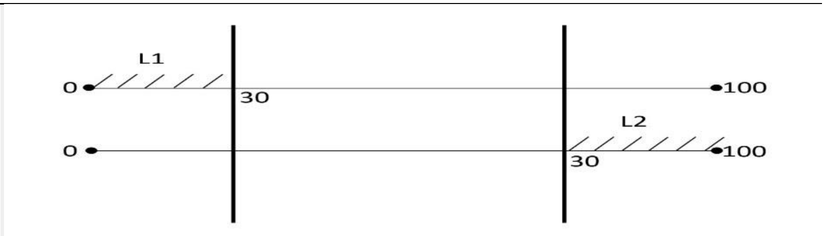


Рис.1.7

Определим событие A - длина обрезка не менее 70 см. Общему числу исходов соответствует длина шнура 1 м. Для того, чтобы длина обрезка составила не менее 0,7 м, можно отрезать не более 0,3 м. Такие отрезы можно выполнить, с любой стороны, от конца шнура (или справа, или слева), их суммарная длина равна $0{,}3+0{,}3=0{,}6$ м. По геометрическому определению вероятности имеем:

$$P(A) = \frac{l}{L} = \frac{0{,}6}{1} = 0{,}6.$$

Пример 1.41. На отрезок OA длиной L числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую, чем $\frac{L}{3}$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

Решение.

Пусть событие A— «меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую чем — $\frac{L}{3}$».

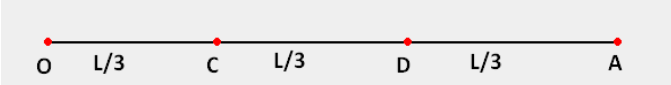


Рис.1.8

Разобьем отрезок OA на три равных отрезка (длиной — $\frac{L}{3}$) OC, CD и DA (см.рис.1.8).
Рассмотрим положение точки B на отрезкеOA :
1) Если точка B попадает на отрезок OC, то меньший из отрезков OB и BA,то есть отрезок OB по длине будет меньше $\frac{L}{3}$, что не благоприятствует появлению событияA;
2)Если точка B попадает в отрезок CD, то оба отрезки, то есть OB и BA будут больше $\frac{L}{3}$, поэтому попадание точки B в отрезок CD благоприятствует появлению событияA ;

3)Если точка B попадает в отрезок DA, то меньший из отрезков OB и BA,то есть BA будет меньше $\frac{L}{3}$, что не благоприятствует появлению событияA.

Таким образом, вероятность события A вычисляется по следующей формуле:

$$P(A)=\frac{l(CD)}{L(OA)}=\frac{\frac{L}{3}}{L}=\frac{1}{3}=0,(3).$$

Пример 1.42. В круг радиусом R помещен меньший круг радиусом r. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в больший круг, попадет также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

Решение.

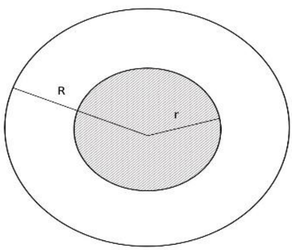


Рис.1.9

Пусть событие A — точка, брошенная в больший круг, попадет также и в меньший круг (см.рис.1.9), тогда $P(A)=\dfrac{S(D)}{S(\Omega)}=\dfrac{S_{м.к.}}{S_{б.к..}}=\dfrac{\pi r^2}{\pi R^2}=\dfrac{r^2}{R^2}$.

Пример 1.43. Пусть в квадрат, со стороной 4 см вписан круг. Найти вероятность того, что точка, случайным образом брошенная в квадрат, попадет в круг

Решение.

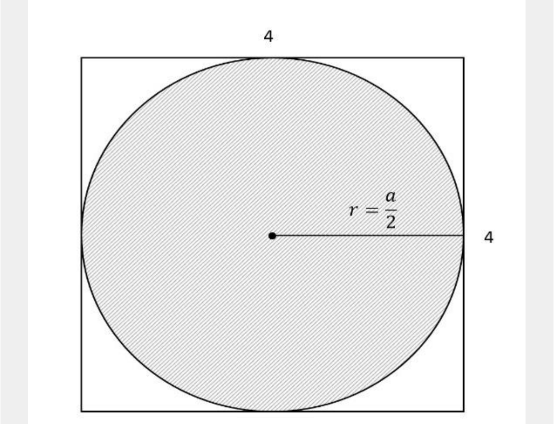


Рис.1.10

Событие A -точка попала в круг, тогда $P(A)=\frac{S_{кр.}}{S_{кв.}}$.

Известно, что радиус вписанной окружности равен половине стороны квадрата, поэтому радиус круга равен 2см. Площадь квадрата равна 16 $см^2$, а площадь круга радиусом 2 см равна $4\pi см^2$. Тогда

$$P(A)=\frac{4\pi}{16}=0{,}25\pi.$$

Пример 1.44. В шар брошена случайная точка. Найти: **а)** с какой вероятностью она попадёт в центр шара; **б)** с какой вероятностью она попадёт на какой-нибудь диаметр шара; **в)** с какой вероятностью она попадёт в верхнее полушарие.

Решение.

а) Объём одной точки (центра шара) равен нулю, значит и искомая вероятность равна 0;

б) Любая точка шара всегда попадает на какой-нибудь диаметр. Поэтому искомая вероятность равна единице.

в) С какой вероятностью она попадёт в одно, определённое, полушарие?

При решении этой задачи используем отношение объемов фигур. Пусть весь объём шара равен $V(\Omega)$. Событие A-точка попадёт в верхнее полушарие (область D). Все точки шара - трёхмерная фигура Ω. Искомая вероятность равна отношению объёма полушария $V(D)$ к объёму шара $V(\Omega)$:

$$P(A) = \frac{V(D)}{V(\Omega)} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Пример 1.45. Чтобы добраться в институт, Петя может воспользоваться автобусом одного из двух маршрутов. Автобусы первого маршрута следуют с интервалом в 18 мин., второго маршрута — с интервалом в 15 мин. Найти вероятность того, что Петя будет ждать автобуса не более 10 мин.

Решение.

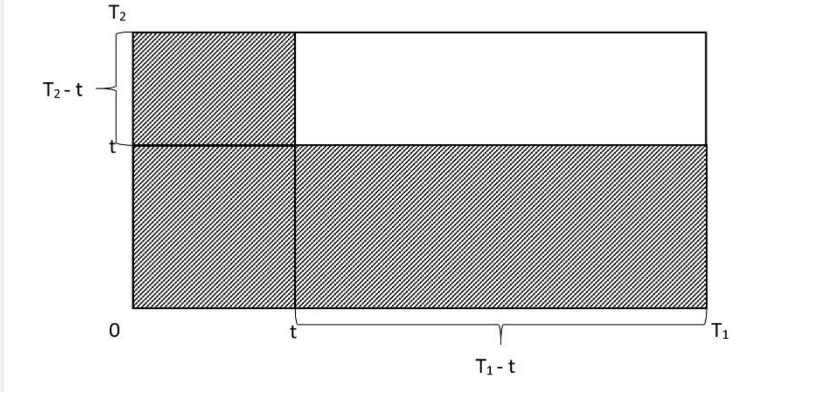


Рис.1.11

Пусть T_1, T_2 -время ожидания автобуса первого и второго маршрута соответственно.

$(T_1; T_2)$- всевозможное время ожидания автобусов первого и второго маршрута.

Множество элементарных событий Ω является прямоугольник со сторонами $T_1 = 18, T_2 = 15$, то есть

$$\Omega = \{(T_1; T_2): 0 \leq T_1 \leq 18, 0 \leq T_2 \leq 15\}.$$

Область D, благоприятствующая наступлению событию A - Петя будет ждать автобус не более $t = 10$ мин., задаётся множеством D:

$$D = \{(T_1; T_2): 0 \leq T_1 \leq 18, 0 \leq T_2 \leq 15\} \setminus$$
$$\setminus \{(T_1; T_2): 10 \leq T_1 \leq 18, 10 \leq T_2 \leq 15\};$$

D-область, заштрихованная на рисунке 1.11. Поэтому, согласно геометрическому определению вероятности имеем:

$$P(A) = \frac{S(D)}{S(\Omega)} = \frac{T_1 \cdot T_2 - (T_1 - t) \cdot (T_2 - t)}{T_1 \cdot T_2} =$$
$$= \frac{18 \cdot 15 - (18 - 10)(15 - 10)}{18 \cdot 15} =$$
$$= 1 - \frac{8 \cdot 5}{18 \cdot 15} = 1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27}.$$

Пример 1.46. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное $\frac{y}{x}$ не больше двух.

Решение.

Определим событие A- произведение xy будет не больше единицы, а частное $\frac{y}{x}$ не больше двух. Множество всех возможных исходов имеет вид

$\Omega = \{(x;y): 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$- квадрат [0;2] × [0;2] .Область D соответствующая событию A имеет вид $D = \left\{(x;y): xy \le 1, \frac{y}{x} \le 2\right\}$ или

$D = \left\{(x;y): y \le \frac{1}{x}, y \le 2x\right\}$, для построения области D найдем абсциссы точки пересечения прямой $y = 2x$ и гиперболы $y = \frac{1}{x}$:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}, \quad 2x = \frac{1}{x}, x^2 = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ следовательно } y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

Получим точку $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$пересечения прямой $y = 2x$ и гиперболы $y = \frac{1}{x}$. Построим данные линии, учитывая, что$D \subset \Omega$,то есть относительно ограничений $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$.

Таким образом, область D имеет вид (см.рис.1.12- область D заштрихована)

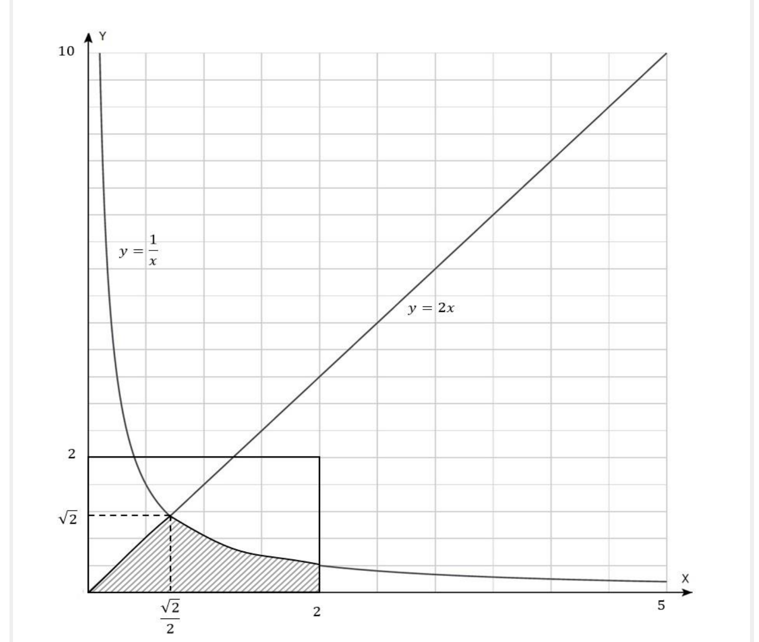


Рис.1.12

Вычислим $P(A) = \frac{S(D)}{S(\Omega)}$, где $S(\Omega) = a^2 = 2^2 = 4$,а площадь области D,можно найти при помощи интеграла:

$$S(D) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} \frac{1}{x}\,dx = x^2\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + ln|x|\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + ln2 - ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + ln2\sqrt{2} = \frac{1}{2} + ln2^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}ln2 = \frac{1+3ln2}{2}.$$

Таким образом,

$$P(A) = \frac{\frac{1+3ln2}{2}}{4} = \frac{1+3ln2}{8} \approx 0{,}38.$$

1.7. Относительная частота и статистическая вероятность.

Классическое определение вероятности предполагает, что все элементарные исходы равновероятны. Как оценить вероятность интересующего нас события, если в процессе испытания элементарные исходы вовсе не обязаны быть равновероятными? Например, если монета изогнута или центр тяжести кубика смещён. Строго говоря, необходимо было бы много раз проделать интересующий нас опыт и узнать частоту реализации различных элементарных исходов, то есть провести большое количество n независимых друг от друга одинаковых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться или не появиться, и зафиксировать число появления события A ,обозначаемое через m .Таким образом, статическая вероятность определяется из опыта наблюдения результатов испытания.

Относительной частотой события A называют отношение числа испытаний m, в которых данное событие появилось, к общему числу фактически проведённых испытаний n ,то есть

$W(A)=\frac{m}{n}$, или короче $\boxed{\omega=\frac{m}{n}}$ **(1.10)**

Относительная частота рассчитывается исключительно после опытов на основе фактически полученных данных.

Статистической вероятностью называют число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний.

Пример 1.47. Стрелок произвёл 100 выстрелов по мишени и попал 82 раза. Найти относительную частоту попаданий в цель.

Решение.

Относительная частота события A-поражение цели, равна отношению испытаний, в которых появилось событие A,к общему числу испытаний, поэтому относительная частота поражения цели составит: $\omega = \frac{m}{n} = \frac{82}{100} = 0{,}82.$

Замечание: важно понимать, что статистический подход не противоречит классическому, а лишь расширяет границы возможного применения аппарата теории вероятностей. Поэтому все приемы, которые вы уже освоили в рамках классической схемы, можно будет использовать и в дальнейшем.

Пример 1.48. Из 60 случайно выбранных сотрудников 18 человек имеют плохое зрение. Найти относительную частоту появления людей с плохим зрением.

Решение.

Относительная частота события A-появление людей с плохим зрением, равна

$$\omega = \frac{18}{60} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Пример 1.49. Для пошива рубашек было заказано 1100 пуговиц. При проверке партии из 300 пуговиц было обнаружено 4 бракованных. Какое наименьшее количество запасных пуговиц необходимо еще заказать, чтобы исключить брак?

Решение

Статистическая частота брака будет составлять $\omega = \frac{4}{300}$, тогда среди 1100 пуговиц число бракованных равно:

$$1100 \cdot \frac{4}{300} = \frac{44}{3} = 14,(3).$$

Округлив это число до наибольшего ближайшего целого, получим 15 пуговиц. Для того, чтобы исключить брак, необходимо дозаказать не менее 15 пуговиц.

Пример 1.50. Статистическая вероятность попадания в цель при 70 выстрелах равна 0,6. Сколько было попаданий?

Решение

Учитывая, что $\omega = \dfrac{m}{n}$,а по условию $\omega = 0{,}6, n = 70$,то $m = \omega \cdot n = 0{,}6 \cdot 70 = 42.$

Таким образом, число попаданий равно 42.

Задания для самостоятельного решения.

3. Вычислить вероятность события используя понятие геометрической вероятности, относительной частоты и статистической вероятности.

1. Мишень имеет форму окружности радиуса 4. Какова вероятность попадания в ее правую половину, если попадание в любую точку мишени равновероятно? При этом промахи мимо мишени исключены.

2. На отрезке L длины 20 см помещен меньший отрезок длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

3. В круг с радиусом R = 20 см помещён меньший круг с радиусом r = 12 см. Найдите вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадёт также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

4. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника.

5. Друзья случайным образом приходят в столовую с 13.00 до 14.00, при этом обед каждого из них занимает примерно 20 минут. Найти вероятность того, что: **а)** друзья встретятся во время обеда, **б)** данная встреча не состоится.

6.В прямоугольник со сторонами 5 и 4 см. вписан круг радиуса 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

7.Какова вероятность Вашей встречи с другом, если вы договорились встретиться в определенном месте, с 12.00 до 13.00 часов и ждете друг друга в течение 5 минут?

8.На отрезок AB длины L, брошена точка M так, что любое ее положение на отрезке равновозможное.

Найти вероятность того, что меньший из отрезков (АМ или МВ) имеет длину, большую чем $\frac{L}{3}$.

9.Точку наудачу бросили на отрезок [0; 2]. Какова вероятность ее попадания в отрезок [0,5; 1,4]?

10. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x + y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,09.

11.Точку случайным образом бросают в круг радиусом 1. Какова вероятность того, что точка попадет в квадрат, вписанный в круг?

12.Единичный интервал делится на три части двумя случайными точками. Чему равна вероятность того, что из получившихся отрезков можно построить треугольник?

13.На отрезок числовой прямой [2;16] наугад брошена точка. Найти вероятность того, что точка попала в отрезок [5; 9].

14. В круг радиуса $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см вписан равнобедренный прямоугольный треугольник. В круг наудачу ставится точка. Найдите вероятность того, что она не попадёт в данный треугольник.

15. Петя договорился встретиться с Машей в промежуток времени между 17:00 и 19:00 часами (то есть они могут прийти в любое время между 17:00 и 19:00). Однако, Петя сказал, что не будет ждать больше 15 минут, а Маша не будет ждать дольше 20 минут. Какова вероятность, что Петя и Маша встретятся?

16. Точку наудачу бросили на отрезок [0; 2]. Какова вероятность ее попадания в отрезок [0,5; 1,4]?

17. На отрезке ОА длины L числовой оси Ох наудачу поставлены две точки: B(x) и C(y), причём $y \geq x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше, чем $\frac{L}{2}$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

18. Из 500 взятых наудачу деталей оказалось 8 бракованных. Найти частоту бракованных деталей.

19.Среди 1000 новорожденных оказалось 499 девочек. Чему равна частота рождения мальчиков?

20. Частота нормального всхода семян $\omega = 0{,}97$. Из высеянных семян взошло 970. Сколько семян было высеяно?

21. При стрельбе по мишени частота попаданий $\omega = 0{,}75$. Найти число попаданий при 40 выстрелах.

22.В результате 20 выстрелов по мишени получено 15 попаданий. Какова частота попаданий?

23.Среди 300 деталей, изготовленных на автоматическом станке, оказалось 15, не отвечающих стандарту. Найти частоту появления стандартных деталей.

24. Контролер, проверяя качество 400 деталей, установил, что 20 из них относятся ко второму сорту, а остальные – к первому. Найти частоту изделий первого сорта, частоту изделий второго сорта.

25. Отдел технического контроля обнаружил 10 нестандартных деталей в партии из 1000 деталей. Найти частоту изготовления бракованных деталей.

Ответы:3.1. 0,0053. **3.2.**$\frac{1}{2}$. **3.3.** $0{,}36$.**3.4.** $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

3.5. а) $\frac{5}{9}$;**б)** $\frac{4}{9}$.**3.6.** $0{,}353$. **3.7.** $0{,}16$.**3.8.** $\frac{1}{3}$.**3.9.** 0,45.

3.10. ≈ 0,20. **3.11.** $\frac{2}{\pi}$. **3.12.**0,25. **3.13.** $\frac{2}{7}$.**3.14.** $\frac{1}{\pi}$.

3.15.0,27.**3.16.** 0,45.**3.17.**0,75.**3.18.**$0{,}016$.

3.19. $0{,}501$. **3.20.**1000. **3.21.**30. **3.22.** $0{,}75$.

3.23. $0{,}57$.**3.24.** 0,95; 0,05. **3.25.** 0,01.

ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Теоремы сложения вероятностей.

Для использования теорем сложения вероятностей необходимо установить совместность(несовместность) событий, то есть могут ли они произойти (не произойти) одновременно.

Рассмотрим примеры суммы двух случайных событий:

1)Допустим, бросается игральный кубик и рассматриваются события A - выпадение числа 2, B - появление числа 5. Тогда событие $C = A + B$ будет трактоваться как выпадение или числа 2 ,или числа 5 при бросании игрального кубика. Здесь следует отметить один важный момент: числа 2 и 5 одновременно выпасть на одном игральном кубике не могут, а следовательно, и события A и B одновременно не могут произойти, значит они несовместны.

2) Бросаются два игральных кубика и рассматриваются такие же события: A - выпадение числа 2, B - выпадение числа 5.В этом случае события A и B могут произойти одновременно, поэтому они являются совместными.

Совместные и несовместные события можно условно изобразить графически следующим образом (см.рис.2.1):

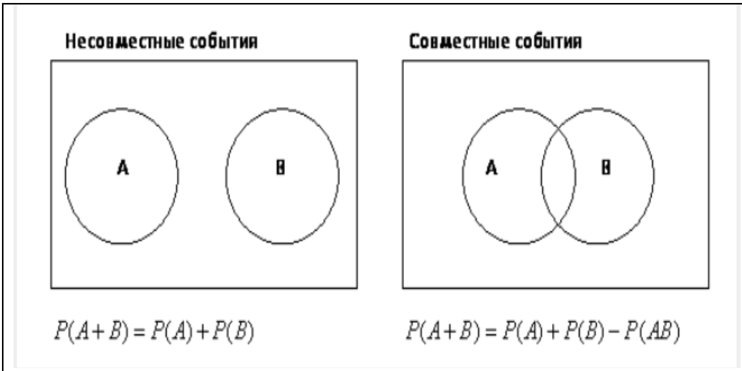


Рис.2.1.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Теорема 2.1. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий, то есть

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)}\ \mathbf{(2.1)}$$

Доказательство.

$$P(A+B)=\frac{m}{n}=\frac{m_A+m_B}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}=P(A)+P(B).$$

Доказано.

Замечание: сформулированная теорема справедлива для любого конечного числа несовместных событий: $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$

или кратко $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

Пример 2.1. В книге 305 страниц. Какова вероятность того, что номер наудачу открытой страницы будет оканчиваться 0 или цифрой 5.

Решение.

Определим события A, B ,$A+B$:

A-номер страницы оканчивается 0;

B -номер страницы оканчивается 5;

$A+B$-номер страницы оканчивается нулём или цифрой 5;

События A, B несовместны (номер страницы не может одновременно оканчиваться 0 и цифрой 5), поэтому в соответствии с теоремой о сумме вероятностей несовместных событий имеем:

$P(A+B)=P(A)+P(B)$, так как $P(A)=\frac{30}{305}$,

$P(B)=\frac{31}{305}$, то

$$P(A+B)=\frac{30}{305}+\frac{31}{305}=\frac{61}{305}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Пример 2.2. Найти вероятность выпадения цифры 2 или 3 при бросании игрального кубика.

Решение.

Определим события: A-выпадение цифры 2, B - выпадение цифры 3,$A+B$ - выпадения цифры 2 или 3 при бросании игральной кости.

События A, B несовместны, поэтому по теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Пример 2.3. В лотерее 1000 билетов; из них на один билет падает выигрыш 500 руб., на 100 билетов - выигрыши по 100 руб., на 50 билетов - выигрыши по 20 руб., на 100 билетов - выигрыши по 5 руб., остальные билеты невыигрышные. Некто покупает один билет. Найти вероятность выиграть не менее 20 руб.

Решение.

Рассмотрим события:

A- выиграть не менее 20 руб. (выиграть 20руб. или 100 руб., или 500руб.);

A_1-выиграть 20 руб.,

A_2-выиграть 100 руб.,

A_3 -выиграть 500 руб.

Событие A можно представить в виде суммы:

$$A = A_1 + A_2 + A_3;$$

Очевидно, что события A_1, A_2, A_3 несовместны, по теореме сложения для несовместных событий имеем:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{50}{1000} + \frac{100}{1000} + \\ + \frac{1}{1000} = 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}001 = 0{,}151.$$

Пример 2.4. В ящике 25 мячиков одинаковых размеров: 7 красных, 5 синих и 13 белых. Вычислить вероятность того, что не глядя будет взят цветной (не белый) мячик.

Решение.

Определим событие A –извлекли цветной мяч (красный или синий), которое можно представить в виде суммы событий $A = A_1 + A_2$,где событие A_1 -взят красный мяч, A_2 – взят синий мяч. Найдём вероятность события A ,поскольку события A_1 и A_2 несовместные (если взят один мячик, то он не будет разных цветов), поэтому используя теорему сложения вероятностей несовместных событий имеем:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{7}{25} + \frac{5}{25} = \frac{13}{25}.$$

Пример 2.5. В ящике 10 красных и 5 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность, что пуговицы будут одноцветными?

Решение.

Событие A -вынуты пуговицы одного цвета(или две красные, или две синие)-можно представить в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где события A_1 и A_2 означают выбор пуговиц красного и синего цвета соответственно. Вероятность вытащить две красные пуговицы равна $P(A_1) = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2}$, а вероятность вытащить две синие пуговицы $P(A_2)=\dfrac{C_5^2}{C_{15}^2}$. Так как события A_1 и A_2 не могут произойти одновременно, то в силу теоремы сложения несовместных событий имеем:

$$P(A)=\frac{C_{10}^2+C_5^2}{C_{15}^2}=\frac{\dfrac{10!}{2!8!}+\dfrac{5!}{2!3!}}{\dfrac{15!}{2!13!}}=0{,}524.$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий.

Теорема 2.2. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность произведения этих событий, то есть

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).}\ \textbf{(2.2)}$$

Доказательство.

Так как события A,B совместныпо условию(см.рис.2.2), то событие $A+B$ произойдет ,когда наступит одно из следующих несовместных событий $A\cdot\overline{B},\overline{A}\cdot B,A\cdot B$,то есть $A+B=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B+A\cdot B$,по теореме сложения для несовместных событий получим:

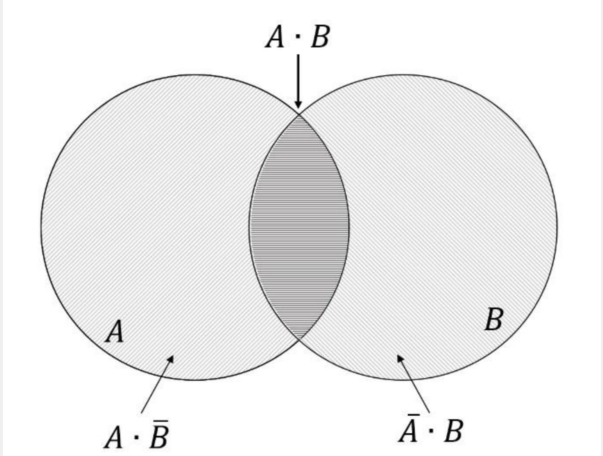


Рис.2.2.

$P(A+B)=P(A\cdot\overline{B})+P(\overline{A}\cdot B)+P(A\cdot B)$ (1), в свою очередь событие A произойдет, когда наступит одно из несовместных событий $A\cdot\overline{B}, A\cdot B$,то есть $A=A\cdot\overline{B}+A\cdot B$,отсюда

$P(A)=P(A\cdot\overline{B})+P(A\cdot B)$, $P(A\cdot\overline{B})=P(A)-P(A\cdot B)$ (2), аналогично рассуждаем для B, $B=\overline{A}\cdot B+A\cdot B$,
$P(B)=P(\overline{A}\cdot B)+P(A\cdot B)$, $P(\overline{A}\cdot B)=P(B)-P(A\cdot B)$ (3). Подставим (2) и (3) в (1) получим:
$P(A+B)=P(A)-P(A\cdot B)+P(B)-P(A\cdot B)+P(A\cdot B)$,
$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$. Доказано.

Замечание: теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий. Например, для трех совместных событий A_1, A_2, A_3 имеем:

$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cdot A_2)-$

$-P(A_1 \cdot A_3) - P(A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$.

Пример 2.6. Согласно прогнозу метеорологов, вероятность того, что пойдёт дождь равна 0,4; ветер- 0,5; вероятность того, что пойдёт дождь и будет ветрено равна 0,2. Какова вероятность того, что пойдёт дождь или будет ветрено?

Решение.

Определим события:

A - пойдёт дождь или будет ветрено;

A_1- пойдёт дождь;

A_2- будет ветрено.

Таким образом, по теореме сложения вероятностей совместных событий имеем:

$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) =$
$= 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7$.

Пример 2.7. Вероятность попадания в мишень одного стрелка равна 0,65, а второго 0,6. Определить вероятность поражения мишени при одновременных выстрелах.

Решение.

A-поражение мишени (при одновременных выстрелах);

A_1-попадание первого стрелка;

A_2- попадание второго стрелка;

A_1, A_2-совместные события, так как при стрельбе возможно попадание в мишень двумя стрелками, поэтому $P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = ?$

Для того, чтобы справиться с решением данной задачи, нам необходимо рассмотреть теоремы умножения вероятностей, поэтому вернёмся к её решению, чуть позже.

2.2. Теоремы умножения вероятностей.

Если при использовании теорем сложения вероятностей проверяется совместность (несовместность) событий, то применение теорем умножения требует проверки случайных событий на зависимость (независимость).

Поэтому, прежде чем рассматривать теоремы умножения вероятностей, введем понятия зависимости и независимости событий.

События A называется **зависимыми** от события B если вероятность появления события A зависит от того, произошло или не произошло событие B . Иначе случайные события называются **независимыми.**

Например, при подбрасывании двух монет, событие A - появление «орла» на первой монете и событие B - появление «орла» на второй монете-независимые, так как вероятность появления орла на первой монете не изменит вероятность появления орла на второй монете.

Например, при извлечении без возвращения одного за другим шаров из урны с черными и белыми шарами, событие A - появление первого белого шара, и событие B - появление после этого второго белого шара –зависимые, так как вероятность события B зависит от того произошло или нет событие A ,изменяющее количество и состав шаров в урне.

Случайное событие мы определили как событие, которое происходит или не происходит при осуществлении определенного комплекса условий. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий, не налагаются, то такую вероятность называют безусловной, а сами события независимыми. В случае зависимых событий вводится понятие условной вероятности.

Условной вероятностью события A при условии, что событие B уже произошло называют отношение вероятности произведения этих событий к вероятности события B, причем $P(B) \neq 0$.

Обозначение: $P(A/B) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)}$ **-** вероятность события A при условии, что событие B уже наступило.

Аналогично определяется вероятность события B при условии, что событие A уже наступило, то есть $P(B/A) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(A)}$.

Теорема умножения вероятностей для зависимых событий.

Теорема 2.3. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило, то есть

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)} \quad \textbf{(2.3)}.$$

Доказательство.

Из определения условной вероятности следует, что

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} \ (1), \quad P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} \ (2).$$

Из (1) $P(A \cdot B) = P(A/B) \cdot P(B)$,

из (2) $P(A\cdot B)=P(B/A)\cdot P(A)$, следовательно
$P(A\cdot B)=\cdot P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$.

Замечание:

1)Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляют в предложении, что все предыдущие события уже наступили:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot \ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot$$
$$\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot \ldots\cdot P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1});$$

2)Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий, то есть $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

В частности, вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:
$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n)$;

3)Вместо обозначения $P(A/B)$- вероятности события A при условии, что событие B уже наступило, можно использовать аналогичное $P_B(A)$,что мы иногда и будем делать, выберете то, которое для вас наиболее удобно.

Вернёмся, к примеру 2.6. и продолжим его решение, поскольку события A_1, A_2-независимые (вероятность того, что по мишени попадёт первый стрелок, никак не повлияет на вероятность попадания в цель второго стрелка), следовательно

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cdot A_2)=$$
$$=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2)=$$

$$= 0{,}65 + 0{,}6 - 0{,}65 \cdot 0{,}6 = 0{,}86.$$

Пример 2.8. Среди сотрудников фирмы 28% знают английский язык, 30% – немецкий, 42% – французский; английский и немецкий – 8%, английский и французский – 10%, немецкий и французский – 5%, все три языка – 3%. Найти вероятность того, что случайно выбранный сотрудник фирмы: **а)** знает английский или немецкий; **б)** знает английский, немецкий или французский; **в)** не знает ни один из перечисленных языков.

Решение.

Обозначим через A, B и C события, заключающиеся в том, что случайно выбранный сотрудник фирмы владеет английским, немецким или французским соответственно.

Обозначим через A_1, A_2, A_3 следующие события:

$A_1 = A + B$ -выбранный сотрудник знает английский или немецкий язык;

$A_2 = A + B + C -$ выбранный сотрудник знает английский, немецкий или французский язык;

$A_3 = 1 - (A + B + C)$-не знает английский, немецкий, французский языки.

Очевидно, доли сотрудников фирмы, владеющих теми или иными языками, определяют вероятности этих событий. Получаем:

а) $P(A_1) = P(A + B) = P(A) + P(B) -$
$$-P(A \cdot B) = 0{,}28 + 0{,}3 - 0{,}08 = 0{,}5;$$

б)$P(A_2) = P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) -$
$$-\big(P(AB) + P(AC) + P(BC)\big) + P(ABC) =$$
$$= 0{,}28 + 0{,}3 + 0{,}42 - (0{,}08 + 0{,}1 + 0{,}05) + 0{,}03 = 0{,}8;$$

в)$P(A_3) = 1 - P(A + B + C) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$

Пример 2.9. Мастер, имея 10 деталей, из которых 3 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

Решение.

Событие A -мастер проверил ровно две детали, означает, что при такой проверке первая деталь оказалась нестандартной, а вторая – стандартная. Значит, $A = A_1 A_2$, где A_1 -первая деталь оказалась нестандартной и A_2 -вторая деталь – стандартная. Очевидно, что вероятность события A_1 равна $P(A_1) = 3/10$, кроме того, $P(A_2 / A_1) = \frac{7}{9}$, так как перед взятием второй детали у мастера осталось 9 деталей, из которых только 2 нестандартные и 7 стандартных. По теореме умножения имеем:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}.$$

Пример 2.10. В ящике находятся 10 деталей,6 из которых окрашены. Случайным образом достают 4 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали будут окрашены.

Решение.

A_1-первая извлеченная деталь окрашена,

A_2-вторая извлеченная деталь окрашена,

A_3-третья извлеченная деталь окрашена,

A_4-четвертая извлеченная деталь окрашена,

$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$- извлечение четырех окрашенных деталей, так как события A_1, A_2, A_3, A_4-зависимые, то

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{\mathrm{A}_1}(A_2) \cdot P_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}(A_3) \cdot P_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 A_3}(A_4) =$$

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{14}.$$

Пример 2.11. Имеется 10 кубиков от 1 до 10. Наудачу извлекают по одному три кубика. Найти вероятность, что последовательно появятся кубики с номерами 1,2,3: **а)** кубики извлекли без возвращения; **б)** с возвращением.

Решение.

Для начала определим события:

A - последовательное появление кубиков под номерами 1,2,3;

A_1 - появление кубика под номером 1;

A_2 - появление кубика под номером 2;

A_3 - появление кубика под номером 3.

а) A -последовательное появление кубиков под номерами 1,2,3 (кубики извлекаются без возвращения)

$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ -появление трех кубиков (события зависимые, так как вероятность следующего события изменится),

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{720};$$

б) A - последовательное появление кубиков с номерами 1,2,3 (с возвращением),

$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$,так как события A_1, A_2, A_3 - независимые (извлечённый кубик возвращается обратно и вероятность первого события никаким образом не повлияет на вероятность второго события), то

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} =$$

$$= \frac{1}{1000} = 0{,}001.$$

Пример 2.12. Имеется два ящика. В первом ящике 2 белых и 10 чёрных шаров, во втором 8 белых и 4 чёрных. Наудачу из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что: **а)** оба шара белые;
б) один из извлечённых шаров белый, а другой чёрный.

Решение.

Определим события:

A_1-извлечение белого шара из первого ящика,
A_2- извлечение белого шара из второго ящика,
B_1- извлечение чёрного шара из первого ящика,
B_2- извлечение чёрного шара из второго ящика.

а) A -извлечение двух белых шаров, то есть $A = A_1 \cdot A_2$, события A_1, A_2-независимые, следовательно

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{2}{12} \cdot \frac{8}{12} = \frac{1}{9};$$

б) B-извлечение разноцветных шаров, то есть из первого ящика извлекли белый шар, а из второго чёрный или из первого ящика извлекли чёрный шар, а из второго белый, то есть $B = A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_1$, события A_1, A_2, B_1, B_2-независимые, поэтому

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B_2) + P(A_2) \cdot P(B_1) =$$
$$= \frac{2}{12} \cdot \frac{4}{12} + \frac{8}{12} \cdot \frac{10}{12} = \frac{11}{18}.$$

Вероятность появления хотя бы одного события.

Пусть в результате испытания могут появиться n событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, причем $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_n) = p_n$. Пусть в результате испытания могут наступить все события, либо часть из них, либо ни одно из них. Как найти вероятность события A, состоящего в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$.Ответ на этот вопрос даёт теорема 2.4.

Теорема 2.4. Вероятность наступления события A, состоящего в появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий, то есть

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n \quad \textbf{(2.4)}$$

Доказательство.

Событие A состоит в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$,то есть

$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. Рассмотрим противоположное событие $\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}$,заключающееся в том, что ни одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не произойдет. Так как события A и $\overline{A}$ противоположные, то

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}) =$$
$$= 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n.$$

Замечание: если все события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют одинаковую вероятность $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p$,то

$$\boxed{P(A) = 1 - q^n} \quad \textbf{(2.5)}$$

Пример 2.13. В одном ящике 3 белых и 5 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 4 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

Решение.

Событие A -хотя бы из одного ящика вынут белый шар можно представить в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где события A_1 и A_2 означают появление белого шара из первого и второго ящика соответственно.

1 способ:

Вероятность вытащить белый шар из первого ящика равна $P(A_1) = 3/8$, а вероятность вытащить белый шар из второго ящика $P(A_2) = 6/10$.

Кроме того, в силу независимости A_1 и A_2 имеем:

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{3}{8}\cdot\frac{6}{10} = \frac{9}{40}.$$

По теореме сложения получаем:

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) =$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{6}{10} - \frac{9}{40} = \frac{15 + 24 - 9}{40} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0{,}75;$$

2 способ: воспользуемся формулой (2.4)

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 1 - q_1 \cdot q_2 =$$
$$= 1 - \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{10} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Пример 2.14. Вероятность попадания в цель орудием $p_1 = 0{,}9$, второго $p_2 = 0{,}85$,третьим $p_3 = 0{,}8$. Какова вероятность хотя бы одного попадания, при одном залпе из трех орудий?

Решение

Определим события:

A - хотя бы одно попадание в цель (при одном залпе из трёх орудий),

A_1-попадание в цель, первым орудием;

A_2-вторым орудием;

A_3-третьим орудием.

События A_1, A_2, A_3 -независимы, так как вероятность попадания в цель при стрельбе любым из трех орудий не зависит от результатов стрельбы другими орудиями, применяя теорему 2.4. и учитывая, что $P(A_1) = p_1 = 0{,}9$, $P(A_2) = p_2 = 0{,}85$, $P(A_3) = p_3 = 0{,}8$ по условию, имеем:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - (1 - p_1) \cdot$$
$$\cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) = 1 - (1 - 0{,}9) \cdot (1 - 0{,}85) \cdot$$
$$\cdot (1 - 0{,}8) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}003 = 0{,}997.$$

Пример 2.15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырёх выстрелах 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Решение

Определим события:

A -хотя бы одно попадание при четырех выстрелах, A_1-попадание в цель при первом выстреле,

A_2-втором, A_3-третьем, A_4-четвертым.

События A_1, A_2, A_3, A_4 имеют одну и ту же вероятность p, поэтому вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна $P(A) = 1 - q^4$,с другой стороны (по условию) $P(A) = 0{,}9984$,следовательно,

$0{,}9984 = 1 - q^4$, $q^4 = 1 - 0{,}9984$, $q^4 = 0{,}016$, $q = 0{,}2$ -вероятность промаха при одном выстреле, тогда вероятность попадания в цель при одном выстреле равна $p = 1 - q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Пример 2.16. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудием, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

Решение

A_1 -поражение цели (при одном выстреле) первым орудием,

A_2 -поражение цели (при одном выстреле) вторым из орудий,

$A = A_1 + A_2$ -попадание в цель хотя бы одним из орудий.

$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - q_1 \cdot (1 - p_2) = 1 - q_1 \cdot (1 - 0{,}8) =$

$= 1 - 0{,}2q_1$, с другой стороны (по условию) $P(A) = 0{,}38$,следовательно,

$0{,}38 = 1 - 0{,}2q_1$,

$0{,}2q_1 = 1 - 0{,}38,$
$0{,}2q_1 = 0{,}62,$
$q_1 = 0{,}31$, отсюда $p_1 = 1 - 0{,}31 = 0{,}69$- вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий.

Пример 2.17. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор равна $\mathrm{p}_1 = 0{,}95$, а для второго $\mathrm{p}_2 = 0{,}9$. Вероятность того, что при аварии сработает: **а)** только один сигнализатор; **б)** ни один из сигнализаторов не сработает; **в)** хотя бы один сигнализатор сработает.

Решение.

Определим события:

A_1 - сработает первый сигнализатор,

A_2 - сработает второй сигнализатор.

а) $B_1 = A_1\overline{A_2}$ - сработает только первый сигнализатор (сработает первый сигнализатор и не сработает второй),

$B_2 = \overline{A_1}A_2$-сработает только второй сигнализатор (сработает второй сигнализатор, а первый не сработает),

$B = B_1 + B_2$ - только один сигнализатор сработает, так как события B_1, B_2 несовместные, а события A_1, A_2 - независимые по теоремам сложения и умножения вероятностей имеем:

$P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2),$

$P(B_1) = P(A_1 \cdot \overline{A_2}) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) = 0{,}95 \cdot (1 - 0{,}9) =$
$= 0{,}95 \cdot 0{,}1 = 0{,}095,$

$P(B_2) = P(\overline{A_1} \cdot A_2) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = (1 - 0{,}95) \cdot 0{,}9 =$
$= 0{,}05 \cdot 0{,}9 = 0{,}045$, следовательно ,

$$P(B) = 0{,}095 + 0{,}045 = 0{,}14.$$

б) $C = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$ - ни один из сигнализаторов не сработает, $P(C) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = (1 - 0{,}95) \cdot (1 - 0{,}9) =$
$= 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}005.$

в) $A = A_1 + A_2$ - сработает хотя бы один сигнализатор, $P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$.

Пример 2.18. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятности того, что деталь содержится: **а)** не более чем в трех ящиках; **б)** не менее чем в двух ящиках.

Решение.

Пусть событие A_i–нужная сборщику деталь содержится в i–ом ящике, $i = 1,2,3,4$;

$$P(A_1) = 0{,}6; P(A_2) = 0{,}7; P(A_3) = 0{,}8; P(A_4) = 0{,}9.$$

Событие $\bar{A_i}$–нужная сборщику деталь не содержится в i–ом ящике:

$$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4;$$
$$P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;$$
$$P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$$
$$P(\overline{A_4}) = 1 - P(A_4) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

а) Пусть событие A – деталь содержится не более чем в трех ящиках, тогда событие $\bar{A}$–деталь содержится более чем в трех ящиках, то есть деталь содержится в четырех ящиках.

Выразим событие $\bar{A}$ через события A_i:

$\bar{A} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$ деталь содержится в четырех ящиках (и в первом, и во втором, и в третьем, и в четвёртом), тогда

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot$
$\cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 =$
$= 1 - 0{,}3024 = 0{,}6976.$

б) Пусть событие B – нужная сборщику деталь находится не менее чем в двух ящиках. Событие $\bar{B}$– нужная сборщику деталь находится менее чем в двух ящиках, то есть

в одном или ни в одном. Выразим событие $\bar{B}$ через события A_i:
$\bar{B} = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4} +$
$+\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot \overline{A_4} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot A_4 +$
$+\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}$,
$P(\bar{B}) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 +$
$+0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 +$
$+0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}0428$;
Тогда $P(B) = 1 - 0{,}0428 = 0{,}9572$.

Задания для самостоятельного решения

4.Найти вероятность ожидаемого события применяя теоремы сложения и умножения вероятностей:

1. Бросили монету и игральную кость. Какова вероятность того, что на монете выпадет «герб» и на кости -число очков, кратное 3.
2. В каждом из 3 ящиков имеется по 20 деталей. В первом ящике 15 стандартных, во втором 16, в третьем 18. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.
3. В урне имеется 5 красных,7 синих и 3 белых шара. Каждое испытание состоит в том, что из урны берут наудачу один шар и не возвращают обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании будет взят красный шар (событие A), при втором-синий (событие B), при третьем-белый (событие C).
4. Сеть закусочных торгующих хот догами и гамбургерами, установила, что 75% всех посетителей используют горчицу, 80%-кетчуп, 65%-и то, и

другое. Какова вероятность, что случайно взятый клиент будет использовать хотя бы одну из приправ.

5. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень одного стрелка равна 0,7, а второго 0,8. Определить вероятность того, что: **а)** мишень будет поражена; **б)** мишень будет поражена, если стрелки сделают по два выстрела.

6. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго - 0,8, для третьего - 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

7. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором 3 вопроса.

8. В группе из 20 человек, 5 студентов не подготовили задание. Какова вероятность того, что два первых студента, вызванные наугад, будут не готовы к ответу.

9. Имеются три ящика в каждом из которых по 10 деталей. В первом ящике -8 стандартных деталей, во втором -7, а в третьем-9. Найти вероятность того, что стандартными окажутся: **а)** только одна деталь; **б)** хотя бы одна деталь.

10. Вероятность попадания для первого стрелка в мишень-0,9 для второго-0,8 для третьего-0,7. Найти вероятность того, что при одном залпе: **а)** все три стрелка попадут в цель;**б)** ни один стрелок не попадет в цель; **в)** только один стрелок попадет; **г)** хотя бы один стрелок попадет в цель.

11. Два стрелка стреляют по мишень. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка =0,7, второго=0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает «только один» из стрелков.

12. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

13. Решить задачу, применяя теоремы сложения и умножения. Мастер обслуживает 3 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок потребует внимания рабочего в течение смены, равна 0,4, второй - 0,6, третий – 0,3. Найти вероятность того, что в течение смены: **а)** ни один станок не потребует внимания мастера; **б)** ровно 1 станок потребует внимания мастера.

14. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках равны 0,6; 0,7 и 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится: **1)** только в одном справочнике;**2)** только в двух справочниках; **3)** во всех трех справочниках.

15. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара и назад не возвращаются. Найти вероятность того, что оба шара белые.

16. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. После первого вынимания шар возвращается в урну, и шары в урне перемешиваются. Найти вероятность того, что оба шара белые.

17. Два радиста пытаются принять сигнал передатчика. Первый из них сможет это сделать с вероятностью 60 %, а второй – с вероятностью 80 %, независимо друг от друга. Найти вероятность, что хотя бы одному из них удастся принять сигнал.

18. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 70 %, а для второго 50 %. Найти вероятность, что оба стрелка попадут в мишень.

19. В партии лампочек в среднем 4 % брака. Найти вероятность, что среди наугад выбранных двух лампочек окажется хотя бы одна неисправная.

20. Игральный кубик бросается 6 раз. Найти вероятность, что выпадет хотя бы одна шестерка.

21. В группе туристов, отправляющихся за границу, 65% владеют английским языком, 45% – немецким и 20% – обоими языками. Найти вероятность того, что случайно выбранный турист из этой группы не знает ни одного из этих языков.

22. Из букв слова РОТОР, составленного с помощью разрезной азбуки, наудачу последовательно извлекаются 3 буквы и складываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ТОР?

23. Среди 25 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрывается 5 билетов. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 2 девушки.

24. Цель в тире разделена на 3 зоны. Вероятность того, что некий стрелок выстрелит в цель в первой зоне равна 0,15, во второй зоне – 0,23, в третьей зоне – 0,17. Найти вероятность того, что стрелок попадет в цель и вероятность того, что стрелок попадёт мимо цели.

25. В типографии имеется 4 печатных машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие A).

Ответы: 4.1. $\frac{1}{6}$. **4.2.** 0,54. **4. 3.** $\frac{1}{26}$.**4.4.** 0,9.**4.5. а)**0,94;**б)**0,9964.**4.6.** 0,54.**4.7.** $\frac{57}{115}$. **4.8.** 0,05.**4.9. а)** 0,092;**б)** 0,994.**4.10. а)**0,504;**б)** 0,006;**в)** 0,92;**г)**0,994. **4.11.** 0,38.**4.12.** 0,9496. **4.13. а)**0,168; **б)**0,436. **4.14.а)**0,128; **б)**0,452; **в)**0,366. **4.15.** 0,1. **4.16.**0,16. **4.17.** 0,92. **4.18**. 0,35. **4.19.** 0,0784**. 4.20.** 0,6651. **4.21**. 0,1. **4.22.** $\frac{1}{15}$ **. 4.23.** $\frac{195}{506}$**.4.24.** p=0,55; q=0,45. **4.25.** 0,999.

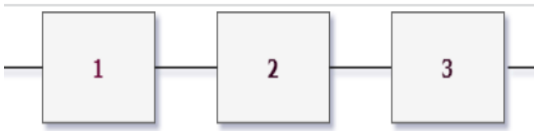
2.3. Практическое применение задач теории вероятности в электрических схемах.

В этой главе мы рассмотрим задачи о прохождении или не прохождении тока в электрических схемах: задана схема электрической цепи с вероятностями работы элементов (выхода из строя элементов), найти вероятность работы цепи (разрыва цепи).

Задачи могут иметь чуть разные формулировки, но принцип решения один и тот же, изучим его поподробней, чтобы решать задачи со схемами любой сложности.

Элементы в цепи могут быть соединены последовательно и параллельно.

Последовательное соединение.



При последовательном соединении элементы цепи "нанизаны" на провод один за другим. Если откажет один из них(любой) - ток в цепи прервётся. Или, иначе говоря, цепь работает тогда и только тогда, когда все элементы работают. Таким образом, получаем произведение событий:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3;$$

Так как элементы работают независимо друг от друга вероятность работы цепи равна:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3;$$

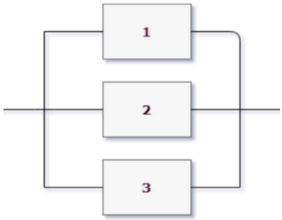
Вероятность разрыва цепи равна:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$
$$= 1 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3;$$

На случай n последовательных элементов в цепи имеем:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) =$$
$$= p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n;$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) =$$
$$= 1 - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \,.$$

Параллельное соединение.



Когда мы видим, что элементы в схеме расположены параллельно (как бы на параллельных проводах), речь идет о параллельном соединении.

В этом случае если откажет, скажем, элемент 1, ток может пройти через 2. Если откажут 1 и 2, ток пройдет через 3. И только если все элементы откажут, цепь разорвется.

Другими словами, цепь работает, если работает хотя бы один элемент в ней, в терминах теории вероятностей — это сумма событий:

$$A = A_1 + A_2 + A_3;$$

Так как события A_1, A_2, A_3-совместные, то вероятность работы цепи удобней найти по формуле:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) =$$
$$= 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3;$$

Вероятность разрыва цепи равна:

$$P(\bar{A}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3;$$

На случай n параллельных элементов в цепи имеем:

$$P(\bar{A}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}) = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n;$$
$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}) =$$
$$= 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n.$$

Таким образом, последовательному соединению соответствует произведение событий, параллельному соединению - сумма событий.

Алгоритм решения задач о надёжности цепи.

1.Определяем основное событиеA и элементарные события A_i:

A-цепь надёжна (цепь пропускает ток);

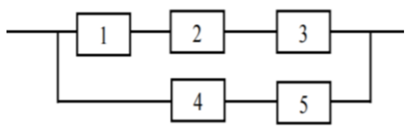
A_i-работает i-ый элемент (пропускает ток) $i = 1,2, \dots, n$;

2. Разбиваем цепь на ветви(участки):

B_j –цепь проходит через j-ую ветвь (j-ый участок работает), которые соединены между собой параллельно или последовательно, $j = 1,2, \dots, m$;

3. Выражаем событие A через введенные ранее события B_j, а события B_j через события A_i и находим искомую вероятность.

Пример 2.19. Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему с одним входом и одним выходом. Выход из строя за время T различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности: $q_1 = 0{,}3, q_2 = 0{,}4, q_3 = 0{,}5, q_4 = 0{,}2, q_5 = 0{,}1$.Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Найти вероятность того, что ток пройдёт по цепи (надёжность цепи).



Решение.

Определим ожидаемое событие:

A–ток пройдёт по цепи (цепь надежна);

Для того, чтобы не запутаться с нахождением $P(A)$,разобьём цепь на участки, в данном случае имеем два участка, соединенных параллельно.

Введём события:

A_i- работает i –ый элемент цепи, $i = 1,2,3,4,5$;

B_j –работает j –ый участок цепи, $j = 1,2$;

Рассмотрим первый участок (верхнюю ветвь цепи) и определим событие $B_1 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$-работает первый участок цепи;

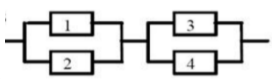
Рассмотрим второй участок цепи (нижнюю ветвь) и определим событие $B_2 = A_4 \cdot A_5$- работает второй участок цепи;

Определим событие A:

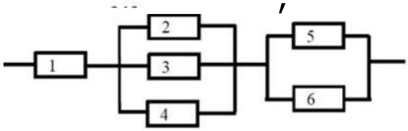
$A = B_1 + B_2$-ток проходит через цепь, если хотя бы одна ветвь пропускает ток (или верхняя, или нижняя), поскольку события совместные B_1, B_2(могут одновременно сработать оба участка цепи), то при нахождении вероятности события A ,удобнее, воспользоваться вероятностью противоположного события $\bar{A} = \overline{B_1} \cdot \overline{B_2}$-ток не проходит через цепь-оба участка не пропускают ток. Таким образом, искомая вероятность имеет вид:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{B_2}) =$$
$$= 1 - \big(1 - P(B_1)\big) \cdot (1 - P(B_2)) =$$
$$= 1 - \big(1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)\big) \cdot$$
$$\cdot \big(1 - P(A_4) \cdot P(A_5)\big) = 1 - (1 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) \cdot$$
$$\cdot (1 - p_4 \cdot p_5) = 1 - (1 - 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5) \cdot$$
$$\cdot (1 - 0{,}8 \cdot 0{,}9) = 1 - (1 - 0{,}21)(1 - 0{,}72) =$$
$$= 1 - 0{,}79 \cdot 0{,}28 = 1 - 0{,}2212 = 0{,}7788.$$

Пример 2.20. Рассчитать вероятность прохождения тока по цепи:

а) 

;

б) 

.

Решение

а) Введём события:

A–ток проходит через цепь (цепь надежна);

A_i- работает i –ый элемент цепи, $i = 1,2,3,4,5,6$;

B_j –работает j участок цепи, $j = 1,2,3$;

Получим следующие события:

$B_1 = A_1$-работает первый участок цепи;

$\overline{B_1} = \overline{A_1}$- не работает первый участок цепи;

$B_2 = A_2 + A_3 + A_4$- работает второй участок цепи (работает хотя бы один элемент);

$\overline{B_2} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ –не работает второй участок цепи (все три элемента не работают);

$B_3 = A_5 + A_6$- работает третий участок цепи;

$\overline{B_3} = \overline{A_5} \cdot \overline{A_6}$-не работает третий участок цепи;

$A = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$, следовательно,

$$P(A) = P(B_1 \cdot B_2 \cdot B_3) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) =$$
$$= \left(1 - P(\overline{B_1})\right) \cdot \left(1 - P(\overline{B_2})\right) \cdot \left(1 - P(\overline{B_3})\right) =$$
$$=\left(1 - P(\overline{A_1})\right) \cdot \left(1 - P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4})\right) \cdot$$
$$\cdot \left(1 - P(\overline{A_5})P(\overline{A_6})\right) = (1 - q_1) \cdot (1 - q_2 q_3 q_4) \cdot (1 - q_5 q_6).$$

б) Введём события:A–ток проходит через цепь (цепь надежна);

A_i- работает i –ый элемент цепи, $i = 1,2,3,4$;

B_j –работает j участок цепи, $j = 1,2$;

Получим следующие события:

$B_1 = A_1 + A_2$-работает первый участок цепи;

$\overline{B_1} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$- не работает первый участок цепи;

$B_2 = A_3 + A_4$- работает второй участок цепи (работает хотя бы один элемент);

$\overline{B_2} = \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}$ –не работает второй участок цепи (третий и четвёртый элемент не работает);

$A = B_1 \cdot B_2$ –цепь надёжна, следовательно

$$P(A) = P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) = \left(1 - P(\overline{B_1})\right) \cdot$$
$$\left(1 - P(\overline{B_2})\right) = \left(1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2})\right)\left(1 - P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4})\right) =$$
$$= (1 - q_1 \cdot q_2) \cdot (1 - q_3 \cdot q_4).$$

2.4. Формула полной вероятностей и формула Байеса.

Следствием основных теорем теории вероятности - теорем сложения и умножения вероятностей (их совместного применения), является формула полной вероятности.

Формула полной вероятности.

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из попарно-несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (гипотез), которые образуют полную группу событий, то есть $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, $H_i \cdot H_j = \varnothing, \forall i \neq j$.

Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности: $P(A/H_i), P(H_i)$, где $i = 1,2,\ldots,\mathrm{n}$.

Теорема 2.5.(Формула полной вероятности)

Вероятность события A, которое может произойти лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу событий, вычисляется по формуле:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).} \quad \textbf{(2.7)}$$

Доказательство.

Применяя свойства операций над событиями, имеем:

$$A = \Omega \cdot A = \sum_{i=1}^{n} H_i \cdot A = (H_1 + H_2 + \ldots + H_n) \cdot A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \ldots + H_n \cdot A$$

,то в силу несовместности событий AH_i, AH_j

$\left(AH_i \cdot AH_j = A\left(H_i \cdot H_j\right) = A \cdot \varnothing = \varnothing\right)$ и применяя теорему сложения вероятностей для совместных событий получим:

$P(A) = P(H_1 \cdot A) + P(H_2 \cdot A) + \ldots + P(H_n \cdot A)$.Поскольку события A и H_i зависимые(по условию), то по теореме произведения вероятностей для зависимых событий получим:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

Таким образом, формула полной вероятности применяется, когда необходимо узнать вероятность некоторого события, если его совершение зависит от нескольких условий. Например, можно узнать вероятность принятия законопроекта, зная, с какой вероятностью его примет каждая партия.

Формула Байеса.

Следствием формулы полной вероятности является формула Байеса, которая позволяет переоценить вероятности гипотез H_i,принятых до опыта и называемых априорными(доопытные) по результатам уже проведённого опыта, то есть найти условные вероятности $P(H_i / A)$,которые называют апостеорными (послеопытные).

Теорема 2.6.(Теорема гипотез-формула Байеса)

Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образующих полную группу событий. Тогда условная вероятность события H_i, $i = 1,2,3 \ldots, n$,при условии, что событие A уже произошло, вычисляется по формуле Байеса

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)} \quad \textbf{(2.8)}$$

, где $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)$.

Доказательство.

Рассмотрим вероятность совместного появления события A и гипотезы H_i.

По теореме умножения для зависимых событий имеем:

$P(H_i \cdot A) = P(H_i) \cdot P(A/H_i) = P(A) \cdot P(H_i/A)$, отсюда

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Алгоритм решения задач на полную вероятность и формулу Байеса:

1) Определяем событие A , затем вводим полную группу событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ (гипотез);

2) Находим или выписываем (если они известны) вероятности гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ и условные вероятности $P(A / H_i), i = 1,2, \dots, n$;

3) Далее в зависимости от постановки задачи применяем нужную формулу (формулу полной вероятности или формулу перерасчёта гипотез-формулу Байеса) и получаем ответ.

Пример 2.21. Имеются 3 одинаковые урны с шарами. В первой из них находится 4 белых и 5 черных шаров, во второй 5 белых и 4 чёрных, а в третьей — 6 белых шаров. Из случайно выбранной урны наудачу вынут шар. С какой вероятностью он окажется белым?

Решение.

Определим событие A-извлечение белого шара.

Определим гипотезы H_i,$i = 1,2,3$,то есть события, с которыми может произойти наше основное событиеA:

H_i -выбрана i-ая урна. Найдём вероятности гипотез, по условию задачи все события -H_iвыбора урны равновероятны, значит:

$P(H_i) = \frac{1}{3}, i = 1,2,3,$то есть

$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$

Теперь найдём вероятность события A при выборе каждой урны, то есть условные вероятности $P(A / H_i), i = 1,2,3$:

$P(A / H_1) = \frac{4}{9}$-извлечение белого шара из первой урны, аналогично определяем $P(A / H_2) = \frac{5}{9}$, $P(A / H_3) = 1$.

По формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) +$$

$$+P(H_3) \cdot P(A/H_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9} + 1\right) = \frac{2}{3}.$$

Пример 2.22. 45% телевизоров, имеющихся в магазине изготовлены на первом заводе, 15% на втором, остальные на третьем заводе. Вероятности того, что телевизоры, изготовленные на этих заводах, не потребуют ремонта в течении гарантийного срока равна 0,96; 0,84; 0,9 соответственно. Найти вероятность того, что купленный наудачу телевизор выдержит гарантийный срок работы.

Решение

A - телевизор выдержит гарантийный срок работы,
H_1 –телевизор изготовлен на первом заводе,
H_2 –телевизор изготовлен на втором заводе,
H_3 – телевизор изготовлен на третьем заводе,
$P(H_1) = 0{,}45$, $P(H_2) = 0{,}15$, $P(H_3) = 0{,}4$, заметим, что события H_1, H_2, H_3 образуют полную группу несовместных событий, действительно,

$\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 0{,}45 + 0{,}15 + 0{,}4 = 1$, по условию

$P_{H_1}(A) = 0{,}96,\ \ P_{H_2}(A) = 0{,}84, P_{H_3}(A) = 0{,}9,$ подставляя вероятности гипотез и условные вероятности в формулу полной вероятности имеем:

$$P(A) = 0{,}45 \cdot 0{,}96 + 0{,}15 \cdot 0{,}84 + 0{,}4 \cdot 0{,}9 = 0{,}918.$$

Пример 2.23. Один грибник нашел 20 грибов из них 5 грибов белые, второй нашел 25 грибов, из них 6 белые. Из наудачу взятой корзины вынут один гриб. Какова вероятность того, что он белый?

Решение.

A -вынут белый гриб,

H_1 -выбрана первая корзина,

H_2 -выбрана вторая корзина, $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$,

$P_{H_1}(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$- белый гриб извлечён из первой корзины, $P_{H_2}(A) = \frac{6}{25}$ белый гриб извлечён из второй корзины,

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{25} = 0{,}5 \cdot 0{,}25 + 0{,}5 \cdot 0{,}24 =$$
$$= 0{,}125 + 0{,}12 = 0{,}245.$$

Пример 2.24. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных, во второй коробке 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартная.

Решение.

A -из первой коробки извлечена стандартная лампа,

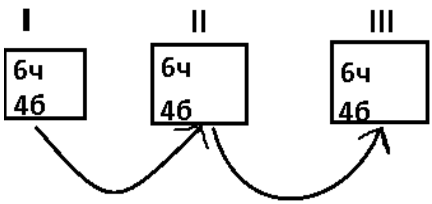
H_1 -из второй коробки извлечена стандартная лампа,

H_2 - из второй коробки извлечена нестандартная лампа,

$P(H_1) = \frac{9}{10}$, $P(H_2) = \frac{1}{10}, P_{H_1}(A) = \frac{19}{21}, P_{H_2}(A) = \frac{18}{21},$
применяя формулу полной вероятности, имеем:

$$P(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = \frac{57}{70} + \frac{3}{35} = \frac{63}{70} = 0{,}9.$$

Пример 2.25.В каждой из трех урн содержится 6 черных 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.



Решение.

A -извлечение белого шара из третьей урны.
Рассмотрим все возможные случаи извлечения шаров из урн: <u>БББ</u>, ББЧ, <u>БЧБ</u>, БЧЧ, ЧБЧ, <u>ЧББ</u>, <u>ЧЧБ</u>, ЧЧЧ. Из восьми возможных случаев, только четыре удовлетворяют условию, что из третьей урны извлечен белый шар. Определим гипотезы и вычислим их вероятности:
H_1- ББ (из первой урны извлечён белый шар и из второй урны извлечен белый шар, при условии, что извлечённый из первой урны белый шар переложили во вторую урну),

$$P(H_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{11};$$

H_2-БЧ (из первой урны извлечён белый шар и из второй урны извлечен чёрный шар, при условии, что извлечённый из первой урны белый шар переложили во вторую урну),

$$P(H_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{11};$$

H_3-ЧБ (из первой урны извлечён чёрный шар и из второй урны извлечен белый шар, при условии, что извлечённый из первой урны чёрный шар переложили во вторую урну),

$$P(H_3) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{11};$$

H_4-ЧЧ (из первой урны извлечён чёрный шар и из второй урны извлечен чёрный шар, при условии, что извлечённый из первой урны чёрный шар переложили во вторую урну), $P(H_4) = \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{11}$.

Найдём условные вероятности:

A/H_1-из третьей урны извлечен белый шар, после того как из второй урны переложили в третью урну белый шар, следовательно $P(A/H_1) = \frac{5}{11}$;

A/H_2 – из третьей урны извлечен белый шар, после того как из второй урны переложили в третью урну черный шар, $P(A/H_2) = \frac{4}{11}$;

A/H_3-из третьей урны извлечен белый шар, после того как из второй урны переложили в третью урну белый шар, $P(A/H_3) = \frac{5}{11}$;

A/H_4- из третьей урны извлечен белый шар, после того как из второй урны переложили в третью урну черный шар, $P(A/H_4) = \frac{4}{11}$;
Найдём полную вероятность, то есть вероятность события A:

$$P(A) = P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2) +$$
$$+P(A/H_3) \cdot P(H_3) + P(A/H_4) \cdot P(H_4) =$$
$$= \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{11} + \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{11} + \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{11} +$$
$$+ \frac{4}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{11} = \frac{4}{11^2 \cdot 10}(25 + 24 + 30 + 42) =$$
$$= \frac{4}{1210} \cdot 121 = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

Пример 2.26. На трех станках-автоматах обрабатываются однотипные детали, поступающие после обработки на общий конвейер. Первый станок дает 2% брака, второй – 7%, третий – 10%. Производительность первого станка в 3 раза больше производительности второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем второго. **а)** Установить каков процент брака на конвейере?

б) Каковы доли деталей каждого станка среди бракованных деталей на конвейере?

Решение.

Возьмем с конвейера наудачу одну деталь и рассмотрим событие A -произведена бракованная деталь, которое связано с гипотезами относительно того, где была обработана эта деталь: H_i– производительность i -ого станка, $i = 1,2,3$.

Зависимости между производительностями станков можно описать следующим образом:

$P(H_1) = 3P(H_2), P(H_3) = \frac{1}{2}P(H_2)$, а так как гипотезы H_i образуют полную группу, то

$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1,$

$$3P(H_2) + P(H_2) + \frac{1}{2}P(H_2) = 1,$$

$\frac{9}{2}P(H_2) = 1, P(H_2) = \frac{2}{9}$,следовательно,

$P(H_1) = \frac{2}{3}, P(H_3) = \frac{1}{9}$.

Найдём условные вероятности события A (в условии задачи они заданы в процентах):

$P(A/H_1) = 0{,}02, P(A/H_2) = 0{,}07, P(A/H_3) = 0{,}1.$

а) Находим полную вероятность-вероятность того, что взятая наудачу с конвейера деталь бракованная:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A/H_i) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}02 + \frac{2}{9} \cdot 0{,}07 +$$

$$+ \frac{1}{9} \cdot 0{,}1 = \frac{1}{9} \cdot (0{,}12 + 0{,}14 + 0{,}1) =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 0{,}36 = \frac{36}{900} = \frac{4}{100} = 0{,}04.$$

Другими словами, в массе деталей, сходящих с конвейера, брак составляет 4%.

б) Пусть известно, что взятая наудачу деталь – бракованная (событие A произошло). Пользуясь формулой Байеса, найдем условные вероятности гипотез:

$$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1) \cdot\ P(H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}02 \cdot \frac{2}{3}}{0{,}04} = \frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 3} =$$

$$= \frac{1}{3} = 0,(3);$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(A/H_2) \cdot \ P(H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}07 \cdot \frac{2}{9}}{0{,}04} = \frac{7 \cdot 2}{4 \cdot 9} =$$

$$= \frac{7}{18} = 0{,}3(8) = 0{,}39;$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(A/H_3) \cdot \ P(H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}1 \cdot \frac{1}{9}}{0{,}04} = \frac{10}{4 \cdot 9} =$$

$$= \frac{5}{18} = 0{,}2(7) = 0{,}28.$$

Таким образом, в общей массе бракованных деталей на конвейере доля первого станка составляет 33%, второго – 39%, третьего – 28%.

Замечание: для записи условной вероятности$P(A/H_i)$, вы можете использовать и другое обозначение$P_{H_i}(A)$,то есть $P(A/H_i)$= $P_{H_i}(A)$,выберете то, которое для вас более удобно.

Пример 2.27.В студенческой группе 70% составляют юноши,20% юношей и 40% девушек имеют сотовый телефон. После занятий в аудитории был найден кем-то забытый телефон. Какова вероятность того, что он принадлежал: **а)** юноше; **б)** девушке.

Решение.

A – телефон найден.

Телефон мог принадлежать девушке, а мог принадлежать юноше, в соответствии с этим определяем гипотезы.

H_1-выбор юноши, H_2- выбор девушки,

$P(H_1) = 0{,}7$, $P(H_2) = 0{,}3$,

$P_{H_1}(A) = 0{,}2$, $P_{H_2}(A) = 0{,}4$, вероятность, что телефон найден: $P(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}14 + 0{,}12 = 0{,}26$,

а) Найдём вероятность того, что найденный телефон принадлежал юноше, то есть вероятность $P_A(H_1)$:

$$P_A(H_1) = \frac{P_{H_1}(A) \cdot \ P(H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}7}{0{,}26} = \ 0{,}54,$$

б) Аналогично, находим $P_A(H_2)$:

$$P_A(H_2) = \frac{P_{H_2}(A) \cdot \ P(H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}3}{0{,}26} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13},$$

$P_A(H_2) \approx 0{,}46$.

Пример 2.28. Три экзаменатора принимают экзамен по некоторому предмету у группы в 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй — 3 студентов, а третий — 21 студента (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго — только 10%, у третьего — 70%. Найти вероятность того, что:

а) слабо подготовившийся студент сдаст экзамен;

б) Пусть известно, что студент не сдал экзамен, то есть получил оценку «неудовлетворительно». Кому из трех преподавателей вероятнее всего он отвечал?

Решение.

Определим событие A-слабо подготовившийся студент сдал экзамен. Обозначим через H_1, H_2, H_3 гипотезы, состоящие в том, что слабо подготовившийся студент отвечал первому, второму и третьему экзаменатору соответственно. По условию задачи

$P(H_1)=6/30=0{,}2$, $P(H_2)=3/30=0{,}1$, $P(H_3)=21/30=0{,}7$;

$$P_{H_1}(A)=0{,}4,\ P_{H_2}(A)=0{,}1,\ P_{H_3}(A)=0{,}7.$$

а) По формуле полной вероятности получаем:

$P(A)=0{,}4\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}1+0{,}7\cdot 0{,}7=0{,}58$-вероятность того, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен.

б) $\bar{A}$ -слабо подготовившийся студент не сдаст экзамен, то есть получит неудовлетворительный результат. Вероятность получить «неудовлетворительно» равна $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0{,}58=0{,}42$,

$P_{H_1}(\bar{A})=0{,}6;\ P_{H_2}(\bar{A})=0{,}9;\ P_{H_3}(\bar{A})=0{,}3.$

Требуется вычислить условные вероятности $P_{\bar{A}}(H_1)$,$P_{\bar{A}}(H_2)$,$P_{\bar{A}}(H_3)$ и сравнить их, что больше, то и вероятней. По формулам Байеса получаем:

$$P_{\bar{A}}(H_1)=\frac{P_{H_1}(\bar{A})\cdot P(H_1)}{P(\bar{A})}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}2}{0{,}42}=\frac{12}{42};$$

$$P_{\bar{A}}(H_2)=\frac{P_{H_2}(\bar{A})\cdot P(H_2)}{P(\bar{A})}=\frac{0{,}9\cdot 0{,}1}{0{,}42}=\frac{9}{42};$$

$$P_{\bar{A}}(H_3)=\frac{P_{H_3}(\bar{A})\cdot P(H_3)}{P(\bar{A})}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}7}{0{,}42}=\frac{12}{42}.$$

Отсюда следует, что, вероятнее всего, слабо подготовившийся студент сдавал экзамен третьему экзаменатору.

Задания для самостоятельного решения

5. Применяя формулу полной вероятности и формулу Байеса найти вероятность ожидаемого события

1. Из 40 деталей 10 изготовлены в первом цехе, 25— во втором, а остальные — в третьем. Первый и третий цехи дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,9, второй цех — с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?
2. Сотрудники отдела маркетинга полагают, что в ближайшее время ожидается рост спроса на продукцию фирмы. Вероятность этого они оценивают в 80%. Консультационная фирма, занимающаяся прогнозом рыночной ситуации, подтвердила предположение о росте спроса. Положительные прогнозы консультационной фирмы сбываются с вероятностью 95%, а отрицательные – с вероятностью 99%. Какова вероятность того, что рост спроса действительно произойдет?
3. В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции, следующий: 20% - продукция первого предприятия, 30% - продукция второго предприятия, 50% - продукция третьего предприятия; далее, 10% продукции первого предприятия высшего сорта, на втором предприятии - 5% и на третьем - 20% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.
4. В двух коробках находятся однотипные диоды. В первой – 20 шт., из них 2 неисправных; во второй – 10 шт., из них 4 неисправных. Наугад была выбрана коробка, а затем из нее наугад был выбран диод. Он

оказался неисправным. Найти вероятность того, что он был взят из второй коробки. 14 Ответ:

5. Два радиста пытались принять сигнал передатчика. Первый из них может это сделать с вероятностью 60 %, а второй – с вероятностью 80 %, независимо друг от друга. Известно, что как минимум одному из радистов удалось принять сигнал. Найти вероятность, что это удалось обоим радистам. Ответ:

6. В двух коробках однотипные конденсаторы. В первой – 20 штук, из них 3 неисправных; во второй – 40 штук, из них 2 неисправных. Наугад была выбрана коробка, а затем из нее наугад был выбран конденсатор. Он оказался неисправным. Найти вероятность того, что он был взят из первой коробки.

7. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка составляет 70 %, а для второго 60 %. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность, что попал первый стрелок.

8. На базе находятся лампы, изготовленные на двух заводах. Из них 70 % изготовлено на первом заводе, а 30 % – на втором. Известно, что 90 % ламп, изготовленных на первом заводе, соответствуют стандарту, а среди ламп, изготовленных на втором заводе, соответствуют стандарту лишь 80 %. Найти вероятность, что взятая наугад лампа с базы будет соответствовать стандарту.

9. Радиосообщение может быть передано днем (с вероятностью 3 / 4), либо ночью (с вероятностью 1/ 4). Из-за помех вероятность его успешного приема составляет днем 60 %, а ночью 80 %. Найти вероятность, что сообщение будет принято.

10. Три гимнаста стоят друг на друге. Вероятность падения нижнего составляет 0,08, второго – 0,5, третьего – 0,31. Найти вероятность того, что трюк не удастся.

11. Двое соперников участвует в олимпиаде. Вероятность того, что первый решит все задачи верно равна 0,89. Для второго эта вероятность равна 0,92. Найти вероятность того, что только один займет первое место.

12. В город поступило 3000 л молока с первого завода и 3500 – со второго завода. Известно, что средний процент непригодного молока среди продукции первого завода равен 1,5 %, второго – 1 %. Найти вероятность того, что купленный литр молока в этом городе окажется непригодным.

13. Для каждого из трех друзей вероятности провала экзамена равны соответственно 0,01; 0,03; 0,1. Найти вероятность того, что только двое из них сдадут экзамен.

14. Два датчика посылают сигнал в общий канал связи, причем первый из них посылает вдвое больше сигналов, чем второй. Вероятность получить искаженный сигнал от первого датчика равна 0,06, от второго – 0,03. Какова вероятность получить неискаженный сигнал в общем канале связи?

15. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

16. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

17. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием K, 30% - с заболеванием L, 20% - с заболеванием M. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7; для болезней L и M эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найдите вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

18. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей—на заводе № 2 и 18 деталей—на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

19. Сотрудники отдела маркетинга полагают, что в ближайшее время ожидается рост спроса на продукцию фирмы. Вероятность этого они оценивают в 80%. Консультационная фирма, занимающаяся прогнозом рыночной ситуации, подтвердила предположение о росте спроса. Положительные прогнозы консультационной фирмы сбываются с вероятностью 95%, а отрицательные – с вероятностью 99%. Какова вероятность того, что рост спроса действительно произойдет?

20. Имеются три урны; в первой 3 белых шара и 1 чёрный, во второй - 2 белых шара и 3 чёрных, в третьей - три белых шара. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из неё один шар. Этот шар оказался белым. Найти после опытные (апостериорные) вероятности того, что этот шар вынут из первой, второй, третьей урны.

21. Имеются три одинаковые урны. В первой урне находятся два белых и один черный шар. Во второй урне — три белых и один черный, а в третьей урне — два белых и два черных. Какова вероятность того, что некто подойдет и из произвольной урны извлечет белый шар?

22. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества, 40 % приборов собирается из высококачественных деталей, и их надежность за время равна 95 %. Приборы из обычных деталей за время имеют надежность 0,7. Прибор испытан и за время работал безотказно. Какова вероятность того, что он собран из высококачественных деталей?

23. Три организации представили в налоговую инспекцию отчеты для выборочной проверки. Первая организация представила 15 отчетов, вторая — 10, третья — 25. Вероятности правильного оформления отчетов у этих организаций известны и соответственно равны: 0,9; 0,8 и 0,85. Наугад был выбран один отчет, и он оказался правильным, Какова вероятность того, что этот отчет принадлежит второй организации?

24. В двух группах занимаются соответственно 20 и 30 студентов. В первой группе 5 отличников, во второй 6. Какова вероятность того, что вызванный наугад студент оказался отличником?

25. На столе лежат три монетки: две обыкновенные и одна с орлами с двух сторон. Наудачу выбирается одна монетка и подбрасывается. На подброшенной монетке выпал орел. С какой вероятностью мы кидали обычную монетку?

Ответы:5.1.0,775.**5.2.**0,958.**5.3.**0,135.**5.4.** 0,8. **5.5.** 12/23 ≈ 0,5217.**5.6.** 0,75. **5.7.** 14/23 ≈ 0,6087.**5.8.** 0,87.**5.9.**0,65.**5.10.**0,683.**5.11.** 0,1724.**5.12.** 0,012. **5.13.**0,131.**5.14.**0,95.**5.15.** $\frac{3}{7}$.**5.16.**0,44<0,56-вероятнее, что стрелок стрелял из винтовки без оптического прицела **.5.17.**$\frac{35}{77}$.**5.18.**0,78.**5.19.**0,958.
5..20.$P_A(H_1) = \frac{15}{43}$, $P_A(H_2) = \frac{8}{43}$, $P_A(H_3) = \frac{20}{43}$.
5.21.$\frac{23}{36}$.**5.22.**0,475.**5.23.**0,19.**5.24.**0,22.**5.25.**0,5.

2.5. Повторные независимые испытания, формула Бернулли.

Рассмотрим ещё одним случай следствия теорем сложения и умножения вероятностей, которое касается независимых испытаний -формулу Бернулли.

Повторно независимые испытания.

При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых одно и то же испытание повторяется многократно, так называемые **повторные независимые испытания**-многократные испытания, в которых вероятность появления событие A в каждом испытании не меняется в зависимости от исходов других испытаний.

Впервые схема независимых испытаний была рассмотрена Бернулли.

Под **схемой Бернулли** или схемой независимых испытаний понимают проведение серии из n испытаний в каждом из которых возможно два исхода: либо наступит событие A, либо $\bar{A}$ (противоположное событию A) и при этом:

1) все n испытаний независимы;

2) вероятность события A в каждом отдельном испытании постоянна и не меняется от испытания к испытанию: $P(A) = p, P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p = q$.

Например, монета подбрасывается 15 раз, совершенно ясно, что вероятность выпадения орла либо решки в любом испытании не зависит от ранее полученных результатов, событие A -выпадение «решки», событие $\bar{A}$-выпадение «орла», очевидно, что $n = 15, P(A) = p = \frac{1}{2}, P(\bar{A}) = q = \frac{1}{2}$.

Формула Бернулли.

Простейшая задача относящаяся к задаче Бернулли, в случае небольшого числа испытаний n, состоит в определении вероятности $P_n(k)$,вероятности того, что в этих n испытаниях (независимых) событие A наступит ровно k раз.

Например, пусть при бросании игральной кубика трижды, происходит событие A-выпадение цифры четыре, либо $\bar{A}$-выпадение любой другой цифры. Определим событие, что в трёх испытаниях выпадение числа очков равного четырём, произойдёт два раза: $\bar{A} \cdot A \cdot A + A \cdot \bar{A} \cdot A + A \cdot A \cdot \bar{A}$,тогда вероятность события $P_3(2)$(вероятность того, что в трёх испытаниях событие A-выпадение цифры четыре, произойдёт ровно два раза) вычисляется следующим образом:

$$P_3(2) = P(\bar{A}) \cdot P(A) \cdot P(A) + P(A) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(A) +$$

$$+P(A) \cdot P(A) \cdot P(\bar{A}) = p^2 \cdot q + p^2 \cdot q + p^2 \cdot q = 3p^2 \cdot q =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72} = 0{,}069.$$

Теорема 2.7.(формула Бернулли)

Если проводится серии из n независимых испытаний , в каждом из которых вероятность событие A равна p,а вероятность его не наступления равна $q = 1 - p$,то вероятности того, что **в этих n испытаниях событие A наступит ровно k раз,** определяется **по формуле Бернулли:**

$$\boldsymbol{P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}} \quad \textbf{(2.9)}$$

, где n-число испытаний Бернулли, k-число испытаний, в которых наступило событие A, $p = P(A), \ \ q = 1 - p = P(\bar{A})$.

Доказательство.

Вероятность одного составного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие Aнаступит k раз и, следовательно, не наступит $n - k$ раз по теореме умножения вероятностей независимых событий равна $p^k \cdot q^{n-k}$,действительно,

$$P(A) \cdot P(A) \cdot \ldots \cdot P(A) \cdot \ P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}) =$$
$$= p \cdot p \cdot \ldots p \cdot (1 - p) \cdot (1 - p) \cdot \ldots \cdot (1 - p) =$$
$$= p^k \cdot (1 - p)^{n-k} = p^k \cdot q^{n-k}.$$

Таких составных событий, может быть, столько сколько можно составить сочетаний из nэлементов по k,то есть C_n^k .Таким образом, вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит ровно k раз, вычисляется по формуле: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$-формуле Бернулли, что и требовалось доказать.

Пример 2.29.В ящике 20 белых и 10 чёрных шаров. Вынули один шар, отметили его цвет и вернули в ящик. Найти вероятность того, что из четырёх вынутых шаров два окажутся белыми.

Решение.

Так как в каждом испытании может произойти либо событие A-вынут белый шар, либо противоположное ему $\bar{A}$(не A)-извлечён чёрный шар, безразлично в какой последовательности и вероятность извлечения белого шара постоянна, то применима формула Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

В нашем случае $n = 4, k = 2$,формула принимает $P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2}$вид, чтобы воспользоваться ей, найдём p и q:

$$P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = p, P(\bar{A}) = 1 - \frac{20}{30} = \frac{1}{3} = q.$$

Вероятность того, что из четырёх вынутых шаров два окажутся белыми равна:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$$

Пример 2.30. Найти вероятность того, что из 6 изделий 4 высшего сорта, если известно, что изготовляющее их предприятие дает 30% продукции высшего сорта.

Решение.

A-изделие высшего сорта,

$P(A) = 0{,}3 = p$, $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 = q$,

$n = 6$, $k = 4$;

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot q^{6-4} = \frac{6!}{4!\,2!} \cdot (0{,}3)^4 \cdot (0{,}7)^2 =$$

$$= 15 \cdot 0{,}0081 \cdot 0{,}14 = 0{,}06.$$

Пример 2.31. Стрелок сделал четыре выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна $p = 0{,}7$. Найти вероятность того, что стрелок попадёт 3 раза в мишень.

Решение.

Событие A- попадания в мишень (при каждом выстреле), $P(A) = p = 0{,}7$, тогда вероятность промаха при каждом выстреле равна

$P(\overline{A}) = q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3.$ Вероятность того, что стрелок попадёт три раза в мишень, при четырёх выстрелах равна:

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q^{4-3} = \frac{4!}{3!1!} \cdot (0{,}7)^3 \cdot 0{,}3 =$$

$$= 4 \cdot 0{,}343 \cdot 0{,}3 \approx 0{,}41.$$

Замечание: вероятность того, что в n испытаниях, событие A наступит:

а) Менее k раз вычисляется по формуле

$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1)$;

б) Более k раз

$P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n)$;

в) Не менее k раз

$P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$;

г) Не более k раз

$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$;

д) Хотя бы один раз в n опытах

$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$.

Пример 2.32. В семье пять детей, найти вероятность того, что среди этих детей:

а) два мальчика; **б)** не более двух мальчиков; **в)** более двух мальчиков; **г)** не менее двух и не более трёх мальчиков; **д)** хотя бы один мальчик. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

Решение

A-рождение мальчика, $\bar{A}$-рождение девочки,

$$p = 0{,}51, q = 0{,}49, n = 5.$$

а) Вероятность того, что среди пяти детей $n = 5$ два мальчика $k = 2$ вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot (0{,}51)^2 \cdot (0{,}49)^3 \approx 0{,}306;$$

б) $P_5(k \leq 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2)$,

$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = \frac{5!}{5!0!} \cdot (0{,}49)^5 \approx 0{,}028$,

$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = \frac{5!}{4!1!} \cdot 0{,}51 \cdot (0{,}49)^4 \approx 0{,}147$, следовательно,

$$P_5(k \leq 2) = 0{,}028 + 0{,}147 + 0{,}306 = 0{,}481 \approx 0{,}48;$$

в) $P_5(k > 2) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$,

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot 0{,}51^3 \cdot 0{,}49^2 \approx 0{,}318,$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = \frac{5!}{4!\,1!} \cdot 0{,}51^4 \cdot 0{,}49 \approx 0{,}166,$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = \frac{5!}{0!\,5!} \cdot 0{,}51^5 \cdot 0{,}49^0 \approx 0{,}035.$$

Таким образом,

$$P_5(k > 2) = 0{,}318 + 0{,}166 + 0{,}035 = 0{,}519 \approx 0{,}52.$$

Однако, в данном случае удобнее поступить иначе: заметить, что вероятность противоположного события $P_5(k \leq 2) = 0{,}481$(вероятность, того, что среди детей, не более двух мальчиков) мы уже находили в пункте б) и учитывая, что сумма вероятностей противоположных событий равна единице $P_5(k \le 2) + P_5(k > 2) = 1$ имеем:

$$P_5(k > 2) = 1 - P_5(k \le 2) = 1 - 0{,}481 = \\ = 0{,}519 \approx 0{,}52.$$

г) $P_5(2 \le k \le 3) = P_5(2) + P_5(3) =$
$= 0{,}306 + 0{,}319 = 0{,}624 \approx 0{,}62;$

д) $P_5(k \ge 1) = P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) +$
$+P_5(4) + P_5(5)$ или

$$P_5(k \ge 1) = 1 - P_5(0) = 1 - 0{,}028 = \\ = 0{,}972 \approx 0{,}97.$$

Пример 2.33. Два равносильных противника играют в шахматы, что вероятнее: **а)** выиграть одну партию из двух или две партии из четырёх; **б)** выиграть не менее двух партий из четырёх или не менее трёх партий из пяти.

Решение.

A-выигрыш партии,$P(A) = p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$.

а) $P_2(1) = C_2^1 \cdot p^1 \cdot q^{2-1} = C_2^1 \cdot p \cdot q =$

$$= \frac{2!}{1!\,1!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8}.$$

Так как,$P_2(1) = \frac{1}{2} > P_4(2) = \frac{3}{8}$,следовательно вероятнее выиграть одну партию из двух;

б) Найдём $P_4(k \ge 2)$,$P_5(k \ge 3)$ и сравним результаты, что больше, то и вероятнее:

$$P_4(k \ge 2) = P_4(2) + P_4(3) + P_4(4),\text{где}$$

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q^1 = \frac{4!}{1!\,3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$P_4(4) = C_4^4 \cdot p^4 \cdot q^0 = \frac{4!}{0!4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$,следовательно,$P_4(k \ge 2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$,

$$P_5(k \geq 3) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5), \text{ где}$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = \frac{5!}{2!\,3!} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 4} = \frac{5}{16},$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = \frac{5!}{1!\,4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32},$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}, \text{ следовательно}$$

$$P_5(k \geq 3) = \frac{5}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $P_4(k \geq 2) > P_5(k \geq 3)$, следовательно вероятнее выиграть не менее двух партий из четырёх.

Пример 2.34. Аудитор обнаруживает финансовые нарушения у проверяемой фирмы с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что среди 4 фирм-нарушителей будет выявлено больше половины.

Решение.

Событие A - финансовые нарушения у проверяемой фирмы, $P(A) = p = 0{,}9, q = 0{,}1.$

Вероятность того, что среди 4 фирм-нарушителей будет выявлено больше половины, вычисляется по формуле:

$$P_4(k > 2) = P_4(3) + P_4(4), \text{где}$$

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q^1 = \frac{4!}{1!\,3!} \cdot (0{,}9)^3 \cdot 0{,}1 = (0{,}9)^3 \cdot 0{,}4;$$

$$P_4(4) = C_4^4 \cdot p^4 \cdot q^0 = \frac{4!}{0!\,4!} \cdot (0{,}9)^4 \cdot (0{,}1)^0 = (0{,}9)^4,$$

Итак,

$$P_4(k > 2) = (0{,}9)^3 \cdot 0{,}4 + (0{,}9)^4 = (0{,}9)^3 \cdot (0{,}4 + 0{,}9) =$$

$$= 0{,}9^3 \cdot 1{,}3 = 0{,}9477.$$

Пример 2.35. После года хранения на складе в среднем 10% аккумуляторов выходят из строя. Определить вероятность того, что после года хранения из 12 аккумуляторов окажутся годными: **а)** десять;
б) больше половины.

$n = 12$, A -аккумулятор годный,
$P(A) = p = 1 - q = 0{,}9$,
$P(\bar{A}) = 0{,}1 = q$.

а) $P_{12}(10) = C_{12}^{10} \cdot (0{,}9)^{10} \cdot (0{,}1)^2 = 0{,}2301 \approx 0{,}23$;

б) $P_{12}(k > 6) = P_{12}(7) + P_{12}(8) + P_{12}(9) +$
$+P_{12}(10) + P_{12}(11) + P_{12}(12)$, к ответу придите самостоятельно.

2.6. Предельные теоремы в схеме Бернулли.

Вычисление вероятностей $P_n(k)$ при большом количестве испытаний n по формуле Бернулли проблематично. Так, например, если $n = 200, k = 116, p = 0{,}72$,то

$$P_{200}(116) = C_{200}^{116} \cdot p^{116} \cdot q^{200-116} =$$

$$= \frac{200!}{(200-166)!116!} \cdot (0{,}72)^{116} \cdot (0{,}28)^{84}$$- подсчитать результат практически невозможно.

Вычисления затруднены так же при малых значениях (близких к нулю) p и q.В связи с этим возникла необходимость в построении асимптотических (приближённых) формул, позволяющих с достаточной точностью определить $P_n(k)$.Приведём их формулировки в силу сложности их доказательств.

Локальная теорема Муавра- Лапласа.

Теорема 2.9 (**Локальная теорема Муавра-Лапласа)**

Если вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число независимых испытаний достаточно велико($np > 10$, $nq > 10$), то вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит ровно k раз, $P_n(k)$ может быть вычислена по приближённой формуле:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \mathbf{(2.10)},$$

где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Равенство (2.10) тем точнее, чем больше n.

Выражение $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ **(2.11)**

называется **функцией Гаусса** (её график представлен на рис.2.3).

Равенство (2.10) переписать в виде (2.12)

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \quad (2.12)$$

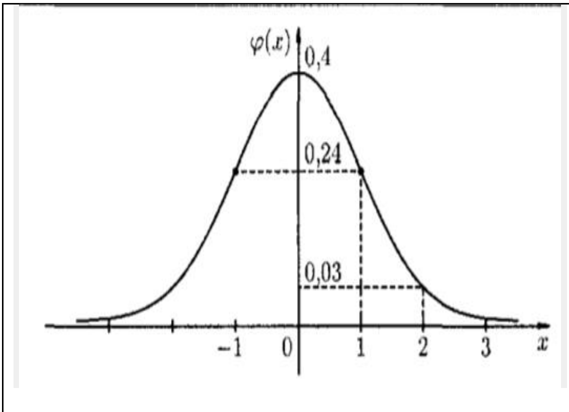


Рис.2.3.

Функция Гаусса $\varphi(x)$-чётная, $\varphi(-x) = \varphi(x)$,монотонно убывающая, то есть $\varphi(x) \longrightarrow 0$,при $x \longrightarrow \infty$.

Замечание: функция Гаусса $\varphi(x)$хорошо изучена, таблицу её значений, которая вычислена для положительных x можно найти в приложении 1 данного пособия, для отрицательных x используют те же значения, поскольку функция $\varphi(x)$ чётная.

Пример 2.36. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах стрелок поразит мишень ровно 75 раз.

Решение.

Определим событие A-поражение мишени. Получим схему Бернулли с параметрами $p = P(A) = 0{,}8$,$q = P(\bar{A}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $n = 100$, $k = 75$. Так как $n = 100$ велико, $p \neq 0, p \neq 1$ для определения вероятности $P_{100}(75)$используем локальную теорему Муавра-Лапласа, то есть применяем формулу $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$,

$$np = 100 \cdot 0{,}8 = 80, npq = 80 \cdot 0{,}2 = 16,$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{16} = 4, x = \frac{75 - 80}{4} = -\frac{5}{4} = -1{,}25,$$

$\varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25) = 0{,}1826$(значения $\varphi(x)$,в частности $\varphi(1{,}25)$берутся из таблицы значений функции Гаусса-см. приложение 1). Подставляем полученные значения в формулу$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, имеем:

$$P_{100}(75) = \frac{1}{4} \cdot 0{,}1826 = 0{,}04565 \approx 0{,}05.$$

Пример 2.37. Вероятность покупки при посещении клиентом магазина составляет $p = 0{,}75$. Найти вероятность того, что при 100 посещениях клиент совершит покупку ровно 80 раз.

Решение.

В данном случае $n = 100$, $k = 80$, $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$. Находим

$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{80-100\cdot0{,}75}{\sqrt{100\cdot0{,}75\cdot0{,}25}} = \frac{5}{\sqrt{18{,}75}} \approx \frac{5}{4{,}33} \approx 1{,}15,$ и определяем $\varphi(x) = 0{,}2059$, тогда искомая вероятность равна:

$$P_{100}(80) = \frac{0{,}2059}{4{,}33} = \frac{2059}{43300} \approx 0{,}048.$$

Пример. 2.38. На заводе изготавливается в среднем 25% деталей плохого качества. За час было изготовлено 400 деталей. Найти вероятность того, что среди них ровно 280 деталей отличного качества.

Решение.

Определим событие A- деталей отличного качества, $\bar{A}$- деталь плохого качества,

$p = P(A) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75, q = P(\bar{A}) = 0{,}25,$

$$n = 400, k = 280;$$

Для определения вероятности $P_{400}(280)$ применяем формулу

$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{где } x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}},$

$$np = 400 \cdot 0{,}75 = 300, \sqrt{npq} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66;$$

$$\frac{1}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{8{,}66} = \frac{100}{866} = 0{,}115;$$

$$x = \frac{280-300}{8{,}66} = -\frac{20}{8{,}66} = -\frac{2000}{866} = -\frac{1000}{433} \approx -2{,}31,$$

$\varphi(-2{,}31) = \varphi(2{,}31) = 0{,}0277;$

Таким образом, получим:

$$P_{400}(280) = 0{,}115 \cdot 0{,}0277 \approx 0{,}003.$$

Пример. 2.39. Вероятность поражения мишени при каждом выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах мишень будет поражена ровно 8 раз. Изменится ли вероятность попадания, если число выстрелов и поражений мишени увеличится в 10 раз?

Решение.

Вероятность поражения мишени при одном выстреле постоянна $p = P(A) = 0{,}75, q = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$, $n = 10, k = 8$.

Воспользовавшись формулой Бернулли, найдем:

$P_{10}(8) = C_{10}^{8} \cdot p^8 \cdot q^2 = \dfrac{10!}{8!\,2!} \cdot (0{,}75)^8 \cdot (0{,}25)^2 =$
$= 45 \cdot 0{,}1001 \cdot 0{,}0625 = 0{,}281;$

При увеличении числа выстрелов и поражений в 10 раз трудно производить расчеты по формуле Бернулли, так как $n = 100, k = 80$,

$$np = 100 \cdot 0{,}75 = 75 > 10;$$

Используя локальную теорему Муавра-Лапласа, получим:

$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$,

$npq = 100 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 75 \cdot 0{,}25 = 18{,}75;$

$\sqrt{npq} = \sqrt{18{,}75} \approx 4{,}33;$

$x = \dfrac{80 - 75}{4{,}33} = \dfrac{5}{4{,}33} \approx 1{,}15, \varphi(1{,}15) = 0{,}2059;$

Таким образом,

$$P_{100}(80) = 0{,}23 \cdot 0{,}2059 \approx 0{,}047.$$

Сравнивая вероятности $P_{10}(8) = 0{,}281$ и $P_{100}(80) = 0{,}047$ отметим, что если число выстрелов и поражений мишени увеличится в 10 раз, то вероятность попадания в мишень уменьшится.

Пример. 2.40. Монета брошена 2N раз (N велико!). Найти вероятность того, что «герб» выпадет ровно N раз.

Решение.

A-появление герба, $p = P(A) = 0{,}5, q = 0{,}5$,

$n = 2N, k = N$. Применяя локальную теорему Муавра-Лапласа $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $npq = 2N \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5N$, $np = 2N \cdot 0{,}5 = N$,
$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{N-N}{\sqrt{0{,}5N}} = 0, \varphi(0) = 0{,}3989$ имеем:
$P_{2N}(N) = \frac{1}{\sqrt{0{,}5N}} \cdot 0{,}3985 = \frac{\sqrt{2} \cdot 0{,}3985}{\sqrt{N}} = \frac{0{,}564}{\sqrt{N}}$.
Получили общую формулу, при различных значениях N,вероятность будет меняться.

Интегральная теорема Муавра- Лапласа.

В тех случаях, когда требуется вычислить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится не менее k_1 раз, но не более k_2 раз, то есть $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ или $P_n(k_1; k_2)$,используют интегральную теорему Лапласа.

Теорема 2.10. (**Интегральная теорема Муавра- Лапласа**). Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1; k_2)$ может быть найдена по формуле:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \textbf{(2.13)},$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Равенство тем точнее, чем больше n.

Учитывая, что $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ равенство (2.13) можно записать в виде (2.14):

$$P_n(k_1; k_2) \approx \int_{x_2}^{x_1} \varphi(x) dx \textbf{(2.14)}.$$

Для упрощения вычислений при использовании формулы (2.13) вводят специальную функцию (2.15) :

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ **(2.15)** – функция Лапласа;

Функция Лапласа нечётная $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, монотонно возрастающая, то есть

$\Phi(x) \to 0{,}5$ при $x \to +\infty$ (см. рис.2.4).

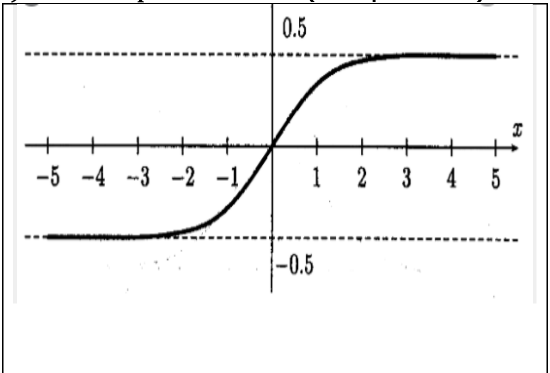


Рис.2.4.

Замечание: функция Лапласа $\Phi(x)$ хорошо изучена, таблицу её значений, которая вычислена для положительных $x (0 \le x \le 5)$ можно найти в приложении 2, при $x > 5, \Phi(x) = 0{,}5$. Учитывая, что функция Лапласа нечётная $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, несложно посчитать её значение при отрицательных x .

Для того, чтобы можно было пользоваться таблицей функции Лапласа, выразим правую часть равенства (2.13) через функцию Лапласа (2.15):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left| \begin{matrix} x = t \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз равна:

$\boldsymbol{P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)}$**(2.16)**

, где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Эту формулу обычно используют на практике. Приведём примеры, иллюстрирующие применения интегральной теорема Муавра-Лапласа.

Пример 2.41. Игральный кубик бросают 800 раз. Найти вероятность того, что число очков кратное трём выпадает не менее 260 и не более 274 раз.

Решение.

Поскольку вероятность p наступления события A- на кубике выпадет число кратное трём, в каждом испытании постоянна и отлична от нуля $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа, то есть формулой

$$P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}};$$

Для этого определим необходимые параметры: $n = 800$, $k_1 = 260, k_2 = 274$,

$$p = \frac{1}{3}, q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, np = 800 \cdot \frac{1}{3} = 266{,}67,$$

$$npq = 800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1600}{9} = 177{,}78,$$

$\sqrt{npq} = \sqrt{177{,}78} \approx 13{,}3$, тогда

$$x_1 = \frac{260 - 266{,}67}{13{,}3} = -\frac{6{,}67}{13{,}3} \approx -0{,}5,$$

$$x_2 = \frac{274 - 266{,}67}{13{,}3} = \frac{7{,}33}{13{,}3} \approx 0{,}55.$$

Итак, $P_{800}(260 \le k \le 274) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) =$

$= \Phi(0{,}55) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(0{,}55) + \Phi(0{,}5) =$

$= 0{,}2088 + 0{,}1915 = 0{,}4003.$

Пример 2.42. Страховая компания заключила 40000 договоров. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года составляет 2%. Найти вероятность, что таких случаев будет не более 870.

Решение.

По условию задачи $n = 40000$, $p = 0{,}02, q = 0{,}98$.
В данном случае $np = 40000 \cdot 0{,}02 = 800$,
$\sqrt{npq} = \sqrt{800 \cdot 0{,}98} = 28$.

Для вычисления $P_{40000}(0 \le k \le 870)$ воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_{40000}(0 \le k \le 870) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{0 - 800}{28} = -\frac{800}{28} = -28{,}57,$$

$$x_2 = \frac{870 - 800}{28} = \frac{70}{28} = 2{,}5;$$

$$P_{40000}(0 \le k \le 870) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-28{,}57) =$$
$$= \Phi(2{,}5) + \Phi(28{,}57) = 0{,}4938 + 0{,}5 = 0{,}9938.$$

Пример 2.43. 100 пациентов принимают экспериментальный препарат, причем улучшение состояния в течение дня отмечают 80%. Найдите вероятность того, что в течение дня улучшение почувствуют от 75 до 85 пациентов.

Решение.

Вероятность того, что событие A - улучшение состояния в течении дня, появится в $n = 100$ независимых испытаниях от 75 до 85 раз, то есть $P_{100}(75; 85)$вычисляется по формуле:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}};$$
$$p = 0{,}8, q = 0{,}2, n = 100, k_1 = 75, k_2 = 85;$$

$$np = 100 \cdot 0{,}8 = 80, npq = 100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 16,$$
$$\sqrt{npq} = \sqrt{16} = 4;$$
$$x_1 = \frac{75 - 80}{4} = -\frac{5}{4} = -1{,}25;$$
$$x_2 = \frac{85 - 80}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25;$$
$$P_{100}(75; 85) = \Phi(1{,}25) - \Phi(-1{,}25) =$$
$$= \Phi(1{,}25) + \Phi(1{,}25) = 2\Phi(1{,}25) =$$
$$= 2 \cdot 0{,}3944 = 0{,}7888 \approx 0{,}79.$$

Пример 2.44. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится: **а)** не менее 1470 и не более 1500 раз; **б)** не менее 1470 раз; **в)** не более 1469 раз.

Решение.

В нашем случае $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$, $n = 2100$,

а) Для вычисления вероятности того, что событие A появится в этих 2100 испытаниях менее 1470 и не более 1500 раз, то есть вероятности $P_{2100}(1470 \leq k \leq 1500)$, воспользуемся формулой

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$;

$$k_1 = 1470, k_2 = 1500, np = 2100 \cdot 0{,}7 = 1470,$$
$$npq = 2100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 441, \sqrt{npq} = 21,$$
$$x_1 = \frac{1470 - 1470}{21} = \frac{0}{21} = 0,$$
$$x_2 = \frac{1500 - 1470}{21} = \frac{30}{21} = 1{,}428,$$
$$P_{2100}(1470 \leq k \leq 1500) \approx \Phi(1{,}428) - \Phi(0) =$$
$$= 0{,}4236 - 0 = 0{,}4236;$$

б) Событие A появится не менее 1470 раз (означает, что число появлений события может быть равно 1470, либо 1471, …, либо 2100), то есть требуется найти $P_{2100}(1470 \leq k \leq 2100)$:

$$x_1 = \frac{1470 - 1470}{21} = \frac{0}{21} = 0,$$

$$x_2 = \frac{2100 - 1470}{21} = \frac{630}{21} = 30,$$

учитывая, что при $x > 5, \Phi(x) = 0{,}5$ имеем:

$P_{2100}(1470 \leq k \leq 2100) = \Phi(30) - \Phi(0) = 0{,}5;$

в) Событие A появится не более 1469 раз (либо 0, либо 1,…,либо 1469) означает, что необходимо найти $P_{2100}(0 \leq k \leq 1469)$,учитывая, что

$$P_{2100}(0 \leq k \leq 1469) + P_{2100}(1470 \leq k \leq 2100) = 1$$

имеем:

$P_{2100}(0 \leq \mathrm{k} \leq 1469) = 1 - \mathrm{P}_{2100}(1470 \leq \mathrm{k} \leq 2100) =$
$= 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$

Формула Пуассона.

В тех случаях, когда вероятность $p = const$ успеха крайне мала, то есть сам по себе успех (появление события A) является редким событием (например, выигрыш автомобиля по лотерейному билету), но количество испытаний велико используют теорему Пуассона.

Теорема 2.11.(теорема Пуассона)

Если число испытаний неограниченно увеличивается $(n \to \infty)$ и вероятность p наступления события A в каждом испытании неограниченно уменьшается $(p \to 0)$, но так, что их произведение np является постоянной величиной ($np = \lambda = const$), то вероятность $P_n(m)$ удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \textbf{(2.17)}$$

, где $\lambda = np$ - среднее число успехов.

Из предельного равенства (2.17) при больших n и малых p вытекает приближенная формула Пуассона (2.18):

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \textbf{(2.18)}$$

Итак, если количество испытаний n достаточно велико, а вероятность p появления события A в отдельно взятом испытании весьма мала, то вероятность того, что в данной серии из n испытаний событие A появится ровно k раз, можно приближенно вычислить по формуле Пуассона (2.18).

Пример 2.45. В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна 0,0002. Найти вероятность того, что за месяц откажет ровно 1 замок.

Решение.

В данном случае количество испытаний $n = 10000$ велико, а вероятность того, что в данной серии испытаний появится событие A – замок вышел из строя мала ($p = 0{,}0002$), поэтому используем формулу Пуассона:

$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$;

В нашем случае $n = 10000, k = 1,$ формула принимает вид:

$$P_{10000}(1) \approx \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!};$$

Для того, чтобы ею воспользоваться вычислим $\lambda = np$- среднее число успехов, то есть среднее ожидаемое количество вышедших из строя замков λ:

$\lambda = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2$;

Таким образом:

$P_{10000}(1) \approx \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2} \approx 0{,}2707$ – вероятность того, что за месяц из строя выйдет ровно один замок (из 10 тысяч).

Пример 2.46. В Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

Решение.

$n = 200, k = 4, p = 0{,}01, \lambda = np = 200 \cdot 0{,}01 = 2;$

В данном случае количество испытаний велико $n = 200$, а вероятность появления события A -деталь бракована $p = P(A) = 0{,}01$-мала, поэтому используем формулу Пуассона $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$:

$$P_{200}(4) \approx \frac{2^4 \cdot e^{-2}}{4!} = \frac{2}{3e^2} \approx 0{,}09.$$

Пример 2.47. Известно, что процент брака для некоторой детали равен 0,5%. Контролер проверяет 1000 деталей. Какова вероятность обнаружить ровно три бракованные детали? Какова вероятность обнаружить не меньше трех бракованных деталей?

Решение.

Имеем $n = 1000$ испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» $p = 0{,}005$. Применяя пуассоновское приближение с $\lambda = np = 5$, получаем:

1)$P_{1000}(3) = \frac{5^3}{3!} \cdot e^{-5} \approx 0{,}14;$

2) $P_{1000}(k \geq 3) = 1 - P_{1000}(k < 3) =$

$$= 1 - \left(P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(1)\right);$$

$P_{1000}(0) = \frac{5^0}{0!} \cdot e^{-5} = e^{-5},$

$$P_{1000}(1) = \frac{5^1}{1!} \cdot e^{-5} = 5e^{-5},$$

$$P_{1000}(2) = \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} = 12{,}5e^{-5},$$

$$P_{1000}(k < 3) = e^{-5}(1 + 5 + 12{,}5) = \frac{18{,}5}{e^5};$$

$$P_{1000}(k \geq 3) = 1 - \frac{18{,}5}{e^5} = 0{,}875.$$

Пример 2.48. Завод «Золотая балка» (Крым) отправил в Москву 1500 бутылок вина «Каберне»**.** Вероятность того, что в пути бутылка может разбиться равна 0,002. Найти вероятность, что в пути будет разбито не более четырёх бутылок**.**

Решение.

$P_{1500}(k \leq 4) = P_{1500}(0) + P_{1500}(1) + P_{1500}(2) +$
$+P_{1500}(3) + P_{1500}(4),$
$n = 1500, p = 0{,}002, \lambda = np = 3.$

$$P_{1500}(k \leq 4) = \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 \cdot e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} +$$
$$+ \frac{3^3 \cdot e^{-3}}{3!} + \frac{3^4 \cdot e^{-3}}{4!} = 0{,}825.$$

Задания для самостоятельного решения

6. Найти вероятность ожидаемого события применяя формулу Бернулли и предельные теоремы в схеме Бернулли.

1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что в серии из четырёх выстрелов будет: **а)** хотя бы одно попадание; **б)** не менее трёх попаданий; **в)** не более одного попадания.
2. Игрок набрасывает кольца на колышек, вероятность удачи при этом равна 0,1. Найдите вероятность того,

что из шести колец на колышек попадёт хотя бы два раза.

3. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность появления орла два раза.

4. На перевозку груза направлены 4 автомобиля. Вероятность, что любой из них в исправном состоянии=0,8. Найдите вероятность того, что в работе участвуют не менее трех авто.

5. Игральный кубик подбрасывают 10 раз. Найти вероятность того, что шестерка выпадает: **а)** два раза; **б)** не более восьми раз (менее 8 раз); **в)** хотя бы один раз.

6. В среднем 70 % студентов группы сдают зачет с первого раза. Определить вероятность того, что из 5 человек, сдававших зачет, с первого раза сдадут ровно 3 студента.

7. Банк выдал шесть кредитов. Вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, равна 0,2. Определить вероятность того, что в срок не будут погашены четыре кредита.

8. Игральный кубик бросается 5 раз. Найти вероятность, что шестерка выпадет 2 раза.

9. Бросается 10 монет. Найти вероятность, что число выпавших гербов будет равно шести.

10. Бросается 12 монет. Найти вероятность, что гербов выпадет больше, чем решек.

11. Монету бросают 4 раза. Найти вероятность того, что герб выпадет от 2 до 3 раз.

12. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.

13. Пусть бросают 8 монет. Найти вероятность того, что орел не менее 7 раз.

14. Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0,4. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 26 деталей половина окажется высшего сорта.

15. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: **а)** мене двух раз; **б)** не менее двух раз.

16. В семье 10 детей. Считая, что вероятность рождения мальчика равна 0,5, найдем вероятность того, что в семье имеются мальчиков: **а)** 0; **б)**1.

17. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превышает установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

18. Проводится 200 независимых опытов с вероятностью успеха в каждом 24%. Какова вероятность успешного проведения 50 опытов?

19. Вероятность выхода из строя за смену одного станка равна 0,1. Определить вероятность выхода из строя от 2 до 13 станков при наличии 100 станков.

20. Вероятность того, что ПК дает сбой при нажатии клавиши, равна 0,0002. Определить вероятность того, что при наборе текста, состоящего из 5000 знаков, не произойдет ни одного сбоя.

21. На конвейер за смену поступает 300 изделий. Вероятность того, что поступившая на конвейер деталь стандартна, равна 0,75. Найти вероятность того, что стандартных деталей на конвейер за смену поступило ровно 240.

22. В продукции некоторого производства брак составляет 15%. Изделия отправляются потребителям (без проверки) в коробках по 100 штук. Найти вероятности событий: **а)** A – наудачу взятая коробка содержит 13 бракованных изделий; **б)** B– число бракованных изделий в коробке не превосходит 20.

23. Монета бросается 100 раз. Найти вероятность, что количество выпавших гербов будет лежать в интервале: **а)** от 40 до 60; **б)** от 30 до 70.
24. Вероятность изготовления годной детали равна 0,8. Произведено 500 деталей. Какое число годных деталей вероятнее получить: **а)** менее 390; **б)** от 390 до 410?
25. Завод отправил в торговую сеть 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,003. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено: **а)** ни одного изделия; **б)** ровно три изделия; **в)** более трех изделий.

Ответы: 6.1. а)$0,0256$;**б)** $0,8192$;**в)** $0,2576$. **6.2.**≈ 0,114.**6.3.**$\frac{5}{16}$.**6.4.**$0,8192$. **6.5.а)** $0,29$;**б)** $1-\frac{51}{6^{10}}$;**в)** $1-(\frac{5}{6})^{10}$.**6.6.** 0,3087.**6.7.**0,01536.**6.8.**1250/7776 ≈ 0,1608.**6.9.** 210/1024 ≈ 0,2051. **6.10.** 1586/4096 ≈ 0,3872. **6.11.** 0,625. **6.12.**0,125.**6.13.**0,035.**6.14.**0,092. **6.15. а)** $\frac{3}{16}$;**б)** $\frac{13}{16}$. **6.16.а)** $\frac{1}{1024}$;**б)** $\frac{10}{1024}$.**6.17.** ≈0,3. **6.18**. ≈0,063.**6.19.**0,837.**6.20.**0,368.**6.21.**0,007. **6.22.а)**$P(A)=0,095$;**б)** $P(B)=0,919$.
6.23.а) ≈ 0,9545; **б)** ≈0,9999. **6.24. а)** 0,1314; **б)**0,7372. **6.25. а)** ≈ 0,2231; **б)** ≈ 0,1255; **в)** ≈ 0,0656.

ГЛАВА 3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

3.1. Понятие случайной величины.

Понятие случайной величины является основным в теории вероятностей и ее приложениях. Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной величины.

Случайная величина –это переменная, которая в результате испытания принимает одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно. Случайные величины, как правило, обозначают большими латинскими буквами, а их значения – соответствующими маленькими буквами.

Обозначение:

X, Y, Z -случайные величины;

x, y, z - значения случайных величин.

Примеры случайных величин:

1) X – количество очков, которое выпадет после броска игрального кубика. В результате данного испытания выпадет одна и только одна грань, какая именно – неизвестно, при этом случайная величина X может принять одно из следующий значений: $x_1 = 1,\ x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4,\ x_5 = 5, x_6 = 6;$

2) Y – число родившихся девочек среди 10 новорождённых. Совершенно понятно, что количество родившихся девочек среди 10 новорождённых, заранее неизвестно, и в очередном десятке родившихся детей может оказаться:

$x_1 = 0,\ x_2 = 1, x_3 = 2, \ldots,\ x_{11} = 10$ девочек (один и только один из перечисленных вариантов).

3) Z -время безотказной работы прибора, возможные значения, которые принадлежат промежутку $[0;t)$ (правая граница не определена $t \geq 0$);

4) L -дальность полета футбольного мяча;

5) K -вес наугад взятого зерна пшеницы.

Случайные величины делятся на две группы: дискретные (прерывные) и непрерывные случайные величины.

Дискретная случайная величина (ДСВ)– принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значений конечно (счётно).

Случайные величины 1),2) из примера выше дискретные, так как принимают отдельные, изолированные значения, которые можно перечислить.

Непрерывная случайная величина (НСВ)– может принимать любые числовые значения из некоторого промежутка (например, значения на отрезке, на всей числовой прямой и так далее). Множество возможных значений непрерывной случайной величины несчетно, так как непрерывно заполняет некоторый промежуток, который иногда имеет резко выраженные границы, а чаще – границы неопределенные, расплывчатые.

Случайные величины 3)-5) (из примера выше) непрерывные, так как все их возможные числовые значения принадлежат некоторому промежутку.

Закон распределения дискретной случайной величины. Многоугольник распределения.

На первый взгляд может показаться, что для задания дискретной случайной величины достаточно перечислить все ее возможные значения. В действительности это не так: случайные величины могут иметь одинаковые перечни возможных значений, а вероятности их – различные. Поэтому для задания дискретной случайной величины недостаточно перечислить все возможные ее значения, нужно еще указать их вероятности.

Случайная величина считается заданной, если известен **закон распределения случайной величины**-любое правило (таблица, функция, график), устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями, с которыми случайная величина принимает эти значения.

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей. Простейшей формой задания дискретной случайной величины является **ряд распределения**, представляющий собой таблицу, в первой строке которой представлены возможные значения случайной величины x_i , а во второй соответствующие им вероятности p_i :

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

При построении ряда распределения необходимо помнить, что:

1) $0 \le p_i \le 1$;

2) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$,так как в одном испытании случайная величина обязательно примет одно и только одно из значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то события $X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_n$ образуют полную группу, то есть сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Пример 3.1. Построить ряд распределения случайной величины X – количество очков, которое выпадет после броска игрального кубика.

Решение.

Случайная величина X может принять одно из следующий значений:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4,\ x_5 = 5, x_6 = 6;$$

$x_1 = 1$-на кубике выпадет число очков равное одному и так далее.

С вероятностями $p_1 = p_2 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}$.Таким образом, закон распределения заданной дискретной случайная величины X имеет вид:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1.$$

Закон распределения дискретной случайной величины(ряд распределения) можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M(x_1;p_1), M(x_2;p_2), \ldots, M(x_n;p_n)$ и соединяют их отрезками прямых, здесь x_i -возможные значения случиной величины X, p_i -соответствующие им вероятности. Полученную фигуру называют **многоугольником распределения** (см.рис.3.1)

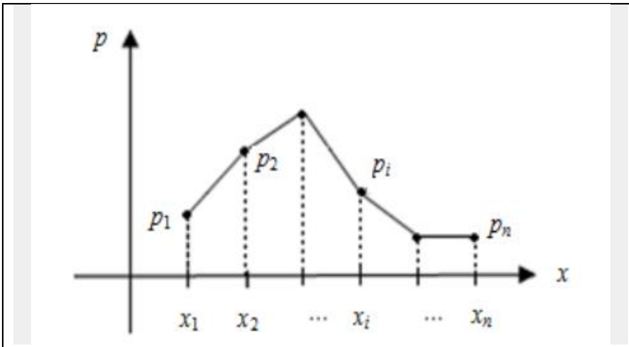


Рис.3.1.

Замечание: при выполнении чертежа по возможности придерживайтесь следующего масштаба горизонтальная ось- 1 ед. = 1 см; вертикальная ось-0,1 ед. = 1см.

Пример 3.2. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 100 рублей и десять по 50 рублей. Найти закон распределения случайной величины X -стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета и построить многоугольник полученного распределения.

Решение.

X -стоимость возможного выигрыша,

$$X : x_1 = 0, x_2 = 50, x_3 = 100.$$

Для того, чтобы написать закон распределения, найдем вероятности, соответствующие значениям случайной величины, используют классическое определение вероятности

$$: p_1 = \frac{89}{100} = 0{,}89,\ p_2 = \frac{10}{100} = 0{,}1,\ p_3 = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

Напишем искомый закон распределения:

x_i	0	50	100
p_i	0,89	0,1	0,01

Изобразим его графически, получим многоугольник распределения (см.рис.3.2.):

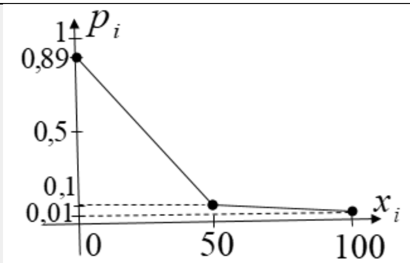


Рис.3.2.

Замечание: дискретная случайная величина может принимать не только целые значения, они могут быть любыми.

Пример 3.3. Некоторая игра имеет следующий закон распределения выигрыша:

x_i	-2	$3,5$	10
p_i	$0,5$	p_2	$0,2$

. Найти p_2 .

Решение.

Так как $\sum_{i=1}^{3} p_i = p_1 + p_2 + p_3 = 1$, то

$0,5 + p_2 + 0,2 = 1$,

$p_2 = 1 - 0,7 = 0,3$ – таким образом, вероятность выигрыша $x_2 = 3,5$ условных единиц составляет 0,3.

3.2. Основные закон распределения дискретной случайной величины.

Можно выделить наиболее часто встречающиеся законы распределения дискретных случайных величин: гипергеометрический закон распределения, биномиальный закон распределения, геометрический закон распределения, закон распределения Пуассона. Рассмотрим каждый в отдельности:

1)Гипергеометрический закон распределения.

С понятием гипергеометрической вероятности мы уже сталкивались ранее, когда решали определенную серию задач по формуле классической вероятности: задачи про выбор определённого количества бракованных деталей, выигрышных лотерейных билетов или шаров определенного цвета. Теперь такие же задачи будут встречаться и при изучении случайных величин.

Для определенности сформулируем задачу следующим образом:

Из урны, в которой находятся N шаров (n белых и N-n чёрных шаров), наудачу и без возвращения вынимают m шаров. Найти закон распределения случайной величины X - равной числу белых шаров среди выбранных.

Случайная величина X может принимать целые значения от 0 до n .Соответствующие им вероятности вычисляются по формуле:

$$P(X=k)=\frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}, 0 \leq k \leq n \quad \textbf{(3.1)}$$

Рассмотрим, как работает данный закон на примере 3.4.

Пример 3.4. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение.

По условию известно, что $N = 6$, $m = 3$(в партии имеется 6 деталей, отобраны 3).

Введем дискретную случайную величину X -количество стандартных деталей среди трёх отобранных.

X может принимать значения 1, 2 и 3. Найдем соответствующие им вероятности:

$x_1 = 1$-среди трёх отобранных деталей одна стандартная, вероятность этого события по гипергеометрическому закону равна:

$$p_1 = P(X = 1) = \frac{C_4^1 \cdot C_{6-4}^{3-1}}{C_6^3} = \frac{C_4^1 \cdot C_2^2}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5};$$

$x_2 = 2$- среди трёх отобранных деталей две детали стандартные, соответствующая вероятность равна:

$$p_2 = P(X = 2) = \frac{C_4^2 \cdot C_{6-4}^{3-2}}{C_6^3} = \frac{C_4^2 \cdot C_2^1}{C_6^3} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5};$$

$x_3 = 3$-все три извлечённые детали стандартные,

тогда $p_3 = P(X = 3) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$;

Закон распределения случайной величины X имеет вид:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Сумма вероятностей полученных значений случайной величины равна единице (1/5+3/5+1/5 = 5/5 = 1), поэтому расчеты проведены верно.

2)Биномиальный закон распределения.

Дискретная случайная величина X имеет биномиальное распределение, если она принимает значения $0,1,2,\ldots n$, а соответствующие им вероятности вычисляются по формуле Бернулли:

$$P_n(k)=P_n\{X=k\}=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}\quad\textbf{(3.2)},$$

где $0<p<1, q=1-p, k=0,1,2,\ldots.n$.

Пример 3.5. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X — числа появлений «герба» при двух бросаниях монеты.

Решение.

Дискретная случайная величина X —число появлений «герба» при двух бросаниях монеты ,имеет следующие возможные значения $X: x_1=0$ (герб не появился ни разу), $x_2=1$ (один раз), $x_3=2$ (два раза). Определим событие A-появление герба при однократном бросании монеты. Учитывая, что $p=P(A)=\frac{1}{2}, q=1-p=\frac{1}{2}, n=2$. Напишем искомый биномиальный закон распределения:

$$p_1=P_2(0)=C_2^0\cdot p^0\cdot q^2=\frac{1}{4};$$

$$p_2 = P_2(1) = C_2^1 \cdot p^1 \cdot q^1 = \frac{1}{2};$$

$$p_3 = P_2(2) = C_2^2 \cdot p^2 \cdot q^0 = \frac{1}{4}.$$

Итак, ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

3) Закон распределения Пуассона.

Дискретная случайная величина X имеет распределение Пуассона, если она имеет бесконечное счетное множество возможных значений $0,1,2,\dots m,\dots$

($n \to \infty$), а соответствующие вероятности p $(p \to 0)$ вычисляются по формуле Пуассона:

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, k = 0,1,2\dots. \textbf{(3.3)},$$

где k-число появлений события в n независимых испытаниях, $\lambda = np$ - среднее число появлений события в n испытаниях, и говорят, что случайная величина распределена по закону Пуассона.

Замечание: формулу Пуассона можно получить как предельный случай формулы Бернулли при неограниченном увеличении числа испытаний n и при стремлении к нулю вероятности $p = \frac{\lambda}{n}$.

Пример 3.6. Устройство состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа любого элемента в течении времени t равна $0{,}002$. Составить закон распределения случайной величины X — числа отказавших элементов (за время t).

Решение.

Поскольку $p \to 0, n \to \infty$ случайная величина X имеет распределение Пуассона.

Определим событие A-элемент откажет,

$$p = P(A) = 0{,}002,\ \ n = 1000,\ \lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}002 = 2 \ .$$

Случайная величина X — число отказавших элементов, может принимать следующие возможные значения:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots, x_{k+1} = k, \dots$$

Посчитаем соответствующие им вероятности по формуле Пуассона $p_k = P(X = k) = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k\,!}, k = 0,1,2\dots$:

$$x_1 = 0,\ p_1 = P_{1000}(X = 0) = \frac{\lambda^0 \cdot e^{-2}}{0\,!} = e^{-2} \approx 0{,}135335,$$

$$x_2 = 1,\ p_2 = P_{1000}(X = 1) = \frac{\lambda^1 \cdot e^{-2}}{1\,!} = 2e^{-2} \approx 0{,}270671;$$

и так далее.

В итоге получим следующий ряд распределения:

x_i	0	1	...	k	...
p_i	0,135335	0,270671	...	$\dfrac{2^k \cdot e^{-2}}{k\,!}$	...

Пример 3.7. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

Решение.

A -изготовленная деталь окажется бракованной, $p = P(A) = 0{,}01,\ \ n = 200,\ \ \lambda = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}01 = 2$, $p \to 0,\ n \to \infty$, следовательно

$$p = P_{200}(X = 4) = P_{200}(4) = \frac{2^4 \cdot e^{-2}}{4\,!} = \frac{2}{3}e^{-2} \approx 0{,}09.$$

4) Геометрический закон распределения.

Дискретная случайная величина X имеет геометрическое распределение, если ее возможные значения: 1, 2, ..., m, …, а соответствующие им вероятности p_k вычисляются по формуле:

$$p_k = P(X = k) = q^{k-1} \cdot p, \quad \textbf{(3.4)},$$

где $0 < p < 1, q = 1 - p, k = 1,2, \dots, m$.

Замечание: вероятности p_k для последовательных значений k образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q, откуда и название «геометрическое распределение».

Пример 3.8. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Составить закон распределения дискретной случайной величины X — числа патронов, выданных стрелку.

Решение.

A -попадание в мишень, $p = P(A) = 0{,}8$. Дискретная случайная величина X — число патронов, выданных стрелку (до тех пор, пока он не промахнётся)— имеет следующие возможные значения и соответствующие им вероятности:

$x_1 = 1$ -стрелку выдали один патрон, то есть он промахнулся при первом выстреле, следовательно, $p_1 = P(X = 1) = q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$;

$x_2 = 2$ - стрелок использовал два патрона, если попал по мишени первым выстрелом и вторым промахнулся, то есть $p_2 = p \cdot q = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$;

$x_3 = 3$ - выдали три патрона, если попал дважды, а третьим выстрелом промахнулся, тогда $p_3 = p^2 \cdot q = 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}128$.

Таким образом при k-м выстреле получим: $x_k = k$, $p_k = p^{k-1} \cdot q = 0{,}8^{k-1} \cdot 0{,}2.$ Напишем искомый закон распределения:

x_i	1	2	3	$\ldots$	k	$\ldots$
p_i	0,2	0,16	0,128	$\ldots$	$0{,}8^{k-1} \cdot 0{,}2$	$\ldots$

Пример 3.9. При стрельбе до первого попадания с вероятностью попадания $p = 0{,}6$ при выстреле надо найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Решение.

Применим геометрическое распределение: пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A имеет вероятность появления

$$p = P(A) = 0{,}6, q = P(\bar{A}) = 1 - p = 0{,}4.$$

Испытания заканчиваются, как только произойдет событие A.

При таких условиях вероятность того, что событие A. произойдет на k -ом испытании, в нашем случае $k = 3$, определяется по формуле:

$$P = q^{3-1} \cdot p = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096.$$

3.3. Функция распределения вероятностей случайной величины и её свойства.

В главе 3.2 мы ввели в рассмотрение ряд распределения как закон распределения дискретной случайной величины. Однако эта характеристика не является универсальной, она существует только для дискретных случайных величин. Для непрерывной случайной величины ряд распределения построить нельзя, так как она имеет бесчисленное множество возможных значений, сплошь заполняющих некоторый промежуток.

Универсальным способом задания закона распределения пригодным как для ДСВ, так и для НСВ является функция распределения. Этот способ задания особенно важен для непрерывной случайной величины– по той причине, что её невозможно описать таблицей.

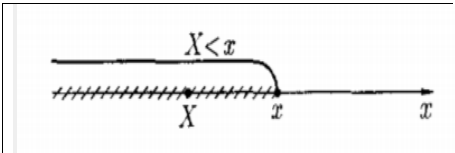


Рис.3.3.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого возможного значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x (см.рис.3.3).

Обозначение: $F(x)$

Кратко формулу для определения функции распределения можно записать в виде (3.5):

$$F(x) = P(X < x) \quad \textbf{(3.5)}$$

Геометрически данное равенство означает, что $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина X примет значение ,которое изображается на числовой оси точкой, левее точки x ,то есть случайная точка X попадет в интервал $(-\infty; x)$,где x -некоторое действительное число.

Функция распределения дискретной случайной величины.

Функция распределения ДСВ равна сумме вероятностей всех значений x_i ,меньших заданного значения x , то есть

$$F(x) = \sum_{i:\, x_i < x} p_i \quad \textbf{(3.6)}$$

Здесь суммирование ведется по всем i ,для которых $x_i < x$.Равенство (3.6) непосредственно вытекает из определения функции распределения.

Свойства функции распределения:

1. Функция распределения $F(x)$- ограничена, $0 \le F(x) \le 1$.

Доказательство.

Данное свойство вытекает из определения функции распределения ($F(x)$является вероятностью по определению).

2.Функция распределения $F(x)$есть неубывающая функция своего аргумента, то есть при $x_2 > x_1$,$F(x_2) \ge F(x_1)$.

Доказательство.

Будем увеличивать x , то есть перемещать точку x вправо по числовой оси. Очевидно, что вероятность попадания случайной точки X в интервал $(-\infty; x)$будет увеличиваться (см.рис.3.3), следовательно, функция распределения с возрастанием убывать не может x .

3. Функция распределения дискретной (прерывной) случайной величины ,есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках x , соответствующим возможным значениям случайной величины X , и равны вероятностям этих значений. Сумма всех скачков функции $F(x)$ равна единице.

Доказательство.

Если, например, дискретная случайная величина X принимает четыре значения x_1, x_2, x_3, x_4 в возрастающем порядке с соответствующими вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4, то функцию распределения этой случайной величины X можно записать следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p_{1,} & x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_{2,} & x_2 < x \le x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3, & x_3 < x \le x_4 \\ 1, & x > x_4 \end{cases}$$

График функции представлен на рис.3.4:

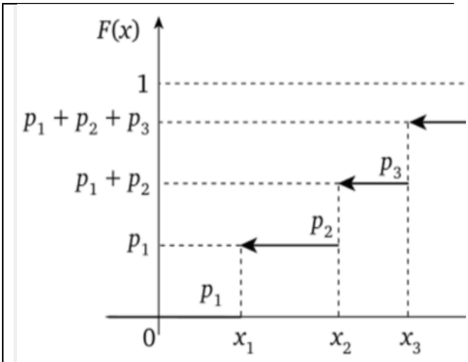
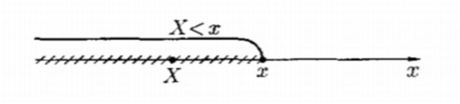


Рис.3.4.

4. $F(x)$ обращается в ноль на минус бесконечности и равна единице на плюс бесконечности, то есть $F(-\infty)=0,\ F(+\infty)=1.$

Доказательство.



Согласно определению функции распределения $F(x) = P(X < x)$ и свойствам вероятности имеем: $F(-\infty) = P(X < -\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Действительно, если неограниченно перемещать точку x влево по оси Ox , то попадание случайной точки X левее x в пределе, становится невозможным событием.

$F(+\infty) = P(X < +\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$. Аналогично, неограниченно перемещая точку x вправо, убеждаемся, что $F(+\infty) = 1$, событие $X < x$ становится в пределе достоверным.

5. Вероятность попадания дискретной случайной величины X в промежуток $[a; b)$, равна приращению функции распределения в этих точках, то есть

$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Доказательство.

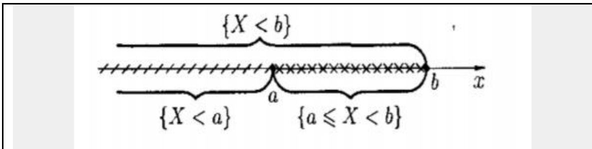


Рис.3.5.

Рассмотрим рис.3.5. очевидно, что

$X < b = X < a + a \leq X < b$,так как слагаемые в правой части равенства -несовместные события, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем:

$$P(X < a) + P(a \leq X < b) = P(X < b),$$

$$P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a).$$

Замечание: если функция всюду непрерывна, то вероятность каждого отдельного значения случайной величины будет равна нулю: $P(X = a) = \lim_{x\to a} F(x) - F(a) = F(a) - F(a) = 0$. Таким образом для НСВ справедливы равенства: $P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$. Действительно, $P(a \leq X < b) = P(X = a) + P(a < X < b) = P(a < X < b)$.

6. Функция распределения $F(x)$,непрерывна слева, то есть $\lim_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$.

Доказательство.

Как мы знаем, функция распределения ДСВ X есть разрывная, со скачками p_i в точкахx_i,непрерывная слева-при подходе к точке разрыва слева функция $F(x)$сохраняет значение.

7. Если возможные значения ДСВ принадлежат интервалу $(x_{min}; x_{max})$,то $F(x) = 0$ при $x \leq x_{min}$, $F(x) = 1$ при$x > x_{max}$.

Доказательство.

Данное свойство вытекает из определения функции распределения.

Пример 3.10. Дан ряд распределения случайной величины X :**а)**

x_i	2	4	5	7
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

;

б)

x_i	1	2	3	4
p_i	0,5	0,3	0,1	0,1

Найти и изобразить функцию распределения $F(x)$ ДСВ X.

Решение.

а) Для нахождения функции распределения будем задавать различные значения x и находить для них

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{i:\, x_i < x} p_i \ :$$

1.Если $x \le 2, F(x) = P(X < x) = P(X < 2) = 0$, действительно, значений, меньших числа 2, величина X не принимает, следовательно и суммировать нечего, $F(x) = 0$;

2. Если$2 < x \le 4, F(x) = P(X < x) = P(X < 4) =$ $= P(X = 2) = 0{,}4$,действительно, величина X принимает лишь одно значение $X = 2$, на данном промежутке $X < 4$ с вероятностью 0,4, следовательно $F(x) = 0{,}4$;

3.Если $4 < x \le 5, F(x) = P(X < x) = P(X < 5) =$

$$= P(X = 2) + P(X = 4) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7;$$

4.Если $5 < x \leq 7, F(x) = P(X < x) = P(X < 7) =$
$= P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 5) =$
$= 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}8;$
5. Если $x > 7, F(x) = P(X = 2) + P(X = 4) +$
$+P(X = 5) + P(X = 7) = 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}1 +$
$+0{,}2 = 1.$
Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при} \quad x \leq 2 \\ 0{,}4, \text{при } 2 < x \leq 4 \\ 0{,}7, \text{при } 4 < x \leq 5 \\ 0{,}8, \text{при } 5 < x \leq 7 \\ 1, \text{при} \quad x > 7 \end{cases}.$$

Изобразим график функции $F(x)$(см.рис.3.6.)

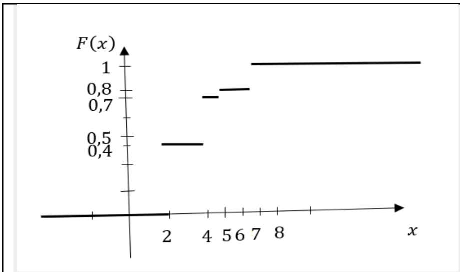


Рис. 3.6.

б) Если $x \leq 1, F(x) = P(X < x) = P(X < 1) = 0;$

Если $1 < x \leq 2$, то

$F(x) = P(X < x) = P(X < 2) = P(X = 1) = 0{,}5;$

Если $2 < x \leq 3$,то

$F(x) = P(X < x) = P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8;$

Если $3 < x \le 4$, то

$$F(x) = P(X < x) = P(X < 4) = P(X = 1) +$$

$$+P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}9;$$

Если $x > 4$, то

$$F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1.$$

Таким образом, искомая функция распределения имеет вид: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 0{,}5, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}8, & 2 < x \le 3 \\ 0{,}9, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}.$

График функции распределения постройте самостоятельно.

Пример 3.11. Найти функцию распределения случайной величины X — числа очков, выпадающих при однократном бросании игральной кости.

Решение.

Для того, чтобы найти функцию распределения $F(x) = \sum\limits_{i:\, x_i < x} p_i$ построим ряд распределения

случайной величины X – количества очков, которое выпадет после броска игрального кубика.

Случайная величина X может принять одно из следующий значений:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4,\ x_5 = 5, x_6 = 6;$$

$x_1 = 1$-на кубике выпадет число очков равное одному и так далее.

С вероятностями $p_1 = p_2 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}$,следовательно ряд распределения заданной ДСВ X имеет вид:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Если $x \leq 1$, то$F(x) = 0$;

Если $1 < x \leq 2$,то $F(x) = P(X < 2) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$;

Если $2 < x \leq 3$,то $F(x) = P(X < 3) = P(X = 1) +$
$+P(X = 2) = \frac{2}{6}$;

Если $3 < x \leq 4$,то $F(x) = P(X < 4) = P(X = 1) +$
$+P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{6}$;

Если $4 < x \leq 5$,то $F(x) = P(X < 5) = P(X = 1) +$
$+P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{4}{6}$;

Если$5 < x \leq 6$,то $F(x) = P(X < 6) = P(X = 1) +$
$+P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{5}{6}$;

Если $x > 6$,то $F(x) = 1$.

Таким образом, функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{1}{6}, & 1<x\le 2\\ \frac{2}{6}, & 2<x\le 3\\ \frac{3}{6}, & 3<x\le 4\\ \frac{4}{6}, & 4<x\le 5\\ \frac{5}{6}, & 5<x\le 6\\ 1, & x>6\end{cases}.$$

График функции распределения изображён на рис.3.7.

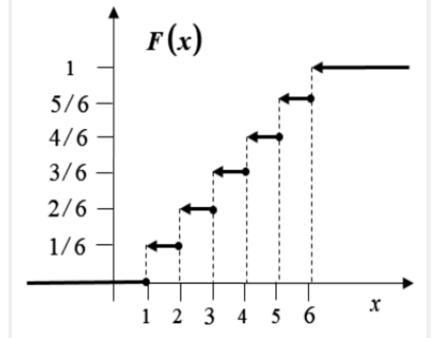


Рис. 3.7.

Пример 3.12. Производится один опыт, в котором может появиться или не появиться событие A. Вероятность события A равна $0,3$. Случайная величина X – число появлений события в опыте. Построить её функцию распределения.

Решение.

Ряд распределения величины X имеет вид:

x_i	0	1
p_i	0,7	0,3.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0{,}7, & 0<x\le 1\\ 1, & x>2\end{cases}$$

Применяя формулу $F(x)=P(X<x)=\sum\limits_{i:\,x_i<x} p_i$,найдем функцию распределения:

1. Если $x\le 0$, $F(x)=P(X<x)=P(X<0)=0$, действительно, значений, меньших числа 0, величина X не принимает, следовательно, при $x\le 0$ функция $F(x)=0$;

2.Если $0<x\le 1$, $F(x)=P(X<x)=P(X<1)=P(X=0)=0{,}7$,действительно, здесь X может принимать значение 0 с вероятностью 0,7, следовательно $F(x)=0{,}7$;

3.Если $x>1$, $F(x)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}7+0{,}3=1.$

Таким образом, искомая функция распределения имеет вид: $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0{,}7, & 0<x\le 1\\ 1, & x>2\end{cases}$.

График функции распределения постройте самостоятельно.

Пример 3.13. На переэкзаменовку по теории вероятностей явились 3 студента. Вероятность того, что первый сдаст экзамен, равна 0,8, второй - 0,7, третий - 0,9. Найдите ряд распределения и функцию распределения случайной величины X -числа студентов, сдавших экзамен.

Решение.

X - дискретная случайная величина, равная количеству студентов, сдавших экзамен, может принимать следующие значения: 0, 1, 2 и 3. Найдем соответствующие им вероятности:

$x_1 = 0$- все три студента не сдали экзамен, следовательно,

$p_1 = (1 - 0{,}8)(1 - 0{,}7)(1 - 0{,}9) = 0{,}006;$

$x_2 = 1$- один студент сдал экзамен (если один студент сдал, а остальные не сдали, то есть первый сдал, а остальные не сдали, или второй сдал, всё остальные не сдали, или третий сдал, остальные не сдали экзамен)

$$p_2 = 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}7)(1 - 0{,}9) + 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}8)(1 - 0{,}9) +$$

$$+0{,}9 \cdot (1 - 0{,}8)(1 - 0{,}7) = 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 +$$
$$+0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}024 + 0{,}014 + 0{,}054 = 0{,}092;$$

$x_3 = 2$- если один студент не сдал, а другие два сдали экзамен, по аналогии с предыдущим вычислением вероятности получим $p_3 = 0{,}398$(проверьте результат);

$x_4 = 3$ -все три студента сдали экзамен, тогда

$$p_4 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504.$$

Таким образом, ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504

Применяя формулу $F(x) = P(X < x) = \sum\limits_{i:\, x_i < x} p_i$,найдем функцию распределения величины X : при $x \le 0$, $F(x) = P(X < x) = P(X < 0) = 0$,

при$0 < x \le 1$, $F(x) = P(X < 1) = P(X = 0) = 0{,}006$,

при$1 < x \le 2$, $F(x) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}006 + +0{,}092 = 0{,}098$,

при $2 < x \le 3$,

$$F(x) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= 0{,}006 + 0{,}092 + 0{,}398 = 0{,}496,$$

при $x > 3$,$F(x) = P(x > 3) = 1$.

Таким образом, искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 0{,}006, 0 < x \le 1 \\ 0{,}098, 1 < x \le 2. \\ 0{,}496, 2 < x \le 3 \\ 1, x > 3 \end{cases}$$

Функция распределения непрерывной случайной величины и плотность вероятности.

Так как, непрерывная случайная величина сплошь заполняет некоторый интервал, поэтому её функция распределения непрерывна и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек. Важнейшей характеристикой непрерывной случайной величины (помимо функции распределения) является плотность распределения вероятностей. Перед тем, как перейти к её определению напомним, что функцией распределения $F(x)$ (как дискретной так и непрерывной) или интегральной функцией называется функция $F(x) = P(X < x)$,которая определяет вероятность, того что случайная величина X примет значение ,меньшее фиксированного действительного числа X.

Плотностью распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная её функции распределения:

$$f(x) = F'(x) \quad \textbf{(3.7)}$$

Вероятностный смысл плотности распределения.

Для ДСВ в точках её значений $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ сосредоточены массы вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$., причём сумма всех масс равна 1. Перенесём эту интерпретацию на случай НСВ. Представим себе, что масса, равная 1, не сосредоточена в отдельных точках, а непрерывно «размазана» по оси абсцисс с какой-то неравномерной плотностью. Вероятность попадания случайной величины на любой участок Δx будет интерпретироваться как масса, приходящаяся на этот участок, а средняя плотность на этом участке-как отношение массы к длине, таким образом получим отношение $\frac{P\{x \le X < x+\Delta x\}}{\Delta x}$ представляющее собой среднюю вероятность, которая приходится на единицу длины участка $[x;x+\Delta x)$, то есть среднюю плотность распределения вероятности.

Из определения следует:

$f(x) = F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$,

Согласно формуле $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$ получим: $F(x+\Delta x) - F(x) = P(x \leq X < x+\Delta x)$, тогда

$f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq X < x+\Delta x)}{\Delta x}$ **(3.8)**,

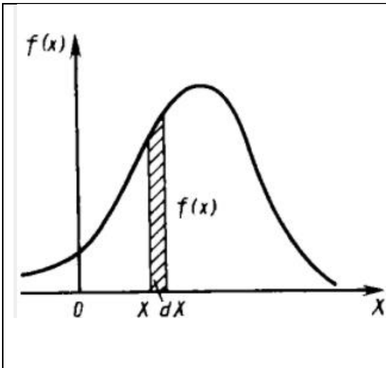


Рис.3.8.

Таким образом, плотность есть предел отношения вероятности попадания СВ в промежуток $[x;x+\Delta x)$ к длине Δx этого промежутка, когда $\Delta x \to 0$.

Из равенства (3.8) следует, что

$P(x \leq X < x+\Delta x) \approx f(x)\Delta x$- вероятность попадания случайной величины в бесконечно малый интервал $(x; x+\Delta x)$, где $\Delta x = dx$ (см. рис. 3.8.), здесь выражение $f(x)dx$ называется элементом вероятности.

Функцию $f(x)$ называют **плотностью вероятностей** или дифференциальной функцией распределения. Она является одной из форм закона распределения случайной величины и существует только для непрерывной случайной величины

Свойства плотности распределения вероятностей.

1. Плотность распределения неотрицательна, то есть $f(x) \geq 0$.

Доказательство.

Так как $F(x) \geq 0$ (неубывающая функция), следовательно $F'(x) \geq 0$, то есть $f(x) = F'(x) \geq 0$;

2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;b)$, определяется равенством:

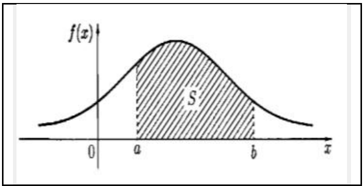


Рис.3.9.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \ (\mathbf{3.9})$$

Доказательство.

Так как по определению $F(x)$ является первообразной для плотности $f(x)$, то по формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = P\{X < b\} - P\{X < a\} = P\{a < X < b\};$$

Геометрически эта вероятность равна площади S фигуры, ограниченной сверху кривой распределения $f(x)$ (см.рис.3.9.).

3. Функцию распределения непрерывной случайной величины X может быть выражена по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

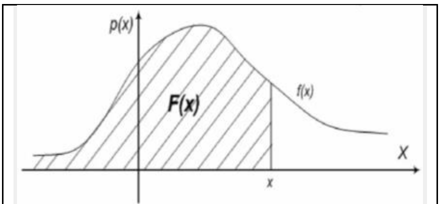


Рис.3.10.

Доказательство.

По определению функции распределения
$F(x)=P(X<x)$ и по свойству 2

$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$плотности распределения

имеем:

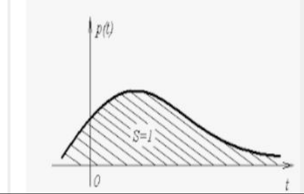


Рис.3.11.

$$F(x)=P(X<x)=P(-\infty<X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Геометрическое изображение (см.рис.3.10.).

4.Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

Доказательство.

По свойству 2 имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=P(-\infty<X<+\infty)=P(\Omega)=1.$$

Геометрически свойство нормировки означает, что площадь фигуры ограниченной кривой распределения $f(x)$ и осью абсцисс, равна единице (см.рис.3.11.).

Таким образом, можно дать следующее определение непрерывной случайной величины:

Случайная величина X называется непрерывной, если существует неотрицательная функция $f(x)$ такая, что при любом x функцию распределения $F(x)$ можно представить в виде: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Пример 3.14. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

а) $F(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 0 \\ 2\sin 2x, \ 0<x\le \dfrac{\pi}{4} \\ 1, \quad x>\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$; **б)** $F(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 1 \\ x-1, \ 1<x\le 2 \\ 1, \ x>2 \end{cases}$.

Найти плотность распределения $f(x)$.

Решение.

а) Плотность распределения равна производной от функции распределения $f(x)=F'(x)$:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 0 \\ 4\cos 2x, \ 0<x\le \dfrac{\pi}{4} \\ 0, \quad x>\dfrac{\pi}{4} \end{cases}.$$

б)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2. \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Пример 3.15. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X :

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ sinx, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ C(x-1), & 1 < x \le 2\,. \\ 0, & x > 2 \end{cases}$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Решение.

а) Используем формулу $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$:

1.Если $x \le 0$,то $f(x) = 0$,следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 0;$$

2.Если $0 < x \le \frac{\pi}{2}$,то $f(x) = sinx$, следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} sinx\,dx = -cosx|_0^x =$$

$$= -(cosx - cos0) = 1 - cosx;$$

3.Если $x > \frac{\pi}{2}$,то $f(x) = 0$, следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sinx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0\,dx =$$

$$= -cosx|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(cos\frac{\pi}{2} - cos0\right) = 1.$$

Таким образом, функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 0 \\ 1 - cosx, \ 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, \ x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

б) Для начала, используя свойство плотности распределения- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ найдём неизвестный параметр C:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + C\int_{1}^{2}(x-1)\,dx + \int_{2}^{+\infty} 0\,dx =$$

$$= C\int_{1}^{2}(x-1)^1\,d(x-1) = \left.\frac{C(x-1)^2}{2}\right|_1^2 =$$

$$= \frac{C}{2}(x-1)^2|_1^2 = \frac{C}{2}((2-1)^2 - (1-1)^2) =$$

$= \frac{C}{2}$; $\frac{C}{2} = 1$,следовательно, $C = 2$;

Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 2(x-1), & 1 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}.$$

Найдём $F(x)$ используя формулу $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$:

1.Если $x \leq 1$,то $f(x) = 0$,следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0;$$

2.Если $1 < x \leq 2$,то $f(x) = 2(x-1)$, следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{x} 2(x-1)\,dx =$$

$$= 2\int_{1}^{x}(x-1)^1\,d(x-1) = 2\left.\frac{(x-1)^2}{2}\right|_1^x =$$

$$= (x-1)^2|_1^x = (x-1)^2 - (1-1)^2 = (x-1)^2;$$

3.Если $x > 2$,то $f(x) = 0$, следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{2} 2(x-1)\,dx + \int_{2}^{x} 0\,dx =$$
$$= 2\int_{1}^{2} (x-1)\,d(x-1) = 2\left.\frac{(x-1)^2}{2}\right|_{1}^{2} =$$
$$= (x-1)^2\Big|_1^2 = (2-1)^2 - (1-1)^2 = 1.$$

Таким образом, функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ (x-1)^2, & 1 < x \le 2. \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

3.4. Числовые характеристики случайной величины.

Закон распределения полностью описывает случайную величину, однако при решении многих задач достаточно знать лишь некоторые числовые параметры, характеризующие, отдельные свойства закона распределения случайной величины, такие числа принято называть **числовыми характеристиками случайной величины**.

Основными характеристиками случайной величины являются математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

Характеристикой среднего значения случайной величины служит **математическое ожидание**.

Обозначение: $M(X)$- математическое ожидание случайной величины.

Дисперсия характеризует разброс или рассеяние значений случайной величины около ее математического ожидания. Дисперсия показывает, насколько в среднем значения сосредоточены, сгруппированы около $M(X)$: если дисперсия маленькая - значения сравнительно близки друг к другу, если большая - далеки друг от друга.

Обозначение: $D(X)$- дисперсия случайной величины X.

Корень из дисперсии называется **средним квадратичным отклонением**. Оно используется для оценки масштаба возможного отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Обозначение: $\sigma(X)$- среднее квадратическое (стандартное) отклонение случайной величины X.

Числовые характеристики ДСВ и их свойства.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots x_n p_n \quad \textbf{(3.10)}$$

Пример 3.16. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения:

X	-5	2	3	4
p	$0{,}4$	$0{,}3$	$0{,}1$	$0{,}2$

Решение

Применяя формулу (3.10), имеем:

$$M(X) = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = \\ = -2 + 0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}8 = -0{,}3.$$

Пример 3.17. Ряд распределения случайной величины X задан таблицей, $M(X)=5$. Найти x_3.

X	1	2	x_3	4
p	0,2	0,5	0,2	0,1

Решение.

Так как $M(X)=5$, то используя определение математического ожидания имеем:

$1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}5+x_3\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}1=5$,

$x_3\cdot 0{,}2=3{,}4 \Rightarrow x_3=\dfrac{34}{2}=17.$

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C)=C,\ C=const;$$

Доказательство.

Пусть $X=C$, ее ряд распределения имеет вид:

X	C
p	1

Следовательно,

$M(X)=C\cdot 1=C,\ C=const$.

2. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания: $M(CX) = CM(X)$;

Доказательство.

Пусть X -ДСВ задана рядом распределения:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Напишем закон распределения случайной величины CX:

CX	Cx_1	Cx_2	...	Cx_n
p	p_1	p_2	...	p_n

$$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \ldots + Cx_np_n =$$
$$= C(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n) = CM(X).$$

3. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:
$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$;
Примем без доказательства.

Следствие. Математическое ожидание произведения конечного числа случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n)$.

4. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.

Примем без доказательства.

Следствие. Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий:
$M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)$.

Замечание: разность определяется аналогично, то есть $M(X-Y)=M(X)-M(Y)$.

Пример 3.18. Известны математические ожидания двух независимых случайных величин X и Y, $M(X)=8, M(Y)=7$.Найти математическое ожидание случайное величины $Z=9X-8Y+7$.

Решение.

Исходя из свойств математического ожидания имеем:
$M(Z)=M(9X-8Y+7)=9M(X)-8M(Y)+$
$+M(7)=9\cdot8-8\cdot7+7=72-56+7=23$.

Дисперсия случайной величины.

Для того, чтобы дать определение дисперсии введем понятие отклонения случайной величины.

Отклонением случайной величины называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием $X-M(X)$.

Дисперсией (рассеянием) случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Обозначение: $D(X) = M(X - M(X))^2$ - дисперсия случайной величины X .

Можно показать, что

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) \quad \textbf{(3.11)}$$

Действительно,

$$D(X) = M\big(X - M(X)\big)^2 = M\big(X^2 - 2XM(X) + M^2(X)\big) =$$
$$= M(X^2) - 2M(X) \cdot M\big(M(X)\big) + M\big(M^2(X)\big) =$$
$$= M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Замечание: на практике для вычисления дисперсии удобно пользоваться формулой (3.11).

Пример 3.19. Найти дисперсию дискретной случайной величины, заданной законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Решение**.**

Учитывая, что $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$ для начала найдем математическое ожидание ДСВ X (как мы это делали ранее):

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5\,;$$

Затем математическое ожидание ДСВ -для этого составим закон распределения СВ X^2 (каждое значение ДСВ возводим в квадрат, а вероятности оставляем прежними):

X^2	4	9	25
p	0,1	0,6	0,3

$$M\left(X^2\right)=2^2\cdot 0{,}1+3^2\cdot 0{,}6+5^2\cdot 0{,}3=0{,}4+5{,}4+7{,}5=13{,}3$$

Таким образом, получим:

$$D(X)=13{,}3-(3{,}5)^2=1{,}05.$$

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C)=0;$

Доказательство.

$$D(X)=M(X-M(X))^2=M(C-M(C))^2=M(C-C)^2=M(0)=0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: $D(C\cdot X)=C^2\cdot D(X).$

Доказательство.

$$D(CX)=M\big(CX-M(CX)\big)^2=M\big(CX-CM(X)\big)^2=$$
$$=M\Big(C\big(X-M(CX)\big)\Big)^2=M\Big(C^2\big(X-M(CX)\big)^2\Big)=$$
$$=M(C^2)\cdot M\Big(\big(X-M(CX)\big)^2\Big)=C^2D(X).$$

3. Дисперсия суммы (разности) независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых: $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$;

Доказательство.

$D(X+Y) = M((X+Y)^2) - M^2(X+Y) =$
$= M(X^2 + 2XY + Y^2) - \left(M(X) + M(Y)\right)^2 =$
$= M(X^2) + 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - M^2(X) -$
$-2M(X)M(Y) - M^2(Y) = M(X^2) - M^2(X) +$
$+M(Y^2) - M^2(Y) = D(X) + D(Y)$.

Аналогично, можно показать, что $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$.

Пример 3.20. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины $Z = 2X + 3Y + 5$, если известно, что $D(X) = 4, D(Y) = 5$.

Решение.

Исходя из свойств дисперсии имеем:

$D(Z) = D(2X + 3Y + 5) = 2^2 \cdot D(X) + 3^2 \cdot D(Y) + D(5) =$

$= 4 \cdot 4 + 9 \cdot 5 = 61.$

Среднее квадратическое отклонение.

Среднее квадратическое отклонение-показатель рассеивания значений случайной величины относительно её математического ожидания.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии, то есть

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \quad \textbf{(3.12)}$$

Пример 3.21. Найти числовые характеристики дискретной случайной величины X заданной рядом распределения:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Решение.

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\frac{1}{5}=2,$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=1^2\cdot\frac{1}{5}+2^2\cdot\frac{3}{5}+3^2\cdot\frac{1}{5}-2^2=$$

$$=\frac{1}{5}(1+12+9)-4=\frac{22}{5}-4=\frac{2}{5}=0{,}4,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}4}\approx 0{,}63.$$

Пример 3.22. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - оценки, полученной на экзамене наугад, выбранным студентом. Известно, что в группе из 20 человек 2 студента получили оценку – «2», 6 студентов – «3», 10 студентов – «4» и 2 студента – «5». Построить график функции распределения $F(x)$. Вычислить числовые характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$.

Решение.

Дискретная случайная величина X - отметка студента, которая может принять значения 2; 3; 4 или 5. Вероятность события$x_1 = 2$-выбранный студент получил двойку равна:

$p_1 = P(X = 2) = \frac{2}{20} = 0{,}1$(число двоек - 2, а общее число студентов 20).

Вероятности других возможных значений соответственно равны:

$$p_2 = P(X = 3) = \frac{6}{20} = 0{,}3;$$

$$p_3 = P(X = 4) = \frac{10}{20} = 0{,}5;$$

$$p_4 = P(X = 5) = \frac{2}{20} = 0{,}1.$$

Следовательно, закон распределения дискретной случайной величины имеет вид:

x_i	2	3	4	5
p_i	0,1	0,3	0,5	0,1

Контроль: 0,1+0,3+0,5+0,1=1.

Найдём функцию распределения и построим её график:

Если $x \le 2$, то $F(x) = P(X < 2) = 0$
Если $2 < x \le 3$, то $F(x) = P(X < 3) = P(X = 2) = 0{,}1;$
Если $3 < x \le 4$, то $F(x) = P(X < 4) = P(X = 2) +$
$+P(X = 3) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4;$
Если $4 < x \le 5$, то $F(x) = P(X < 5) = P(X = 2) +$
$+P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}4 + 0{,}5 = 0{,}9;$
Если $x > 5$, то $F(x) = 1$.

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0{,}1, & 2 < x \le 3 \\ 0{,}4, & 3 < x \le 4 \\ 0{,}9, & 4 < x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases};$$

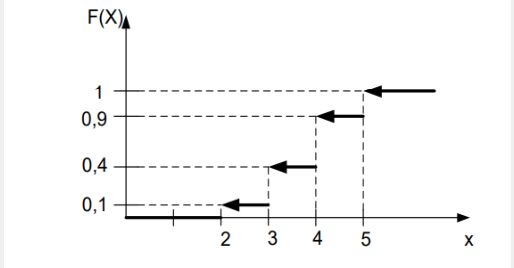


Рис. 3.12.

График представлен на рис.3.12.

Найдем числовые характеристики данной случайной величины.

Математическое ожидание:

$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}5 +$
$+5 \cdot 0{,}1 = 0{,}2 + 0{,}9 + 2 + 0{,}5 = 3{,}6;$

Дисперсия:

$D(X) = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2 = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}3 +$
$+16 \cdot 0{,}5 + 25 \cdot 0{,}1 - (3{,}6)^2 = 13{,}6 - 12{,}96 = 0{,}64;$

Среднее квадратическое отклонение:

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8.$

Замечание: исходя из определений числовых характеристик ДСВ и их свойств, можно показать следующее:

1)Случайная величина X распределенная по биномиальному закону, имеет следующие основные числовые характеристики:

$$M(X)=np,\ D(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq};$$

2) Случайная величина X распределенная по закону Пуассона, то $M(X)=D(X)=\lambda,\ \sigma(X)=\sqrt{\lambda};$

3) Случайная величина, подчиненная геометрическому закону распределения, имеет следующие числовые характеристики: $M(X)=\dfrac{q}{p},\ \ D(X)=\dfrac{q}{p^2},\ \sigma(X)=\dfrac{\sqrt{q}}{p};$

Пример 3.23. Найти числовые характеристики дискретной случайной величины X —числа появлений события A в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления событий A в каждом испытании равна 0,2.

Решение.

Случайная величина X распределенная по биномиальному закону, вероятностью появления события в каждом испытании равна $p=0{,}2,\ \ q=1-0{,}2=0{,}8,\ n=5.$ Найдем основные числовые характеристики:

$M(X)=np=5\cdot 0{,}2=1,\ D(X)=npq=5\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}8,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{0{,}8}.$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx \quad \textbf{(3.13)},$$

$f(x)$—плотность распределения СВ X.

В частности, если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)dx.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством:

$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-M^2(x),$ данное равенство можно заменить равносильным равенством (3.14)

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\cdot f(x)dx \quad \textbf{(3.14)}$$

В частности, если все возможные значения X принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2\cdot f(x)dx,$$

где $f(x)$—плотность распределения вероятностей случайной величины X.

Среднеквадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретной величины: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Замечание: все свойства математического ожидания, дисперсии, приведённые выше для дискретных случайных величин, остаются справедливыми и для непрерывных случайных величин.

Пример 3.24. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=C(x-3)$ в интервале $(3;5)$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти: **а)** C ;**б)** $F(x)$, $f(x)$;**в)** $M(X)$;**г)** $\mathrm{P}\{1<X<4\}$.

Решение.

По условию $f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[3;5]\\ C(x-3), & x\in[3;5]\end{cases}$.

а) Используя свойство $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ плотности вероятности имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{3} 0\,dx+C\int_{3}^{5}(x-3)\,dx+\int_{5}^{+\infty} 0\,dx=$$

$$=C\int_{1}^{2}(x-3)^1\,d(x-3)=\frac{C(x-3)^2}{2}\bigg|_1^2=$$

$$=\frac{C}{2}(x-3)^2|_1^2=\frac{C}{2}((5-3)^2-(3-3)^2)=$$

$=\frac{C}{2}\cdot 4=2C;\ 2C=1,$ следовательно, $C=\frac{1}{2}$;

б) Используя свойство $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$ и учитывая, что

$f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin[3;5] \\ \frac{1}{2}(x-3), & x\in[3;5] \end{cases}$,найдем $F(x)$: при $x<3$,

$f(x)=0, F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dx=0$;

при $3\le x\le 5$, $f(x)=\frac{1}{2}(x-3)$, следовательно

$$F(x)=\int_{-\infty}^{3} 0dx+\frac{1}{2}\int_{3}^{x}(x-3)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{3}^{x}(x-3)d(x-3)=\frac{1}{4}(x-3)^2|_3^x=$$
$$=\frac{1}{4}((x-3)^2-(3-3)^2)=\frac{1}{4}(x-3)^2;$$

при $x>5$, $f(x)=0$,

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{3} 0dx+\frac{1}{2}\int\limits_{3}^{5}(x-3)dx+\int\limits_{5}^{x} 0dx=\frac{1}{4}(x-3)^2\Big|_3^5=$$
$$=\frac{1}{4}\left((5-3)^2-(3-3)^2\right)=\frac{1}{4}\cdot 4=1.$$

Итак, $F(x)=\begin{cases} 0, & x<3 \\ \frac{1}{4}(x-3)^2, & 3\le x\le 5; \\ 1, & x>5 \end{cases}$

в) Используя формулу $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$,в нашем случае имеем:

$$M(X)=\int_{3}^{5} x\cdot f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{3}^{5} x\cdot(x-3)dx=$$

$$= \frac{1}{2}\int_3^5 (x^2 - 3x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_3^5 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5^3}{3} - \frac{3}{2}\cdot 5^2 - \left(\frac{3^3}{3} - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{125}{3} - \frac{75}{2} - 9 + \frac{27}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{26}{3} = \frac{13}{3};$$

г) Используя свойство плотности распределения $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, имеем:
$P(1 < X < 4) = F(4) - F(1) =$
$= \frac{1}{4}(4-3)^2 - 0 = \frac{1}{4}.$

Пример 3.25. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \le \pi \\ -\cos x, \pi < x \le \frac{3\pi}{2} \\ 0, \ x > \frac{3\pi}{2} \end{cases}.$$

Найти: $M(X)$, $D(X)$, $P(\pi < X < 2\pi)$.

Решение.

$$M(X) = \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} x\cdot f(x)dx = \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} x\cdot(-\cos x)dx =$$

$$= -\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} x\cdot \cos x dx = \left|\begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x\end{matrix}\right| =$$

$$= -\left(x\cdot \sin x\Big|_\pi^{\frac{3\pi}{2}} - \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx\right) = -x\cdot \sin x\Big|_\pi^{\frac{3\pi}{2}} +$$

$$+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} sinxdx = -\left(\frac{3\pi}{2}\cdot sin\frac{3\pi}{2} - \pi\cdot sin\pi\right) - cosx|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} =$$
$$= \frac{3\pi}{2} - cos\frac{3\pi}{2} + cos\pi = \frac{3\pi}{2} - 1;$$

Для того, чтобы найти $D(X)$ удобно воспользоваться формулой $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx\ - M^2(X)$,в нашем случае формула принимает вид:

$D(X) = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} x^2\cdot f(x)dx\ - M^2(X)$,

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} x^2\cdot f(x)dx = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} x^2\cdot(-cosx)dx =$$
$$= -\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} x^2\cdot cosxdx = \left|\begin{matrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = cosxdx, v = sinx\end{matrix}\right| =$$
$$= -\left(x^2\cdot sinx|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} - 2\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} xsinxdx\right) =$$
$$= -x^2\cdot sinx|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + 2\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} xsinxdx =$$
$$= \left|\begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = sinxdx, v = -cosx\end{matrix}\right| =$$
$$= -\left(\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\mathbf{2}}\cdot sin\frac{3\pi}{2} - \pi^2\cdot sin\pi\right) +$$
$$+2\left(-x\cdot cosx|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} cosxdx\right) = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\mathbf{2}} +$$
$$+2\left(-\frac{3\pi}{2}\cdot cos\frac{3\pi}{2} + \pi cos\pi + sinx|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\right) =$$

$$= \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 + 2\left(-\pi + sin\frac{3\pi}{2} - sin\pi\right) = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 -$$
$$-2\pi - 2;$$

$$D(X) = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - 2\pi - 2 - \left(\frac{3\pi}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 -$$
$$-2\pi - 2 - \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 + 3\pi - 1 = \pi - 3.$$

$$P(\pi < X < 2\pi) = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)dx =$$
$$= -\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} cosxdx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 0dx = -sinx|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} =$$
$$= -\left(sin\frac{3\pi}{2} - sin\pi\right) = 1.$$

Пример 3.26. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0 \\ \frac{x^2}{4}, \ 0 < x \le 2 \\ 1, \ x > 2 \end{cases}$. Найти: **а)** $f(x)$;**б)** $M(X)$; **в)** $D(X)$; **г)** $P\left(1 < X < \frac{3}{2}\right)$.

Решение.

.

а) Плотность распределения равна производной от функции распределения $f(x) = F'(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

б) $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$,

$$M(X)=\int_0^2 x\cdot f(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{6}\bigg|_0^2=\frac{1}{6}(x^3|_0^2)=$$
$$=\frac{1}{6}(2^3-0)=\frac{8}{6}=\frac{4}{3};$$

в) $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2\cdot f(x)dx$ **,**

$$D(X)=\int_0^2\left(x-M(X)\right)^2\cdot f(x)dx=$$

$$=\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{x}{2}dx=\int_0^2\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}\right)\cdot\frac{x}{2}dx=$$
$$=\int_0^2\left(\frac{x^3}{2}-\frac{4x^2}{3}+\frac{8x}{9}\right)dx=\left(\frac{x^4}{8}-\frac{4x^3}{9}+\frac{4x^2}{9}\right)\bigg|_0^2=$$
$$=\frac{2^4}{8}-\frac{4\cdot 2^3}{9}+\frac{4\cdot 2^2}{9}=\frac{16}{8}-\frac{32}{9}+\frac{16}{9}=$$
$$=\frac{144-256+128}{72}=\frac{272-256}{72}=\frac{16}{72}=\frac{2}{9};$$

г) <u>1 способ:</u>

$$P\left(1<X<\frac{3}{2}\right)=F\left(\frac{3}{2}\right)-F(1)=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{4}-\frac{1}{4}=$$
$$=\frac{9}{16}-\frac{4}{16}=\frac{5}{16}.$$

<u>2 способ:</u>

$$P\left(1<X<\frac{3}{2}\right)=\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)\,dx=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{x}{2}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^{\frac{3}{2}}x\,dx=\frac{1}{4}x^2|_1^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2-1\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{4}-1\right)=\frac{5}{16}.$$

Пример 3.27. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 2\\ a+b(x-2)^4, \ 2<x<4\\ 1, \ x\ge 4\end{cases}$. Найти:

а) значения постоянных a и b ;

б) плотность распределения вероятностей $f(x)$;

в) $P(1<X<4)$;

г) $M(X)$.

Решение.

а) Найдем значения a и b. Поскольку функции распределения НСВ является непрерывной функцией имеем:

$F(2)=F(2-0)=F(2+0)$,так как

$$F(2)=0;$$

$$F(2-0)=0;$$

$F(2+0)=a$,то $a=0$;

$F(4)=F(4-0)=F(4+0)$,так как

$F(4)=1$;

$F(4-0)=a+b(4-2)^4=16b$;

$F(4+0)=1$,то $16b=1, b=\frac{1}{16}$.

Итак,$a=0, b=\frac{1}{16}$,следовательно,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \frac{1}{16}(x-2)^4, & 2<x<4\\ 1, & x\ge 4\end{cases}.$$

б) Найдем плотность распределения вероятностей $f(x)$:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \frac{1}{4}(x-2)^3, & 2<x<4\\ 0, & x\ge 4\end{cases}.$$

в)<u>1 способ:</u>

$$P(3<X<4)=\int_3^4 f(x)\,dx=$$

$$= \frac{1}{4}\int_3^4 (x-2)^3\,dx = \frac{1}{4}\int_3^4 (x-2)^3\,d(x-2) =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{(x-2)^4}{4}\Bigg|_3^4 = \frac{1}{16}(x-2)^4|_3^4 = \frac{1}{16}\cdot\left(2^4-1\right) = \frac{15}{16}.$$

<u>2 способ:</u>

$$P(1 < X < 4) = F(4) - F(3) = \frac{1}{16}(4-2)^4 -$$
$$-\frac{1}{16}(3-2)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

г)

$$M(X) = \int_2^4 x\cdot f(x)dx = \frac{1}{4}\int_2^4 x(x-2)^3 dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} t = x-2 \\ dt = dx \\ x = t+2 \\ t(2) = 0 \\ t(4) = 2 \end{matrix}\right| = \frac{1}{4}\int_0^2 (t+2)t^3 dt = \frac{1}{4}\int_0^2 (t^4+2t^3)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^4\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{32}{5}+8\right) =$$
$$= 0{,}25(6{,}4+8) = 0{,}25\cdot 14{,}4 = 3{,}6.$$

Задания для самостоятельного решения.

7.Выполнить следующие задания:

1.Случайной величина X , заданной рядом распределения:

x_i	-2	0	3	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

а) построить многоугольник распределения;

б) найти функцию распределения $F(x)$;

в) Найти вероятности того, что случайная величина примет значение из следующих промежутков:

$P(-1 < X < 4), P(2 < X \leq 7), P(X \leq 0), P(X > 7)-?$

2.В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 20%. Составьте ряд распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года.

3.На полке из 6 книг 3 книги по математике и 3 по физике. Выбирают наудачу три книги. Найти закон распределения числа книг по математике среди выбранных книг. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

4.Составить закон распределения числа карт трефовой масти среди четырех взятых наугад из колоды карт. Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

5.Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

а)

x_i	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

б)

X	-1	0	1	2	3
p	0,05	0,2	0,4	0,3	0,05

6.Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,25. Для случайной величины (число израсходованных патронов) найти: **а)** составить ряд распределения;

б) математическое ожидание, дисперсию.

7.Известно, что дискретная случайная величина X принимает лишь два значения: −3 и 7. Кроме того, известно математическое ожидание: $M(X) = 4$. Найти дисперсию дискретной случайной величины.

8.Дискретная случайная величина X принимает лишь два значения. Большее из значений 3 она принимает с вероятностью 0,4. Кроме того, известна дисперсия случайной величины $D(X) = 6$. Найти математическое ожидание случайной величины.

9.Дана плотность распределения случайной величины $f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \frac{1}{10}(3x^2 + 1), 0 < x \leq 2 \\ 0, x > 2 \end{cases}$. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, а также вероятность попадания её в интервал (0; 1).

10.Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq 1 \\ lnx, 1 < x \leq e \\ 0, x > e \end{cases}$.Найти:

а) функцию плотности вероятностей $f(x)$;

б) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(2;e)$;

в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X;

г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 1 \\ C(x-1), 1 < x \le 3. \\ 0, x > 3 \end{cases}$$

Требуется:

а) найти коэффициент C;

б) найти функцию распределения $F(x)$;

в) найти $M(X), D(X), \sigma(X)$

г) найти вероятность $P(0 < X < 3)$;

д) построить графики $f(x)$и $F(x)$.

12.Случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \le \pi \\ -cosx, \ \pi < x \le \frac{3\pi}{2}. \\ 0, \ x > \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

а) Определить вероятность попадания случайной величины X в интервал$\left[\pi; \frac{5\pi}{4}\right]$;

б) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

13.Найти математическое ожидание для случайной величины X, распределенной непрерывно с плотностью $f(x) = 12(x^2 - x^3)$при $x \in (0;1)$и $f(x) = 0$ в остальных точках.

14.Функция распределения вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < -1 \\ a + b\arcsin x, -1 \le x \le 1; \\ 0, x > 1 \end{cases}$$

а)найти a и b;**б)** найти плотность $f(x)$;
в) найти $M(X)$.

15.Дискретная случайная величина задана рядом распределения

X	0,1	x_2	1,5	2
p	0,3	0,1	0,4	0,2

$M(X) = 1{,}08$. Найти: x_2, $D(X)$, $F(x)$.

16.ДСВ X задана рядом распределения:

X	-2	1	2	3
p	0,08	0,4	0,32	0,2

Найти: **а)** $F(x)$; **б)** вероятность события $A = X < 2$.

17.Случайные величины X и Y независимы, причём $D(X) = 2$, $D(Y) = 6$. Найти $D(Z)$, если $Z = 12X - 3Y + 2$.

18.Дискретная случайная величина X принимает только два значения x_1 и x_2 с вероятностями $p_1 = 0{,}6$ и $p_2 = 0{,}4$ соответственно. Математическое ожидание $M(X) = 1{,}4$ и дисперсия $D(X) = 0{,}24$. Найти ряд распределения этой случайной величины.

19.Из партии в 20 изделий, среди которых имеются 4 бракованных, выбраны случайным способом 3 изделия для проверки качества. Построить ряд распределения случайного числа X бракованных изделий, содержащихся в выборке. Найти числовые характеристики случайной величины X.

20. Известно, что в определенном городе 20% горожан предпочитают добираться на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны 4 человека. Найдите числовые характеристики этого распределения.

Ответы:

7.1. б) $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq -2 \\ 0{,}4, -2 < x \leq 0 \\ 0{,}5, \ 0 < x \leq 3 \\ 0{,}8, \ 3 < x \leq 7 \\ 1, \ x > 7 \end{cases}$;

в) $P(-1 < X < 4) = 0{,}4, P(2 < X \leq 7) = 0{,}5,$
$P(X \leq 0) = 0{,}5, P(X > 7) = 0.$

7.2.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

7.3. $M(X) = 1{,}5.$
7.4. $M(X) = 1{,}002, D(X) \approx 0{,}686.$

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,298	0,447	0,215	0,039	0,002

7.5. $M(X) = 1, D(X) = 1.$
7.6. а)

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$

б) $M(X) = \frac{175}{64} \approx 2{,}74, D(X) \approx 1{,}5.$

7.7. $D(X) = 21$.**7.8.** $M(X) = 0$.

7.9. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 0 \\ \frac{1}{10}(x^3 + x), \ 1 < x \leq 2; \\ 1, \ x > 2 \end{cases}$

$M(X) = \dfrac{7}{5}, D(X) = \dfrac{17}{75}, \sigma(X) = \dfrac{\sqrt{51}}{15},$

$P(0 < X < 1) = \dfrac{1}{5}.$

7.10. а) $f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, 1 < x \leq e\,; \\ 0, x > e \end{cases}$

б) $P(2 < X < e) = 1 - ln2 \approx 0{,}307;$

в)$M(X) = e - 1 \approx 1{,}718,$

$D(X) = -\dfrac{1}{2}e^2 + 2e - \dfrac{3}{2} \approx 0{,}242, \sigma(X) \approx 0{,}492;$

7.11. а)$C = \frac{1}{2}$; **б)** $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 1 \\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \ 1 < x \leq 3; \\ 1, \ x > 3 \end{cases}$

в) $M(X) = \frac{7}{3}, D(X) = \frac{2}{9}, \sigma(X) = \frac{\sqrt{2}}{3}$;**г)** $P(0 < X < 3) = 1.$

7.12.а)$P\left(\pi \leq X \leq \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **б)**$M(X) = \frac{3\pi}{2} - 1,$

$D(X) = \pi - 3$.**7.13.** $M(X) = 0{,}6$.**7.14. а)** $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{\pi};$

б)

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leq -1 \\ \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, -1 \leq x \leq 1; \\ 0, x \geq 1 \end{cases}$$

в)$M(X) = 0$;**г)**$D(X) = \frac{1}{2}.$

7.15. $x_2 = 0{,}5; D(X) = 0{,}5616;$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0{,}1 \\ 0{,}3, & 0{,}1 < x \le 0{,}5 \\ 0{,}4, & 0{,}5 < x \le 1{,}5. \\ 0{,}8, & 1{,}5 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

7.16.а)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ 0{,}08, & -2 < x \le 1 \\ 0{,}48, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}8, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases};$$

б) $P(A) = 0{,}48$. **7.17.** $D(Z) = 342$.

7.18.

x_i	0,8	1,8
p_i	0,4	0,6

или

x_i	1	2
p_i	0,6	0,4

7.19. $M(X) = 0{,}6$, $D(X) = 0{,}48$, $\sigma(X) = \sqrt{0{,}48}$.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

7.20. $M(X) = 0{,}6$, $D(X) = 0{,}48$, $\sigma(X) = \sqrt{0{,}48}$.

3.5. Основные законы распределения непрерывной случайной величины.

Основными законами распределения непрерывной случайной величины являются равномерный, показательный и нормальный закон распределения. Рассмотрим каждый закон по отдельности.

1)Равномерный закон распределения непрерывной случайной величины.

Непрерывная случайная величина X имеет равномерный закон распределения (закон постоянной плотности) на отрезке $[a; b]$, если на этом отрезке функция плотности вероятности случайной величины постоянна, то есть $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ C, & \text{при } a \le x \le b \\ 0, & \text{при } x > b \end{cases} \mathbf{(3.15)}$$

Обозначение: $X \sim R[a; b]$-случайная величина распределена равномерно на отрезке $[a; b]$.

Найдем постоянную величину C:

Учитывая свойство функции плотности вероятности $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{b} Cdx + \int_{b}^{\infty} 0dx =$$

$$= \int_{a}^{b} Cdx = Cx\Big|_{a}^{b} = C(b-a) = 1, \Rightarrow C = \frac{1}{b-a}.$$

Плотность распределения равномерно распределённой случайной величины имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } a \le x \le b \\ 0, & \text{при } x > b \end{cases} (\mathbf{3.16})$$

Изобразим график плотности (3.16) на рис.3.13:

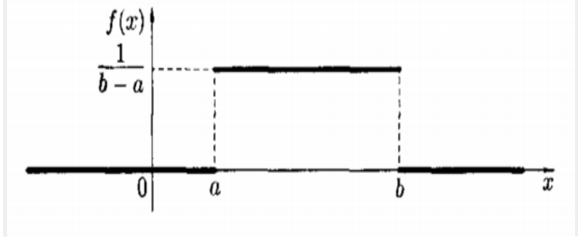


Рис. 3.13.

Найдём функцию распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$случайной величины с постоянной плотностью вероятностей:

Если $x < a,\ f(x) = 0 \ => \ F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$;

Если $a \le x \le b,\ f(x) = \frac{1}{b-a} =>$

$F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} t \Big|_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}$;

Если $x > b,\ f(x) = 0 => F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt +$

$$+ \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dt + \int_{b}^{x} 0dt = \frac{1}{b-a} t \Big|_{a}^{b} = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Следовательно, функция распределения случайной величины $X \sim R\ [a; b]$, имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{при } a \le x \le b \\ 1, & \text{при } x > b \end{cases} \quad (\mathbf{3.17})$$

Изобразим график функции (3.17) на рис.3.14:

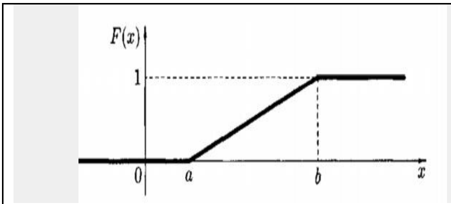


Рис. 3.14.

Вероятность попадания случайной величины, распределенной по равномерному закону на интервале $(a;b)$в часть интервала $(\alpha;\beta)$ $((\alpha;\beta)\epsilon(a;b))$ равна:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(x)|_{\alpha}^{\beta} =$$

$$= \left.\frac{x-a}{b-a}\right|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta-a}{b-a} - \frac{\alpha-a}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a};$$

Таким образом, вероятность попадания случайной величины $X \sim R\ [a;b]$ в интервал $(\alpha;\beta)$ определяется формулой (3.18):

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a} \quad \textbf{(3.18)}$$

Геометрически это вероятность представляет площадь прямоугольника заштрихованного на рис.3.15:

Найдем числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$ случайной величины $X \sim R\ [a;b]$:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} x\cdot 0dx+\int_{a}^{b} x\cdot\frac{1}{b-a}dx+$$
$$+\int_{b}^{\infty} x\cdot 0dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\bigg|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{1}{2}(b+a);$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2,$$
$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} x^2\cdot 0dx+$$

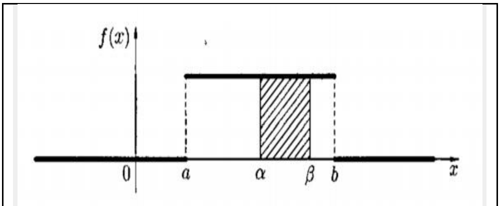


Рис. 3.15.

$$+\int_{a}^{b}\frac{x^2}{b-a}dx+\int_{b}^{\infty} x^2\cdot 0dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_a^b=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{b^3-a^3}{b-a}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{b-a}=$$
$$=\frac{b^2+ab+a^2}{3};$$

$$D(X)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-$$
$$-\frac{b^2+2ab+a^2}{4}=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12}=$$
$$=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Итак, числовые характеристики случайной величины $X\sim R\ [a;b]$имеют вид:

$$M(X)=\frac{(b+a)}{2}, D(x)=\frac{(b-a)^2}{12} \quad \textbf{(3.19)}$$

Пример 3.28. Найти $M(X)$, $D(X)$, X -случайная величина, равномерно распределённая на сегменте $[2;8]$ ($X\sim R\ [2;8]$).

Решение.

Плотность распределения равномерно распределённой случайной величины $X\sim R\ [a;b]$ имеет вид $f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<a\\ \frac{1}{b-a}, \text{при } a\le x\le b\\ 0, \text{при } x>b\end{cases}$,учитывая, что $X\sim R[2;8]$ имеем:

$$f(x)=\begin{cases}0, x<2\\ \frac{1}{8-2}=\frac{1}{6}, 2\le x\le 8,\\ 0, x>8\end{cases}$$

$$M(x)=\frac{b+a}{2}=\frac{8+2}{2}=5, D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(8-2)^2}{12}=\frac{36}{12}=3.$$

Пример 3.29. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, пришедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут.

Решение

Можно считать, что случайная величина X -время ожидания автобуса, распределена равномерно на интервале [0;5] ($X \sim R\ [0;5]$), то есть плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{1}{5-0}, 0 \le x \le 5, \\ 0, x > 5 \end{cases} f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{1}{5}, 0 \le x \le 5, \\ 0, x > 5 \end{cases}$$

$$P(0 < X < 3) = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{5}dx = \frac{1}{5}x \Big|_0^3 = 0{,}6.$$

Пример 3.30. В здании областной администрации случайное время ожидания лифта равномерно распределено в диапазоне от 0 до 2 минут. Найти: **а)** плотность распределения времени ожидания; **б)** вероятность ожидания лифта более чем 1 минуты; **в)** вероятность того, что лифт прибудет в течение первых 10 секунд; **г)** среднее время ожидания лифта и дисперсию времени ожидания.

Решение.

Пусть случайная величина X – время ожидания лифта (от момента прихода), $X \sim R\ [0;2]$.

а) Плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{1}{2-0}, 0 \le x \le 2, \\ 0, x > 2 \end{cases}$$ то есть

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{1}{2}, 0 \le x \le 2. \\ 0, x > 2 \end{cases}$$

б) Найдем вероятность ожидания лифта более чем 1 минуты:

$$P(X > 1) = \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{2} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_{1}^{2} =$$
$$= \frac{1}{2}(2-1) = 0{,}5.$$

в) Найдем вероятность того, что лифт прибудет в течение первых 10 секунд $=\frac{1}{6}$ минуты:

$$P\left(0 < X < \frac{1}{6}\right) = \int_{0}^{\frac{1}{6}} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{6}} dx = \frac{1}{2} x \Big|_{0}^{\frac{1}{6}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - 0\right) = \frac{1}{12}.$$

г) Найдем среднее время ожидания лифта и дисперсию времени ожидания по формулам для равномерного распределения:

$$M(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{2+0}{2} = 1,$$
$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

2) Показательный закон распределения непрерывной случайной величины

Случайная величина X имеет показательный (или экспоненциальный) закон распределения если её плотность вероятности имеет вид:

$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ **(3.20)**, где $\lambda > 0$-единственный параметр распределения, описывающий среднее число наступлений события за единицу времени.

График плотности представлен на рис. 3.16:

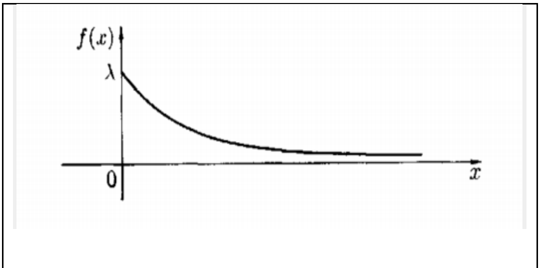


Рис.3.16.

Найдём функцию распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ случайной величины, заданной показательно:

$$x < 0, F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0,$$

$$x \geq 0, F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = -\int_{0}^{x} e^{-\lambda t} d(-\lambda t) =$$

$$= -e^{-\lambda t}\Big|_{0}^{x} = -\frac{1}{e^{\lambda t}}\Big|_{0}^{x} = -\left(\frac{1}{e^{\lambda x}} - \frac{1}{e^{0}}\right) = 1 - e^{-\lambda x},$$

следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, \ x < 0 \end{cases} \textbf{(3.21)}$$

График функции распределения (3.21) изображён на рис.3.17:

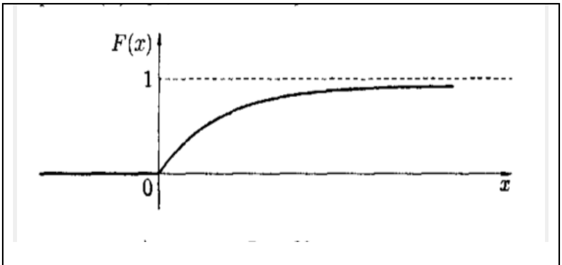


Рис. 3.17.

Найдём вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал $(a;b)$:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) =$$
$$= 1 - e^{-\lambda b} - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Таким образом, вероятность попадания случайной величины распределённой показательно X в интервал $(a;b)$ определяется формулой (3.22)

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \quad \textbf{(3.22)}$$

Найдём числовые характеристики показательного распределения:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}dx =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_0^b x \cdot \lambda e^{-\lambda x}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} U = x, & dU = dx \\ dV = \lambda e^{-\lambda x}dx, & V = -\int e^{-\lambda x}d(-\lambda x) = -e^{-\lambda x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}(-x\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^b + \int_0^b e^{-\lambda x}dx) = \lim_{b\to+\infty}\Big(-\frac{x}{e^{-\lambda x}}\Big|_0^b -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^b e^{-\lambda t}d(-\lambda t)\Big) = -\lim_{b\to+\infty}\Big(\frac{x}{e^{-\lambda x}}\Big|_0^b + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^b\Big) =$$

$$= -\lim_{b\to+\infty}\Big(\frac{b}{e^{\lambda b}} - \frac{0}{e^0} + \frac{1}{\lambda}\cdot(\frac{1}{e^{\lambda b}} - \frac{1}{e^0})\Big) = \frac{1}{\lambda},$$

$$D(X) = \int_0^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx - (M(X))^2 = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^2\lambda e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \begin{vmatrix} U = x^2, & dU = 2xdx \\ dV = \lambda e^{-\lambda x}dx, & V = -e^{-\lambda x}\end{vmatrix} = \lim_{b\to+\infty}(-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^b + 2\int_0^b xe^{-\lambda x}dx) -$$

$$-\frac{1}{\lambda^2} = \begin{vmatrix} U = x, & dU = dx \\ dV = e^{-\lambda x}dx, & V = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{vmatrix} = -\lim_{b\to+\infty}(\frac{x^2}{e^{\lambda x}}\Big|_0^b) +$$

$$+2\lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\cdot x\Big|_0^b + \frac{1}{\lambda}\int_0^b e^{-\lambda x}dx) - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= -\lim_{b\to+\infty}\Big(\frac{b^2}{e^{\lambda b}} - \frac{0^2}{e^0}\Big) + 2\lim_{b\to+\infty}\Big(-\frac{1}{\lambda}\Big(\frac{b}{e^{\lambda b}} - \frac{0}{e^0}\Big) - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_0^b\Big) -$$

$$-\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{2}{\lambda^2}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{\lambda x}}\Big|_0^b - \frac{1}{\lambda^2} = -\frac{2}{\lambda^2}\lim_{b\to\infty}\Big(\frac{1}{e^{\lambda b}} - 1\Big) - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2},$$

Итак, числовые характеристики показательно распределённой случайной вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \textbf{(3.23)}$$

Пример 3.31. Плотность вероятности случайной величины имеет вид $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, x \geq 0 \\ 0,\ x < 0\end{cases}$.Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал$(0{,}3; 1)$.

Решение.

Так как случайная величина распределена показательно, следовательно вероятность попадания случайной величины X в интервал $(a; b)$имеет вид:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b},$$

подставляя наши значения имеем:

$$P(0{,}3 < X < 1) = e^{-2\cdot 0{,}3} - e^{-2\cdot 1} =$$
$$= e^{-0{,}6} - e^{-2} \approx 0{,}413.$$

Пример 3.32. Известна функции распределения вероятностей $F(x) = 1 - e^{-0{,}4x}$. $M(X), D(X), \sigma(X)$–?

Решение.

Из функции распределения показательно распределённой случайной величины (задана по условию), видно, что$\lambda = 0{,}4$, тогда

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5\,,$$
$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{0{,}16} = 6{,}25.$$

Пример 3.33. Предполагая, что случайное время обслуживания абонента службой «09» распределено по показательному закону и средняя продолжительность обслуживания составляет 1,5 минуты, найдите: **а)** функцию плотности вероятности случайная величина T - времени обслуживания абонента службой «09»; **б)** вероятность того, что абонент будет обслужен более, чем за 2 минуты.

Решение.

Из условия известно, что случайная величина T – время обслуживания абонента службой «09», распределена по показательному закону с математическим ожиданием $M(T) = 1{,}5$-среднее время обслуживания абонента.

а) Как известно, СВ T имеет показательный закон распределения если её плотность вероятности имеет вид:

$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$, осталось найти параметр распределения λ:

Так как,

$M(T)=\frac{3}{2}$ и, с другой стороны, $M(T)=\frac{1}{\lambda}$,то

$\frac{1}{\lambda}=\frac{3}{2}$,то $\lambda=\frac{2}{3}$.

Таким образом, $f(t)=\begin{cases}\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$.

б) Вероятность того, что абонент будет обслужен более, чем за 2 минуты, равна:

$$P(2<T<+\infty)=\int_2^{+\infty} f(t)dt=\int_2^{+\infty}\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}t}dt=$$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\int_2^b e^{-\frac{2}{3}t}d\left(-\frac{2}{3}t\right)=-\lim_{b\to+\infty}e^{-\frac{2}{3}t}\Big|_2^b=$$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{\frac{2}{3}t}}\Bigg|_2^b=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{\frac{2}{3}b}}-\frac{1}{e^{\frac{4}{3}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{e^{\frac{4}{3}}}=0{,}264.$$

Можно показать и второй способ решения-использовать формулу $P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$.

Таким образом, в нашем случае,

$$P(2<T<+\infty)=e^{-\frac{2}{3}\cdot 2}-e^{-\frac{2}{3}\cdot\infty}=$$

$$=\frac{1}{e^{\frac{4}{3}}}-\frac{1}{e^{+\infty}}=0{,}264-0=0{,}264.$$

Пример 3.34. Случайная величина T -время работы радиолампы имеет показательное распределение. Найти вероятность того, что лампа проработает не менее 800 часов, если среднее время работы радиолампы 400 часов.

Решение.

$M(T) = 400$,следовательно, $\lambda = \frac{1}{M(T)} = \frac{1}{400}$.

Тогда

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{400} e^{-\frac{1}{400}t}, t \geq 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases},$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{400}t}, t \geq 0 \\ 0, \quad t < 0 \end{cases}.$$

Вероятность того, что лампа проработает не менее 800 часов равна:

$P(T \geq 800) = 1 - P(T < 800)$, так как

$P(T < t) = F(t)$ (по определению функции распределения), то

$$P(T \geq 800) = 1 - F(800) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{800}{400}}\right) =$$

$$= e^{-2} \approx 0{,}135.$$

Пример 3.35. Среднее время безотказной работы прибора равно 80 часов. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти: **а)** выражение его плотности вероятности и функции распределения; **б)** вероятность того, что в течение 100 часов прибор не выйдет из строя.

Решение.

Случайная величина T -время безотказной работы прибора.

а) Так как для показательного закона $M(T) = \frac{1}{\lambda}$, а среднее время безотказной работы прибора равно 80, то есть $\frac{1}{\lambda} = 80$получаем, что $\lambda = \frac{1}{80}$.

Тогда плотность вероятности имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{80} e^{-\frac{1}{80}t}, t \geq 0 \\ 0, \quad\quad t < 0 \end{cases};$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{80}t}, t \geq 0 \\ 0, \quad\quad t < 0 \end{cases}.$$

б) Найдем вероятность того, что в течение 100 часов прибор не выйдет из строя, то есть вероятность того, что время безотказной работы будет не меньше 100, то есть $T \geq 100$. Используем известную формулу для показательного распределения:

<u>1 способ:</u>

$$P(T \geq 100) = 1 - P(T < 100) = 1 - F(100) =$$
$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{100}{80}}\right) = e^{-\frac{5}{4}} = 0{,}287.$$

<u>2 способ:</u>

Учитывая, что

$P(T \geq 100) = P(100 < T < +\infty)$ и используем известную формулу$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$имеем:

$$P(100 < T < +\infty) = e^{-\frac{1}{80}\cdot 100} - e^{-\frac{1}{80}\cdot(+\infty)} =$$
$$= e^{-\frac{5}{4}} - e^{-\infty} = e^{-\frac{5}{4}} - \frac{1}{e^{+\infty}} = e^{-\frac{5}{4}} = 0{,}287.$$

3) Нормальный закон распределения непрерывной случайной величины.

НСВ X имеет нормальное распределение, если её плотность имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad \textbf{(3.24)}$$

, где $a = M(X)$-математическое ожидание случайной величины X,а $\sigma = \sigma(X)$ –среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Обозначение:$X \sim N(a, \sigma)$-случайная величина X,распределена по нормальному закону с параметрами a и σ.

Нормальное распределение, также называемое распределением Гаусса, распределение вероятностей, которое играет важнейшую роль во многих областях знаний, особенно в физике.

График функции $f(x)$ называется **кривой Гаусса** (см. рис. 3.18).

Свойства кривой Гаусса:

1)$f(x) > 0$;

2)$f(x) \to 0, x \to \pm\infty$;

3)$(\cdot)x = a$-$(\cdot)$max;

4)$f(x)$-симметрична относительно прямой $x = a$;

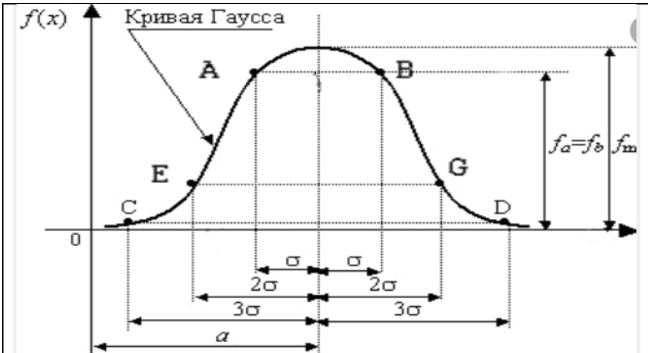


Рис. 3.18.

5)Кривая плотности нормального закона распределения имеет две точки перегиба:

$A\left(a - \sigma; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$, $B\left(a + \sigma; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$.

Числовые характеристики нормально распределённой НСВ.

Покажем, что a -математическое ожидание, σ-среднее квадратное отклонение нормального распределения:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \dfrac{x-a}{\sigma} \\ t\sigma = x - a \\ x = t\sigma + a \\ dx = \sigma dt \\ \dfrac{dx}{\sigma} = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + a)e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = a$, так

как $\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0$-интеграл от нечётной функции с симметричными пределами интегрирования равен нулю, а $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$-интеграл Пуассона.

Аналогично размышляя, можно показать, что

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(X)\right)^2 \cdot f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2;$$

Итак, числовые характеристики нормально распределённой случайной вычисляются по формулам:

$M(X) = a, D(X) = \sigma^2$ **(3.25)**

Пример 3.36. Случайная величина X распределена по нормальному закону $X \sim N(a;\sigma)$, $M(X) = 3$,

$D(X) = 16$.Найти плотность распределения вероятности $f(x)$.

Решение

Поскольку $X \sim N(a;\sigma)$,то $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, учитывая, что $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{16} = 4$, $a = M(X) = 3$ получим:

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{2 \cdot 4^2}} = \frac{1}{16\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}.$$

Пример 3.37. $X \sim N(a;\sigma)$.Дана плотность распределения вероятностей $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-1)^2}{50}}$.Найти $M(X)$, $D(X)$.

Решение.

Учитывая, что $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$,имеем:

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = 5, \qquad \sigma^2 = D(X) = 25, \qquad M(X) = a = 1.$$

Функция распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ НСВ $X \sim N(a;\sigma)$ имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt \quad \textbf{(3.26)}$$

Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с математическим ожиданием $a = M(X) = 0$ и стандартным отклонением $\sigma = \sigma(X) = 1$, то есть $X \sim N(0;1)$ при этом плотность стандартной СВ имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \mathbf{(3.27)}$$

Функция распределения СВ $X \sim N(0; 1)$ имеет вид

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \mathbf{(3.28)}$$

Функция (3.28) называется функцией Лапласа, которую мы изучили ранее (см. главу 2.5). Она связана с нормированной функцией Лапласа равенством

$\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x)$.

Действительно, так как

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \Phi_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$, так

как $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$-интеграл Пуассона,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2 \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}, \quad \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

а $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$-нормированная функция Лапласа.

Покажем, что вероятность попадания случайной величины$X \sim N(a; \sigma)$ в заданный интервал $(\alpha; \beta)$ определяется формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \quad \mathbf{(3.29)}$$

Доказательство.

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \dfrac{x-a}{\sigma} = t \\ x - a = \sigma t \\ dx = \sigma dt \\ t(\alpha) = \dfrac{\alpha - a}{\sigma} \\ t(\beta) = \dfrac{\beta - a}{\sigma} \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Равенство (3.29) можно переписать и так:

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$**(3.30)- вероятность попадания случайной величины** $X\sim N(a;\sigma)$ **в интервал** $(\alpha;\beta)$**.**

Пример 3.38. Случайная величина X распределена по нормальному закону $X\sim N(20;5)$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15;25).

Решение

Для определения вероятность попадания случайной величины $X\sim N(20;5)$ в заданный интервал (15;25) воспользуемся формулой $P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$:

$$P(15 < X < 25) = \Phi\left(\frac{25-20}{5}\right) - \Phi\left(\frac{15-20}{5}\right) =$$

$$= \Phi(1) + \Phi(1) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0{,}3413 = 0{,}6826.$$

Вычисление вероятности заданного отклонения.

На практике часто приходиться вычислять **вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в интервал, симметричный относительно центра рассеяния (мат. ожидания)** $\boldsymbol{a}$**.**

Пусть таким интервалом будет$(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ длины 2ε.Тогда

$$P(a-\varepsilon < X < a+\varepsilon) = P(|X-a| < \varepsilon) =$$

$$= \Phi\left(\frac{(a+\varepsilon)-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(a-\varepsilon)-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right);$$

Таким образом, **вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа** $\boldsymbol{\varepsilon}$**(**вероятность того, что все значения СВ попадут в интервал$(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$) вычисляется по формуле:

$$P(|X-a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \quad \textbf{(3.31)}$$

В частности, при $a = 0$ формула принимает вид

$$P(|X| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \quad \textbf{(3.32)}$$

Правило трёх сигм.

Преобразуем формулу $P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$,сделав замену $t=\frac{\varepsilon}{\sigma}$,

$\varepsilon=\sigma t$ имеем$P(|x-a|<\sigma t)=2\Phi(t)$;

Если $t=3, \varepsilon=3\sigma$,тогда

$\boldsymbol{P(|x-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=0,9973}$ **(3.33)-правило трёх сигм.**

Таким образом, если $\boldsymbol{X \sim N(a;\sigma)}$,**то практически достоверно, что её значения заключены в интервале**$\boldsymbol{(a-3\sigma; a+3\sigma)}$ **— это утверждение называется «правилом трёх сигм».**

Пример 3.39. Случайная величина X распределена по нормальному закону $X \sim N(20;5)$. Найти вероятность того, что в результате испытания примет значение, заключенное в интервале (15;25).

Решение

Вероятность попадания случайной величины $X \sim N(20;5)$ в заданный интервал (15;25). определяется формулой:

$$P(15<X<25)=\Phi\left(\frac{25-20}{5}\right)-\Phi\left(\frac{15-20}{4}\right)=$$

$$=\Phi(1)+\Phi(1)=2\Phi(1)=2\cdot 0{,}3413=0{,}6826.$$

Пример 3.40. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали $X \sim N(a,\sigma)$, $M(X)=a=50\text{мм}$ (проектная длина). Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: **а)** больше 55 мм; **б)** меньше 40мм.

Решение.

а) $P(55 < X < 68) = \Phi\left(\frac{68-50}{3,6}\right) - \Phi\left(\frac{55-50}{3,6}\right) =$

$= \Phi\left(\frac{18}{3,6}\right) - \Phi\left(\frac{5}{3,6}\right) = \Phi(5) - \Phi(1,39) =$

$= 0,5 - 0,4177 = 0,0823;$

$P(32 < X < 40) = \Phi\left(\frac{40-50}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{32-50}{\sigma}\right) =$

$= \Phi\left(-\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{18}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right);$

Найдем σ из равенства $P(32 < X < 68) = 1$,

б) $P(32 < X < 68) = \Phi\left(\frac{68-50}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{32-50}{\sigma}\right) =$

$= \Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-18}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) = 1,$

$\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}, \quad \frac{18}{\sigma} = 5, \quad \sigma = \frac{18}{5} = 3,6.$

Вернёмся к равенству

$$P(32 < X < 40) = \Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{18}{3,6}\right) - \Phi\left(\frac{10}{3,6}\right) = \Phi(5) - \Phi(2,78) =$$

$$= 0,5 - 0,4973 = 0,0027.$$

Пример 3.41. Известно, что средний расход удобрений на один гектар пашни составляет 80 кг, а среднеквадратическое отклонение расхода равно 5 кг. Считая расход удобрений нормально распределённой случайной величиной, определить диапазон, в который вносимая доза удобрений попадает с вероятностью 0,98.

Решение.

По условию известно, что:

X - расход удобрений на один гектар пашни, $X \sim N(80; 5)$;

$M(X)$ – средний расход удобрений на один гектар пашни, то есть

$a = M(X) = 80; \sigma = 5;$

Необходимо определить диапазон $|X - 80| < \varepsilon$,

$-\varepsilon < X - 80 < \varepsilon|+80$,

$80 - \varepsilon < X < 80 + \varepsilon$, то есть промежуток$(80 - \varepsilon; 80 + \varepsilon)$,

в который вносимая доза удобрений попадает с вероятностью 0,98.

Для того, чтобы справиться с поставленной задачей достаточно найти ε, этим и займёмся:

$P(|X - a| < \varepsilon) = 0{,}98$, с другой стороны

$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$, следовательно,

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0{,}98; \Phi\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) = 0{,}49,$$

тогда $\frac{\varepsilon}{5} = 2{,}34, \varepsilon = 2{,}34 \cdot 5 = 11{,}7.$

Таким образом, искомый диапазон имеет вид:

$(80 - \varepsilon; 80 + \varepsilon) = (80 - 11{,}7; 80 + 11{,}7) =$

$= (68{,}3; 91{,}7).$

Пример 3.42. Пусть X – случайная величина, подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием $a = 1{,}6$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$. Какова вероятность того, что при четырех испытаниях эта случайная величина попадет хотя бы один раз в интервал (1;2)?

Решение.

Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал (1;2) при одном испытании. Согласно формуле $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, имеем:

$$P(1 < X < 2) = \Phi\left(\frac{2-1{,}6}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-1{,}6}{1}\right) =$$
$$= \Phi(0{,}4) - \Phi(-0{,}6) = \Phi(0{,}4) + \Phi(0{,}6) =$$
$$= 0{,}1554 + 0{,}2257 = 0{,}3811.$$

Тогда вероятность того, что случайная величина не попадет в интервал (1;2) при одном испытании равна $q = 1 - 0{,}3811 = 0{,}6189$.

Вероятность того, что при четырех испытаниях эта случайная величина попадет хотя бы один раз в интервал (1;2) равна:

$$P = 1 - q^4 = 1 - 0{,}6189^4 \approx 1 - 0{,}1467 = 0{,}8533.$$

Пример 3.43. Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величина X с параметрами $a = 173$см и $\sigma^2 = 36$см. Сформулировать «правило трех сигм» для случайной величины X.

Решение.

Запишем правило трёх сигм: $P(|x-a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$- практически достоверно, что СВ $X \sim N(a,\sigma)$принимает своё значение в интервале$(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$.

Так как $(a - 3\sigma; a + 3\sigma) = (173 - 3\cdot 6; 173 + 3 \cdot 6) = (155; 191)$, то практически достоверно, что рост мужчин данной возрастной группы заключен в границах от 155см до 191 см, то есть $155 < X < 191$.

Задания для самостоятельного решения.

8.Выполнить следующие задания:

1. Случайная величина T– время работы радиолампы – имеет показательное распределение. Определить вероятность того, что время работы лампы будет не меньше 600 часов, если среднее время работы радиолампы 400 часов.

2.Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 3 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени, никак не связанный с расписанием поездов. Найти плотность распределения случайной величины T – времени, в течение которого ему придется ждать поезда, ее математическое ожидание, дисперсию и вероятность того, что ждать придется не более минуты.

3.Непрерывная случайная величина задана своей плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} C\,, x \in (-1;3) \\ 0, \quad x \notin (-1;3) \end{cases}. C-?$$

4. Длительность телефонного разговора подчиняется показательному закону. Найти среднюю длительность разговора, если вероятность того, что разговор продлится более 5 минут, равна 0,4.
5. Предполагая, что случайное время обслуживания абонента службой «09» распределено по показательному закону и средняя продолжительность обслуживания составляет 1,5 минуты, найдите вероятность того, что абонент будет обслужен более, чем за 2 минуты.

6. Установлено, что время ремонта телефонов есть случайная величина X, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телефона потребуется не менее 15 дней, если среднее время ремонта телефона составляет 12 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение СВ X.

7. Время T-выхода из строя радиостанции подчинено показательному закону распределения с плотностью $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0{,}2e^{-0{,}2t}, & t \geq 0 \end{cases}$. Найти среднее время выхода радиостанции из строя, дисперсию и вероятность того, что радиостанция сохранит работоспособность от 1 до 5 часов работы.

8. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты? Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины T– времени ожидания поезда.

9. Случайная величина X равномерно распределена в интервале (1;8). Найти: **а)** плотность;
б) функцию распределения; **в)** математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение;
г) вероятность попадания в интервал (3;5).

10. Телефонный звонок должен последовать от 10 ч до 10 ч 20 мин. Какова вероятность того, что звонок произойдет в последние 10 мин указанного промежутка, если момент звонка случаен?

11. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: **а)** меньшая 0,04; **б)** большая 0,05.

12. Время в годах безотказной работы прибора подчинено показательному закону, то есть плотность распределения этой случайной величины такова: $f(t) = \begin{cases} 3e^{-3t}, t \geq 0 \\ 0, \; t < 0 \end{cases}$. Найти: **а)** формулу функции распределения этой случайной величины; **б)**определить вероятность того, что прибор проработает не более года; **в)** определить вероятность того, что прибор безотказно проработает 3 года, то есть 3 или более лет (как минимум 3 года); **г)** определить среднее ожидаемое время безотказной работы прибора.

13.Случайные ошибки измерения детали подчинены нормальному закону с параметром $\sigma = 22\text{мм}$.Найти вероятность того, что измерение детали произведено с ошибкой, не превосходящей по модулю 25 мм.

14. В нормально распределенной совокупности 15% значений x меньше 12 и 40% значений x больше 16,2. Найти среднее значение и стандартное отклонение данного распределения.

15.Случайная величина X распределена по нормальному закону . Найти вероятность того, что в результате испытания примет значение, заключенное в интервале (14;26).

16.Математическое ожидание нормально распределённой случайной величины - количества сыра, используемого для изготовления 100 бутербродов, равно 1кг. Известно, что с вероятностью 0,96 расход сыра на изготовление 100 бутербродов составляет от 900 до 1100г. Определить среднее квадратическое отклонение расхода сыра на 100 бутербродов.

17.При измерении нормально распределённой случайной величины оказалось, что её среднее квадратическое отклонение равно 10, а вероятность попадания этой величины в интервал от 100 до 140, симметричный относительно математического ожидания этой величины, равна 0,86. Найти математическое ожидание этой величины и вероятность попадания её в интервал от 90 до 150.

18.Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Пусть математическое ожидание ее равно 175 см, а среднее квадратическое отклонение — 6 см. Определить вероятность того, что хотя бы один из наудачу выбранных пяти мужчин будет иметь рост от 170 до 180 см.

19. Рост мальчиков возрастной группы 15 лет есть нормально распределённая случайная величина Xс параметрами $a = 161$ см.$, \sigma = 4$см.Найти: **а)** функцию плотности вероятности случайной величины X; **б)** Какую долю костюмов для мальчиков, имеющих рост от 152 до 158 см, нужно предусмотреть в объёме производства для данной возрастной группы; **в)** сформулировать правило трёх сигм для случайной величины X .

20. На станке изготавливается деталь. Ее длина X - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $a = 23$ см,$\sigma = 1{,}6$ см. Найти вероятность того, что длина детали будет заключена между 22 и 24,2 см. Какое отклонение длины детали от a можно гарантировать с вероятностью 0,92; 0,98? В каких пределах, симметричных относительно a будут лежать практически все размеры деталей?

Ответы:

8.1. $p \approx 0,22$ **8.2.** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, x \in [0;3] \\ 0, \ x \notin [0;3] \end{cases}$; $P(X \le 1) = \frac{1}{3}$; $M(X) = 1,5$; $D(X) = 0,75$.

8.3. $C = \frac{1}{4}$. **8.4.** $M(X) \approx 5,46$. **8.5.** $P \approx 0,264$.

8.6. $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{12}}, x \ge 0 \\ 0, \ x < 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} e^{-\frac{x}{12}}, x \ge 0 \\ 0, \ x < 0 \end{cases}$,

$\sigma = 12$. **8.7.** $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-0,2t}, t \ge 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases}$, $M(T) = 5, D(T) = 25,$

$P(1 \le T \le 5) = 0,451.$

8.8. $P(T \le 5) = 0,25, M(T) = 1, D(T) = \frac{1}{3}, \sigma(T) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

8.9.

а) $f(x) = \begin{cases} 0, x \le 1 \\ \frac{1}{7}, 1 < x \le 8 \\ 0, x > 8 \end{cases}$; **б)** $F(x) = \begin{cases} 0, x \le 1 \\ \frac{x-1}{7}, 1 < x \le 8 \\ 1, x > 8 \end{cases}$;

в) $M(X) = 4,5, D(X) = \frac{49}{12} \approx 4,083, \sigma(X) \approx 2,021$;

г) $P(3 < X < 5) = \frac{2}{7} \approx 0,286$.

8.10. $P(10 < X < 20) = 0,5$.

8.11. а) $P(0 < X < 0,04) + P(0,16 < X < 0,2) = 0,4$;

б) $P(0,05 < X < 0,15) = 0,5$, где X - ошибка округления, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями.

8.12.а) $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-3t}, t \ge 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases}$;

б) $P(0 < X < 1) \approx 0,95$;

в) $P(3 < X < +\infty) = e^{-9} \approx 0,00012$;

г) $M(X) = \frac{1}{3} = 0,(3)$.

8.13. $p = 0,7888$

8.14. $\begin{cases} P(-\infty < X < 12) = 0{,}15 \\ P(16{,}2 < X < +\infty) = 0{,}4 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow a \approx 15{,}386, \sigma \approx 3{,}256.$
8.15. $P(14 < X < 16) = 0{,}1359.$ **8.16.** $\sigma \approx 48{,}5.$
8.17. $a = 120, P(90 < X < 150) = 0{,}9973.$

8.18. $P = 0{,}9898.$

8.19. а) $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-161)^2}{32}}$; **б)** $P(152 < X < 158) = 0{,}2144;$
в) правило трёх сигм для случайной величины X : доля костюмов для мальчиков 15 лет ростом от 149 до 173 см составит 99,73%.
8.20. $P(22 < X < 24{,}2) = 0{,}5074;$ при $p = 0{,}98,$
$\varepsilon = 3{,}73$см., при $p = 0{,}92, \varepsilon = 2{,}8$см; $18{,}2 < X < 27{,}8.$

ГЛАВА 4. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАСТИСТИКИ

4.1. Генеральная и выборочная совокупность.

Значительная часть математической статистики связана с описанием и анализом больших совокупностей объектов, объединённых по некоторому качественному или количественному признаку. Исследуемый признак может быть самого различного характера (продолжительность жизни некоторой социальной группы, вес, стандартность прибора, уровень доходов и так далее). Такая группа объектов называется **статистической совокупностью**. Очевидно, что провести сплошное обследование объектов всей совокупности невозможно (её элементы малодоступны), неудобно (совокупность слишком многочисленна) и невыгодно экономически. Поэтому выбирают из всей совокупности объектов **-генеральной совокупности,** определённую часть объектов, называемую **выборочной совокупностью(выборкой)**, изучают её и распространяют полученные результаты на всю совокупность носителей данного признака, данный метод называется **выборочным.**

Например, если из 1000 микросхем для проверки качества отобрано 50 шт., то генеральная совокупность 1000, а выборочная 50. Число объектов(наблюдений) в совокупности, генеральной или выборочной называется её **объёмом**, обозначается соответственно через N и n.

Пример 4.1. Десять абитуриентов проходят тестирование по математике. Каждый из них может набрать от 0 до 5 баллов включительно. Требуется изучить данную совокупность студентов по признаку X_k-количество баллов набранных k -м $(k = 1,2 \dots 10)$ абитуриентом: определить генеральную совокупность, выборку, привести пример реализации выборки.

Решение.

Значения 0,1,2,3,4,5-все возможные количества баллов, набранные k -м $(k = 1,2 \dots 10)$ абитуриентом-образуют генеральную совокупность. Выборка $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{10}$-результат тестирования 10 абитуриентов. Реализациями выборки могут быть следующие наборы чисел: $\{5,3,0,1,4,2,5,4,1,5\}, \{4,4,5,3,3,1,5,5,2,5\}$ и так далее.

4.2. Статистическое распределение выборки.

Пусть из генеральной совокупности объёма N извлечена выборка объёма n для изучения количественного признака X. Над случайной величиной X производится ряд независимых опытов. В каждом из этих опытов величина X принимает то или иное значение $x_i, i = 1,2, \dots, k$.Пусть она приняла n_1 раз значение x_1, n_2 –

$x_2, \dots, n_k - x_k$, при этом **объём выборки** определяется по формуле (4.1):

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = n \quad \textbf{(4.1)}$$

Значения $x_1, x_2, \dots, x_k$ называются **вариантами** случайной величины X.

Вся совокупность значений случайной величины X представляет собой первичный статистический материал, который подлежит дальнейшей обработке.
Задача расположения значений случайной величины X (признака) по возрастанию называется **ранжированием** статистических данных, а полученная таким образом последовательность вариантов $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_k$ **вариационным рядом**.

Числа n_i показывающие, сколько раз встречаются варианты x_i в ряде наблюдений называются **частотами**, а отношение частот к объёму выборки **относительными частотами.**

Обозначения:ω_i- относительные частоты.

Таким образом, относительные частоты вычисляются по формуле (4.2):

$$\omega_i = \frac{n_i}{n} \textbf{(4.2)}$$

Перечень вариантов x_i и соответствующих им частот n_i называется **статистическим распределением выборки (статистический рядом)** и записывается в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

(4.3)- статистическое распределение частот;

x_i	x_1	x_2	...	x_k
ω_i	ω_1	ω_2	...	ω_k

(4.4)- статистическое распределение относительных частот.

Полученное статистическое распределение выборки (4.3), где каждому значению x_i ставится в соответствие значение n_i , так же называют **дискретным статистическим рядом.**

Пример. 4.2. Пусть группа абитуриентов набрала баллы: {5,3,0,1,4,2,5,4,1,5} (см. пример 4.1). Записать полученную выборку в виде: **а)** вариационного ряда; **б)** статистического распределения частот; **в)** статистического распределения относительных частот.

Решение.

а) Проранжировав статистические данные (записав в возрастающем порядке варианты) получим вариационный ряд {0,1,1,2,3,4,4,5,5,5};

б) Посчитав частоту вариантов
$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5$:
$n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 1, n_4 = 1, n_5 = 2, n_6 = 3$,
получим статистическое распределение частот с выборкой $n = 10$:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	2	1	1	2	3

-статистическое распределение частот;

в) Для того, чтобы найти статистического распределения относительных частот, найдем относительные частоты $\omega_i = \frac{n_i}{n}$:

$$\omega_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1, \omega_2 = \frac{2}{10} = 0{,}2, \omega_3 = \frac{1}{10} = 0{,}1,$$
$$\omega_4 = \frac{1}{10} = 0{,}1, \omega_5 = \frac{2}{10} = 0{,}2, \omega_6 = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Таким образом, статистическое распределение относительных частот имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
ω_i	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3

Пример 4.3. Выборка задана в виде распределения частот. Найти распределение относительных частот.

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

Решение

Найдем объем выборки:

$$n = 5 + 2 + 3 + 10 = 20.$$

Найдем относительные частоты:

$$\omega_1 = \frac{5}{20} = 0{,}25, \omega_2 = \frac{2}{20} = 0{,}1,$$

$$\omega_3 = \frac{3}{20} = 0{,}15, \omega_4 = \frac{10}{20} = 0{,}5,$$ тогда

x_i	4	7	8	12
ω_i	0,25	0,1	0,15	0,5

- статистическое распределение относительных частот.

Мода, медиана, размах вариационного ряда.

В качестве описательных характеристик вариационного ряда используется медиана, мода и размах вариаций.

Мода представляет собой значение изучаемого признака, повторяющееся с наибольшей частотой, то есть мода –это значение признака, встречающееся чаще всего.

Обозначение:M_0

Медианой называется значение признака, приходящееся на середину ранжированной (упорядоченной) совокупности, то есть медиана – это центральное значение вариационного ряда.

Обозначение: M_e

Если $m = 2k$- количество значений в выборке чётное число, то медиана вычисляется по формуле (4.5):

$$M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, m = 2k \quad \textbf{(4.5)}$$

Если же количество значений в выборке нечётное число, то есть $m = 2k + 1$, то медиана вычисляется по формуле (4.6):

$$M_e = x_{k+1} \textbf{(4.6)}$$

Размах вариации — это разность между максимальным и минимальным значениями признака, то есть

$$R = x_{max} - x_{min} \textbf{(4.7)}$$

Размах показывает пределы, в каких пределах изменяется величина признака в изучаемой совокупности.

Пример 4.4. Вернемся, к примеру 4.2(про абитуриентов). Статистическое распределение выборки имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	2	1	1	2	3

Найдём M_0,M_e,R:

$M_0 = 5$, так как эта варианта в статистическом ряде встречается чаше всего;

Поскольку $m = 2k = 6$, то $k = 3$, следовательно

$$M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{2+3}{2} = 2{,}5,$$

$$R = x_{max} - x_{min} = 5 - 1 = 4.$$

Интервальный (непрерывный) статистический ряд.

Наряду с дискретным статистическим рядом, часто используется интервальный (непрерывный) статистический ряд. Он применяется, если объем выборки большой, а каждая варианта встречается очень редко. Для построения интервального статистического ряда необходимо установить величину i-го интервала, которая определяется как отношение размаха вариации $R = x_{max} - x_{min}$ к числу групп m (к числу интервалов):

$$h = \frac{R}{m} \quad \textbf{(4.8)}$$

В первую строку таблицы статистического распределения записываются частичные промежутки $[x_0; x_1), [x_1; x_2), \dots, [x_{m-1}; x_m)$ которые берут обычно одинаковыми по длине h. Во второй строчке записываются частоты n_i, $i = 1,2, \dots, m$ – количество элементов выборки, попавших в i -ый интервал. Если элемент выборки совпадает с границей частичного интервала, то при подсчете частоты его относят к последующему, а не к предыдущему интервалу.

Интервальный статистический ряд записывается в виде таблицы:

$x_i - x_{i+1}$	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	…	$[x_{m-1}; x_m)$
n_i	n_1	n_2	…	n_m

Замечание:

1) от непрерывного (интервального) статистического ряда можно перейти к дискретному. Для этого достаточно в качестве вариант x_i , $i = 1,2,\dots,m$ выбрать средние значения групп$[x_0; x_1), [x_1; x_2), \dots, [x_{m-1}; x_m)$, то есть $\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, \dots, \frac{x_{m-1}+x_m}{2}$;

2) рекомендуется для нахождения m использовать формулу Стерджесса: $m = 1 + 3{,}322 lgn$. Если окажется, что m – дробное число, то за длину интервала следует принять либо ближайшую простую дробь, либо ближайшую целую величину. Рекомендуется за начало первого интервала брать величину$x_{min} - \frac{h}{2}$.

Пример 4.5. Построить статистический интервальный ряд распределения по данной выборке: 15, 18, 22, 26, 15, 10, 23, 27, 19, 18, 14, 15, 28, 6, 29, 7, 26, 24, 19, 14, 15, 7, 27, 14, 19, 8, 20, 5, 29, 16, 10, 16, 11, 18, 20, 12, 16, 22, 23, 20, 21, 11, 16, 22, 22, 6, 18, 14, 11, 5. При построении интервального статистического ряда использовать 6 интервалов равной длины. Перейти от статистического интервального ряд распределения к дискретному статистическому ряду.

Решение.

Объем выборки равен количеству элементов в выборке, то есть $n = 50$. Размах выборки: $R = x_{max} - x_{min} = 29 - 5 = 24$.По условию количество интервалов $m = 6$. Найдём длину каждого частичного интервала h ,для этого размах выборки R поделим на количество интервалов m:

$$h = \frac{R}{m} = \frac{24}{6} = 4;$$

Таким образом, получим 6 интервалов длины 4:

[5; 9), [9; 13), [13; 17), [17; 21), [21; 25), [25; 29].

Подсчитаем количество элементов выборки, попавших в полученные интервалы и занесём данные в таблицу ,учитывая, что элемент выборки 21 является границей интервалов [17; 21) и [21; 25),то есть при подсчете частоты относим его к интервалу [21; 25).

Получим:

$x_i - x_{i+1}$	[5; 9)	[9; 13)	[13; 17)	[17; 21)	[21; 25)	[25; 29]
n_i	7	6	12	10	8	7

Чтобы перейти от интервального статистического ряда к дискретному статистическому ряду, возьмем в качестве вариантов середины групп $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$:$\frac{5+9}{2} = 7, \frac{9+13}{2} = 11, \ldots$Занесём данные в таблицу и получим дискретный статистический ряд:

x_i	7	11	15	19	23	27
n_i	7	6	12	10	8	7

4.3. Эмпирическая функция распределения.

Одним из способов обработки вариационного ряда является построение эмпирической функции распределения.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называется функция $F^*(x)$, определяющая для положительного значения x частоту(частость) события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} \quad \textbf{(4.9)},$$

где n -объём выборки,n_x-число вариант выборки меньших x .

Свойства эмпирическая функции распределения.

Эмпирическая функция обладает всеми свойствами функции распределения:

1)Если x_1 –наименьшая варианта, а x_k-наибольшая варианта, то

$F^*(x) = 0$,при $x \leq x_1$ и $F^*(x) = 1$,при $x > x_k$;

2)$0 \leq F^*(x) \leq 1$;

3)$F^*(x)$ –неубывающая функция.

Пример 4.6. Найти и построить эмпирическую функцию дискретного признака X:

а)

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	10	20	10	10	20	20

б)

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

.

.

Решение.

а) Найдем объем выборки:

$n = 10 + 20 + 10 + 10 + 20 + 30 = 100;$

Найдём $F^*(x)$,исходя из определения эмпирической функции распределения $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$ имеем:

если $x \leq 0$,то $F^*(x) = 0$, так как на промежутке $X < 0$ не наблюдается ни одна варианта (вариант меньших $x_1 = 0$ в таблице нет);

если $0 < x \leq 1$,то $F^*(x) = \frac{n_1}{n} = \frac{10}{100} = 0{,}1$,так как на интервале $X < 1$находится только варианта x_1,которая наблюдалась в выборке $n_1 = 10$ раз;

если $1 < x \leq 2$,то $F^*(x) = \frac{n_1+n_2}{n} = \frac{30}{100} = 0{,}3$, так как на интервале $X < 2$ находятся варианты $x_1 = 0, x_2 = 1, n_1 + n_2 = 30;$

если $2 < x \leq 3$,то $F^*(x) = \frac{n_1+n_2+n_3}{n} = \frac{40}{100} = 0{,}4$,так как в интервале $X < 3$,находятся варианты $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$, которые наблюдаются $n_1 + n_2 + n_3 = 40$ раз;

если $3 < x \leq 4$,то $F^*(x) = \frac{n_1+n_2+n_3+n_4}{n} = \frac{50}{100} = 0{,}5$,так как в интервале $X < 4$ располагаются варианты $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2, x_4 = 3$,которые наблюдаются

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 50$ раз;

если $4 < x \leq 5$,то $F^*(x) = \frac{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}{n} = \frac{70}{100} = 0{,}7$,так как в интервале $X < 4$ располагаются варианты $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_4 = 3, x_5 = 4$,которые наблюдаются $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 70$ раз;

если $x > 5$,то $F^*(x) = 1$,так как $x_6 = 5$-наибольшая варианта.

Таким образом, $F^*(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \leq 0 \\ 0{,}1, \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0{,}3, \text{при } 1 < x \leq 2 \\ 0{,}4, \text{при } 2 < x \leq 3 \\ 0{,}5, \text{при } 3 < x \leq 4 \\ 0{,}7, \text{при } 4 < x \leq 5 \\ 1, \text{при } x > 5 \end{cases}$.

График эмпирической функции представлен на рис.4.1.

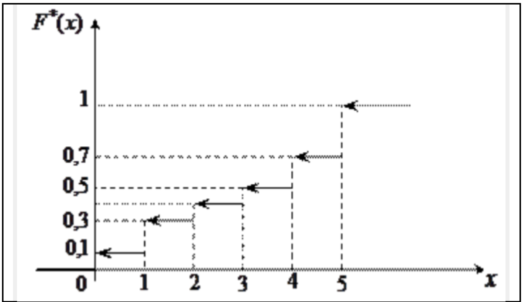


Рис. 4.1.

б) Найдем объем выборки:

$n = 10 + 15 + 25 = 50$;

Найдём $F^*(x)$:

если $x \leq 1$,то $F^*(x) = 0$, так как так в промежуток $X < 1$ не попала ни одна варианта

(вариант меньших $x_1 = 1$в таблице нет);

если $1 < x \leq 4$,то $F^*(x) = \frac{10}{50} = 0{,}2$,так как в интервале $X < 4$ наблюдается только вариантаx_1,которая наблюдалась$n_1 = 10$ раз;

если $4 < x \leq 6$,то $F^*(x) = \frac{25}{50} = 0{,}5$, так как в интервале $X < 6$ наблюдаются значения $x_1 = 1, x_2 = 4, n_1 + n_2 = 25$(наблюдается 25 раз);

если $x > 6$,то $\mathrm{F}^*(x) = \frac{50}{50} = 1$,так как x_3 =6-наибольшая варианта.

Таким образом, $F^*(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 1 \\ 0{,}2, \text{при } 1 < x \le 4 \\ 0{,}5, \text{при } 4 < x \le 6 \\ 1, \text{при } x > 6 \end{cases}$.

График эмпирической функции распределения постройте самостоятельно.

4.4. Полигон и гистограмма.

Статистическое распределение изображается графически (для наглядности) в виде так называемых полигона и гистограммы. Полигон, как правило, служит для изображения дискретного статистического ряда, гистограмма для непрерывного.

Полигон частот и относительных частот.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1; n_1), (x_2; n_2), \dots, (x_k; n_k)$.Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i. Точки $(x_i; n_i)$соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами$(x_1; \omega_1), (x_2; \omega_2), \dots, (x_k; \omega_k)$.То есть, для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают значения вариантx_i, а по оси ординат соответ

ствующие значения относительных частотω_i

и соединяют полученные точки$(x_i; \omega_i)$ ломанной.

Пример 4.7. Построить полигон частот и относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	2	7	8	15	16	17
n_i	15	35	64	55	21	10

Решение.

Построим полигон частот: отложим на оси абсцисс варианты x_i,а на оси ординат-соответствующие им частоты n_i,соединив точки$(x_i; n_i)$ отрезками прямых, получим искомый полигон частот (см.рис.4.2)

Для построения полигона относительных частот

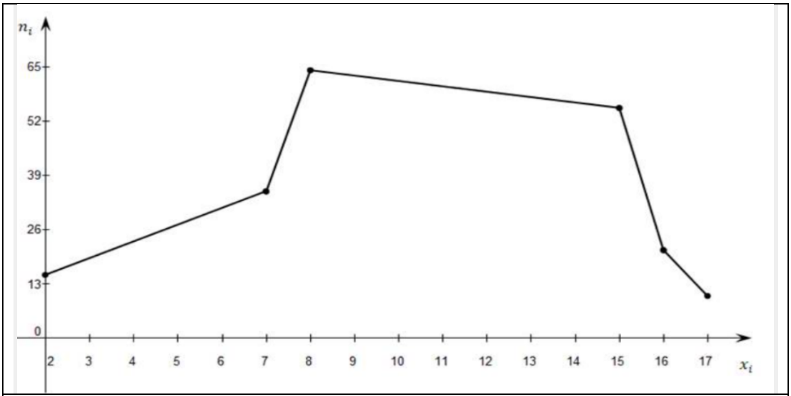


Рис. 4.2.

найдём относительные частоты $\omega_i = \frac{n_i}{n}$:

$$n = 15 + 35 + 64 + 55 + 21 + 10 = 200;$$

$$\omega_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{15}{200} = 0{,}075; \omega_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{35}{200} = 0{,}175;$$

$$\omega_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{64}{200} = 0{,}32; \omega_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{55}{200} = 0{,}275;$$
$$\omega_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{21}{200} = 0{,}105; \omega_6 = \frac{n_6}{n} = \frac{10}{200} = 0{,}05.$$

Данные, для удобства, занесём в таблицу:

x_i	2	7	8	15	16	17
ω_i	0,075	0,175	0,32	0,275	0,105	0,05

Строим полигон относительных частот: откладываем на оси абсцисс варианты x_i,а на оси ординат-соответствующие им относительные частоты ω_iи соединяем полученные точки$(x_i; \omega_i)$ ломанной (см.рис.4.3.)

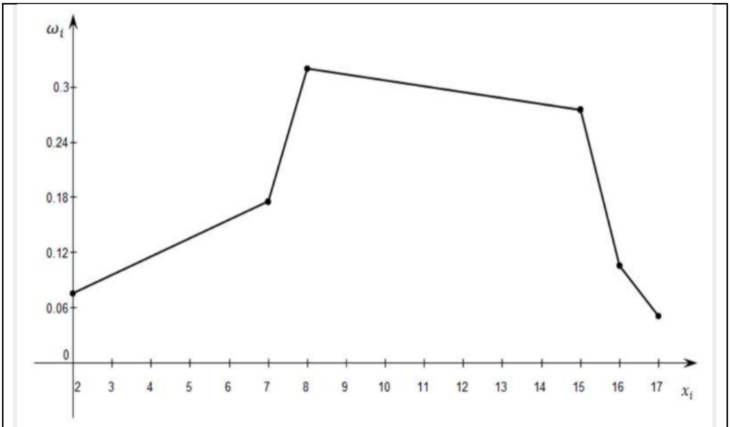


Рис. 4.3.

Пример 4.8. При измерениях в однородных группах обследуемых получены следующие выборки: 71, 72, 74, 70, 70, 72, 71, 74, 71, 72, 71, 73, 72, 72, 72, 74, 72, 73, 72, 74 (частота пульса). Составить по этим результатам статистический ряд распределения частот и относительных частот. Постройте полигон частот и относительных частот.

Решение.

Статистический ряд распределения частот имеет вид:

x_i	70	71	72	73	74
n_i	2	4	8	2	4

Объем выборки: $n = 20$;

Найдем относительные частоты, для этого разделим частоты на объем выборки $\omega_i = \frac{n_i}{n}$:

$$\omega_1 = \frac{2}{20} = 0{,}1, \omega_2 = \frac{4}{20} = 0{,}2, \omega_3 = \frac{8}{20} = 0{,}4,$$

$\omega_4 = \frac{2}{20} = 0{,}1, \omega_5 = \frac{4}{20} = 0{,}2.$

Запишем ряд распределение относительных частот:

x_i	70	71	72	73	74
ω_i	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2

;

Используя данные дискретного статистического ряда распределения частот и относительных частот, построим полигон частот и полигон относительных частот: для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат, соответствующие им частоты n_i(см.рис.4.4);

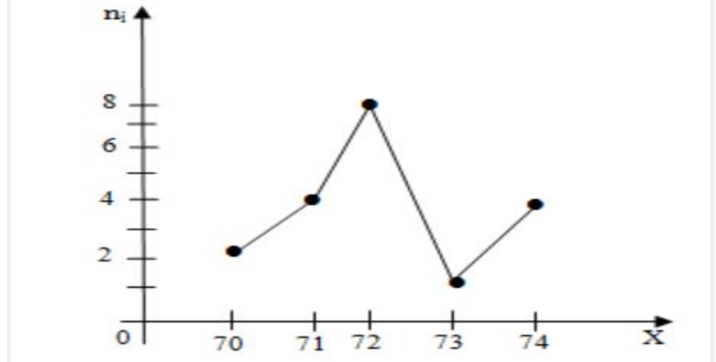


Рис. 4.4.

Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают вариантыx_i, а на оси ординат, соответствующие им относительные частоты ω_i (рисунок сделайте самостоятельно);

Гистограмма частот и относительных частот.

В случае интервального статистического распределения целесообразно построить гистограмму, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длинной h и находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i -ый интервал.

Гистограмма частот – это ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высотами-отношения $\frac{n_i}{h}$ (плотности частот).

Алгоритм построения гистограммы частот:

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы $h{:}x_i - x_{i+1}$, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс, на расстоянии $\frac{n_i}{h}$.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длинною h, а высоты равны отношению $\frac{\omega_i}{h}$ - плотность относительной частоты.

Алгоритм построения гистограммы относительных частот:

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы длины $h{:}x_i - x_{i+1}$, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии$\frac{\omega_i}{h}$.

Замечание: гистограмма - ступенчатый график, составленный из примыкающих друг к другу прямоугольников (служит для графического представления непрерывного статистического ряда), полигон частот - ломаная линия (служит для графического представления дискретного статистического ряда). Для непрерывного признакаX можно построить полигон частот или относительных частот, если середины верхних отрезков соседних прямоугольников гистограммы соединить прямыми отрезками.

Пример 4.9. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объёма $n = 20$:

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала n_i
1	1-5	10
2	5-9	20
3	9-13	50
4	13-17	12
5	17-21	8

Решение.

Найдём плотности частот $\frac{n_i}{h}$,где длина каждого частичного интервала равна 4 (по условию), то есть $h = 4$:

$$\frac{n_1}{h} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5; \frac{n_2}{h} = \frac{20}{4} = 5; \frac{n_3}{h} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2} = 12{,}5;$$

$$\frac{n_4}{h} = \frac{12}{4} = 3; \frac{n_5}{h} = \frac{8}{4} = 2.$$

Занесём данные в таблицу:

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала n_i	Плотность частот $\frac{n_i}{h}$
1	1-5	10	2,5
2	5-9	20	5
3	9-13	50	12,5
4	13-17	12	3
5	17-21	8	2

Построим гистограмму частот: ступенчатую фигуру из прямоугольников основаниями которых служат частичные интервалы длины $h = 4$,а высотами служат плотности частот $\frac{n_i}{h}$(см.рис.4.5):

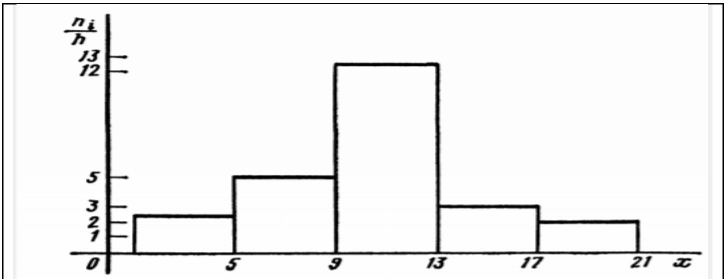


Рис.4.5.

Пример 4.10. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки объёма $n = 20$:

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала n_i
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2

Решение.

Найдём относительные частоты $\omega_i = \frac{n_i}{n}$:

$$\omega_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{2}{20} = 0{,}1; \omega_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{4}{20} = 0{,}2;$$

$$\omega_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{8}{20} = 0{,}4; \omega_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{4}{20} = 0{,}2;$$
$$\omega_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{2}{20} = 0{,}1.$$

Найдём плотности относительных частот $\frac{\omega_i}{h}$, где $h = 5$ (по условию):

$$\frac{\omega_1}{h} = \frac{0{,}1}{5} = \frac{1}{50} = 0{,}02;$$
$$\frac{\omega_2}{h} = \frac{0{,}2}{5} = \frac{2}{50} = 0{,}04;$$
$$\frac{\omega_3}{h} = \frac{0{,}4}{5} = \frac{4}{50} = 0{,}08;$$
$$\frac{\omega_4}{h} = \frac{0{,}2}{5} = \frac{2}{50} = 0{,}04;$$
$$\frac{\omega_5}{h} = \frac{0{,}1}{5} = \frac{1}{50} = 0{,}02.$$

Занесём данные в таблицу:

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала n_i	Плотность относительных частот $\frac{\omega_i}{h}$
1	10-15	2	0,02
2	15-20	4	0,04
3	20-25	8	0,08
4	25-30	4	0,04
5	30-35	2	0,02

Построим гистограмму относительных частот: ступенчатую фигуру из прямоугольников основаниями которых служат частичные интервалы длины $h = 5$,а высотами служат плотности относительных частот$\frac{\omega_i}{h}$(см.рис.4.6.):

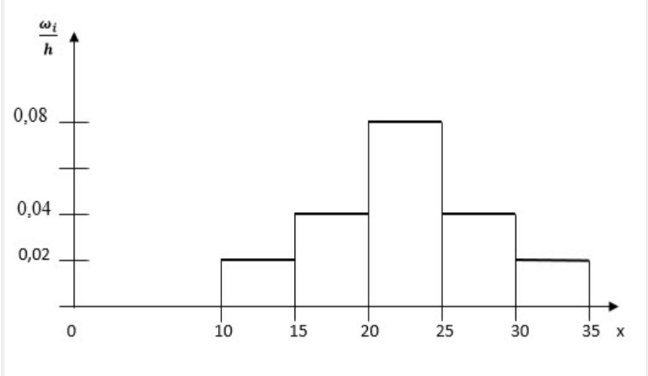


Рис. 4.6.

4.5. Числовые характеристики статистического распределения.

Для выборки можно определить ряд числовых характеристик, подобных тем, что в теории вероятностей определялись для случайных величин.

Пусть статистическое распределение выборки объёма n имеет вид:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2		n_k

Чтобы определить среднее значение наблюдаемых вариант $x_1, x_2, \dots, x_n$ количественного признака X вводят числовую характеристику $\bar{x}_{\text{в}}$— выборочную (генеральную) среднюю.

Выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i \quad \mathbf{(4.10)},$$

где x_i – варианты дискретного ряда либо середины интервалов непрерывного статистического распределения, n_i-число вариант в выборке.

Чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака X выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$вокруг своего среднего значения $\bar{x}_{\text{в}}$вводят свободную характеристику — выборочную дисперсию.

Выборочной дисперсией называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений x_iпризнакаX от их среднего значения $\bar{x}_{\text{в}}$:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot n_i \quad \mathbf{(4.11)}$$

Часто используют более простую формулу для вычисления выборочной дисперсии:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 \cdot n_i - (\bar{x}_{\text{в}})^2 \quad \mathbf{(4.12)}$$

или более краткая запись этой формулы

$$D_{\text{в}} = \bar{x}^2 - [\bar{x}]^2;$$

Кроме выборочной дисперсии для характеристики рассеяния значений признака генеральной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются сводной характеристикой – выборочным (генеральным) средним квадратическим отклонением.

Выборочным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} \quad \textbf{(4.13)}$$

В качестве несмещенной оценки выборочной дисперсии служит **исправленная выборочная дисперсия:**

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}} \textbf{(4.14)}$$

Замечание: исправленная выборочная дисперсия S^2 отличается от выборочной дисперсии $D_{\text{в}}$ в большую сторону. При достаточно больших n выборочная и исправленная дисперсии мало отличаются, поэтому на практике исправленной дисперсией пользуются, если $n < 50$.

Величина $S = \sqrt{S^2}$ или

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_{\text{в}}} \quad \textbf{(4.15)}$$

называется **исправленным выборочным средним квадратическим отклонением**.

Коэффициент вариации V, вычисляется по формуле:

$$V = \frac{S}{\bar{x}_{\text{в}}} \cdot 100\% (\mathbf{4.16})$$

Коэффициент вариации — это мера относительного разброса СВ. Он показывает, какую долю составляет средний разброс СВ от среднего значения этой величины.

Замечания:

1) Если первоначальные варианты x_i-большие числа, то для упрощения расчёта, необходимо перейти к условным вариантам $u_i = x_i - C$, то есть вычесть из каждой варианты одно и тоже число C , где C - число равное выборочной средней или близкое к ней, тогда$\bar{x}_{\text{в}} = C + \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i \cdot n_i}{n}$,а дисперсия при этом не изменяется, то есть $D_{\text{в}}(X) = D_{\text{в}}(U) = \bar{u}^2 - [\bar{u}]^2 = \frac{\sum n_i \cdot u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i \cdot u_i}{n}\right]^2$;

2) Если первоначальные варианты являются десятичными дробями с k десятичными знаками после запятой, то, чтобы избежать действий с дробями, умножают первоначальные варианты на постоянное число $C = 10^k$, то есть переходят к условным вариантам $u_i = Cx_i$. При этом среднее выборочное значение увеличивается в C раз, поэтому среднюю выборочную условных вариант нужно разделить на C: $\bar{x}_{\text{в}} = \frac{\bar{u}_{\text{в}}}{C}$, а дисперсия увеличивается в C^2 раз, поэтому дисперсию условных вариант$D_{\text{в}}(U)$, необходимо разделить на C^2 :$D_{\text{в}}(X) = \frac{D_{\text{в}}(U)}{C^2}$;

3) Для расчёта числовых характеристик в случае интервального статистического ряда используется дискретный ряд, вариантами которого являются середины интервалов.

Пример 4.11. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Найти выборочную среднюю.

Решение.

Для начала, найдём объём выборки $n = 40 + 10 + 8 + 2 = 60$,используя формулу для вычисления выборочной средней имеем:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot n_i = = \frac{1 \cdot 8 + 3 \cdot 40 + 6 \cdot 10 + 26 \cdot 2}{60} =$$

$$= \frac{240}{60} = 4.$$

Пример 4.12. В результате четырёх измерений некоторой физической величины одним прибором, измерения произведены без систематических ошибок получены следующие результаты: 8;9;11;12.

Найти: **а)** выборочную среднюю; **б)** выборочную дисперсию; **в)** исправленную выборочную дисперсию.

Решение.

$n = 4$- число измерений,x_i - результаты измерений некоторой физической величины. Для удобства занесём данные в таблицу:

x_i	8	9	11	12
n_i	1	1	1	1

а) В качестве оценки выборочной средней, естественно, предложить среднее арифметическое наблюдаемых значений:

$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot n_i = \frac{8\cdot1+9\cdot1+11\cdot1+12\cdot1}{4} = \frac{40}{4} = 10$- выборочная средняя;

б) Как известно из теории выборочную дисперсию можно вычислить двумя способами по формуле

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot n_i$$

или по формуле
,
сделаем это двумя способами:

1 способ: (по формуле $D_\text{в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_\text{в})^2 \cdot n_i$)

$$D_\text{в} = \frac{1}{4}((8-10)^2 \cdot 1 + (9-10)^2 \cdot 1 + (11-10)^2 \cdot 1 +$$
$$+(12-10)^2 \cdot 1) = \frac{1}{4}(4+1+1+4) = \frac{10}{4} = 2{,}5;$$

2 способ:(по формуле $D_\text{в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 \cdot n_i - (\bar{x}_\text{в})^2$)

$$D_\text{в} = \frac{8^2 \cdot 1 + 9^2 \cdot 1 + 11^2 \cdot 1 + 12^2 \cdot 1}{4} - 10^2 =$$

$$= \frac{64+81+121+144}{4} - 100 = \frac{410}{4} - 100 =$$
$$= 102{,}5 - 100 = 2{,}5.$$

в) Исправленную дисперсию найдём по формуле $S^2 = \frac{n}{n-1} D_\text{в}$, подставляя значения имеем:
$S^2 = \frac{4}{3} \cdot 2{,}5 = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{10}{3} = 3,(3)$ -несмещенная оценка генеральной дисперсии.

Пример 4.13. Известны ежемесячные данные об объемах продаж компаний за год в (млн. т.):

10; 15; 11; 12; 12; 11; 13; 7; 15; 12; 15; 11.

Найти значения несмещенных оценок генеральной средней и генеральной дисперсии ежемесячного объема продаж компании.

Решение.

Составим вариационный ряд: 7; 10; 11; 11; 11; 12; 12; 12; 13; 15; 15; 15.

Данные занесём в таблицу:

x_i	7	10	11	12	13	15
n_i	1	1	3	3	1	3

Несмещенная оценка генеральной средней определяется по формуле выборочной средней:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{12}(7 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 11 \cdot 3 + 12 \cdot 3 + 13 \cdot 1 + 15 \cdot 3) =$$

$$= \frac{7+10+33+36+13+45}{12} = \frac{144}{12} = 12.$$

Несмещенная оценка генеральной дисперсии определяется по формуле исправленной выборочной дисперсии $S^2 = \frac{n}{n-1}D_{\text{в}}$:

$$D_{\text{в}} = \frac{(7-12)^2 + (10-12)^2 + (11-12)^2 \cdot 3 +}{12}$$

$$\frac{+(12-12)^2 \cdot 3 + (13-12)^2 + (15-12)^2 \cdot 3}{11} =$$

$$= \frac{(-5)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 \cdot 3 + 0^2 \cdot 3 + 1^2 + 3^2 \cdot 3}{12} =$$

$$= \frac{25 + 4 + 3 + 1 + 27}{12} = \frac{60}{12} = 5;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1}D_{\text{в}} = \frac{12}{11} \cdot 5 = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11} \approx 5{,}45. .$$

Пример 4.14. Из генеральной совокупности извлечена выборка, объёма $n = 20$:

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

.Найти: **а)** выборочную среднюю; **б)** выборочную дисперсию; **в)** исправленную выборочную дисперсию.

Решение

Поскольку первоначальные варианты x_i-большие числа, то для упрощения расчёта, перейдём к условным вариантам $u_i = x_i - C$, $C = 2620$, то есть $u_i = x_i - 2620$. Таким образом,

$$u_1 = x_1 - 2620 = 2560 - 2620, u_2 = x_2 - 2620 =$$
$$= 2600 - 2620 = -20$$ и так далее имеем:

u_i	-60	-20	0	30	80
n_i	2	3	10	4	1

а) Найдём выборочную среднюю:

$$\bar{x}_{\text{в}} = C + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} u_i \cdot n_i = 2620 + \frac{1}{20}(-60 \cdot 2 +$$
$$+(-20) \cdot 3 + 0 \cdot 10 + 30 \cdot 4 + 80 \cdot 1) =$$
$$= 2620 + \frac{1}{20}(-120 - 60 + 120 + 80) =$$
$$= 2620 + \frac{20}{20} = 2621.$$

б) Найдём выборочную дисперсию:

$$D_{\text{в}}(X) = D_{\text{в}}(U) = \bar{u}^2 - [\bar{u}]^2 = \frac{\sum n_i \cdot u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i \cdot u_i}{n}\right]^2,$$

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{20}((-60)^2 \cdot 2 + (-20)^2 \cdot 3 + 30^2 \cdot 4 + 80^2 \cdot 1) -$$
$$-\left(\frac{1}{20}(-120 - 60 + 120 + 80)\right)^2 = 680 - 1 = 679;$$

в) Найдём исправленную выборочную дисперсию:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}},$$

$$S^2 = \frac{20}{19} \cdot 679 \approx 714{,}74.$$

Пример 4.15. Ниже приведены результаты измерения роста в (см.) случайно отобранных 100 студентов:

Рост x_i	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
Число студентов n_i	2	3	10	4	1	8	2

Найти значения несмещенных оценок генеральной средней и генеральной дисперсии роста обследованных студентов.

Решение.

В данном случае изучается непрерывный признак X, поэтому для расчёта числовых характеристик, перейдём к серединам интервалов$\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ и примем их в качестве вариант. Таким образом, получим следующую таблицу:

x_i	156	160	164	168	172	176	180
n_i	2	3	10	4	1	8	2

, где x_i – варианта (середина интервала),

$$n = \sum_{i=1}^{7} n_i = 10 + 14 + 26 + 28 + 12 + 8 + 2 = 100 -$$

-объём выборки.

Поскольку варианты x_i -большие числа, то для упрощения расчёта, перейдём к условным вариантам $u_i = x_i - C$, где $C = 168$, то есть $u_i = x_i - 168$.
Таким образом,

u_i	-12	-8	-4	0	4	8	12
n_i	10	14	26	28	12	8	2

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{100} \cdot (-12 \cdot 10 + (-8) \cdot 14 + (-4) \cdot 26 + 0 \cdot 28 +$$
$$+4 \cdot 12 + 8 \cdot 8 + 12 \cdot 2) + 168 = -2 + 168 = 166,$$
$$D_{\text{в}}(X) = D_{\text{в}}(U),$$
$$D_{\text{в}}(U) = \frac{1}{n}\sum (u_i - \bar{u}_{\text{в}})^2 \cdot n_i = \frac{1}{100} \cdot ((-12 - (-2))^2 \cdot 10 +$$
$$+(-8 - (-2))^2 \cdot 10 + (-4 - (-2))^2 \cdot 26 + (0 - (-2))^2 \cdot 28$$
$$+$$
$$+(4 - (-2))^2 \cdot 12 + (8 - (-2))^2 \cdot 8 + (12 - (-2))^2 \cdot 2 =$$
$$= \frac{1}{100} \cdot (100 \cdot 10 + 36 \cdot 14 + 4 \cdot 26 + 4 \cdot 28 + 36 \cdot 12 +$$
$$+100 \cdot 8 + 196 \cdot 2) = \frac{3344}{100} = 33{,}44.$$

Пример 4.16. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию по данному распределению выборки объёма $n = 10$:

x_i	0,02	0,03	0,07
n_i	4	3	3

Решение.

Для того, чтобы избежать действий с дробями, перейдём к условным вариантам $u_i = 100x_i$.В итоге получим распределение:

u_i	2	3	7
n_i	4	3	3

Найдём выборочную среднюю условных вариант:

$$\bar{u}_{\text{в}} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 3}{10} = \frac{38}{10} = 3{,}8.$$

Учитывая, что $C = 100$ вычислим выборочное среднее исходного распределения:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{\bar{u}_{\text{в}}}{C} = \frac{3{,}8}{100} = 0{,}038;$$

Найдём выборочную дисперсию условных вариант:

$$D_{\text{в}}(U) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} u_i^{\,2} \cdot n_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} u_i \cdot n_i\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{10}(2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 3 + 7^2 \cdot 3) - (3{,}8)^2 =$$

$= \frac{190}{10} - 14{,}44 = 19 - 14{,}44 = 4{,}56$,следовательно, выборочная средняя исходных вариант имеет вид:

$$D_{\text{в}}(X) = \frac{D_{\text{в}}(U)}{C^2} = \frac{4{,}56}{100^2} = 0{,}000456.$$

Пример 4.17. Из изучаемой налоговыми органами обширной группы населения было случайным образом было отобрано 10 человек и собраны сведения об их доходах за истёкший год в тысячах рублей: 45; 65; 85; 45; 55; 65; 95; 75; 65; 55.Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, исправленную выборочную дисперсию. Считая распределения доходов в группе нормальным и используя в качестве его параметров выборочное среднее и исправленную выборочную дисперсию, определить какой процент группы имеет годовой доход, превышающий 75 тысяч рублей.

Решение.

Вычислим характеристики выборочное среднее, выборочную дисперсию, исправленную выборочную дисперсию. Для этого составим статистическое распределение частот:

x_i	45	55	65	75	85	95
n_i	2	2	3	1	1	1

Найдем выборочное среднее:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot n_i;$$

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{45 \cdot 2 + 55 \cdot 2 + 65 \cdot 3 + 75 \cdot 1 + 85 \cdot 1 + 95 \cdot 1}{10} =$$
$$= \frac{650}{10} = 65;$$

Найдем выборочную дисперсию:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} {x_i}^2 \cdot n_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot n_i\right)^2;$$

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{10}(45^2 \cdot 2 + 55^2 \cdot 2 + 65^2 \cdot 3 + 75^2 + 85^2 + 95^2) -$$
$$-65^2 = \frac{2400}{10} = 240;$$

Найдем исправленную выборочную дисперсию:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}} = \frac{10}{9} \cdot 240 \approx 266{,}667;$$

Найдем исправленное среднеквадратичное отклонение:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{266{,}667} \approx 16{,}33;$$

Считая распределения доходов в группе нормальным и используя в качестве его параметров выборочное среднее $a = \bar{x}_{\text{в}} = 65$определим какой процент группы имеет годовой доход, превышающий $a = 65$ тысяч рублей по формуле: $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$,где $\Phi(x)$- функция

Лапласа (значения берутся из таблицы-см. приложение 2).Таким образом, получим:

$$P(75 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 65}{16,33}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 65}{16,33}\right) =$$

$$= \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{10}{16,33}\right) = 0,5 - \Phi(0,61) =$$

$$= 0,5 - 0,2291 = 0,2709.$$

Следовательно, $27,09\%$ процентов группы имеет годовой доход, превышающий 75 тысяч рублей.

4.6. Статистические оценки параметров распределения.

Важнейшим этапом обработки статистических данных является вычисление оценок числовых характеристик исследуемой случайной величины.

Полученные оценки позволяют в числовой форме описать характерные черты статистического распределения и являются базой для построения математической модели изучаемого случайного явления.

Статистической оценкой θ^* неизвестного параметра θ теоретического распределения называют функцию $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ от наблюдаемых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Точечные и интервальные оценки параметров распределения.

Существует два вида оценок параметров распределения: точечные и интервальные.

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом $\theta^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где

$x_1, x_2, \dots, x_n$-результаты n наблюдений над количественным признаком X(выборка).
Ранее мы рассмотрели точечные оценки (см. числовые характеристики статистического распределения), однако часто нас интересует не только конкретное значение оценки, но и такие свойства оценки, которые ассоциируются с её точностью и надежностью. Этим требованиям отвечают так называемые интервальные оценки.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами — концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.
К интервальным оценкам относится доверительный интервал.

Доверительным интервалом для параметра θ , точечной оценкой которого является θ^* , называют интервал $\theta - \Delta < \theta^* < \theta + \Delta$, содержащий с заданной вероятностью γ значение параметра θ,вероятность γ называется **надежностью интервальной оценки** или доверительной вероятностью,
Δ («дельта») – **точность оценки**, которую также называют предельной ошибкой репрезентативности(соответствие) выборки.

Замечание:
1)При работе с доверительными интервалами чаще всего надежность задается значениями от 0,95 и выше, в зависимости от конкретно решаемой задачи. Тогда событие, состоящее в том, что интервал $(\theta - \Delta; \theta + \Delta)$покроет параметр θ, будет практически достоверным;
2)Широкий доверительный интервал означает высокую точность оценки величины θ , а узкий – наоборот, малую. Таким образом, чем выше точность оценки θ , тем

меньше ее надежность, а чем ниже точность – тем больше надежность, что вполне естественно.

Если случайно отбираемые объекты не возвращаются в генеральную совокупность, то такую выборку называют **бесповторной**. Если же выбранный объект возвращается обратно (перед выбором следующего), то это **повторная выборка**.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания признака X $X \sim N(a;\sigma)$ **при известном** σ **.**

Если количественный признака X генеральной совокупности распределён нормально, то есть $X \sim N(a;\sigma)$, то с надёжностью γ можно утверждать, что $a = M(X)$ покрывается доверительным интервалом:

$$\bar{x}_{\text{в}} - \frac{t_{\gamma}\sigma_{\text{в}}}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_{\text{в}} + \frac{t_{\gamma}\sigma_{\text{в}}}{\sqrt{n}} \quad \textbf{(4.17)}$$

$\Delta = \frac{t_{\gamma}\sigma_{\text{в}}}{\sqrt{n}}$ -точность оценки, $\bar{x}_{\text{в}}$ –средняя выборки, n –объём выборки,t –значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$,при котором

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}.$$

Доверительный интервал для оценки математического ожидания признака X $X \sim N(a;\sigma)$ **при неизвестном** σ (и объёме выборки $n < 30$).

Если количественный признака X генеральной совокупности распределён нормально, то есть $X \sim N(a;\sigma)$, то с надёжностью γ можно утверждать, что $a = M(X)$ покрывается доверительным интервалом:

$$\bar{x}_{\text{в}} - \Delta < a < \bar{x}_{\text{в}} + \Delta \textbf{(4.18)},$$

где для бесповторной выборки, точность оценки вычисляется по формуле $\Delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}}$, то есть формула (4.18) принимает вид:

$$\bar{x}_в - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}} < a < \bar{x}_в + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1-\frac{n}{N}} \quad \textbf{(4.19)},$$

для повторной выборки точность оценки вычисляется по формуле $\Delta = \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}$, то есть формула (4.18) принимает вид:

$$\bar{x}_в - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} \quad \textbf{(4.20)},$$

здесь s-исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, $t_\gamma = t(\gamma; n)$- коэффициент доверия, который по таблице приложения по заданным n и γ.

Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения.

Интервальной оценкой (с надёжностью γ) среднего квадратического отклонения σнормально распределённого количественного признакаX по исправленному выборочному среднему квадратическому отклонению s служит доверительный интервал

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \quad \textbf{(4.21)}$$

при $q < 1$;

$$0 < \sigma < s(1+q) \textbf{(4.22)}$$

при $q > 1$;

Доверительный интервал для оценки дисперсии.

$$s^2(1-q) < D_в < s^2(1+q) \quad \textbf{(4.23)}$$

В последних двух пунктах q находят по таблице значений $q = q(\gamma; n)$,при известных параметрах n и γ.

Пример 4.18. Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение десяти измерений некоторой величины равно 10 см. Найти предельную ошибку выборки (точность оценки), при доверительной вероятности $\gamma = 60\%$.

Решение.

В нашем случае, $n = 10 < 30$,$s = 10$ и выборка повторная, поэтому точность оценки найдём по формуле:$\Delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$. По таблицам значений$t_\gamma = t(\gamma; n)$ находим для $\gamma = 0{,}6, n = 10$ коэффициент доверия
$t_\gamma = t(\gamma; n) = t(0{,}6; 10) = 0{,}9$.Таким образом,
$\Delta = \frac{0{,}9 \cdot 10}{\sqrt{10}} = 0{,}9 \cdot \sqrt{10} = 2{,}846$.

Пример 4.19. Службой контроля проверен расход энергии в течении месяца в десяти квартирах 70-квартирного дома, в результате были получены значения(кВт-ч):125,78,102,140,90,45,50,125,115,125, 115,112. Определить доверительный интервал для оценки среднего расхода электроэнергии в доме, с надёжностью $\gamma = 95\%$.

Решение.

Считаем выборку бесповторной, случай, когда $n = 10 (< 30)$,предельная ошибка выборки вычисляется по формуле:

$$\Delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}},$$

В нашем случае, объём выборки $n = 10$,объём генеральной совокупности $N = 70$, $t_\gamma = t(\gamma; n) = t(0{,}95; 10) = 2{,}26$.

Для того, чтобы найти исправленное среднее квадратичное отклонение $S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_в}$, где

$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i$составим статистический ряд:

x_i	45	50	78	90	102	112	115	125	140
n_i	1	1	1	1	1	1	1	2	1

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{9} x_i \cdot n_i = \frac{1}{10}(45 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 78 \cdot 1 + 90 \cdot 1 +$$

$$+102 \cdot 1 + 112 \cdot 1 + 115 \cdot 1 + 125 \cdot 2 + 140 \cdot 1) = \frac{982}{10} = 98{,}2;$$

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i = \frac{1}{10}((45 - 98{,}2)^2 \cdot 1 +$$

$$+(50 - 98{,}2)^2 \cdot 1 + (78 - 98{,}2)^2 \cdot 1 + (90 - 98{,}2)^2 \cdot 1 +$$

$$+(102 - 98{,}2)^2 \cdot 1 + (112 - 98{,}2)^2 \cdot 1 + (115 - 98{,}2)^2 \cdot 1 +$$

$$+(125 - 98{,}2)^2 \cdot 2 + (140 - 98{,}2)^2 \cdot 1 = \frac{1}{10}((-53{,}2)^2 +$$

$$+(-48{,}2)^2 + (-20{,}2)^2 + (-8{,}2)^2 + 3{,}8^2 + 13{,}8^2 + 16{,}8^2 +$$

$$+26{,}8^2 + 41{,}8^2) = \frac{1}{10}(2830{,}24 + 2323{,}24 + 408{,}04 +$$

$$+67{,}24 + 14{,}44 + 190{,}44 + 282{,}24 + 718{,}24 + 1747{,}24) =$$

$$= \frac{8581{,}36}{10} = 858{,}136;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{10}{9} \cdot 858{,}136 = \frac{8581{,}36}{9} \approx 953{,}484;$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{953{,}484} \approx 30{,}88.$$

Тогда $\Delta = 2{,}26 \cdot \frac{30{,}88}{\sqrt{10}} \sqrt{1 - \frac{10}{70}} \approx 19{,}982.$

Получим доверительный интервал:

$$\bar{x}_{\text{в}} - \Delta < a < \bar{x}_{\text{в}} + \Delta;$$
$$98{,}2 - 19{,}982 < a < 98{,}2 + 19{,}982;$$
$$78{,}218 < a < 118{,}182.$$

Пример 4.20. Ректор университета хочет узнать, каков средний возраст обучающихся в настоящее время студентов. Из предыдущих исследований известно, что стандартное отклонение равно 2 года. Сделана выборка из 50 студентов и вычислено среднее – 20,3 года. Найти 95 %-й доверительный интервал для генерального среднего.

Решение.

Изучаемый признак X -возраст обучающихся студентов, тогда $M(X) = a$– средний возраст студента университета. Требуется найти доверительный интервал:

$$\bar{x}_{\text{в}} - \frac{t_\gamma \sigma_{\text{в}}}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_{\text{в}} + \frac{t_\gamma \sigma_{\text{в}}}{\sqrt{n}}, \text{ где } \Phi(t) = \frac{\gamma}{2};$$

По условию известно, что $\bar{x}_{\text{в}} = 20{,}3, \sigma = 2, n = 50$ все величины, кроме t,известны. Найдём t из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$,учитывая, что $\gamma = 0{,}95$,используя таблицу значений для функции Лапласа (см. приложение 2-стр.294), определяем $\Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$,при $t = 1{,}96$.

Подставив $t = 1{,}96, \bar{x}_{\text{в}} = 20{,}3, \sigma = 2, n = 50$ в формулу для вычисления доверительного интервала имеем:

$$20{,}3 - \frac{1{,}96 \cdot 2}{\sqrt{50}} < a < 20{,}3 + \frac{1{,}96 \cdot 2}{\sqrt{50}},$$
$$20{,}3 - 0{,}55 < a < 20{,}3 + 0{,}55,$$

$$19{,}75 < a < 20{,}85.$$

Таким образом, с вероятностью 0,95 можно быть уверенным в том, что средний возраст студента находится в интервале $19{,}75 < a < 20{,}85$.

Пример 4.21. Произведено 10 измерений одним прибором (без систематических ошибок) некоторой физической величины причем "исправленное" среднее квадратичное отклонение s случайных ошибок измерений оказалось равным 0,8. Найти точность прибора с надежностью 0,95. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Решение.

Точность прибора характеризуется средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений. Поэтому задача сводится к отысканию доверительного интервала

$s(1-q) < \sigma < s(1+q)$, если $q < 1$

или

$0 < \sigma < s(1+q)$, если $q > 1$,покрывающего σ с заданной надёжностью $\gamma = 0{,}95$.

Все величины, кроме q,известны $s = 0{,}8$,найдём q по таблице (см. таблицу значений $q = q(\gamma; n)$), учитывая, что $n = 10, \gamma = 0{,}95$ имеем:

$$q = 0{,}65 < 1 .$$

Подставив $s = 0{,}8$, $q = 0{,}65$в формулу

$s(1-q) < \sigma < s(1+q)$ имеем:

$$0{,}8 \cdot (1 - 0{,}65) < \sigma < 0{,}8 \cdot (1 + 0{,}65),$$

$$0{,}8 \cdot 0{,}35 < \sigma < 0{,}8 \cdot 1{,}65,$$

$$0{,}28 < \sigma < 1{,}32.$$

Пример 4.22.Даны результаты измерений значений случайной величины X: 12; 9; 16; 17; 10; 9; 15; 12; 15;16; 20; 18; 17; 9; 15; 9; 16; 9; 18; 16. Составить статистическое распределение выборки и найти: **а)** характеристики вариационного ряда: размах варьирования, моду, медиану; **б)** эмпирическую функцию распределения и построить ее график; **в)** построить полигон частот и гистограмму; **г)** выборочную среднюю; **д)** выборочную и исправленную дисперсии; **е)** выборочное и исправленное средние квадратические отклонения (стандарт); **ё)** коэффициент вариации; **ж)** доверительный интервал для среднего значения признака с надежностью γ =0,95;

Решение.

Для начала составим статистическое распределение выборки-статистический ряд. Для этого расположим варианты в порядке возрастания: 9; 9; 9; 9; 9; 10; 12; 12; 15; 15; 15; 16; 16; 16; 16; 17; 17; 18; 18; 20 и подсчитаем числа наблюдений каждой варианты — частоты. Получим:

x_i	9	10	12	15	16	17	18	20
n_i	5	1	2	3	4	2	2	1

а) $R = x_{max} - x_{min} = 20 - 9 = 11$-размах варьирования;

$M_0 = 9 -$ так как эта варианта в статистическом ряде встречается чаше всего;

Поскольку $n = 2k = 20, \text{то } k = 10,$ следовательно, середина вариационного ряда находится между десятой и одиннадцатой вариантами в вариационном ряду, а медиана вычисляется как их среднее значение:

$$M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{15 + 15}{2} = \frac{30}{2} = 15.$$

б) Напомним формулу для нахождения эмпирической функции распределения:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n -объём выборки,n_x-число вариант выборки меньших x .

Найдем объем выборки:

$n = 20;$

Найдём $F^*(x)$:

$x \leq 9$, $F^*(x) = 0$,

$9 < x \leq 10$, то $F^*(x) = \frac{5}{20} = 0{,}25$;

$10 < x \leq 12$,то $F^*(x) = \frac{5+1}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$;

$12 < x \leq 15$,то $F^*(x) = \frac{5+1+2}{20} = \frac{4}{10} = 0{,}4$;

$15 < x \leq 16$,то $F^*(x) = \frac{5+1+2+3}{20} = \frac{11}{20} = 0{,}55$;

$16 < x \leq 17$,то $F^*(x) = \frac{5+1+2+3+4}{20} = \frac{15}{20} = 0{,}75$;

$17 < x \leq 18$,то $F^*(x) = \frac{5+1+2+3+4+2}{20} = \frac{17}{20} = 0{,}85$;

$18 < x \leq 20$,то $F^*(x) = \frac{5+1+2+3+4+2+2}{20} = \frac{19}{20} = 0{,}95$;

$x > 20$,то $F^*(x) = \frac{20}{20} = 1$.

Таким образом, $F^*(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \leq 9 \\ 0{,}25, \text{при } 9 < x \leq 10 \\ 0{,}3, \text{при } 10 < x \leq 12 \\ 0{,}4, \text{при} 12 < x \leq 15 \\ 0{,}55, \text{при} 15 < x \leq 16 \\ 0{,}75, \text{при } 16 < x \leq 17 \\ 0{,}85, \text{при } 17 < x \leq 18 \\ 0{,}95, \text{при} 18 < x \leq 20 \\ 1, \text{при } x > 20 \end{cases}$.

График эмпирической функции распределения имеет вид:

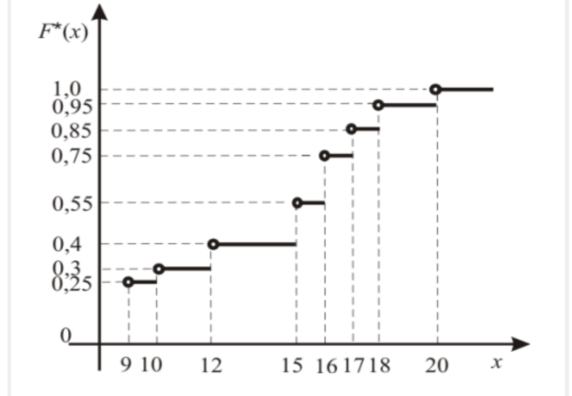


Рис. 4.7.

в) Построим полигон частот (рис. 4.8). Для этого по оси Ox отложим наблюдаемые значения x_i , а по оси Oy частоты n_i . Отметим точки с координатами $(x_i; n_i)$ и соединим их последовательно отрезками прямых (см.рис.4.8):

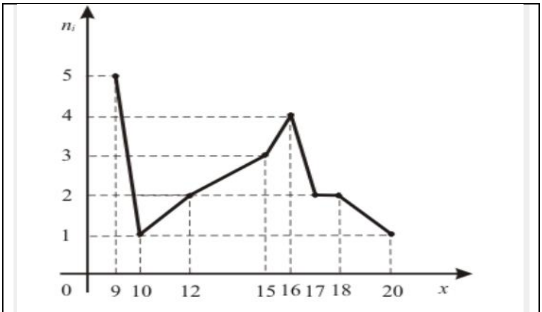


Рис. 4.8.

Для построения гистограммы разобьём интервал изменения x (9,20) на два интервала одинаковой длины h=5,5: $[9;14{,}5), [14{,}5;20)$,подсчитаем интервальные частоты n_iи плотности интервальных частот$\frac{n_i}{h}$. Результаты внесём в таблицу:

Интер-валы	Интер-вальные частоты n_i	Плотности интер-вальных частот $\frac{n_i}{h}$
[9;14,5)	8	$\frac{8}{5{,}5}=\frac{16}{11}$
[14,5;20)	12	$\frac{12}{5{,}5}=\frac{24}{11}$

Построим гистограмму (рис. 4.9.):

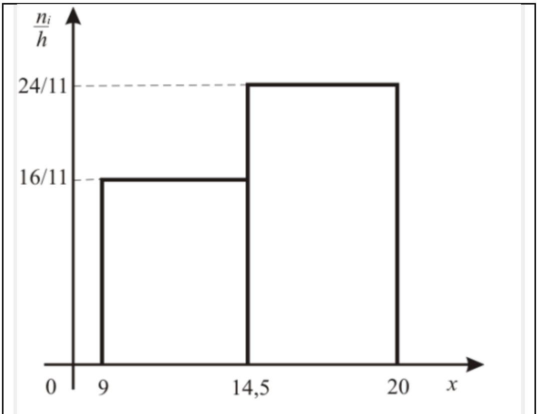


Рис. 4.9.

г) Вычислим выборочную среднюю:

$$\bar{x}_\text{в}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8}x_i\cdot n_i=\frac{1}{20}(9\cdot5+10\cdot1+12\cdot2+15\cdot3+$$
$$+16\cdot4+17\cdot2+18\cdot2+20\cdot1)=\frac{278}{20}=\frac{139}{10}=13{,}9;$$

д) Найдём выборочную и исправленную дисперсии:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 \cdot n_i - (\bar{x}_{\text{в}})^2 = \frac{1}{20}(9^2 \cdot 5 + 10^2 \cdot 1 + 12^2 \cdot 2 +$$
$$+15^2 \cdot 3 + 16^2 \cdot 4 + 17^2 \cdot 2 + 18^2 \cdot 2 + 20^2 \cdot 1) -$$
$$-13{,}9^2 = 12{,}69;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}} = \frac{20}{19} \cdot 12{,}69 \approx 13{,}36.$$

е) Вычислим выборочное и исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} = \sqrt{12{,}69} \approx 3{,}56;$$
$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{13{,}36} \approx 3{,}66.$$

ё) Найдём коэффициент вариации:

$$V = \frac{S}{\bar{x}_{\text{в}}} \cdot 100\% = \frac{3{,}66}{13{,}9} \cdot 100\% = 26{,}33\%.$$

ж) Доверительный интервал для среднего значения признака X найдём по формуле:

$$\bar{x}_{\text{в}} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_{\text{в}} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}};$$

Находим $t_\gamma = t(\gamma; n) = t(0{,}95; 20) = 2{,}09$(см. таблицу значений$t_\gamma = t(\gamma; n)$)подставляя оставшиеся значения в формулу имеем:

$$13{,}9 - \frac{2{,}09 \cdot 3{,}66}{\sqrt{20}} < a < 13{,}9 - \frac{2{,}09 \cdot 3{,}66}{\sqrt{20}};$$
$$12{,}19 < a < 15{,}61.$$

Таким образом, $(12{,}19; 15{,}61)$- доверительный интервал для среднего значения.

4.7. Проверка статистических гипотез. Критерий Пирсона.

Задачи статистической проверки гипотез.

Одна из часто встречающихся статистических задач, состоит в решении вопроса о том, должно ли на основании данной выборки быть принято или напротив, отвергнуто некоторое предположение (гипотеза) относительно генеральной совокупности (случайной величины).

Например, новое лекарство испытано на определенном числе людей. Можно ли сделать по данным результатом лечения обоснованный вывод о том, что новое лекарство более эффективно, чем применявшееся ранее.

Процедура сопоставления высказанного предположения (гипотезы) с выборочными данными называется **проверкой гипотез.**

Проверка статистических гипотез включает в себя большой пласт задач математической статистики. Зная некоторые характеристики выборки (или имея просто выборочные данные), мы можем проверять гипотезы о виде распределении случайной величины или ее параметрах.

Ниже в примерах мы разберем основные учебные задачи на проверку гипотез о виде распределения. Чаще всего для этого используется критерий согласия Пирсона.
Критерий согласия Пирсона (или критерий χ^2- "хи

квадрат") - наиболее часто употребляемый для проверки гипотезы о принадлежности некоторой выборки теоретическому закону распределения (в учебных задачах чаще всего проверяют "нормальность" - распределение по нормальному закону).

В учебных задачах обычно используется следующий **алгоритм** для применения критерияχ^2:

1. Выбор теоретического закона распределения (обычно задан заранее, если не задан - анализируем выборку, например с помощью гистограммы относительных частот, которая имитирует плотность распределения).
2. Оцениваем параметры распределения по выборке (для этого вычисляется математическое ожидание и дисперсия): σ, a для нормального, a, b - для равномерного, λ - для распределения Пуассона и так далее.
3. Составляют расчетную таблицу, по следующему алгоритму:

1)занести в таблицу число групп (наименования групп) i и соответствующие им выборочные (эмпирические) частотыn_i;

2) вычислить теоретические значения частот n_i^0 (через теоретические вероятности попадания в интервал);

3)посчитать разность между эмпирической и теоретической частотой$|n_i - n_i^0|$,возвести в квадрат полученные разности и разделить полученные квадраты разностей на теоретические частоты $\frac{|n_i-n_i^0|^2}{n_i^0}$;

4)просуммировать значения последнего столбца: $\chi^2{}_{\text{эмп.}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{|n_i-n_i^0|^2}{n_i^0}$;

4. Анализируется значение статистики$\chi^2{}_{\text{эмп.}}$ и делается вывод о соответствии (или нет) теоретическому закону распределения$\chi^2{}_{\text{теор.}}(\alpha; v)$,где

$v = k - 2$ число степеней свободы, k –колличество групп(разрядов признака), α –уровень значимости: если$\chi^2{}_{\text{эмп.}} < \chi^2{}_{\text{теор.}}(\alpha; v)$, то расхождения между распределениями статистически недостоверны.

Пример 4.23. Приведено статистическое распределение дискретной случайной величины в виде таблицы. СВ X имеет смысл числа отказов. Частоты наблюдений отказов обозначеныn_i. Используя критерий χ^2, проверить на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$

x_i	0	1	2	3
n_i	42	10	4	3

гипотезу о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона.

Решение.

Найдем объем выборки $n = \sum_{i=1}^{4} n_i = 59$.

Число $k = 4$ описывает число групп данных, приведенных в таблице наблюдений.

Выдвинем гипотезу H_0 : распределение генеральной совокупности X подчинено закону Пуассона, формула Пуассона закона распределения вероятностей имеет следующий вид

$P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ – вероятность того, что СВ X примет значение m ,то есть $X = m$;

λ –параметр распределения -среднее число появления событий в одинаковых независимых испытаниях (в нашем случае- среднее число отказов)

Вычислим оценку параметра распределения λ:

$$\lambda = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} x_i n_i = \frac{1}{59} (0 \cdot 42 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3) =$$

$$= \frac{27}{59} = 0{,}458.$$

Проведем расчеты вероятностей возможных значений СВ X:

$m = 0, p_1 = P_0(\lambda) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-0,458} = 0,632$ – вероятность того, что СВ X

примет значение 0;

$$m = 1, p_2 = P_1(\lambda) = \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} = 0,458e^{-0,458} =$$

$= 0,458 \cdot 0,632 = 0,289$ – вероятность того, что СВ X

примет значение 1;

$m = 2, p_3 = P_2(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \frac{0,458^2}{2}e^{-0,458} = 0,0663$ – вероятность того, что СВ Xпримет значение 2;

$$m = 3, p_4 = P_3(\lambda) = \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = \frac{0,458^3}{6}e^{-0,458} = 0,0101.$$

Эмпирические частоты n_iполучают в результате опыта (см.табл. выше), теоретические частоты рассчитываются по формулам. Для закона распределения Пуассона их можно найти по следующей формуле:

$$n_i^0 = n \cdot P_{i-1}(\lambda), i = 1,2,3,4;$$

Вычислим теоретические частоты$\widetilde{n_i}$:

$i = 1\ , n_1^0 = n \cdot P_0(\lambda) = 59 \cdot 0,632 = 37,3;$

$i = 2\ , n_2^0 = n \cdot P_1(\lambda) = 59 \cdot 0,289 = 17;$

$i = 3\ , n_3^0 = n \cdot P_2(\lambda) = 59 \cdot 0,0663 = 3,9;$

$$i = 4\ , n_4^0 = n \cdot P_3(\lambda) = 59 \cdot 0,0101 = 0,6.$$

Посчитаем $|n_i - n_i^0|, |n_i - n_i^0|^2, \frac{|n_i - n_i^0|^2}{n_i^0}$:

$i = 1,\ |n_1 - n_1^0| = |42 - 37,3| = 4,7;$

$$|n_1 - n_1^0|^2 = 4,7^2 = 22,09;$$

$$\frac{|n_1 - n_1^0|^2}{n_1^0} = \frac{22,09}{37,3} = 0,592;$$

$i = 2,\ |n_2 - n_2^0| = |17 - 10| = 7;$

$$|n_2 - n_2^0|^2 = 7^2 = 49;$$

$$\frac{|n_2 - n_2^0|^2}{n_2^0} = \frac{49}{17} = 2,88;$$

$$i = 3,\ |n_3 - n_3^0| = |7 - 4{,}5| = 2{,}5;$$
$$|n_3 - n_3^0|^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25;$$

$$\frac{|n_3 - n_3^0|^2}{n_3^0} = \frac{6{,}25}{4{,}5} = 1{,}39;$$

Составим расчётную таблицу. Последние две частоты, учитывая их малочисленность, объединили в одну группу, в результате появились две новые колонки, помеченные «гр.», они и используются для расчета критерия Пирсона. Отметим, что в результате изменилось число значимых групп $k = 3$:

x_i	n_i	$n_{i\text{гр.}}$	n_i^0	$n_{i\text{гр.}}^0$	$\frac{\lvert n_i - n_i^0\rvert^2}{n_i^0}$
1	42	42	37,3	37,3	0,592
2	10	10	17	17	2,88
3	4	7	3,9	4,5	1,39
4	3		0,6		
Сумма					$\mathbf{4,862}$

Эмпирический критерий находится путем суммирования данных, размещенных в последнем столбце таблицы:

$$\chi^2{}_{\text{эмп.}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{|n_i - n_i^0|^2}{n_i^0} = 0{,}592 + 2{,}88 + 1{,}39 = 4{,}826.$$

Для нахождения $\chi^2{}_{\text{теор.}} = \chi^2{}_{\text{теор.}}(\alpha; v)$, воспользуемся таблицами критических точек распределения [см. табл. Приложение 3], где $\alpha = 0{,}05 -$ уровень значимости и $v = k - 2 = 3 - 2 = 1$– число степеней свободы:

$$\chi^2{}_{\text{теор.}}(0{,}05; 1) = 3{,}8;$$

Поскольку выполнено неравенство

$\chi^2{}_{\text{эмп.}} = 4{,}826 > \chi^2{}_{\text{теор.}} = 3{,}8$, то статистическую гипотезу о том, что генеральная совокупность распределена по закону редких событий Пуассона следует отвергнуть. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо. При этом риск отвергнуть правильную гипотезу равен уровню значимости $\alpha = 0{,}05 = 5\%$, то есть в примере этот риск равен пяти процентам.

Пример 4.24. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки $n = 209$:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	7	9	28	27	30	26	21	25	22	9	5

Решение.

Вычислим параметры выборки, для нормального распределения это $a = \bar{x}$, $\sigma = S$.

Выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{11} x_i n_i = \frac{1}{209}(0{,}3\cdot 7 + 0{,}5\cdot 9 + 0{,}7\cdot 28 + \\ +0{,}9\cdot 27 + 1{,}1\cdot 30 + 1{,}3\cdot 26 + 1{,}5\cdot 21 + 1{,}7\cdot 25 + \\ +1{,}9\cdot 22 + 2{,}1\cdot 9 + 2{,}3\cdot 5) = \frac{1}{209}\cdot 263{,}5 = 1{,}261.$$

Выборочная исправленная дисперсия:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{11}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2\cdot n_i = \frac{1}{208}((0{,}3-1{,}261)^2\cdot 7 + \\ +(0{,}5-1{,}261)^2\cdot 9 + (0{,}7-1{,}261)^2\cdot 28 + \\ +(0{,}9-1{,}261)^2\cdot 27 + (1{,}1-1{,}261)^2\cdot 30 + \\ +(1{,}3-1{,}261)^2\cdot 26 + (1{,}5-1{,}261)^2\cdot 21 + \\ +(1{,}7-1{,}261)^2\cdot 25 + (1{,}9-1{,}261)^2\cdot 22 + \\ +(2{,}1-1{,}261)^2\cdot 9 + (2{,}3-1{,}261)^2\cdot 5) = \\ = \frac{1}{208}\cdot 51{,}558 = 0{,}248.$$

Выборочное исправленное среднее квадратическое отклонение:

$S = \sqrt{0,248} = 0,498.$

Выдвинем гипотезу H_0 : распределение генеральной совокупности X подчинено нормальному закону с параметрами $a = \bar{x} = 1,261, \sigma = S = 0,498.$

Проверим эту гипотезу по критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,05.$

Рассчитываем теоретические частоты $\widetilde{n_i}$по формуле $n_i^0 = \frac{nh}{S} \cdot \varphi(u_i)$, где $u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$, $h = 0,2$– шаг между вариантами, $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$-функция Гаусса:

$i = 1,\ u_1 = \frac{x_1 - \bar{x}}{S} = \frac{0,3 - 1,261}{0,498} = \frac{-0,961}{0,498} = -1,93;$

$\varphi(-1,93) = \varphi(1,93) = 0,062;$

$$n_1^0 = \frac{209 \cdot 0,2}{0,498} \cdot 0,062 = \frac{2,5916}{0,498} = 5,204;$$

$$\frac{(n_1 - n_1^0)^2}{n_1^0} = \frac{(7 - 5,204)^2}{5,204} = 0,62.$$

Аналогичные вычисления делаем при $i = 2$ и так далее, полученные данные занесём в расчетную таблицы:

x_i	u_i	$\varphi(u_i)$	n_i^0	n_i	$\frac{(n_i - n_i^0)^2}{n_i^0}$
0,3	-1,930	0,062	5,204	7	0,620
0,5	-1,528	0,124	10,422	9	0,194
0,7	-1,126	0,212	17,762	28	5,901
0,9	-0,725	0,307	25,760	27	0,060
1,1	-0,323	0,379	31,793	30	0,101
1,3	0,079	0,398	33,390	26	1,636
1,5	0,481	0,355	29,842	21	2,620
1,7	0,882	0,270	22,697	25	0,234
1,9	1,284	0,175	14,689	22	3,638
2,1	1,686	0,096	8,090	9	0,102
2,3	2,087	0,045	3,792	5	0,385
Сумма					**15,491**

Наблюдаемое(эмпирическое) значение критерия вычислим по формуле:

$$\chi^2{}_{\text{эмп.}} = \sum_{i=1}^{11} \frac{\left|n_i - n_i^0\right|^2}{n_i^0} = 15{,}491.$$

По таблице критических значений при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числе степеней свободы $v = k - 3 = 11 - 3 = 8$,по таблице [см. табл. Приложение 3], найдем теоретическое (критическое) $\chi^2{}_{\text{теор.}}(0{,}05; 8) = 15{,}5$. Так как$\chi^2{}_{\text{эмп.}} < \chi^2{}_{\text{теор.}}$, нулевую гипотезу о нормальном распределении можно принять при данном уровне значимости.

Задания для самостоятельного решения:

9.Выполнить следующие задания:

1.Дан вариационный ряд {1,1,2,2,4,4,4,5,5,5,5,5}. Необходимо: **а)** построить полигон распределения частот; **б)** найти моду, медиану и размах выборки; **в)** найти и построить эмпирическую функцию распределения; **г)** вычислить выборочную среднюю, дисперсию; **д)** Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

2. Выборка имеет следующую реализацию 10,20,20,5,15,20,5,10,20,5. **а)** Построить вариационный ряд, статистический ряд распределения частот и относительных частот; **б)** Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию; **в)** Найти моду, медиану, размах выборки.

3. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5
n_i	2	18	40	25	6	5	4

Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, моду и медиану.

4.Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	4	7	8	12	17
n_i	2	4	5	6	3

Найти распределение относительных частот и основные характеристики вариационного ряда.

5. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты в (мм): 92; 94; 103; 105; 106. Найти выборочную среднюю длину стержня; выборочную и «исправленную» выборочную дисперсии ошибок прибора.

6. Найти и построить эмпирическую функцию распределения выборки:

x_i	2	4	6
n_i	10	15	25

7. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению статистического ряда:

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала n_i
1	2-5	6
2	5-8	10
3	8-11	4
4	11-14	5

8. Записать в виде статистического распределения частот выборку: 3, 9, 9, 5, 3, 6, 9, 5, 5, 5, 6, 3, 6, 5, 6, 3, 3, 5, 6, 5. Определить размах выборки. Построить полигон частот.

9. В водоёме проведены измерения температуры воды в течение 20 дней.

Статистика отчета измерений:
11, 15, 18, 14, 12, 13, 11, 14, 18, 19, 18, 14, 15, 16, 14, 18, 21, 17, 13, 16.Построить непрерывный ряд распределения частот и относительных частот , гистограмму относительных частот выборки, вычислить эмпирическую функцию распределения частот.

10. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

11. Учебные достижения учащихся некоторой группы учащихся по математике характеризуются данными, представленными в таблице:

x_i	1	2	3	4	5
n_i	1	1	4	3	2

.Построить полигон частот и относительных частот.

12. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	1	2	3	5
n_i	15	20	10	5

Найти выборочную среднюю, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

13. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	0	2	3	7
n_i	6	6	2	6

Найти выборочную среднюю, дисперсию.

14.Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объёма $n = 10$:

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

15.Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объёма $n = 20$:

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

16. При измерении роста девушек некоторого института была получена следующая выборка (объема n = 30):178,160,154,183,155,153,167,186,163,155,157,175,170,166,159,173,182,167,171,169,179,165,156,179,158,

171,175,173,164,172. Необходимо построить интервальный ряд распределения частот и относительных частот. Построить гистограмму относительных частот.

17. Из генеральной совокупности извлечена выборка, объёма $n = 20$:

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

Найти исправленную выборочную дисперсию.

18.Проведено выборочное обследование магазинов города. Имеются следующие данные о величине товарооборота для 50 магазинов города (x_i – товарооборот, млн. руб., n_i – число магазинов)

x_i	25-75	75-125	125-175	175-225	225-275	275-325
n_i	12	15	9	7	4	3

Найти выборочное среднее, среднее выборочное среднеквадратичное отклонение.

19. Построить полигон, гистограмму по выборке объема $n = 100$. Сгруппированные данные приведены в таблице.

x_i	0-1	2-3	3-4	4-5	5-6
n_i	2	3	4	1	1

20. Построить эмпирическую функцию по данной выборке:

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

21. При измерении некоторой физической величины были получены следующие результаты:9,10,7,6,9,8,10,

1,7,6,5,5,4,6,10,3,8, 2, 3, 4, 5,5, 6, 7, 8,9,10,7,10,9,8,9,8.

Требуется построить статистический ряд распределения частот.

22. Дана выборка: 10,20,20,5,15,20,5,10,20,5. Найти эмпирическую функцию распределения.

23. В некотором университете, где обучаются 2000 студентов дневного отделения, была образована случайная бесповторная выборка с целью определения количества пропуска занятий (в днях) студентами в течение некоторого месяца. Полученные при этом результаты представлены в таблице:

Прогул (дней)	1–5	5–9	9–13	13–17	17–21	Итого
Количество студентов	15	20	45	12	8	100

24.Определяется средний рабочий стаж большой группы рабочих. Произведена случайная повторная выборка 900 личных листков. Средний рабочий стаж в выборке оказался равным 15,5 годам, а среднее квадратическое отклонение 4,8 года. Найти доверительные границы при оценке генеральной средней, которые можно гарантировать с вероятностью 0,95.

25. Произведено 12 измерений одним прибором (без систематической ошибки) некоторой физической величины, причем «исправленное» среднее квадратическое отклонение s случайных ошибок измерений оказалось равным 0,6. Найти точность прибора с надежностью 0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

26.Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема$n = 200$:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Ответы: 9.1.а)

x_i	1	2	4	5
n_i	2	2	3	5

б) $M_0 = 5, M_e = 3, R = 4$;

в) $F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 0{,}2, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}4, & 2 < x \le 4 \\ 0{,}7, & 4 < x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$;

г) $\bar{x}_в = 3,3, D_в = 2,41, \sigma_в \approx 1,552$;д)несмещенная оценка математического ожидания совпадает с выборочной средней $\bar{x}_в = 3,3, S^2 \approx 2,678$.

9.2.а) {5,5,5,10,10,15,20,20,20,20}- вариационный ряд;

x_i	5	10	15	20
n_i	3	2	1	4

-статистический ряд распределения частот;

x_i	5	10	15	20
ω_i	0,3	0,2	0,1	0,4

-статистический ряд распределения относительных частот; **б)** $\bar{x}_в = 13$;**в)**$M_0 = 20, M_e = 12,5, R = 4; R = 12,5$.**9.3.** $\bar{x}_в = 11,73, D_в = 0,4071, \sigma_в \approx 0,638, S^2 \approx 0,411$, $M_0 = 11,5, M_e = 12, R = 3$.

9.4

x_i	4	7	8	12	17
ω_i	0,1	0,2	0,25	0,3	0,15

$M_0 = 12, M_e = 8, R = 13$.

9.5. $\bar{x}_в = 100, D_в = 34, S^2 = 42,5$.

9.6.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0,2, & 2 < x \le 4 \\ 0,5, & 4 < x \le 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases}.$$

9.8.

x_i	3	5	6	9
n_i	5	7	5	3

$,R = 6$.

9.9. $F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 12 \\ 0{,}15, & 12 < x \le 14 \\ 0{,}45, & 14 < x \le 15 \\ 0{,}65, & 16 < x \le 18 \\ 0{,}8, & 18 < x \le 20 \\ 1, & x > 20 \end{cases}.$

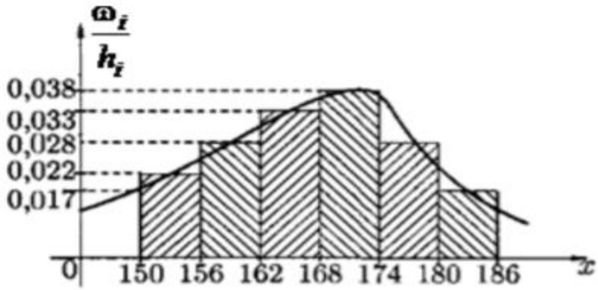
$x_i - x_{i+1}$	$[11;13)$	$[13;15)$	$[15;17)$	$[17;19)$	$[19;21)$
n_i	3	6	4	5	2
ω_i	0,15	0,3	0,2	0,25	0,1

9.12. $\bar{x}_в = 2{,}2,\ D_в = 1{,}36,\ \sigma_в \approx 1{,}166$. **9.13.** $\bar{x}_в = 3,\ D_в = 7{,}8$. **9.14.** $D_в(X) \approx 0{,}0007$.

9.15. $s^2 = 0{,}0525$.

9.16.

X	150–156	156–162	162–168	168–174	174–180	180–186
n_i	4	5	6	7	5	3
ω_i	0,13	0,17	0,20	0,23	0,17	0,10



9.17. $s^2 = 6{,}93$. **9.18.** $\bar{x}_в = 135,\ S \approx 73{,}66$.

9.20. $F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0{,}2, & 2 < x \le 6 \\ 0{,}5, & 6 < x \le 10 \\ 1, & x > 10 \end{cases}.$

9.21.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	1	1	2	2	4	4	4	5	5	5

9.22.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 5 \\ 0{,}3, & 5 < x \le 10 \\ 0{,}5, & 10 < x \le 15 \\ 0{,}6, & 15 < x \le 20 \\ 1, & x > 20 \end{cases}.$$

9.23. с вероятностью 0,997 можно утверждать, что среднее значение количества прогулов всех студентов изменяется в пределах от 8,83 до 11,41 дней.

9.24. $15{,}19 < a < 15{,}81$. **9.25.** $0{,}06 < \sigma < 1{,}14$.

9.26. ${\chi^2}_{\text{эмп.}} > {\chi^2}_{\text{теор.}}$, статистическую гипотезу о том, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону следует отвергнуть.

Приложение 1. Значение функции Гаусса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	1714	1692	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1540	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1181	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
x	Десятые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,	0540	0440	0355	0283	0224	0175	0136	0104	0079	0060
3,	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0030	0020
4,	0001									

Приложение 2. Значение функции Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767

x	Десятые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,	4773	4821	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	4961
3,	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	5000[1]

Приложение 3. Таблица распределения χ^2

k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,26
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,3	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение 4. Таблица t-распределения Стьюдента.

k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	3,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,05	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	7,09	8,29

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Письменный Д.Т. "Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам.-М.: Айрис-пресс,2008 -288с.

2. Гмурман В.Е. «Руководство к решению задач по теории вероятностей, математической статистике», СПБ, Изд-во «Профессия», 2003.-752с.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.

4. В.С. Мхиторян «Теория вероятностей и математическая статистика»: Учеб. пособие-М.: Высш. шк., 2010.-240с.

5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник для вузов – М.: Высшая школа, 2002. – 575 с.

6. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей – М.: Высшая школа, 2000. – 366 с.