ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Название кафедры»

Учебно-методическое пособие
по дисциплине
«Математика»

«Функции нескольких переменных»

Автор
Ермилова О.В.

Ростов-на-Дону, 2021

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения всех технических направлений подготовки бакалавриата.

Составлено для проведения теоретических и практических работ по дисциплине «Математика». С целью овладения студентами теоретическими и практическими навыками решения задач по разделу «Функции многих переменных». В пособии рассмотрены следующие вопросы: функции от двух и n переменных, область определения, геометрическое толкование, частные производные, дифференцирование сложных функций, неявные функции и их дифференцирование, полный дифференциал и его применение к приближенным вычислениям, экстремумы функции двух переменных, градиент и производная по направлению, касательная плоскость и нормаль к поверхности. В пособии приведены основные теоретические сведения. Они иллюстрируются разобранными примерами. Имеется большое количество уже решённых примеров с рисунками, что значительно упрощает усвоение материала и задач для самостоятельного решения, что способствует закреплению определённых навыков и помогает справится с поставленной задачей.

Авторы

Старший преподаватель каф. «Прикладная математика» Ермилова О.В.

Оглавление

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции одной независимой переменной, например, $y = f(x)$ не охватывают всех зависимостей, существующих в природе. Поэтому нам придётся расширить известное понятие функциональной зависимости на случай функций нескольких переменных.

1.Функция двух переменных, область определения, график функции.

Пусть D некоторое множество точек в n -мерном пространстве. Если задан закон f, в силу которого каждой точке $M(x_1; x_2; \dots; x_n) \in D$ ставится в соответствие некоторое действительное число u , то говорят, что на множестве D определена функция $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$. Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ называют независимыми переменными или аргументами функции, а переменную u – зависимой переменной.

Например, формула $V = \pi R^2 h$- выражающая объем цилиндра, является функцией двух переменных R и h, где R – радиус основания цилиндра и h – высота цилиндра;

Функцию двух переменных принято записывать в виде $z = f(x; y)$,а функции трех переменных в виде $u = f(x; y; z)$.

Например, функция двух независимых переменных $z = 1 - x - y$ определяет уравнение плоскости;

Замечание: функции многих переменных можно обозначать и символом $u = f(M)$, указывая размерность пространства, которому принадлежит точка M.

Множество точек $M(x_1; x_2; \dots; x_n)$, для которых функция $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ определена, называют **об-**

ластью определения этой функции.

Обозначение: $D(f)$.

Областью определения функции двух переменных является некоторое множество точек плоскости, а областью определения функции трех переменных – некоторое множество точек трехмерного пространства. Например, областью определения функции двух переменных $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ - множество точек плоскости R^2, а областью определения функции трех переменных $u = x + y + z$ -множество точек пространство R^3.

Множество всех чисел u вида $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, где $(x_1; x_2; \dots; x_n) \in D(f)$ называют **множеством значений функции**.

Пример 1. Найти область определения функции:

а) $z = 3 - x - 3y$; **б)** $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

в) $z = ln(x + y - 1)$.

Решение.

а) Так как, аргументы x, y, могут принимать любые значение, то областью определения данной функции является вся координатная плоскость, то есть $(x; y) \in R^2$;

б) Функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ определена, если $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, то есть $x^2 + y^2 \leq 1$. Таким образом, областью определения функции является множество точек, лежащих внутри и на границе круга радиуса $R = 1$, с центром в начале координат (рис.1. а));

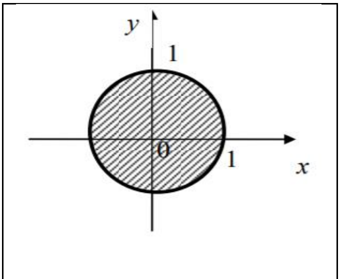


Рис.1.а)

в) Областью определения функции $z = ln(x + y - 1)$ будет множество точек плоскости Oxy, для которых определена логарифмическая функция, то есть при $x + y - 1 > 0$, $y > 1 - x$. Таким образом, областью определения данной функции является множество точек, лежащих выше прямой $y = 1 - x$(рис.1. б)).

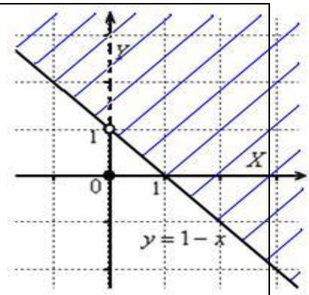


Рис.1.б)

Графиком функции двух переменных $z = f(x; y)$в прямоугольной системе координат Oxy называется геометрическое место точек в трехмерном пространстве, координаты которых$(x; y; z)$ удовлетворяют уравнению $z = f(x; y)$.
Таким образом, если графиком функции одной переменной $y = f(x)$является некоторая линия на плоскости, например, парабола, то графиком функции двух переменных $z = f(x; y)$ является некоторая поверхность, которая располагается в трёхмерном пространстве R^3 . С элементарным примером поверхности мы хорошо знакомы ещё из курса аналитической геометрии – это плоскость.

Например, графиком функции $z = 4 - x - 2y$ или $x + 2y + z = 4$,что тоже самое, является плоскость (рис.2), а графиком функции $z = x^2 + y^2$ является параболоид вращения (рис. 3).

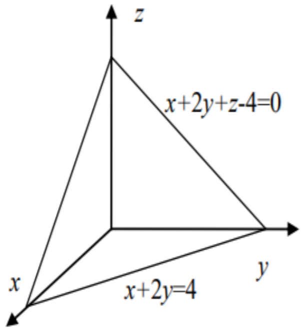


Рис. 2

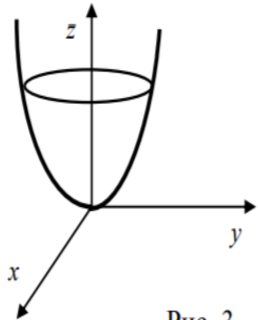


Рис. 3

Замечание: как мы уже знаем графиком функции двух переменных, является поверхность, но иногда график функции может представлять собой, пространственную прямую, либо даже единственную точку.

Задания для самостоятельного решения.

1. Найти область определения и область непрерывности функции $z = f(x;y)$ и изобразить ее графически.

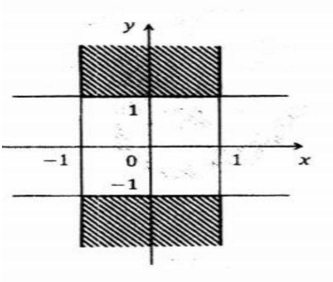
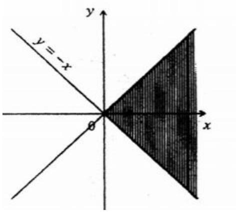
1	$z = 2 - x - y$	**11**	$z = \sqrt{2 - x^2 - 2y^2}$
2	$z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$	**12**	$z = ln(3x - y^2)$
3	$z = ln(xy)$	**13**	$z = arcsin(2x + y)$
4	$z = ln\left(1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}\right)$	**14**	$z = \dfrac{1}{9 - 9x^2 - 9y^2}$
5	$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$	**15**	$z = \sqrt{x^2 + y}$

6	$z=\sqrt{x^2+y^2-9}$;	**16**	$z=\dfrac{1}{4-x^2-4y^2}$
7	$z=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{y^2-1}$	**17**	$z=ln(x^2+2y^2-2)$
8	$z=\sqrt{x-y}-\sqrt{y+x}$	**18**	$z=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{xy}$
9	$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$	**19**	$z=\dfrac{x+5}{\sqrt{x+y}}$
10	$z=arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$	**20**	$z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

Ответы:

1. вся координатная плоскость, то есть $(x;y)\in R^2$	**11.** $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}\le 1$- внутренняя часть эллипса $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$,включая граничные точки
2. $x^2+y^2<1$ –все точки, лежащие внутри круга с центром в точке (0;0) радиусом единичной длины, за исключением граничной области	**12.** $y^2>3x$ -все точки плоскости, лежащие вне параболы $y^2=3x$

3. $x, y > 0$ или $x, y < 0$ все точки плоскости, лежащие в первой и третьей четверти	**13.** $\frac{-1-y}{2} \leq x \leq \frac{1-y}{2}$ -часть области, заключённая между двумя прямыми $y = 1 - 2x, y = -1 - 2x$
4. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1 -$ внутренняя часть эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$,с полуосями $a = 2, b = 3$, за исключением граничной области	**14.** $x^2 + y^2 \neq 1$-все точки плоскости Oxy за исключение точек, лежащих на окружности $x^2 + y^2 = 1$
5. $x^2 + y^2 \leq 4 -$ точки, лежащие внутри окружности $x^2 + y^2 = 4$ и на её границе	**15.** $y \geq -x^2$ -все точки плоскости Oxy, лежащие на параболе и вне параболы $y = -x^2$;
6. $x^2 + y^2 \geq 9 -$ точки, лежащие на границе окружности $x^2 + y^2 = 9$ и вне её.	**16.** $4 - x^2 - 4y^2 \neq 0$-все точки плоскости Oxy за исключение точек, лежащих на эллипсе $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

<table>
<tr><td>7. $\begin{cases} x\epsilon[-1;1] \\ y\epsilon(-\infty;1]\cup[1;+\infty) \end{cases}$

</td><td>17. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}\geq 1$-точки лежащие на границе и вне эллипса $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$</td></tr>
<tr><td>

8. $\begin{cases} y\leq x \\ y\geq -x \end{cases}$</td><td>18. $x>0, y>0$- все точки плоскости лежащие в первой четверти</td></tr>
<tr><td>9. $x\geq\sqrt{y}$- все точки лежащие правее ветви параболы $y=x^2$</td><td>19. $y>-x$ -все точки плоскости, лежащие выше прямой $y=-x$</td></tr>
<tr><td>10. $-y\leq x\leq y$ -часть области, заключённая между двумя прямыми $y=-x, y=x$</td><td>20. $x^2+y^2\neq 0$- все точки плоскости Oxy за исключение точки $O(0;0)$.</td></tr>
</table>

2. Линии уровня.

Пусть имеется функция $z=f(x;y)$ график которой

представляет собой некоторую поверхность. Построение графиков функций двух переменных во многих случаях весьма затруднительно. Поэтому рассмотрим возможность изображения графика функций двух переменных, основанный на сечении поверхности $z = f(x;y)$ плоскостью $z = C$, где C – любое число (эта плоскость параллельна плоскости Oxy и пересекает ось z в точке $z = C$). Спроецируем линию пересечения этой плоскости с поверхностью $z = f(x;y)$на плоскость Oxy и получим так называемую линию уровня функции $z = f(x;y)$.Таким образом, **линией уровня функции** $z = f(x;y)$называется множество точек $(x;y)$плоскости Oxy, в которых функция принимает одно и то же постоянное значение C, то есть $z = C$.

Придавая различные значения параметру C, можно получить множество линий уровня функции $z = f(x;y)$.

Для лучшего понимания этого термина будем сравнивать ось Oz с высотой**:** чем больше значение z – тем больше высота, чем меньше значение z – тем высота меньше.

Образно говоря, **линии уровня** – это горизонтальные «срезы» поверхности на различных высотах. Данные сечения проводятся плоскостями $z = C$, после чего проецируются на плоскость. Таким образом, линии уровня помогают выяс- нить, как выглядит та или иная поверхность.

Пример 2. Записать уравнение семейства линий уровня функции $z=(x-2)^2+(y-1)^2$.Выделить линию уровня, проходящую через точку$M_0(1;1)$. Исследовать форму данной поверхности с помощью линий уровня.

Решение.

Исходя из определения уравнение линии уровня принимает вид$(x-2)^2+(y-1)^2=C$.Выделим линию уровня, проходящую через точку $M_0(1;1)$, то есть найдём значение постоянной C, при $x=1, y=1$:

$$(1-2)^2+(1-1)^2=C, C=1;$$

Тогда уравнение линии уровня, проходящую через точку $M_0(1;1)$, принимает вид:

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$ –уравнение окружности с центром в точке$(2;1)$, с радиусом $R=1$.

Исследуем форму данной поверхности с помощью уравнений линий уровня $(x-2)^2+(y-1)^2=C$.Очевидно, что в данном случае $z=C\geq 0$ высота не может принимать отрицательные значения (так как сумма квадратов не может быть отрицательна). Таким образом, поверхность располагается в верхнем полупространстве.

Поскольку в условии не сказано, на каких конкретно высотах нужно «срезать» линии уровня, то мы можем выбрать несколько значений z на своё усмотрение.

Заметим, что все «срезы» проецируются на плоскость, и поэтому у точек записываются две, а не три координаты.
Исследуем поверхность на нулевой высоте, для этого поставим значение $z = C = 0$ в равенство $(x-2)^2 + (y-1)^2 = z$:

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = C$,

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 0$,

$(x-2)^2 = 0$,$(y-1)^2 = 0$,

$x - 2 = 0, y - 1 = 0$,

$x = 2, y = 1$-решением данного уравнения является точка$(2; 1)$. То есть, при $C = 0$ линия уровня представляет собой точку.
Как мы уже убедились, ранее, для высоты $z = 1$линия уровня $z = C$представляет собой окружность с центром в точке $(2; 1)$единичного радиуса.

Теперь выберем, например, плоскость $z = 9$ и «разрезаем ей» исследуемую поверхность

$(x-2)^2+(y-1)^2 = z$(подставляем в исходное урав-

нение $z=9$):

$(x-2)^2+(y-1)^2=9;$

Таким образом, для высоты $z=9$

поверхности $z=(x-2)^2+(y-1)^2$ линия уровня

представляет собой окружность с центром в точке $(2;1)$, радиуса 3 .

Давайте построим ещё одну линию уровня, например, для $z=81$:

$(x-2)^2+(y-1)^2=81$

– окружность с центром в точке $(2;1)$и

радиуса 9.

Линии уровня, располагаются на плоскости, но каждая линия подписывается – какой высоте она соответствует. Изобразим то, что у нас получилось (рис.4).

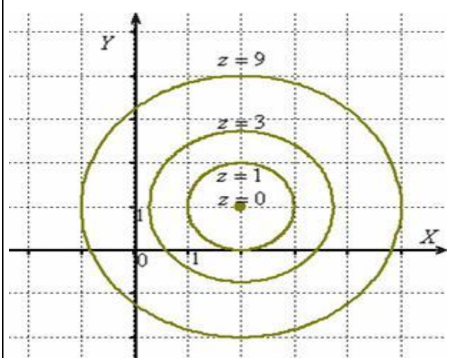


Рис.4

Нетрудно понять, что другие линии уровня рассматриваемой поверхности тоже представляют собой окружности, при этом, чем выше мы поднимаемся (увеличиваем значение «зет»)

– тем больше становится радиус. Таким образом, исходная поверхность представляет собой бесконечную чашу, вершина которой расположена на плоскости $z = 0$.

Пример 3. Найти линий уровня функции $z = \frac{x}{\sqrt{y}}$.

Решение.

Линия уровня $z = C$ определяется уравнением

$C = \frac{x}{\sqrt{y}}$или $x = C\sqrt{y}$- полу парабола, расположенная в

первой четверти плоскости Oxy при $C > 0$,во второй

четверти при $C < 0$.При $C = 0$,получим $x = 0$-полуось

$Oy(y > 0, x = 0)$.

Замечание: аналогично определяются поверхности уровня функции трех переменных $u = f(x; y; z)$. Поверхностью уровня функции $u = f(x; y; z)$ называется поверхность $f(x; y; z)$, в точках которой функция принимает одно и то же значение $u = C$.

Пример 4. Найти поверхности уровня функции $u = x^2 - y^2 + z^2$.

Решение.

Уравнение семейства поверхностей уровня имеет вид $x^2 - y^2 + z^2 = C$. Если $C = 0$, то получаем $x^2 - y^2 + z^2 = 0$- конус; если $C < 0$, то $x^2 - y^2 + z^2 = C$ – семейство двуполостных гиперболоидов.

Замечание: в дальнейшем ограничимся рассмотрением функций двух переменных, так как все основные понятия и теоремы, сформулированные для функций двух переменных, легко обобщаются на случай большего числа переменных.

3. Предел функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных.

Понятия предела и непрерывности функции двух переменных аналогичны случаю одной переменной. Прежде всего, введем понятие δ- окрестности данной точки $M_0(x_0; y_0)$. Пусть $M_0(x_0; y_0)$ произвольная точка плоскости, под δ – окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$ понимается множество всех точек плоскости $N(x; y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$. Другими словами – окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$ – это все внутренние точки круга с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ и радиусом δ.

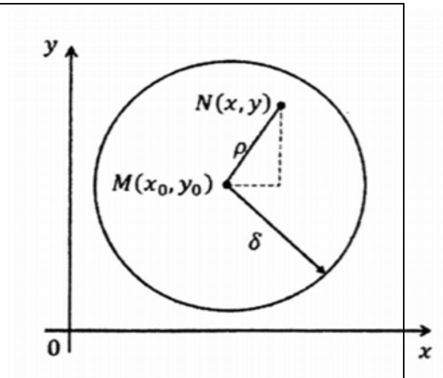


Рис.5

Для дальнейшего удобства введём обозначение:

$\rho = |\overline{M_0N}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$-расстояние между точками $N(x; y)$ и $M_0(x_0; y_0)$.

Тогда для нахождения точки $N(x; y)$ внутри круга радиуса δ будет выполняться условие $\rho < \delta$.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ кроме, быть может, самой этой точки.

Число a называется **пределом функции** $z = f(x; y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или в точке $M_0(x_0; y_0)$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что для всех точек $N(x; y)$, отличных от точки $M_0(x_0; y_0)$ и отстоящих от этой точки на расстояние ρ $(0 < \rho < \delta)$ выполняется неравенство $|f(x; y) - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $a = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y)$

Дадим геометрическую интерпретацию понятия предела в трехмерном пространстве.

Рассмотрим функцию $z = f(x; y)$ определенную на всей плоскости Oxy ,

причем $f(x_0; y_0) = a$. Спроектируем точку A, лежащую на графике функции $z = f(x; y)$ на

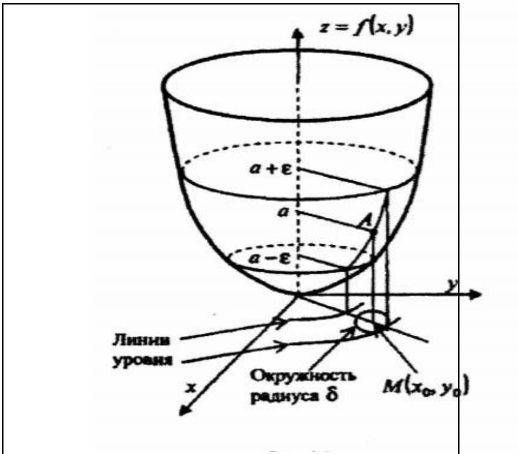


Рис.6

плоскость Oxy . Соответствующую точку $M_0(x_0;y_0)$ на

плоскости выберем центром такого радиуса δ, все точки которого будут находится между линиями уровня. Тогда для всех точек $N(x;y)$ этого круга, отличных от точки $M_0(x_0;y_0)$ и отстоящих от этой точки на расстояние ρ $(0<\rho<\delta)$, выполняется неравен-

ство $|f(x;y)-a|<\varepsilon$.

Таким образом, $a=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$.

Другими словами, **геометрический смысл** предела функции двух переменных состоит в следующем. Каково бы ни было произвольное число $\varepsilon>0$, найдется

число δ -окрестность точки $M_0(x_0;y_0)$, что во всех ее

точках $N(x;y)$, отличных от $M_0(x_0;y_0)$, аппликаты (z)

соответствующих точек поверхности $z=f(x;y)$ отли-

чаются от числа a по модулю меньше, чем на ε .

Замечание:

1) Вычисление пределов функции двух переменных является более сложно задачей по сравнению с вычислением пределов функции одно переменной. Это связано с тем, что точка N может стремиться к точке M_0

по любому направлению на плоскости в отличие от функции одной переменной, где переменная x может стремиться к числу $x_0(x \to x_0)$ на числовой прямой

только справа или слева. Получающиеся при этом многочисленные пределы функции двух переменных должны совпадать друг с другом. В этом случае, легче доказать отсутствие предела функции $z = f(x;y)$

при $N(x;y) \to M_0(x_0;y_0)$,для этого достаточно выбрать

два таких направления, движение по которым приводит к различным пределам.

2)Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной. Это означает, что справедливы следующие утверждения: если функции $f(M)$ и $g(M)$

определены на множестве D и имеют в точке

$M_0(x_0;y_0)$ этого множества пределы a и b В соответ-

ственно, то и функции $f(M) \pm g(M), f(M) \cdot g(M)$,

$\frac{f(M)}{g(M)}, (g(M) \neq 0)$ имеют в точке M_0 пределы, которые

соответственно равны

$a \pm b, a \cdot b, \dfrac{a}{b}(b \neq 0)$.

Пример 5. Найти предел: **а)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \frac{x^3 + y^3}{x^4 + y^4}$;**в)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\left[\frac{0}{0}\right]$-числитель и знаменатель обращается в ноль в единственной точке$(0;0)$,выясним существует ли там предел?

Проведём небольшое исследование. Будем приближаться к точке $O(0;0)$ по прямой $y=kx$, где k— некоторое число. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-k^2)}{x^2(1+k^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-k^2}{1+k^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Функция $z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ в точке $O(0;0)$предела не имеет, так как при разных значениях k функция имеет различные предельные значения;

б) Будем приближаться к точке $x\to+\infty, y\to+\infty$ по прямой $y=kx$:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y=kx}}\frac{x^3+k^3x^3}{x^4+k^4x^4}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(\frac{1}{x}+\frac{k^3}{x}\right)}{x^4(1+k^4)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{k^3}{x}}{1+k^4}=\frac{0}{1+k^4}=0$$

, так как при различных значениях k, функция имеет единственное предельное значение 0, то предел функции $z=\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$,при $x\to+\infty, y\to+\infty$ равен нулю;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{kx^2+4}}{kx^2}=$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(2-\sqrt{kx^2+4}\right)\left(2+\sqrt{kx^2+4}\right)}{kx^2\left(2+\sqrt{kx^2+4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2^2-\left(\sqrt{kx^2+4}\right)^2}{kx^2\left(2+\sqrt{kx^2+4}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{4-kx^2-4}{kx^2\left(2+\sqrt{kx^2+4}\right)} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{kx^2\left(2+\sqrt{kx^2+4}\right)} = -\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\sqrt{kx^2+4}} = -\frac{1}{4}.$$

Непрерывность и точки разрыва.

Функция $z = f(x;y)$ называется **непрерывной в точке** $M_0(x_0;y_0)$ если она:

1) определена в этой точке и некоторой её окрестности;

2) имеет предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$;

3) этот предел равен значению функции z в точке M_0,

то есть $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$ или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется **непрерывной в этой области**. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются точками разрыва этой функции. Точки разрыва функции $z = f(x;y)$ могут образовывать целые линии разрыва, а иногда и более сложные геометрические образы. Так, например, функция $z = \frac{3}{y+x}$ имеет линию разрыва $y = -x$.

Можно дать другое, равносильное приведенному выше, определению непрерывности функции $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$. Обозначим

$\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0)$. Величины Δx и Δy называются приращениями аргументов x и y, а Δz — полным приращением функции $f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$.

Функция $z = f(x;y)$ называется **непрерывной в точке** $M_0(x_0;y_0)$, если выполняется равенство $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$,

то есть полное приращение функции в этой точке стремится к нулю, когда приращения ее аргументов x и y стремится к нулю.

Пользуясь определением непрерывности и теоремами о пределах, можно так же доказать, что арифметические операции над непрерывными функциями и построение сложной функции из непрерывных функций приводит к непрерывным функциям.

Пример 6. Найти точки разрыва функции:

а) $z = \frac{x^3 y}{x^2 - y}$;**б)** $z = \frac{x-y}{x+y}$;**в)** $z = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$.

Решение.

а) Функция потеряет смысл, если знаменатель обратится в ноль, то есть, когда $x^2 - y = 0$ или $y = x^2$. Сле-

довательно, данная функция имеет линией разрыва параболу $y = x^2$;

б) Функция потеряет смысл, если знаменатель обратится в ноль, то есть, когда $x + y = 0$ или $y = -x$. Та-

ким образом, данная функция имеет линией разрыва прямую $y = -x$.

в) Функция потеряет смысл, если знаменатель обратится в ноль $x^4 + y^4 = 0$, то есть при $x = 0$ и $y = 0$.

Следовательно, данная функция имеет разрыв в точке O (0;0).

4. Частные производные функций нескольких переменных и их геометрический смысл.

Пусть задана функция $z = f(x;y)$. Так как x, y - независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять своё значение.

Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным: $x \to \Delta x$, $y \to y$. Тогда z получит приращение, которое называется частным приращением функции z по переменной x.

Обозначение:

$$\boldsymbol{d_x z = \Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)};$$

Аналогично получаем частное приращение функции z по переменной y:

$$d_y z = \Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y);$$

Частными производными функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ по переменной x и по переменной y соответственно, называются пределы (если они существуют и конечны) вида:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y};$$

Обозначения:

$\frac{\partial z}{\partial x}, z'_x, \frac{\partial f}{\partial x}, f'_x$ –частная производная функции z по переменной x;

$\frac{\partial z}{\partial y}, z'_y, \frac{\partial f}{\partial y}, f'_y$ – –частная производная функции z по переменной y.

Замечание: если необходимо, в скобках указывается точка$(x_0; y_0)$,в которой вычислены частные производные, это записывается следующим образом: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0; y_0)}$ или $z'_x(x_0; y_0)$.

Итак, для функции двух переменных $z = f(x; y)$рассматриваются частные производные по переменной x и по переменной y.

Из определения частных производных следует правило их нахождения: частная производная по x есть обыкновенная производная по x функции $f(x; y)$ вычисленная при условии, что $y = const$. При этом используются обычные правила и формулы дифференцирования функции одной переменной.

Аналогично, если $u = f(x; y; z)$,то u'_x вычисляют, полагая $y, z = const$;

u'_y вычисляют при $x, z = const$; u'_z вычисляют при $x, y = const$.

Пример 7. Найти частные производные функции: **а)** $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$;**б)** $z = cos\frac{x^2}{y}$;
в) $z = arctg\,\frac{x+y}{x-y}$;**г)** $u = (sinx)^{yz}$.

Решение.

а) Находим частную производную функции z по переменной x ,учитывая, что $y = const$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1)'_x = (x^4)'_x - 2y^3(x^2)'_x +$$
$$+(y^5 + 1)'_x = 4x^3 - 4xy^3;$$

Находим частную производную функции z по переменной y ,учитывая, что $x = const$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1)'_y = (x^4)'_y - 2x^2(y^3)'_y +$$
$$+(y^5)'_y + (1)'_y = -6x^2y^2 + 5y^4;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(cos\frac{x^2}{y}\right)'_x = -sin\frac{x^2}{y} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right)'_x =$

$$= -sin\frac{x^2}{y} \cdot \frac{1}{y} \cdot (x^2)'_x = -\frac{2x}{y}sin\frac{x^2}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(cos\frac{x^2}{y}\right)'_y = -sin\frac{x^2}{y} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right)'_y =$$

$$= -sin\frac{x^2}{y} \cdot x^2 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)'_y = -sin\frac{x^2}{y} \cdot x^2 \cdot (y^{-1})'_y =$$

$$= -sin\frac{x^2}{y} \cdot x^2 \cdot (-y^{-2}) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 sin\frac{x^2}{y};$$

в) $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(arctg\,\frac{x+y}{x-y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x =$

$$= \frac{1}{\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x-y)^2}} \cdot \frac{(x+y)'_x \cdot (x-y)-(x-y)'_x (x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2} \cdot \frac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= -\frac{2y}{2x^2+2y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(arctg\frac{x+y}{x-y}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_y =$$

$$= \frac{1}{\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x-y)^2}} \cdot \frac{(x+y)'_y \cdot (x-y)-(x-y)'_y \cdot (x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2} \cdot \frac{x-y-(-1)(x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{2x}{2x^2+2y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

г) Находим частную производную функции u по переменной x ,учитывая, что $y,z = const$,при фиксированном значении y,z производная функции $u = (sinx)^{yz}$ по переменной x находится как производная степенной функции $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ((sinx)^{yz})'_x = yz(sinx)^{yz-1}(sinx)'_x =$$

$$= yz(sinx)^{yz-1}cosx;$$

При фиксированном значении x,z производная функции $u = (sinx)^{yz}$ по переменной y находится как производная показательной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = ((sinx)^{yz})'_y = (sinx)^{yz} \cdot ln(sinx) \cdot (yz)'_y =$$

$$= (sinx)^{yz} \cdot ln(sinx)z \cdot (y)'_y = (sinx)^{yz} \cdot ln(sinx) \cdot z;$$

При фиксированном значении x,y производная функции $u = (sinx)^{yz}$ по переменной z находится как производная показательной функции$(a^u)' = nu^{n-1} \cdot u'$:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = ((sinx)^{yz})'_z = (sinx)^{yz} \cdot ln(sinx) \cdot (yz)'_z =$$
$$= (sinx)^{yz} \cdot ln(sinx) \cdot y(z)'_z = (sinx)^{yz} \cdot ln(sinx) \cdot y.$$

Пример 8. Показать, что функция
$u = x^3 + 7x^2y + 2xz^2 - 3y^3 + 4xyz + z^3$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3u.$

Решение

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^3 + 7x^2y + 2xz^2 - 3y^3 + 4xyz + z^3)'_x =$$
$$= 3x^2 + 14xy + 2z^2 + 4yz;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^3 + 7x^2y + 2xz^2 - 3y^3 + 4xyz + z^3)'_y =$$
$$= 7x^2 - 9y^2 + 4xz;$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^3 + 7x^2y + 2xz^2 - 3y^3 + 4xyz + z^3)'_z =$$
$$= 4xz + 4xy + 3z^2;$$

Умножая обе части первого равенства на x, второе - на y ,третьего на z и складывая их, получим:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = x(3x^2 + 14xy + 2z^2 + 4yz) +$$
$$+y(7x^2 - 9y^2 + 4xz) + z(4xz + 4xy + 3z^2) =$$
$$= 3x^3 + 14x^2y + 2xz^2 + 4xyz + 7x^2y - 9y^3 +$$
$$+4xyz + 4xz^2 + 4xyz + 3z^3 = 3x^3 + 21x^2y +$$
$$+6xz^2 - 9y^3 + 12xyz + 3z^3 = 3(x^3 + 7x^2y +$$
$$= +2xz^2 - 3y^3 + 4xyz + z^3) = 3u.$$

Таким образом, $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3u$,что и требовалось показать.

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных $z = f(x;y)$.

Как известно, графиком функции является некоторая поверхность. Графиком функции $z = f(x;y_0)$ является линия пересечения этой поверхности с плоскостью $y = y_0$ (плоскость параллельная плоскости Oxz)
Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной, заключаем, что $f'_x(x_0;y_0) = tg\alpha$, где α — угол между осью Ox и

касательной, проведенной к кривой $z = f(x;y_0)$в точке

$M_0\big(x_0;y_0;f(x_0;y_0)\big)$(рис. 7).

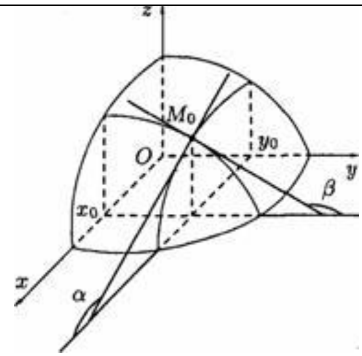


Рис.7

Аналогично, $f'_y(x_0;y_0) = tg\beta$.

Задания для самостоятельного решения.

2. Найти частные производные первого порядка ФНП по каждому аргументу:

1	$z=\frac{x}{y^3}+\frac{y}{x^3}-\frac{1}{6x^2y}$	**11**	$z=\sqrt{x^2+y^2}$
2	$z=\frac{xy}{x-y}$	**12**	$z=x^2-2x\sqrt{y}$
3	$z=ln\left(\frac{x}{y}\right)$	**13**	$u=\frac{y^3-2x^3}{lnz}$
4	$u=x^{\frac{y}{z}}$	**14**	$z=x^y+y^x$
5	$z=xyln(x+y)$	**15**	$z=e^{x^3-3y^2}$
6	$z=x^2+sin(xy)$	**16**	$z=\frac{x}{x^2+y^2}$
7	$z=e^{\frac{x-4}{y-2}}$	**17**	$z=arctgxy$
8	$u=e^{x^2+y^2}\cdot sin^2z$	**18**	$z=xe^{x-2y}$
9	$z=x^2ctg\left(\frac{xy}{2}\right)$	**19**	$u=\frac{3^{x-y}}{cos2z}$
10	$u=2^{x-2y+3z}$	**20**	$u=arcsin\frac{xz}{\sqrt{y}}$

Ответы:

1. $z'_x = \frac{1}{y^3} - \frac{3y}{x^4} + \frac{1}{3x^3y}$; $z'_y = -\frac{3x}{y^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{6x^2y^2}$.	**11.** $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
2. $z'_x = -\frac{y^2}{(x-y)^2}$; $z'_y = \frac{x^2}{(x-y)^2}$.	**12.** $z'_x = 2(x-\sqrt{y})$; $z'_y = -\frac{x}{\sqrt{y}}$.
3. $z'_x = \frac{1}{x}$; $z'_y = -\frac{1}{y}$.	**13.** $u'_x = -\frac{6x^2}{lnz}$; $u'_y = \frac{3y^2}{lnz}$; $u'_z = \frac{2x^3-y^3}{zln^2z}$.
4. $u'_x = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$; $u'_y = \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}lnx$; $u'_z = -\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}lnx$.	**14.** $z'_x = yx^{y-1} + y^x lny$; $z'_y = x^y lnx + xy^{x-1}$.
5. $z'_x = yln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$; $z'_y = xln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$.	**15.** $z'_x = 3x^2e^{x^3-3y^2}$; $z'_y = -6ye^{x^3-3y^2}$.
6. $z'_x = 2x + ycos(xy)$; $z'_y = xcos(xy)$.	**16.** $z'_x = \frac{3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$; $z'_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

7. $z'_x = \frac{1}{y-2} e^{\frac{x-4}{y-2}}$; $z'_y = \frac{x-4}{2-y} e^{\frac{x-4}{y-2}}$.	**17.** $z'_x = \frac{y}{1+(xy)^2}$; $z'_y = \frac{x}{1+(xy)^2}$.
8. $u'_x = 2xe^{x^2+y^2} \cdot sin^2 z$; $u'_y = 2ye^{x^2+y^2} \cdot sin^2 z$; $u'_z = e^{x^2+y^2} \cdot sin2z$.	**18.** $z'_x = (1+x)e^{x-2y}$; $z'_y = -2xe^{x-2y}$.
9. $z'_x = 2xctg\left(\frac{xy}{2}\right) - \frac{x^2y}{2sin^2\left(\frac{xy}{2}\right)}$; $z'_y = -\frac{x^3y}{2sin^2\left(\frac{xy}{2}\right)}$.	**19.** $u'_x = \frac{3^{x-y}ln3}{cos2z}$; $u'_y = -\frac{3^{x-y}ln3}{cos2z}$; $u'_z = 4 \cdot 3^{x-y} ln3tg2z$.
10. $u'_x = 2^{x-2y+3z}\ ln2$; $u'_y = -2^{x-2y+3z+1}\ ln2$; $u'_z = 2^{x-2y+3z} 3\ ln2$.	**20.** $u'_x = \frac{z}{\sqrt{y-(xz)^2}}$; $u'_y = -\frac{xz}{2y\sqrt{y-(xz)^2}}$; $u'_z = \frac{x}{\sqrt{y-(xz)^2}}$.

5. Полное приращение и полный дифференциал функции $z = f(x;y)$.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x;y)$заданную в некоторой области. Пусть $M_0(x_0;y_0)$— точка этой области. Найдем изменение этой функции при переходе из точки $M_0(x_0;y_0)$ в точку $M(x;y)$ той же области.

Разность значений функции в точках M и M_0 называет-

ся **полным приращением** функции $z = f(x;y)$.
Обозначение: Δz или $\Delta f(x;y)$
Таким образом, $\Delta z = f(M) - f(M_0) = f(x;y) - f(x_0;y_0)$.
Обозначим приращения аргументов x и y при переходе из точки M_0 в точку M через Δx и Δy : $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, откуда $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$,тогда $\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0;y_0)$.
Функция $z = f(x;y)$ называется **дифференцируемой** в точке $M(x;y)$,если её полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta \boldsymbol{z} = \boldsymbol{A} \cdot \Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{B} \cdot \Delta \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta} \cdot \Delta \boldsymbol{y} \quad \mathbf{(1)},$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x; \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x; \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Сумма первых двух слагаемых $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ в равенстве (1) представляет собой **главную часть приращения функции**.
Главная часть приращение функции $z = f(x;y)$, называется **полным дифференциалом** этой функции и обозначается

$$\boldsymbol{dz} = \boldsymbol{A} \cdot \Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{B} \cdot \Delta \boldsymbol{y} \quad \mathbf{(2)}$$

Выражения $A \cdot \Delta x$ и $B \cdot \Delta y$ называют **частными дифференциалами**. Для независимых переменных x

и y полагают $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$. Поэтому равенство

(2) можно переписать в виде

$$dz = A \cdot dx + B \cdot dy \quad (3)$$

Теорема 1:(необходимое условие дифференцируемости функции).

Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то она непрерывна в этой точке, и имеет в ней частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Теорема 2:(достаточное условие дифференцируемости функции).

Если функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(x;y)$, то она дифференцируема в этой точке и её полный дифференциал выражается по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (4)$$

Примем теоремы 1,2 без доказательств.

Таким образом, функция имеет полный дифференциал в случае непрерывности её частных производных. Если функция имеет полный дифференциал, то она называется дифференцируемой. Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, то есть $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

Замечания:

1) Аналогично вычисляется полный дифференциал функции трех аргументов, то есть по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz;$$

2) Арифметические свойства и правила исчисления дифференциалов функции одной переменной сохраняются и для дифференциалов функции двух (и большего числа) переменных.

Частный дифференциал функции — это произведение частной производной по одной из независимых переменных на дифференциал этой переменной.

Обозначение:

$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx$-частный дифференциал функции z по переменной x;

$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy$-частный дифференциал функции z по переменной y.

Таким образом, полный дифференциал — это сумма частных дифференциалов, то есть $dz = d_x z + d_y z$

Пример 9. Для функции $f(x; y) = x^2 + xy - y^2$ найти полное приращение Δz и полный дифференциал dz.

Решение.

$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) = (x + \Delta x)^2 +$
$+(x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2 - (x^2 + xy - y^2) =$
$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + xy + x\Delta y + \Delta xy + \Delta x\Delta y - y^2 -$

$-2y\Delta y-\Delta y^2-x^2-xy+y^2=[(2x+y)\Delta x+(x-2y)\Delta y]+$
$+(\Delta x^2+\Delta x\Delta y-\Delta y^2)$.

Итак, $\Delta z=[(2x+y)\Delta x+(x-2y)\Delta y]+(\Delta x^2+\Delta x\Delta y-\Delta y^2)$- полное приращение,

$dz=(2x+y)\Delta x+(x-2y)\Delta y$ –полный дифференциал (главная часть приращения функции).

Пример 10. Найти полный дифференциал для следующих функций:

а) $z=xy+\frac{x}{y}$;**б)** $z=x\sin(x+y)$; **в)** $u=\sqrt{x^2+y-z}$;

г)$u=\arcsin\frac{xz+1}{y^3}$.

Решение.

а) Полный дифференциал состоит из частных производных, поэтому найдём их:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(xy+\frac{x}{y}\right)'_x=y\cdot(x)'_x+\frac{1}{y}(x)'_x=y+\frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(xy+\frac{x}{y}\right)'_y=x\cdot(y)'_y+x\cdot(y^{-1})'_y=x-\frac{x}{y^2};$$

Подставляя полученные значения $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ в формулу

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ имеем:

$$dz=\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x-\frac{x}{y^2}\right)dy;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x\sin(x+y)\right)'_x = (x)'_x \cdot \sin(x+y) +$

$+x \cdot \left(\sin(x+y)\right)'_x = \sin(x+y) + x\cos(x+y) \cdot$

$\cdot (x+y)'_x = \sin(x+y) + x\cos(x+y);$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x\sin(x+y)\right)'_y = x \cdot \left(\sin(x+y)\right)'_y =$$
$$= x\cos(x+y)(x+y)'_x = x\cos(x+y);$$
$$dz = \left(\sin(x+y) + x\cos(x+y)\right)dx + \left(x\cos(x+y)\right)dy;$$

в) Запишем функцию $u = \sqrt{x^2 + y - z}$ трёх перемен-

ных в виде $u = (x^2 + y - z)^{\frac{1}{2}}$ и найдём частные произ-

водные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left((x^2 + y - z)^{\frac{1}{2}}\right)'_x = \frac{1}{2}(x^2 + y - z)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot (x^2 + y - z)'_x = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y - z}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y - z}};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left((x^2 + y - z)^{\frac{1}{2}}\right)'_y = \frac{1}{2}(x^2 + y - z)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot (x^2 + y - z)'_y = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y - z}};$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left((x^2 + y - z)^{\frac{1}{2}}\right)'_z = \frac{1}{2}(x^2 + y - z)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot (x^2 + y - z)'_z = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y - z}};$$

$$du=\frac{x}{\sqrt{x^2+y-z}}dx+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y-z}}dy-$$

$-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y-z}}dz$ или $du=\frac{2xdx+dy-dz}{\sqrt{x^2+y-z}}$;

г)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(arcsin\frac{xz+1}{y^3}\right)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\cdot\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)'_x=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\cdot\frac{1}{y^3}(xz+1)'_x=\frac{z}{\sqrt{y^6-(xz+1)^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(arcsin\frac{xz+1}{y^3}\right)'_y=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\cdot\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\cdot(xz+1)(y^{-3})'_y=\frac{-3(xz+1)y^{-4}}{\frac{\sqrt{y^6-(xz+1)^2}}{y^3}}=$$

$$=-\frac{3(xz+1)}{y\cdot\sqrt{y^6-(xz+1)^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(arcsin\frac{xz+1}{y^3}\right)'_z=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)'_z=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\cdot\frac{1}{y^3}(xz+1)'_z=\frac{x}{\sqrt{y^6-(xz+1)^2}};$$

$$du=\frac{z}{\sqrt{y^6-(xz+1)^2}}dx--\frac{3(xz+1)}{y\cdot\sqrt{y^6-(xz+1)^2}}dy-$$

$+\frac{x}{\sqrt{y^6-(xz+1)^2}}dz$ или $du=\frac{zydx-3(xz+1)dy+xydz}{y\sqrt{y^6-(xz+1)^2}}$.

Применение полного дифференциала функции к приближенным вычислениям.

При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$, а значит, при достаточно малом $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ дифференцируемой функции $z = f(x;y)$имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$ или $\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

Полное приращение имеет вид $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$ или

$f(x+\Delta x; y+\Delta y) = f(x;y) + \Delta z$, то равенство $\Delta z \approx dz$

можно также переписать в следующем виде:

$$\boldsymbol{f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y} \quad \textbf{(5)}$$

Данной формулой пользуются при приближённых вычислениях.

Замечание: с помощью полного дифференциала можно найти границы абсолютной и относительной погрешностей в приближенных вычислениях; приближенное значение полного приращения функции и так далее.

Пример 11. Вычислить приближенно:**а)** $1,02^{\,5,03}$; **б)** $0,98^{\,2,01}$;**в)** $\sqrt{sin^2 1,55 + 9e^{0,015}}$.

Решение.

а) Число $1,02^{\,5,03}$ есть частное значение функцию $z = f(x;y) = x^y$,

$1,02^{\,5,03} = (1+0{,}02)^{5+0{,}03} = (x+\Delta x)^{y+\Delta y}$, где $x = 1$,
$\Delta x = 0{,}02,$
$y = 5, \Delta y = 0{,}03.$
Воспользуемся ранее полученной формулой
$f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$,тогда
$1,02^{\,5,03} = f(1+0{,}02; 5+0{,}03) \approx$
$\approx f(1;5) + \frac{\partial z}{\partial x}(1;5)\cdot 0{,}02 + \frac{\partial z}{\partial y}(1;5)\cdot 0{,}03,$
, предварительно находим $f(1;5)$ и $\frac{\partial z}{\partial x}(1;5)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1;5)$:
$f(1;5) = 1^5 = 1;$
$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial x}(1;5) = 5\cdot 1^4 = 5;$
$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y lnx, \frac{\partial z}{\partial y}(1;5) = 1^5\cdot ln1 = 0;$
Следовательно,
$1,02^{\,5,03} \approx 1 + 5\cdot 0{,}02 + 0\cdot 0{,}03 = 1 + 0{,}1 = 1{,}1;$
Таким образом, $1,02^{\,5,03} \approx 1{,}1$.
Для проверки вычислите, применяя калькулятор.

б) Принимаем $f(x;y) = x^y$,
$0,98^{\,2,01} = (1-0{,}02)^{2+0{,}01} = (x+\Delta x)^{y+\Delta y}$, где $x = 1$,
$\Delta x = -0{,}02,$
$y = 2, \Delta y = 0{,}01.$
Воспользуемся формулой
$f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$,тогда
$0,98^{\,2,01} = f(1-0{,}02; 2+0{,}01) \approx$
$\approx f(1;2) + \frac{\partial z}{\partial x}(1;2)\cdot(-0{,}02) + \frac{\partial z}{\partial y}(1;2)\cdot 0{,}01,$
, находим $f(1;2)$ и $\frac{\partial z}{\partial x}(1;2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1;2)$:
$f(1;2) = 1^2 = 1;$
$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial x}(1;2) = 2\cdot 1 = 2;$
$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y lnx, \frac{\partial z}{\partial y}(1;2) = 1^2\cdot ln1 = 0;$

Следовательно, $0,98^{\,2,01} \approx 1 + 2\cdot(-0,02) + 0\cdot 0,01 = 0,96.$

в) Принимаем $f(x;y) = \sqrt{sin^2x + 9e^y} = (sin^2x + 9e^y)^{\frac{1}{2}}$,

$\sqrt{sin^2 0,55 + 9e^{0,015}} = \sqrt{sin^2(0 + 0,55) + 9e^{0+0,015}} =$

$= \sqrt{sin^2(x + \Delta x) + 9e^{y+\Delta y}}$, где $x = 0$, $\Delta x = 0,55$,

$y = 0$, $\Delta y = 0,015$.

Воспользуемся формулой

$f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x;y) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$,тогда

$\sqrt{sin^2 0,55 + 9e^{0,015}} = f(0 + 0,55; 0 + 0,015) \approx$

$\approx f(0;0) + \frac{\partial z}{\partial x}(0;0)\cdot 0,55 + \frac{\partial z}{\partial y}(0;0)\cdot 0,015$,

, находим $f(0;0)$ и $\frac{\partial z}{\partial x}(0;0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0;0)$:

$f(0;0) = \sqrt{sin^2 0 + 9e^0} = 3;$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left((sin^2x + 9e^y)^{\frac{1}{2}}\right)'_x = \frac{1}{2}(sin^2x + 9e^y)^{-\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\,(sin^2x + 9e^y)'_x = \frac{2sinxcosx}{2\sqrt{sin^2x + 9e^y}} = \frac{sinxcosx}{\sqrt{sin^2x + 9e^y}};$$

$\frac{\partial z}{\partial x}(0;0) = 0;$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left((sin^2x + 9e^y)^{\frac{1}{2}}\right)'_y = \frac{1}{2}(sin^2x + 9e^y)^{-\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\,(sin^2x + 9e^y)'_y = \frac{9e^y}{2\sqrt{sin^2x + 9e^y}};$$

$\frac{\partial z}{\partial x}(0;0) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5.$ Следовательно,

$\sqrt{sin^2 0,55 + 9e^{0,015}} \approx 3 + 0\cdot 0,55 + 1,5\cdot 0,015 = 3,0225.$

Задания для самостоятельного решения.

3. Найти полные дифференциалы следующих функций:

1	$z = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$	**11**	$z = \cos\,(x^5y^2)$
2	$z = x^2y^3$	**12**	$z = x^5 - 2xy^2 + 3xy - x$
3	$z = \frac{x}{y^2}$	**13**	$z = \ln\,(x^3 + y^3)$
4	$z = \frac{x - y}{x + y}$	**14**	$z = e^x(4y - xy - y^2)$
5	$z = x^3 - 3axy + y^3$	**15**	$v = arctg\,\frac{u}{t}$
6	$z = \sqrt{x^2 - y^2}$	**16**	$u = x^{y^z}$
7	$u = (xy)^z$	**17**	$z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$
8	$z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$	**18**	$z = \ln tg\,\frac{x}{y}$
9	$z = arctg\,\frac{y}{x}$	**19**	$u = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$
10	$u = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$	**20**	$z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$

Ответы:

1.$dz = \frac{1}{x+y}\,dx - \frac{x}{y^2+xy}dy$
2.$dz = 2xy^3\,dx + 3x^2y^2dy$
3. $dz = \frac{1}{y^2}\,dx - \frac{2x}{y^3}dy$

4. $dz = \frac{2(ydx - xdy)}{(x+y)^2}$
5. $dz = 3((x^2 - ay)\,dx + (y^2 - ax)dy)$
6. $dz = \frac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$
7. $du = yz(xy)^{z-1}\,dx + xz(xy)^{z-1}dy + (xy)^z\,ln(xy)dz$
8. $dz = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}dy$
9. $dz = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$
10. $du = 2cos(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (xdx + ydy + zdz)$
11. $dz = -x^4 ysin(x^5 y^2)(5ydx + 2xdy)$
12. $dz = (5x^4 - 2y^2 + 3y - 1)dx + (-4xy + 3x)dy$

13. $dz = \frac{3}{x^3+y^3}(x^2dx + y^2dy)$
14. $dz = e^x((3y - xy - y^2)dx + (4x + 2y - 4)dy)$
15. $dv = \frac{t}{u^2+t^2}du - \frac{u}{u^2+t^2}dt$
16. $u = y^z x^{y^z-1}dxzy^{z-1}x^{y^z}\ln x\,dy + y^z x^{y^z}\ln x\ln y\,dz$
17. $dz = \left(\sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dy$
18. $dz = \frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}dx - \frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}dy$
19. $du = \frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{xydy+xzdz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}$

20. $dz = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2dx +$

$+3(5x^2y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2)dy$

6.Дифференцирование неявных функций.

Функция $z = f(x;y)$ называется неявной функцией переменных x и y,если она определяется уравнением неразрешённым относительно z:

$$\boldsymbol{F(x;y;z) = 0\ (6)},$$

Например, $z = x^2 + y^2$-явно заданная функция двух переменныхx, y, $arctgz - (x+z)y - 5 = 0$ –неявно заданная функция двух переменных.

Теорема 3: если функция $F(x;y;z)$ дифференцируема по переменным x, y, z в некоторой пространственной области и $F_z'(x;y;z) \neq 0$,то уравнение $F(x;y;z) = 0$ определяет однозначную неявную функцию $z = f(x;y)$, также дифференцируемую и её частные производные, могут быть найдены по формулам:

$$z'_x = -\frac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)},\ z'_y = -\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}\ \mathbf{(7)}$$

Доказательство.

Найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z, заданной уравнением (6).

Для этого подставим в уравнение (6) вместо z функцию $f(x;y)$, получим следующее равенство:

$$F\big(x;y;f(x;y)\big) = 0\ (\mathbf{8})$$

Продифференцировав равенство (8) по переменной x получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}F\big(x;y;f(x;y)\big) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0, y = const;$$

Выражая из полученного равенства $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x$, учитывая,

Что $\frac{\partial F}{\partial x} = F'_x, \frac{\partial F}{\partial z} = F'_z$ имеем:

$F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$, отсюда $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$;

Продифференцировав равенство (8) по переменной y получим:

$$\frac{\partial}{\partial y}F\big(x;y;f(x;y)\big)=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0, x=const;$$

$$F'_y+F'_z\cdot z'_y=0, z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Итак, $z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}, z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}$,что и требовалось доказать.

Пример 12. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и$\frac{\partial z}{\partial y}$, и полный
дифференциал dz функции нескольких переменных $xcosy+ycosz+zcosx-1=0$,заданной неявно

Решение.

Рассмотрим два способа решения данной задачи:
1 способ :(по формулам 6)
Для этого обозначим левую часть равенства
$xcosy+ycosz+zcosx-1=0$ через
$F(x;y;z)=xcosy+ycosz+zcosx-1$,
$F(x;y;z)=0$;
Найдем частные производныеF'_x, F'_y, F'_z и подставим в формулы (6):

$F'_x=(xcosy+ycosz+zcosx-1)'_x=$
$=cosy-zsinx;$
$F'_y=(xcosy+ycosz+zcosx-1)'_y=$
$=-xsiny+cosz,$
$F'_z=(xcosy+ycosz+zcosx-1)'_z=$
$=cosx-ysinz.$

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{cosy-zsinx}{cosx-ysinz}=\frac{zsinx-cosy}{cosx-ysinz};$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-xsiny + cosz,}{cosx - ysinz} = \frac{xsiny - cosz}{cosx - ysinz}.$$

Найдём полный дифференциал dz:

$dz = z'_x dx + z'_x dx;$

$$dz = \frac{zsinx - cosy}{cosx - ysinz}dx + \frac{xsiny - cosz}{cosx - ysinz}dy.$$

2 способ:

Вычислим дифференциал от левой и правой частей уравнения $F(x, y, z) = 0$,

учитывая, что $d(UV) = dU \cdot V + dV \cdot U$, а

$F(x, y, z) = xcosy + ycosz + zcosx - 1 = 0$

имеем:

$d(xcosy + ycosz + zcosx - 1) = d(0),$

$d(xcosy) + d(ycosz) + d(zcosx) - d(1) = 0,$

$cosydx + xd(cosy) + coszdy +$

$+yd(cosz) + cosxdz + zd(cosx) = 0,$

$cosydx - xsinydy + coszdy - ysinzdz +$

$+cosxdz - zsinxdx = 0,$собирая дифференциалы получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = (cosy - zsinx)dx +$$

$$(cosz - xsiny)dy + (cosx - ysinz)dz = 0,$$

где$\frac{\partial F}{\partial x} = cosy - zsinx, \frac{\partial F}{\partial y} = cosz - xsiny,$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = cosx - ysinz.$$

Выразим dz и из него определим$\frac{\partial z}{\partial x}$ и$\frac{\partial z}{\partial y}$:

$(cosx - ysinz)dz = -(cosy - zsinx)dx - (cosz - xsiny)dy$

$dz = \frac{zsinx - cosy}{cosx - ysinz}dx + \frac{xsiny - cosz}{cosx - ysinz}dy$- полный дифференциал исходной функции,

следовательно,$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{zsinx - cosy}{cosx - ysinz}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xsiny - cosz}{cosx - ysinz}$- частные производные.

Пример 13. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для

функции заданной неявно уравнением:
а) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$;

б) $e^z - xyz = 0$; **в)** $cos2z = y^2 - xe^{\frac{y}{z}}$.

Решение.

а) Обозначим левую часть данного равенства через функцию
$F(x;y;z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5$ и найдем её частные производные:

$$F'_x = (x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5)'_x = 2x - 4,$$
$$F'_y = (x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5)'_y = -4y,$$
$$F'_z = (x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5)'_z = 2z + 2;$$

Применив формулы (7), получим:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x - 4}{2z + 2} = \frac{2 - x}{z + 1};$$
$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-4y}{2z + 2} = \frac{2y}{z + 2};$$

б) $F = e^z - xyz$, так как

$$F'_x = (e^z - xyz)'_x = -yz,$$

$$F'_y = (e^z - xyz)'_y = -xz,$$

$$F'_z = (e^z - xyz)'_z = e^z - xy;$$

Учитывая, что $e^z - xyz = 0$(по условию), имеем:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{xyz - xy} =$$

$$= \frac{yz}{xy(z-1)} = \frac{z}{x(z-1)};$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-xz}{e^z - xy} = \frac{xz}{xyz - xy} =$$

$$= \frac{xz}{xy(z-1)} = \frac{z}{y(z-1)};$$

в) Запишем данное уравнение в виде $F(x; y; z) = 0$:

$$cos2z - y^2 + xe^{\frac{y}{z}} = 0.$$

Найдём частные производные функции $F(x; y; z)$:

$$F'_x = \left(cos2z - y^2 + xe^{\frac{y}{z}}\right)'_x = e^{\frac{y}{z}}(x)'_x = e^{\frac{y}{z}},$$

$$F'_y = \left(cos2z - y^2 + xe^{\frac{y}{z}}\right)'_y = -2y + x\left(e^{\frac{y}{z}}\right)'_y =$$

$$= -2y + xe^{\frac{y}{z}}\left(\frac{y}{z}\right)'_y = -2y + xe^{\frac{y}{z}} \cdot \frac{1}{z}(y)'_y =$$

$$= -2y + xe^{\frac{y}{z}} \cdot \frac{1}{z} = \frac{-2yz + xe^{\frac{y}{z}}}{z};$$

$$F'_z = \left(cos2z - y^2 + xe^{\frac{y}{z}}\right)'_z = -2sin2z + x\left(e^{\frac{y}{z}}\right)'_z =$$

$$= -2sin2z + xe^{\frac{y}{z}}\left(\frac{y}{z}\right)'_z = -2sin2z + xye^{\frac{y}{z}}(z^{-1})'_z =$$

$$= -2sin2z - \frac{xye^{\frac{y}{z}}}{z^2} = \frac{-2z^2sin2z - xye^{\frac{y}{z}}}{z^2};$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{e^{\frac{y}{z}}}{\frac{-2z^2sin2z - xye^{\frac{y}{z}}}{z^2}} = \frac{z^2e^{\frac{y}{z}}}{2z^2sin2z + xye^{\frac{y}{z}}};$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{-2yz + xe^{\frac{y}{z}}}{z}}{\frac{-2z^2sin2z - xye^{\frac{y}{z}}}{z^2}} = \frac{z\left(xe^{\frac{y}{z}} - 2yz\right)}{2z^2sin2z + xye^{\frac{y}{z}}}.$$

Пример 14. Найти полный дифференциал функции z,определяемой равенством $cos^2x + cos^2y + cos^2z = 1$.

Решение.

Учитывая, что функция $z = f(x;y)$задана неявно урав-

нением $F(x;y;z) = 0$,

где $F(x;y;z) = \ cos^2x + cos^2y + cos^2z - 1$ и полный

дифференциал вычисляется по форму-
ле$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ имеем:

$$F'_x = (\ cos^2x + cos^2y + cos^2z - 1)'_x = ((cosx)^2)'_x =$$

$$= 2cosx(cosx)'_x = -2sinxcosx = -sin2x;$$

$$F'_y = (\ cos^2x + cos^2y + cos^2z - 1)'_y = ((cosy)^2)'_y =$$

$$= 2cosy(cosy)'_y = -2sinycosy = -sin2y;$$

Аналогично получим $F'_z = -sin2z$;

$$z'_x = -\frac{-sin2x}{-sin2z} = -\frac{sin2x}{sin2z};\ z'_y = -\frac{-sin2y}{-sin2z} = -\frac{sin2y}{sin2z};$$

Найдём полный дифференциал:

$dz = -\frac{sin2x}{sin2z}dx - \frac{sin2y}{sin2z}dy$ или $dz = -\frac{sin2xdx+sin2ydy}{sin2z}$.

Задания для самостоятельного решения.

4. Найти частные производные функции $z = f(x;y)$

заданной неявно уравнением $F(x;y;z) = 0$:

1	$z^3 + 3xyz = a^3$	**11**	$zln(xy) + xe^{-2z} = 0$
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	**12**	$z^2 + sin(yz) - x = 0$
3	$x + arctg\frac{y}{z-x} = z$	**13**	$sin(3x - 2z) + x^2yz = 0$
4	$x^3y + zy^3 + z^3y = 0$	**14**	$z^2 - ln2z + xy^3 = 0$
5	$x + y + z = e^{-(x+y+z)}$	**15**	$x - cos(z + y) - z^3 = 0$
6	$x^2 - 2y^2 + z^2 -$ $-4x + 2z - 5 = 0$	**16**	$z - y^2e^{xz} = 0$
7	$sin(z + y) +$ $+cos(x - z) = 0$	**17**	$e^x + ylnz - x = 0$

8	$3x^2-2y^2+z^2-$ $-5x+2=0$	**18**	$x^2+y^2+z^2=16$
9	$x^3+3y^2-x^3z^2+$ $+5z+8=0$	**19**	$z^3-tg(3z+x^2y^2)=0$
10	$x-y+z+3=xz^2$	**20**	$x^2y-xy^2+xyz^3+6=0$

Ответы:

1. $z'_x=-\frac{yz}{xy+z^2}$; $z'_y=-\frac{xz}{xy+z^2}$	**11.** $z'_x=\frac{\frac{z}{x}+e^{-2z}}{2xe^{-2z}-ln(xy)}$; $z'_y=\frac{z}{y\left(2xe^{-2z}-ln(xy)\right)}$
2. $z'_x=-\frac{c^2x}{a^2z}$; $z'_y=-\frac{c^2y}{b^2z}$	**12.** $z'_x=\frac{1}{2z+ycos(yz)}$; $z'_y=-\frac{zcos(yz)}{2z+ycos(yz)}$
3. $z'_x=1$; $z'_y=\frac{z-x}{(z-x)^2+y^2+y}$	**13.** $z'_x=\frac{2cos(3x-2z)+2xyz}{2cos(3x-2z)-x^2y}$; $z'_y=\frac{x^2z}{2cos(3x-2z)-x^2y}$
4. $z'_x=-\frac{3x^2}{y^2+3z^2}$; $z'_y=-\frac{x^3+3zy^2+z^3}{y^3+3z^2y}$	**14.** $z'_x=\frac{y^3}{\frac{1}{z}-2z}$; $z'_y=\frac{3y^2x}{\frac{1}{z}-2z}$
5. $z'_x=\frac{2xy}{e^z+1}$; $z'_y=\frac{x^2}{e^z+1}$	**15.** $z'_x=\frac{1}{3z^2-sin(y+z)}$; $z'_y=\frac{sin(y+z)}{3z^2-sin(y+z)}$

6. $z'_x = \frac{2-x}{z+1}$; $z'_y = \frac{2y}{z+1}$	**16.** $z'_x = \frac{zy^2e^{xz}}{1-xy^2e^{xz}}$; $z'_y = \frac{2ye^{xz}}{1-xy^2e^{xz}}$
7. $z'_x = \frac{sin(x-z)}{cos(z+y)+sin(x-z)}$; $z'_y = -\frac{cos(z+y)}{cos(z+y)+sin(x-z)}$	**17.** $z'_x = \frac{z(1-e^x)}{y}$; $z'_y = -\frac{zlnz}{y}$
8. $z'_x = \frac{5-6x}{2z}$; $z'_y = \frac{2y}{z}$	**18.** $z'_x = -\frac{x}{z}$; $z'_y = -\frac{y}{z}$
9. $z'_x = \frac{3(1-z^2)}{2xz}$; $z'_y = \frac{3y}{z}$	**19.** $z'_x = \frac{2xy^2}{3z^2cos^2(3z+x^2y^2)}$; $z'_y = \frac{2yx^2}{3z^2cos^2(3z+x^2y^2)}$
10. $z'_x = \frac{z^2-1}{1-2xz}$; $z'_y = \frac{1}{1-2xz}$	**20.** $z'_x = -\frac{2xy-y^2+yz^3}{3xyz^2}$; $z'_y = -\frac{x^2-2xy+xz^3}{3xyz^2}$

7.Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные высших порядков.

Предположим, что функция $z = f(x; y)$ имеет частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x; y), \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x; y)$,которые являются функциями двух переменных. Предположим, что они дифференцируемы.

Частные производные от частных производных первого порядка называются **частными производными второго порядка.**

Существует четыре вида частных производных второго порядка: $z''_{xx} = (z'_x)'_x; = (z'_y)'_y; z''_{xy} = (z'_x)'_y$; $z''_{yx} = (z'_y)'_x$.

Для них применяются следующие обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x; y) = z''_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x; y) = z''_{yy};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x; y) = z''_{xy} = (z'_x)'_y;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x; y) = z''_{yx} = (z'_y)'_x.$$

Если полученные функции являются дифференцируемыми, то частные производные от них называются частными производными третьего порядка. Например, $z'''_{yxx} = \left(z''_{yx}\right)'_x$.

Частные производные второго порядка и выше называются частными производными высших порядков.

Частная производная высшего порядка, взятая по различным переменным, называется **смешанной частной** производной. Такими являются производные: z''_{xy}, z''_{yx}, z'''_{yxy} и так далее.

Теорема (Шварца): если смешанные частные производные второго порядка непрерывны, то они равны между собой. Другими словами, результат смешанного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования, то есть

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad \textbf{(9)}$$

Примем без доказательств.

Замечание: аналогично определяются смешанные частные производные высших порядков, например, $z'''_{yxx} = z'''_{xyx}$.

Таким образом, если частные производные, подлежащие вычислению, непрерывны, то результат многократного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Пример 15. Найти частные производные второго порядка от функции:

а) $z = y\ln x$;**б)** $z = e^{2x+3y}$;**в)** $z = (x^2 + y^2)\ln 2x$;
г) $z = x^2 \sin\sqrt{y}$.

Решение.

а) Найдем для начала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (ylnx)'_x = y(lnx)'_x = \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (ylnx)'_y = lnx(y)'_y = lnx;$$

Теперь дифференцируем вторично:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)'_x = y\left(\frac{1}{x}\right)'_x =$$

$$= y(x^{-1})'_x = -\frac{y}{x^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(lnx) = (lnx)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x}(y)'_y = \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(lnx) = \frac{1}{x};$$

Заметим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

б) Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^{2x+3y})'_x = e^{2x+3y}(2x+3y)'_x = 2e^{2x+3y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (e^{2x+3y})'_y = e^{2x+3y}(2x+3y)'_y = 3e^{2x+3y};$$

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2(e^{2x+3y})'_x = 2e^{2x+3y}(2x+3y)'_x = 4e^{2x+3y};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2(e^{2x+3y})'_y = 2e^{2x+3y}(2x+3y)'_y = 6e^{2x+3y};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2(e^{2x+3y})'_y = 2e^{2x+3y}(2x+3y)'_y = 6e^{2x+3y};$$

в) $\frac{\partial z}{\partial x} = \left((x^2+y^2)ln2x\right)'_x = (x^2+y^2)'_x \cdot ln2x +$

$+(ln2x)'_x \cdot (x^2+y^2) = 2xln2x + \frac{1}{2x}(2x)'_x \cdot$

$\cdot (x^2+y^2) = 2xln2x + \frac{1}{x} \cdot (x^2+y^2) =$

$= 2xln2x + x + \frac{y^2}{x};$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left((x^2+y^2)ln2x\right)'_y = ln2x(x^2+y^2)'_y = 2yln2x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(2xln2x + x + \frac{y^2}{x}\right)'_x = 2\ln 2x + 2x\frac{1}{2x}(2x)'_x +$$

$$+1 + y^2(x^{-1})'_x = 2ln2x + 3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2yln2x)'_y = 2ln2x(y)'_y = 2ln2x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (2yln2x)'_x =$$

$$= 2y(ln2x)'_x = 2y\frac{1}{2x}(2x)'_x = \frac{2y}{x}.$$

г) Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 sin\sqrt{y}\right)'_x = sin\sqrt{y}(x^2)'_x = 2xsin\sqrt{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2\sin\sqrt{y}\right)'_y=x^2\left(\sin\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\right)'_y=x^2cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\left(y^{\frac{1}{2}}\right)'_y=$$

$$=x^2cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}=\frac{x^2cos\left(\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}};$$

Находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(2x\sin\sqrt{y}\right)'_x=2\sin\sqrt{y}(x)'_x=2\sin\sqrt{y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(x^2cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right)'_y=\frac{x^2}{2}\left(cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot y^{-\frac{1}{2}}\right)'_y=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\left(cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\right)'_y\cdot y^{-\frac{1}{2}}+\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)'_y\cdot cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(-\sin\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(-\frac{\sin\left(y^{\frac{1}{2}}\right)}{2y}-\frac{cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)}{2y\sqrt{y}}\right)=-\frac{x^2}{4y}\left(\sin\left(\sqrt{y}\right)+\frac{cos\left(\sqrt{y}\right)}{\sqrt{y}}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(2x\sin\sqrt{y}\right)'_y=2x\left(\sin\sqrt{y}\right)'_y=$$

$$=2xcos\sqrt{y}\left(\sqrt{y}\right)'_y=2xcos\sqrt{y}\frac{1}{2\cdot\sqrt{y}}=\frac{xcos\sqrt{y}}{\sqrt{y}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{x^2cos\left(\sqrt{y}\right)}{2\cdot\sqrt{y}}\right)'_x=\frac{cos\left(\sqrt{y}\right)}{2\cdot\sqrt{y}}\left(x^2\right)'_y=\frac{xcos\sqrt{y}}{\sqrt{y}}.$$

Дифференциалы высших порядков.

Введём понятие дифференциала высшего порядка. Полный дифференциал

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ функции$z=f(x;y)$ называют также дифференциалом первого порядка. Пусть функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные производные второго порядка. Дифференциалом второго порядка функции $z = f(x; y)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции, то есть

$d^2z = d(dz)$.

Найдём его:

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2;$$

Итак, если $z = f(x; y)$, где x и y — независимые переменные, то **дифференциал второго порядка** функции вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2} \quad \textbf{(10)}$$

Аналогично определяются дифференциалы функции z более высокого порядка, то есть

$d^3z = d(d^2z)$, …, $d^nz = d(d^{n-1}z)$.

Таким образом, справедлива формула:

$$\boldsymbol{d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \cdot z} \ (\mathbf{11})$$

Посмотрим, как она работает, например, при $n = 3$ имеем:

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 \cdot z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy +$$

$+3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$-дифференциал третьего порядка.

Пример 16. Найти полный дифференциал функции второго и третьего порядка для функции: **а)** $z=\frac{x}{y}$;**б)** $z=x^2y$;**в)** $z=xy+sin(2x-3y)$.

Решение.

а) Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{y}(x)'_x=\frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}\right)'_y=x(y^{-1})'_y=-\frac{x}{y^2};$$

Для того, чтобы найти дифференциал второго порядка, найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{1}{y}\right)'_x=0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(-\frac{x}{y^2}\right)'_y=-x(y^{-2})'_y=\frac{2x}{y^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{1}{y}\right)'_y=(y^{-1})'_y=-\frac{1}{y^2}.$$

Таким образом, дифференциал второго порядка имеет вид:

$d^2z\ =0dx^2-\frac{2}{y^2}dxdy+\frac{2x}{y^3}dy^2$;

Найдём дифференциал третьего порядка, для этого вычислим частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(0)=0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{2x}{y^3}\right)'_y=2x(y^{-3})'_y=-\frac{6x}{y^4};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \left(-\frac{1}{y^2}\right)'_y = -(y^{-2})'_y = \frac{2}{y^3}.$$

Следовательно, дифференциал третьего порядка имеет вид:

$$d^3 z = 0dx^3 + 0dx^2 dy + \frac{6}{y^3} dx dy^2 - \frac{6x}{y^4} dy^3.$$

б) Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 y)'_x = y(x^2)'_x = 2xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 y)'_y = x^2 (y)'_y = x^2;$$

Найдём дифференциал второго порядка, для этого вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2xy)'_x = 2y(x)'_x = 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x^2)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2xy)'_y = 2x(y)'_y = 2x.$$

Таким образом, дифференциал второго порядка имеет вид:

$$d^2 z = 2ydx^2 + 4xdxdy + 0dy^2;$$

Найдём дифференциал третьего порядка, для этого вычислим частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = (2y)'_x = 0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = (0)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (2y)'_y = 2;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = (2x)'_y = 0;$$

$d^3 z = 0dx^3 + 2dx^2 dy + 0dxdy^2 + 0dy^3$ – дифференциал третьего порядка.

в) Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xy + \sin(2x - 3y)\right)'_x = y(x)'_x + \cos(2x - 3y) \cdot$$

$$\cdot (2x - 3y)'_x = y + 2\cos(2x - 3y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(xy + \sin(2x - 3y)\right)'_y = x(y)'_y + \cos(2x - 3y) \cdot$$

$$\cdot (2x - 3y)'_y = x - 3\cos(2x - 3y);$$

Найдём дифференциал второго порядка, для этого вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(y + 2\cos(2x - 3y)\right)'_x = -2\sin(2x - 3y)(2x - 3y)'_x =$$

$$= -4\sin(2x - 3y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x - 3\cos(2x - 3y)\right)'_y = 3\sin(2x - 3y)(2x - 3y)'_y =$$

$$= -9\sin(2x - 3y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(y + 2\cos(2x - 3y)\right)'_y = 1 - 2\sin(2x - 3y) \cdot$$

$$\cdot (2x - 3y)'_y = 1 + 6\sin(2x - 3y);$$

Таким образом, дифференциал второго порядка имеет вид:

$d^2z = -4\sin(2x-3y)dx^2 + 2\big(1+6\sin(2x-3y)\big)dxdy +$
$-9\sin(2x-3y)dy^2$;
Найдём дифференциал третьего порядка,
для этого вычислим частные производные
третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -4\big(\sin(2x-3y)\big)'_x = -4\cos(2x-3y)(2x-3y)'_x =$$
$$= -8\cos(2x-3y);$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -9\big(\sin(2x-3y)\big)'_y = -9\cos(2x-3y)(2x-3y)'_y =$$
$$= 27\cos(2x-3y);$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -4\big(\sin(2x-3y)\big)'_y = -4\cos(2x-3y)\cdot$$
$$\cdot(2x-3y)'_y = 12\cos(2x-3y);$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \big(1+6\sin(2x-3y)\big)'_y = 6\cos(2x-3y)\cdot$$
$$\cdot(2x-3y)'_y = -18\cos(2x-3y);$$

$d^3z = -8\cos(2x-3y)dx^3 + 36\cos(2x-3y)dx^2dy +$
$-54\cos(2x-3y)dxdy^2 + 27\cos(2x-3y)dy^3$ – дифференциал третьего порядка.

Пример 17. Показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$, если $u = arctg(2x-t)$

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \big(arctg(2x-t)\big)'_x = \frac{1}{1+(2x-t)^2}(2x-t)'_x =$$
$$= \frac{2}{1+(2x-t)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(arctg(2x-t)\right)'_t = \frac{1}{1+(2x-t)^2}(2x-t)'_t =$$
$$= -\frac{1}{1+(2x-t)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{2}{1+(2x-t)^2}\right)'_x = 2\left((1+(2x-t)^2)^{-1}\right)'_x =$$
$$= -2(1+(2x-t)^2)^{-2}\cdot(1+(2x-t)^2)'_x =$$
$$= -\frac{2}{(1+(2x-t)^2)^2}\cdot 2(2x-t)(2x-t)'_x =$$
$$= -\frac{8(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2};$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \left(\frac{2}{1+(2x-t)^2}\right)'_t = 2\left((1+(2x-t)^2)^{-1}\right)'_t =$$
$$= -2(1+(2x-t)^2)^{-2}\cdot(1+(2x-t)^2)'_t =$$
$$= -2(1+(2x-t)^2)^{-2}\cdot 2\cdot(2x-t)\cdot(2x-t)'_t =$$
$$= \frac{4(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2};$$

Покажем, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$, для этого подставим полученные значения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ в данное равенство:

$-\frac{8(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2} + \frac{8(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2} = 0$ – что и требовалось показать.

Задания для самостоятельного решения.

5. Найти частные производные и дифференциалы второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для следующих функций:

1	$z = x^3 + 2x^2y^2 + y^5$	**11**	$z = e^{4x-y}$
2	$z = y^2e^x + x^2y^3 + 1$	**12**	$z = x sin(x+y)$
3	$z = y^3 + x^2y$	**13**	$z = arctg\dfrac{x+y}{x}$
4	$z = e^x(cosy + xsiny)$	**14**	$z = \dfrac{1}{3x - y^3}$
5	$z = \dfrac{x^2}{1-y}$	**15**	$z = ye^{\frac{x}{y}}$
6	$z = ln(x - 2y)$	**16**	$z = cos(x^5y^2)$
7	$z = \dfrac{x^2}{y^2}$	**17**	$z = x^2 + xlny$
8	$z = x^2cos\sqrt{y}$	**18**	$z = sinxsiny$
9	$z = x^{2y}$	**19**	$z = e^{x^2y^2}$
10	$z = xe^y$	**20**	$z = (x+y)cos(x-2y)$

Ответы:

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 4y^2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x^2 + 20\,y^3, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 8xy,$

$d^2z = (6x + 4y^2)dx^2 + 16xydxdy + (4x^2 + 20\,y^3)dy^2.$

2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (e^x + 2y)y^2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2(e^x + 3yx^2),$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y(e^x + 3xy), d^2z = (e^x + 2y)y^2 dx^2 +$ $+y(e^x + 3xy)dxdy + 2(e^x + 3yx^2)dy^2.$
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x,$ $d^2z = 2ydx^2 + 4xdxdy + 6ydy^2.$
4. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x\big(cosy + siny(1 + x)\big), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x(cosy + xsiny),$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^x(cosy(1 + x) - siny),$ $d^2z = e^x\big(cosy + siny(1 + x)\big)dx^2 +$ $+2e^x(cosy(1 + x) - siny)dxdy - e^x(cosy + xsiny)dy^2.$
5. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{1-y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x^2}{(1-y)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{2x}{(1-y)^2},$ $d^2z = \frac{2}{1 - y}dx^2 - \frac{4x}{(1 - y)^2}dxdy - \frac{2x^2}{(1 - y)^3}dy^2.$

6. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x-2y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{4}{(x-2y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2}{(x-2y)^2},$ $d^2 z = -\frac{1}{(x-2y)^2} dx^2 + \frac{4}{(x-2y)^2} dxdy - \frac{4}{(x-2y)^2} dy^2.$
7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6x^2}{y^4}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{4x}{y^3},$ $d^2 z = \frac{2}{y^2} dx^2 - \frac{8x}{y^3} dxdy + \frac{6x^2}{y^4} dy^2.$
8. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2cos\sqrt{y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{4y}\left(\frac{sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}} - cos\sqrt{y}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{xcos\sqrt{y}}{\sqrt{y}},$ $d^2 z = 2cos\sqrt{y} dx^2 + \frac{2xcos\sqrt{y}}{\sqrt{y}} dxdy + \frac{x^2}{4y}\left(\frac{sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}} - cos\sqrt{y}\right) dy^2.$
9. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y(2y-1)x^{2y-2},$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^{2y} ln^2 x, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = x^{2y-1}(y + 4ylnx),$ $d^2 z = 2y(2y-1)x^{2y-2} dx^2 + x^{2y-1}(y + 4ylnx) dxdy + x^{2y} ln^2 x dy^2.$

10. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\,e^y, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=e^y,$ $d^2z\;=0dx^2+2e^ydxdyx\,e^y+x\,e^ydy^2.$
11. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=16e^{4x-y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{4x-y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-4e^{4x-y},$ $d^2z\;=16e^{4x-y}dx^2-8e^{4x-y}dxdy+e^{4x-y}dy^2.$
12. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\cos(x+y)-x\sin(x+y), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x\sin(x+y),$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\cos(x+y)-x\sin(x+y),$ $d^2z\;=\big(2\cos(x+y)-x\sin(x+y)\big)dx^2+$ $+2\big(\cos(x+y)-x\sin(x+y)\big)dxdy-x\sin(x+y)dy^2.$
13. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y(4x+2y)}{(2x^2+2xy+y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2x^2+2xy}{(2x^2+2xy+y^2)^2},$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{2x^2-y^2}{(2x^2+2xy+y^2)^2},$ $d^2z\;=\frac{y(4x+2y)}{(2x^2+2xy+y^2)^2}dx^2-\frac{2(2x^2-y^2)}{(2x^2+2xy+y^2)^2}dxdy-\frac{2x^2+2xy}{(2x^2+2xy+y^2)^2}dy^2.$

14. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{18}{(3x-y^3)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{6y(3x+2y^3)}{(3x-y^3)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{18y^2}{(3x-y^3)^3}$ $d^2z=\frac{18}{(3x-y^3)^3}dx^2-\frac{36y^2}{(3x-y^3)^3}dxdy+\frac{6y(3x+2y^3)}{(3x-y^3)^3}dy^2.$
15. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{x^2}{y^3}e^{\frac{x}{y}},$ $d^2z=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}dx^2+2\frac{x^2}{y^3}e^{\frac{x}{y}}dxdy-\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}dy^2.$
16. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-20x^3y^2sin(x^5y^2)-25x^8y^4cos(x^5y^2),$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x^5sin(x^5y^2)-4x^{10}y^2cos(x^5y^2),$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-10x^4ysin(x^5y^2)-10x^9y^3cos(x^5y^2),$ $d^2z=\left(-20x^3y^2sin(x^5y^2)-25x^8y^4cos(x^5y^2)\right)dx^2-$ $-\left(20x^4ysin(x^5y^2)+20x^9y^3cos(x^5y^2)\right)dxdy+e^{4x-y}dy^2.$
17. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1}{y},$ $d^2z=2dx^2+\frac{2}{y}dxdy-\frac{x}{y^2}dy^2.$

18.
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -sinxsiny, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = sinxsiny, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = cosxcosy,$$
$$d^2 z = -sinxsinydx^2 + cosxcosydxdy + sinxsinydy^2.$$

19. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2 e^{x^2y^2}(2x^2 + 1), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2 e^{x^2y^2}(2x^2y^2 + 1),$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4xye^{x^2y^2}(x^2y^2 + 1),$$
$$d^2 z = 2y^2 e^{x^2y^2}(2x^2 + 1)dx^2 + 4xye^{x^2y^2}(x^2y^2 + 1)dxdy +$$
$$+2x^2 e^{x^2y^2}(2x^2y^2 + 1)dy^2.$$

20. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2\sin(x - 2y) - (x + y)cos(x - 2y),$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4sin(x - 2y) - 4(x + y)cos(x - 2y),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = sin(x - 2y) + 2(x + y)cos(x - 2y),$$
$$d^2 z = \big(-2\sin(x - 2y) - (x + y)cos(x - 2y)\big)dx^2 +$$
$$+2\big(sin(x - 2y) + 2(x + y)cos(x - 2y)\big)dxdy +$$
$$+\big(4sin(x - 2y) - 4(x + y)cos(x - 2y)\big)dy^2.$$

8. Производная сложной функции.

1)Случай одной независимой переменной.

Пусть $z = f(x;y)$ функция двух независимых переменных x и y,каждая из которых является функцией одной независимой переменной t: $x = x(t), y = y(t)$,тогда функция $z = f(x(t);y(t))$ является сложной функцией одной переменной t(переменные x и y промежуточные).

Теорема: если $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;\ y)\epsilon D$ функция и $x = x(t), y = y(t)$- дифференцируемыми функции независимой переменной t,

то производная сложной функции $z = f(x(t);y(t))$ вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (12)$$

Доказательство.

Дадим независимой переменной t приращение Δt,тогда функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ получат приращение Δx

и $\Delta\, y$ соответственно, они в свою очередь вызовут приращение Δz функции $z = f(x;y)$.

Так как по условию функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;\ y)$,то её полное приращение имеет вид:

$\Delta z = A\cdot\Delta\, x + B\cdot\Delta\, y + \alpha\cdot\Delta\, x + \beta\cdot\Delta\, y$,

где $\alpha = \alpha(\Delta\, x;\Delta\, y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta\, x;\Delta\, y) \to 0$ при $\Delta\, x \to 0, \Delta\, y \to 0$.

Учитывая, что $\frac{dz}{dt} = \lim\limits_{\Delta\, t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}$ разделим обе части полного приращения на Δt и переходя к пределу в обеих частях равенства имеем:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta\, x + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta\, y + \alpha\cdot\Delta\, x + \beta\cdot\Delta\, y|:\Delta t,$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta\, x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta\, y}{\Delta t} + \alpha\cdot\frac{\Delta\, x}{\Delta t} + \beta\cdot\frac{\Delta\, y}{\Delta t},$$

$$\lim_{\Delta\, t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta\, t\to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta\, x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta\, y}{\Delta t} + \alpha\cdot\frac{\Delta\, x}{\Delta t} + \beta\cdot\frac{\Delta\, y}{\Delta t}\right),$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\lim_{\Delta\, t\to 0}\frac{\Delta\, x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\lim_{\Delta\, t\to 0}\frac{\Delta\, y}{\Delta t} + \lim_{\Delta\, t\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta\, t\to 0}\frac{\Delta\, x}{\Delta t} +$$

$$+\lim_{\Delta\, t\to 0}\beta\cdot\lim_{\Delta\, t\to 0}\frac{\Delta\, y}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + 0\cdot\frac{dx}{dt} + 0\cdot\frac{dy}{dt} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt};$$

Таким образом, $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$.

Замечание: в частности, если $z = f(x;y), y = y(x)$, получим

$z = f(x; y(x))$-сложную функцию независимой переменной x.
Этот случай сводится к предыдущему заменой t на x $(dx = dt)$,согласно формуле (12), имеем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

полная производная функции z по переменной x будет вычисляться следующим образом:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (13)$$

Формула (12), (13) носит название **формулы полной производной**.

2)Случай нескольких независимых переменных.

Если $z = f(x; y)$,где $x = (u; v), y = y(u; v)$, тогда $z = f(x(u; v); y(u; v))$— сложная функция двух независимых переменных u и v.

Ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ можно найти, используя формулу $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$ зафиксировав v и заменив в данной формуле $\frac{dz}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ соответствующими частными производными $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u};$$

Аналогично, зафиксировав u и заменив $\frac{dz}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ на $\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}$ получим:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v};$$

Таким образом, частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, сложной функции $z = f\big(x(u;v);y(u;v)\big)$ можно найти, используя формулы (14):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases} \quad (14)$$

Таким образом, производная сложной функции $z = f\big(x(u;v);y(u;v)\big)$ по каждой независимой переменной u и v равна сумме произведений частных производных этой функции по ее промежуточным переменным x и y на их производные по соответствующей независимой переменной u и v.

Заметим, что в данном случае справедлива формула: $dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$ –полный дифференциал функции $z = f\big(x(u;v);y(u;v)\big)$.

Пример 18. Найти производную функции:

а) $z = x^2y^3$, где $x = t, y = t^2$;

б) $z = x\cos\frac{x}{y}$, где $x = 1 + 3t, y = \sqrt{1+t^2}$;

в) $z = ln(x^2 - y^2)$, где $y = e^x$;

г) $z = arctg\,\frac{x+1}{y}$,где $y = e^{(1+x)^2}$;

д) $z = \frac{x^2}{y}$,где $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$;

е) $z = 3^{x^2}arctgy$,где $x = \frac{u}{v}, y = uv$.

Решение.

а) Так как функция $z = x^2y^3, x = t, y = t^2$ является сложной функцией одной переменной t.Решение может быть найдено по формуле (12), поэтому найдём $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2y^3)'_x = y^3(x^2)'_x = 2xy^3;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2y^3)'_y = x^2(y^3)'_y = 3x^2y^2;$$
$$\frac{dx}{dt} = (t)' = 1;$$
$$\frac{dy}{dt} = (t^2)' = 2t.$$

Подставим найденные значения в формулу:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = 2xy^3\cdot 1 + 3x^2y^2\cdot 2t =$$
$$= 2xy^3 + 6x^2y^2t = +2t\cdot(t^2)^3 + 6t^2(t^2)^2t =$$
$$= 2t^7 + 6t^7 = 8t^7;$$

Замечание: можно как сохранить переменные xиy так и заменить их через t(в зависимости от того упроститься или нет выражение после подстановки);

Решение можно было найти иначе, подставив значение для $x = t, y = t^2$ в формулу $z = x^2y^3 = t^2\cdot(t^2)^3 = t^8$ и вычислив производную $\frac{dz}{dt} = (t^8)' = 8t^7$.

б) Так как исходная функция является сложной функцией одной переменной t. Решение может быть найдено по формуле (12), поэтому найдём$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ и подставим полученные значения в формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x\cos\frac{x}{y}\right)'_x = (x)'_x\cdot\cos\frac{x}{y} + x\cdot\left(\cos\frac{x}{y}\right)'_x =$$
$$= \cos\frac{x}{y} - x\cdot\sin\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \cos\frac{x}{y} - x\cdot\sin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}(x)'_x =$$
$$= \cos\frac{x}{y} - \frac{x}{y}\cdot\sin\frac{x}{y};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x\cos\frac{x}{y}\right)'_y = x\left(\cos\frac{x}{y}\right)'_y = -x\sin\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\right)'_y =$$

$$= -x sin\frac{x}{y}\cdot x(y^{-1})'_y = -x^2 sin\frac{x}{y}(-y^{-2}) = \left(\frac{x}{y}\right)^2\cdot sin\frac{x}{y};$$

$$\frac{dx}{dt} = (1+3t)' = 3;$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\sqrt{1+t^2}\right)' = \left((1+t^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+t^2)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}\cdot 2t = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$\frac{dz}{dt} = 3\cdot\left(cos\frac{x}{y} - \frac{x}{y}\cdot sin\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2\cdot sin\frac{x}{y}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};$$

в) Так как исходная функция является сложной функцией одной переменной x. Решение может быть найдено по формуле (13). Найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ и полную производную $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(ln(x^2-y^2)\right)'_x = \frac{1}{x^2-y^2}\cdot(x^2-y^2)'_x = \frac{2x}{x^2-y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(ln(x^2-y^2)\right)'_y = \frac{1}{x^2-y^2}\cdot(x^2-y^2)'_y = -\frac{2y}{x^2-y^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = (e^x)' = e^x;$$

На основании формулы (13) получаем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2-y^2} - \frac{2y}{x^2-y^2}e^x = \frac{2(x-ye^x)}{x^2-y^2} =$$

$$= \frac{2(x-ye^x)}{x^2-y^2} = \frac{2(x-e^{2x})}{x^2-e^{2x}};$$

г) Так как исходная функция является сложной функцией одной переменной x. Решение может быть найдено по формуле (13):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(arctg\frac{x+1}{y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+1}{y}\right)'_x =$$

$$=\frac{1}{\frac{y^2+(x+1)^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}(x+1)'_x=\frac{y}{y^2+(x+1)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(arctg\,\frac{x+1}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+1}{y}\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{y}\right)^2}(x+1)(y^{-1})'_y=\frac{x+1}{\frac{y^2+(x+1)^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=$$

$$=-\frac{x+1}{y^2+(x+1)^2};$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(e^{(1+x)^2}\right)'=e^{(1+x)^2}((1+x)^2)'=2e^{(1+x)^2}(1+x);$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y^2+(x+1)^2}-\frac{2(x+1)^2e^{(1+x)^2}}{y^2+(x+1)^2}=$$

$$=\frac{y-2(x+1)^2e^{(1+x)^2}}{y^2+(x+1)^2}=\frac{e^{(1+x)^2}(1-2(x+1)^2)}{e^{2(1+x)^2}+(x+1)^2};$$

д) Так как функция $z=\frac{x^2}{y}$,где $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$- сложная функция двух независимых переменных u и v,поэтому решение может быть найдено по формуле (14), для этого находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial v}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x^2}{y}\right)'_x=\frac{1}{y}\cdot(x^2)'_x=\frac{2x}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x^2}{y}\right)'_y=x^2\left(\frac{1}{y}\right)'_y=x^2(y^{-1})'_y=-\frac{x^2}{y^2};$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=(uv)'_u=v(u)'_u=v;$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=(uv)'_v=u(v)'_v=u;$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \left(\frac{u}{v}\right)'_u = \frac{1}{v}(u)'_u = \frac{1}{v};$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \left(\frac{u}{v}\right)'_v = u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)'_v = u(v^{-1})'_v = -\frac{v}{v^2}$$

Применяя формулу (14), получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2x}{y} \cdot v - \frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{1}{v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2x}{y} u - \frac{x^2}{y^2} \cdot \left(-\frac{v}{v^2}\right).$$

Итак, $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{2xv}{y} - \dfrac{x^2}{y^2 v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{2xu}{y} + \dfrac{x^2 v}{(yv)^2} \end{cases}$;

e) Сложная функция двух независимых переменных u и v,поэтому решение может быть найдено по формуле (14):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3^{x^2} arctgy\right)'_x = arctgy\left(3^{x^2}\right)'_x =$$

$$= arctgy \cdot 3^{x^2} ln3 \cdot (x^2)'_x = 2ln3 \cdot 3^{x^2} xarctg\, y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(3^{x^2} arctgy\right)'_y = 3^{x^2}(arctgy)'_y = \frac{3^{x^2}}{1+y^2};$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u;$$

Составляем суммы соответствующих произведений:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2\, ln3 \cdot 3^{x^2} x\, arctg\, y}{v} + \frac{3^{x^2} v}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{2ln3\ \ 3^{x^2} xuarctg\, y}{v^2} + \frac{3^{x^2} u}{1+y^2}.$$

Ответ можно оставить в такой форме или выразить через u и v:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2ln3 \cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}}\ \frac{u}{v^2} arctg(uv) + \frac{3^{\frac{u^2}{v^2}} v}{1+u^2 v^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -2\frac{u^2}{v^3}\cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}}\ln 3\, arctg(uv) + \frac{u}{1+u^2v^2}\cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}}.$$

Пример 19. Показать, что функция $z = arctg\frac{x}{y}$, где $x = u + v, y = u - v$, удовлетворяет соотношению $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(arctg\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}(x)'_x = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{y^2}\cdot y} = \frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(arctg\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot x(y^{-1})'_y = -\frac{x}{\frac{x^2+y^2}{y^2}\cdot y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (u+v)'_u = (u)'_u = 1;$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (u+v)'_v = (v)'_v = 1;$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = (u-v)'_u = (u)'_u = 1;$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = (u-v)'_v = -(v)'_v = -1;$$

Применяя формулы (14), получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{y-x}{x^2+y^2} = \frac{u-v-(u+v)}{(u+v)^2+(u-v)^2} = -\frac{2v}{2u^2+2v^2} =$$

$$= -\frac{v}{u^2+v^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} = .$$

$$= \frac{y+x}{x^2+y^2} = \frac{u-v+u+v}{(u+v)^2+(u-v)^2} = \frac{2u}{2u^2+2v^2} =$$

$$= \frac{u}{u^2+v^2};$$

Покажем, что $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{v}{u^2+v^2} + \frac{u}{u^2+v^2} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$ —что и требовалось доказать.

Задания для самостоятельного решения.

6. Найти частные производные сложной функции ФНП:

1	$z = x^2 + y^3 + xy$, $x = asint, y = acost$	**11**	$z = yx^2, y = cosx$
2	$z = cos(2t + 4x^2 - y)$, $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{\sqrt{t}}{lnt}$	**12**	$z = ln(x^2 - y^2)$, $y = x^2$
3	$z = lnsin\frac{x}{y}$, $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2+1}$,	**13**	$z = x^3 + y^3$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$
4	$z = e^{xy}ln(x+y)$, $x = t^3$, $y = 1 - t^3$	**14**	$z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $x = u^v$, $y = ulnv$

5	$z = xyarctg(xy)$, $x = t^2 + 1$, $y = t^3$	15	$z = e^{x - \frac{2}{y}}$, $x = vcos^2u$, $y = usin^2v$
6	$z = e^{2x-3y}$, $x = tgt$, $y = t^2 - t$	16	$z = \frac{x^2}{y}$, $x = u - 2v$, $y = v + 2u$
7	$z = x^y$, $x = lnt$, $y = sint$	17	$z = vu^2 + u, u = x + 1$, $v = x + e^y$
8	$z = sinx\, ln\, y, x = t^3$, $y = e^t$	18	$z = vu^2 + v, u = x + y^2$, $v = lnx + e^y$
9	$z = xe^y, y = \varphi(x)$	19	$z = arctg(x + 2y)$, $x = t^2$, $y = t^3$
10	$z = e^{xy}, y = \varphi(x)$	20	$z = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$

Ответы:

1. $\frac{dz}{dt} = a(2x + y)\cos t - a(2y + x)\sin t$
2. $\frac{dz}{dt} = -sin(2t + \frac{4}{t^2} - \frac{\sqrt{t}}{ln\, t})(2 - \frac{8}{t^3} - \frac{ln\, t - 2}{2\sqrt{t}\, ln^2 t})$
3. $\frac{dz}{dt} = \frac{t}{y} ctg\left(\frac{x}{y}\right)\left(6 - \frac{x}{y^2}\right)$
4. $\frac{dz}{dt} = 0$
5. $\frac{dz}{dt} = (y\, arctg\, xy + \frac{xy^2}{1+x^2y^2}) \cdot 2t + (y\, arctg\, xy + \frac{x^2y}{1+x^2y^2}) \cdot 3t^2$

6. $\frac{dz}{dt} = 2e^{2x-3y}\frac{1}{cos^2 t} - 3e^{2x-3y}(2t-1)$
7. $\frac{dz}{dt} = yx^{y-1}\frac{1}{t} + x^y \ln x \cos t$
8. $\frac{dz}{dt} = t\cos(t^3) + \sin(t^3)$
9. $\frac{dz}{dx} = e^y + xe^y\varphi'(x)$
10. $\frac{dz}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy}\varphi'(x)$
11. $\frac{dz}{dx} = x(2cosx - xsinx)$
12. $\frac{dz}{dx} = \frac{2(1-2x^2)}{x(1-x^2)}$
13. $dz = 3v^2(v^3 + \frac{1}{v^3})dv + v^3(3v^2 - \frac{3}{v^4})dv$
14. $dz = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}vu^{v-1} - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\ln v\right)du +$ $+\left(\frac{xu^v \ln u}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{yu}{v\sqrt{x^2-y^2}}\right)dv$
15. $dz = e^{x-\frac{2}{y}}\left(\frac{2}{y^2}\sin^2 v - v\sin 2u\right)du +$ $+e^{x-\frac{2}{y}}\left(\cos^2 v + \frac{2}{y^2}u\sin 2v\right)dv3 -$
16. $dz = \frac{x}{y}\left(2\left(1-\frac{x}{y}\right)du - \left(4+\frac{x}{y}\right)dv\right)$
17. $\frac{\partial z}{\partial x} = u^2 + 2uv,\ \frac{\partial z}{\partial y} = u^2e^y$

18. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u^2+1}{x} + 2uv + 1,$ $\frac{\partial z}{\partial y} = (2uv+1)\cdot 2y + (u^2+1)e^y$
19. $\frac{dz}{dt} = \frac{2t(3t+1)}{1+t^4(1+2t)^2}$
20. $\frac{dz}{dt} = -(e^{-t}+e^t)$

9. Градиент функции и производная по направлению.

Градиент функции

Рассмотрим функцию двух переменных $n = 2, z = f(x;y)$.

Градиентом функции нескольких переменных в данной точке называется вектор, координаты которого равны частным производным по соответствующим аргументам, вычисленным в данной точке $M(x;y)$.

Обозначение:

$$\boldsymbol{gradz}|_M = \left(\boldsymbol{z'_x}|_M; \boldsymbol{z'_y}|_M\right) \text{ или}$$

$$\boldsymbol{gradz}|_M = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M; \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M\right)$$

Аналогично вычисляется градиент для функции трёх переменных $u = f(x;y;z)$,то есть

$$gradu|_M = (u'_x|_M; u'_z|_M; u'_z|_M).$$

Физический смысл градиента.

Градиент функции, то есть вектор $gradz|_M$указывает направление, в котором функция z в точке M возрастает с максимальной скоростью. При этом, максимальная величина скорости равна:

$$|gradz|_M| = \sqrt{(z'_x|_M)^2 + \left(z'_y\big|_M\right)^2};$$

Пример 20. Найти градиент функции $z = x^2y$ в точке $M(1;2)$,вычислить величину градиента.

Решение.

Вычислим частные производные и их значения в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2y)'_x = y \cdot (x^2)'_x = 2xy;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2y)'_y = x^2(y)'_y = x^2;$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = z'_x|_M = (2xy)|_M = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4;$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = z'_y\big|_M = (x^2)|_M = 1.$$

Таким образом, $gradz|_M = \left(z'_x|_M; z'_y\big|_M\right) = (4;1)$-градиент функции $z = x^2y$ в точке $M(1;2)$,то есть вектор, в направлении которого функция $z = x^2y$ возрастает в точке $M(1;2)$.

$|gradu|_M| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ –величина градиента-максимальная величина скорости возрастания.

Пример 21. Найти градиент функции $u = 2^{x+2y-z}$ в точке $M(1;0;1)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2^{x+2y+z})'_x = 2^{x+2y-z}ln2(x + 2y - z)'_x =$$
$$= 2^{x+2y-z}ln2;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = (2^{x+2y-z})'_y = 2^{x+2y-z}ln2 \cdot (x + 2y - z)'_y =$$
$$= 2^{x+2y-z}ln2 \cdot 2 = 2^{x+2y-z+1}ln2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (2^{x+2y-z})'_z = 2^{x+2y-z} ln2 \cdot (x + 2y - z)'_z =$$
$$= -2^{x+2y+3z} ln2;$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = (2^{x+2y-z} ln2)|_M = 2^{1+2\cdot 0-1} ln2 = ln2;$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = (2^{x+2y-z+1} ln2)|_M = 2^{1+2\cdot 0-1+1} ln2 = 2ln2;$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (2^{x+2y-z} ln2)|_M = 2^{1+2\cdot 0-1} ln2 = ln2.$$

Таким образом, $gradu|_M = (ln2; 2ln2; ln2)$.

Пример 22. Найти точки, в которых модуль градиента функции $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ равен 2.

Решение.

Поскольку $gradz = \left(z'_x; z'_y\right)$, то $|gradz| = \sqrt{z'^2_x + z'^2_y}$, найдём точки, где $|gradz| = 2$, для этого вычислим частные производные исходной функции:

$$z'_x = \left((x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \right)'_x = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}(x^2 + y^2)'_x =$$
$$= 3x \cdot \sqrt{x^2 + y^2};$$
$$z'_y = \left((x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \right)'_y = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}(x^2 + y^2)'_y =$$
$$= 3y \cdot \sqrt{x^2 + y^2};$$

Если $|gradz| = 2$, то

$$\sqrt{\left(3x\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(3y\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2} = 2,$$
$$\sqrt{9x^2(x^2 + y^2) + 9y^2(x^2 + y^2)} = 2,$$
$$\sqrt{9(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)} = 2,$$
$$\sqrt{\left(3(x^2 + y^2)\right)^2} = 2,$$

$3(x^2 + y^2) = 2$, то есть $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$.

Таким образом точки, в которых модуль градиента функции $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ равен 2, это все точки, лежащие на окружности $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$ —окружность с центром

в начале координат и радиусом $R = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Производная по направлению.

Рассмотрим функцию $z = f(x;y)$ определённую и дифференцируемую в некоторой окрестности точки $M(x;y)$и произвольный единичный вектор $\bar{l} = (cos\alpha; cos\beta)$, где α, β-углы, образованные вектором $\bar{l}$ с осями координат (рис.8).

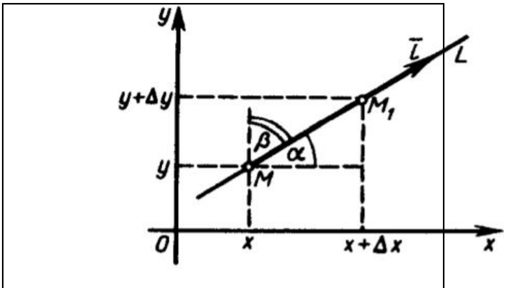


Рис.8

Рассмотренные ранее частные производные от функции нескольких переменных являются «производными в направлении координатных осей». Например, при нахождении z'_x приращение получает переменная x, изменяясь от x до $x + \Delta x$ вдоль оси Ox.

Для характеристики скорости изменения функции z в точке $M(x;y)$в направлении вектора $\bar{l}$ введём понятие производной по направлению.

Для этого проведём через точку $M(x;y)$ прямую L,чтобы она совпала с вектором $\bar{l}$, и возьмём на прямой некоторую точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$, и найдём скорость изменения функции при движении точки M.Направление движения точки $M(x;y)$ будет показывать вектор $\overline{MM_1} = \bar{l}$.

Обозначим через Δl длину отрезка$|\overline{MM_1}|$, то есть

$$\Delta l = |\overline{MM_1}| = \sqrt{(x+\Delta x - x)^2 + (y + \Delta y - y)^2} =$$
$$= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2};$$

Приращение функции z возникающее при переходе от точки M к точке M_1в направлении вектора$\bar{l}$ определяется следующим образом:

$$\Delta z = z(M_1) - z(M) = f(x+\Delta x; y + \Delta y) - f(x;y),$$

Предел отношения$\frac{\Delta z}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0 (M_1 \to M)$ если он существует, называется **производной** функции $z = f(x;y)$ в точке M **в направлении** вектора $\bar{l}$=$\overline{MM_1}$ называется предел приращения функции z по направлении вектора $\bar{l}$.

Обозначение:

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \lim_{M_1 \to M} \frac{z(M_1) - z(M)}{|\overline{MM_1}|}}$$

Предположим, что функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$.Тогда её приращение можно записать в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \beta_1 \cdot \Delta y ,$$

где$\alpha_1 = \alpha_1(\Delta x; \Delta y) \to 0$ и

$\beta_1 = \beta_1(\Delta x; \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0.$

Разделив обе части равенства на Δl имеем:

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta l} + \alpha_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta l} + \beta_1 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta l} ,$$

учитывая, что$\Delta x = \Delta l \cdot cos\alpha, \Delta y = \Delta l \cdot cos\beta$,получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta l\cdot cos\alpha}{\Delta l}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta l\cdot cos\beta}{\Delta l}+$$

$$+\alpha_1\cdot\frac{\Delta l\cdot cos\alpha}{\Delta l}+\beta_1\cdot\frac{\Delta l\cdot cos\beta}{\Delta l}=$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot cos\beta+\alpha_1\cdot cos\alpha+\beta_1\cdot cos\beta;$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $\Delta l\to 0$,

учитывая, что $\frac{\partial z}{\partial l}=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta l}$ и α_1,β_1 –бесконечно малые

функции при $\Delta l\to 0$ получим:

$$\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta l}=\lim_{\Delta l\to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot cos\beta+\alpha_1\cdot cos\alpha+\beta_1\cdot cos\beta\right),$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot cos\beta}\ \textbf{(15)}$$

Используя понятие градиента функции $gradz=\left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ и учитывая, что единичный вектор $\bar{l}$ имеет координаты $(cos\alpha;cos\beta)$, представим полученную формулу в виде скалярного произведения векторов $gradz$ и $\bar{l}$:

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial l}=gradz\cdot\bar{l}}\ \textbf{(16)}$$

С другой стороны, по определению скалярного произведения

$$gradz\cdot\bar{l}=|gradz|\cdot|\bar{l}|\cdot cos\varphi=|gradz|cos\varphi,$$

где φ –угол между векторами $gradz$ и $\bar{l}$.

Таким образом, производная функции в заданном направлении совпадает с проекцией градиента на данное направление, то есть

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \text{пр}_{\bar{l}}\, \boldsymbol{grad z} \quad \textbf{(17)}$$

Замечание: для функции трёх переменных $u = f(x; y; z)$ производная по направлению определяется аналогично, то есть

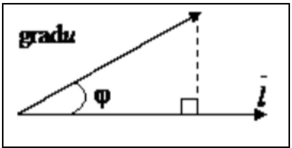


Рис.8

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot cos\gamma =$$
$$= \text{пр}_{\bar{l}}\, gradu,$$

где φ— угол между градиентом и вектором$\bar{l}$. (рис.8)

Физический смысл производной по направлению.

Производная $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M$ характеризует скорость изменения функции z в точке M в направлении данного вектора$\bar{l}$. Если$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M > 0$,то функция возрастает в направлении вектора$\bar{l}$ со скоростью$\left|\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M\right|$, если$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M < 0$, то функция убывает в направлении вектора$\bar{l}$ со скоростью$\left|\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M\right|$.

Пример 23. Найти градиент и производную функции $u = x^3y + xz^2 + z^3y$ в точке $M(-1; 0; 2)$ в направлении вектора $\overline{MM_1} = \bar{\imath} - \bar{\jmath} + \bar{k}$.

Решение.

Поскольку$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = gradu|_M \cdot \bar{l}$,то решение данной задачи будет состоять из двух этапов:

1)Найдём $grad u|_M$,для этого вычислим частные производные данной функции и их значения в точке M :

$$u'_x = (x^3y + xz^2 + z^3y)'_x = y \cdot (x^3)'_x + z^2(x)'_x =$$

$$= 3yx^2 + z^2;$$

$$u'_y = (x^3y + xz^2 + z^3y)'_y = x^3(y)'_y + z^3(y)'_y =$$

$$= x^3 + z^3;$$

$$u'_z = (x^3y + xz^2 + z^3y)'_z = x(z^2)'_z + y(z^3)'_z =$$

$$= 2xz + 3yz^2;$$

Найдём значение частных производных в точке M:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = (3yx^2 + z^2)|_M = 3 \cdot 0 \cdot (-1)^2 + 2^2 = 4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = (x^3 + z^3)|_M = (-1)^3 + 2^3 = 7;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = (2xz + 3yz^2)|_M = 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 2^2 = -4.$$

Таким образом,$grad u|_M = (4; 7; -4)$;

2)Находим единичный вектор $\bar{l}$, имеющий данное направление $\overline{MM_1} = \bar{\imath} - \bar{\jmath} + \bar{k} = (1; -1; 1)$,

$$\bar{l} = \frac{\overline{MM_1}}{|\overline{MM_1}|} = \frac{(1; -1; 1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{(1; -1; 1)}{\sqrt{3}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right);$$

3)Находим $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = gradu\cdot\bar{l} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + 7\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + (-4)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$= \frac{4\sqrt{3}-7\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{3} = -\frac{7\sqrt{3}}{3} < 0$-функция убывает в направлении вектора $\bar{l}$ со скоростью$\left|-\frac{7\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Пример 24. Найти производную функции $z = ln(e^x + e^y)$ в начале координат в направлении луча, образующего с осью абсцисс угол 45^0.

Решение.

1)Найдём $gradz|_O$,для этого вычислим частные производные данной функции и их значения в начале координат $O(0;0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (ln(e^x + e^y)\ )'_x = \frac{1}{e^x + e^y}(e^x + e^y)'_x = \frac{e^x}{e^x + e^y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (ln(e^x + e^y)\ )'_y = \frac{1}{e^x + e^y}(e^x + e^y)'_y = \frac{e^y}{e^x + e^y};$$

Найдём значение частных производных в точке $O(0;0)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_O = \left.\left(\frac{e^x}{e^x + e^y}\right)\right|_O = \frac{e^0}{e^0 + e^0} = \frac{1}{2};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_O = \left.\left(\frac{e^x}{e^x + e^y}\right)\right|_O = \frac{e^0}{e^0 + e^0} = \frac{1}{2};$$

Таким образом,$gradz|_O = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

2)Находим орт вектора, в направлении которого будем искать производную, то есть вектор единичной длины, образующего с осью абсцисс угол 45^0:

$$\bar{l} = (cos\alpha; cos\beta) = (cos45^0; cos45^0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

3)Находим $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_O$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_O = gradz|_O \cdot \bar{l} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Задания для самостоятельного решения.

7. Вычислить градиент и производную ФНП в точке M в направлении вектора $\bar{l}$.

1	$u = xyz$, $M(3;-1;2)$, $\bar{l} = (0;1;3)$	**11**	$u = x^3y + xz^2 + z^3y$, $M(-1;0;2)$, $\bar{l} = (1;-1;1)$
2	$z = \dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$, $M(0;3), \bar{l} = (3;4)$	**12**	$u = y^x - z^3$, $M(0;e;-1)$, $\bar{l} = (1;2;-2)$
3	$u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $M(-1;2;0)$, $\bar{l} = (1;1;1)$	**13**	$u = x^3y + xz^2 + z^3y$, $M(0;1;2), \bar{l} = (2;2;1)$
4	$z = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}, M(1;1)$, $\bar{l} = (-3;1)$	**14**	$z = xy^2 + 4x^3y$, $M(2;3), \bar{l} = (3;4)$
5	$u = x^2 + 2xz + y^2$, $M(1;2;-1)$, $\bar{l} = (1;2;-2)$	**15**	$u = ln(x^2+y^2+z^2)$, $M(2;-3;1), \bar{l} = (3;-4;2)$
6	$z = 2x^2 + xy$, $M(-1;2), \bar{l} = (3;4)$	**16**	$u = \dfrac{xyz}{x+y+z}, M(2;1;3)$, $\bar{l} = (-2;1;2)$
7	$u = ln(e^x + e^y + e^z)$, $M(0;0;0)$, $\bar{l} = (1;-2;2)$	**17**	$z = x^2 - xy + 3y^3$, $M(1;1), \bar{l} = (-5;12)$
8	$z = x^2 - xy + y^3$, $M(1;-1)$, $\bar{l} = (3;-4)$	**18**	$z = 3x^2 + 5y^2, M(1;-1)$, $\bar{l} = (1;2)$

9	$z = 3x^4 - xy + y^3$, $M(1;2)$, $\bar{l} = (3;-4)$	**19**	$u = xy^2z^3, M(3;2;1)$, $\bar{l} = (2;2;1)$
10	$z = ln(2x + 3y)$, $M(1;3)$, $\bar{l} = (5;12)$	**20**	$u = xy^2 + z^2 - xyz$, $M(1;2;3), \bar{l} = (1;-2;2)$

Ответы:

1. $gradu\|_M = (-2;6;-3)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$	**11.** $gradu\|_M = (4;7;-4)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = -\frac{7\sqrt{3}}{3}$
2. $gradz\|_M = \left(\frac{3}{10};0\right)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = \frac{9}{50}$	**12.** $gradu\|_M = (1;0;-3)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = \frac{7}{3}$
3. $gradu\|_M = \left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}};0\right)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = \frac{\sqrt{15}}{5}$	**13.** $gradu\|_M = (0;-6;-4)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = -\frac{16}{3}$

4. $gradz\|_M = \left(0; -\frac{e}{2}\right)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = \frac{-e\sqrt{10}}{20}$	**14.** $gradz\|_M = (153; 44)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = 127$
5. $gradu\|_M = (0; 4; 2)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = \frac{4}{3}$	**15.** $gradu\|_M = \left(\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{1}{7}\right)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = \frac{20}{7\sqrt{29}}$
6. $gradz\|_M = (-2; 3)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = \frac{6}{5}$	**16.** $gradu\|_M = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = \frac{1}{6}$
7. $gradu\|_M = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = \frac{1}{9}$	**17.** $gradz\|_M = (1; 8)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = 7$
8. $gradz\|_M = (3; 2)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = 0{,}2$	**18.** $gradz\|_M = (6; -10)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = -\frac{14}{\sqrt{5}}$
9. $gradz\|_M = (10; 11)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = -2{,}8$	**19.** $gradu\|_M = (4; 12; 36)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = 22\frac{2}{3}$

10. $gradz\|_M = \left(\frac{2}{11}; \frac{3}{11}\right)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = \frac{46}{143}$	**20.** $gradu\|_M = (-2; 1; 4)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = \frac{4}{3}$

10. Экстремумы функции нескольких переменных.

Определение экстремума функции.

Понятие максимума, минимума, экстремума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной независимой переменной.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой области D, точка $M_0(x_0; y_0) \epsilon D$. Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется точкой **максимума** функции , если существует такая δ-окрестность точки $(x_0; y_0)$, что для каждой точки $(x; y)$ отличной от $(x_0; y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство $f(x; y) < f(x_0; y_0)$,

На рис.9: N_1 — точка максимума, а N_2 — точка минимума функции $z = f(x; y)$.

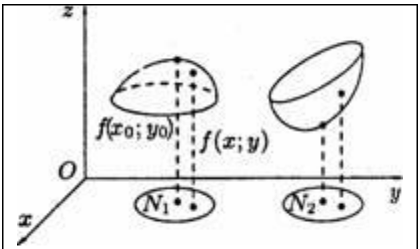


Рис.9

Аналогично определяется точка минимума функции: для всех точек $(x; y)$, отличных от $(x_0; y_0)$, из окрестности точки $(x_0;y_0)$, выполняется неравенство

$f(x;y) > f(x_0;y_0)$.

Аналогично определяется экстремум функции трех и большего числа переменных.
Значение функции в точке максимума (минимума) называется **максимумом (минимумом)** функции.
Максимум и минимум функции называют
ее **экстремумами.**
В области D функция может иметь несколько экстре-

мумов или не иметь ни одного.
Замечание: в силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции $z = f(x;y)$,поэтому перед тем, как найти экстремум

необходимо найти область определения функции.
Необходимые условия экстремума.
Теорема (необходимое условие экстремума)**:** если функция $z = f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ экстремум

и имеет в точке M_0 частные производные первого по-

рядка, то в этой точке частные производные равны нулю, то есть имеет место следующая
система:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0;y_0) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0;y_0) = 0 \end{cases} \quad \mathbf{(18)}$$

Примем теорему без доказательства.

Замечание: равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума.

Точки, в которых оно выполняется, будем называть точками возможного экстремума.

Точки, в которых частные производные первого порядка функции равны нулю, то есть $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются **стационарными точками** функции z .

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются **критическими точками.**

Система (18) эквивалентна одному уравнению $dz(x_0; y_0) = 0$.

Достаточные условия экстремума.

Не всякая критическая точка будет точкой экстремума.

Если $M_0(x_0; y_0)$ —стационарная точка функции $z = f(x; y)$ $(df(x_0; y_0) = 0)$ и

если в некоторой окрестности этой точки второй дифференциал

$$d^2 f\ (x_0; y_0) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0; y_0)(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0; y_0)dxdy +$$

$+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0; y_0)(dy)^2$- сохраняет знак при любых значениях dxиdy,не равных нулю одновременно, то функция в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет экстремум.

При этом если $d^2f\ (x_0;y_0) > 0$, то этот экстремум - минимум, если $d^2f\ (x_0;y_0) < 0$ – максимум.

Теорема (достаточные условия экстремума): если в точке $M_0(x_0;y_0)$ возможного экстремума и некоторой окрестности функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка.

Положим

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0;y_0), B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0;y_0),$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0;y_0), \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix};$$

Тогда:

а) если $\Delta > 0$, то в точке $M_0(x_0;y_0)$ функция имеет экстремум, причём при $A < 0, M_0(x_0;y_0)$ – точка максимума; при $A > 0,\ M_0(x_0;y_0)$ – точка минимума;

б) $\Delta < 0$, в точке $M_0(x_0;y_0)$ экстремума нет;

в) $\Delta = 0$, то в точке $M_0(x_0;y_0)$ экстремум может быть или не быть, требуется дополнительное исследование.

Примем теорему без доказательств.

Наибольший интерес представляет алгоритм нахождения экстремумов функции двух переменных, так как он, во-первых, отличается от алгоритма нахождения экстремумов функции одной переменной, а во-вторых, по аналогии с ним можно составить алгоритм нахождения экстремума функции двух переменных.

Схема исследования функции на экстремум.
1)Найти область определения функции;
2)Найти частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

и определить критические точки (стационарные точки-точки, в которых частные производные равны нулю $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$ и точки, в которых хотя бы одна частная

производная не существует);
3)Исследовать характер каждой критической точки при помощи достаточных условий экстремума функции.

Пример 25. Исследовать на экстремум функцию:
а) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$;

б) $z = x^3 + y^3 - 9xy - 4$;

в) $z = 2x^2 + 2y^2 - lnx - lny$;

г) $z = e^x(4y - xy - y^2)$.

Решение.
а) Областью определения данной функции являются все точки плоскости, то есть$(x; y)\epsilon R^2$.

Для того, чтобы найти стационарные точки, найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ и решим систему$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^2+xy+y^2-2x-3y)'_x=2x+y-2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2+xy+y^2-2x-3y)'_y=x+2y-3;$$

$\begin{cases}2x+y-2=0\\ x+2y-3=0\end{cases}, x=\frac{1}{3}, y=\frac{4}{3}$,следовательно,$M\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ –стационарная точка(точка возможного экстремума);

Исследуем характер стационарной точки,

для этого находим $\Delta = AC-B^2$:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2x+y-2)'_x=2;$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x+2y-3)'_y=2;$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(2x+y-2)'_y=1;$$

$\Delta = AC-B^2=2\cdot 2-1=3>0, A>0$,следовательно, $M\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ –точка минимума,найдём значение функции в этой точке:

$$z_{min}=z\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}-3\cdot\frac{4}{3}=$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}-\frac{6}{9}-4=\frac{15}{9}-4=\frac{5}{3}-4=-\frac{7}{3}.$$

б) Областью определения данной функции являются все точки плоскости, то есть$(x;y)\epsilon R^2$.

Найдём стационарные точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 + y^3 - 9xy - 4)'_x = 3x^2 - 9y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 + y^3 - 9xy - 4)'_y = 3y^2 - 9x;$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 |: 3 \\ 3y^2 - 9x = 0 |: 3 \end{cases}; \begin{cases} x^2 - 3y = 0 \\ y^2 - 3x = 0 \end{cases};$$

$\begin{cases} y = \frac{x^2}{3} & (1) \\ y^2 - 3x = 0 & (2) \end{cases}$, подставляя (1) в (2)имеем:

$$\left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - 3x = 0,$$

$$\frac{x^4}{9} - 3x = 0 |: 9,$$

$$x^4 - 27x = 0,$$

$$x(\ x^3 - 27) = 0,$$

$x_1 = 0, x_2 = 3,$ тогда, $y_1 = 0, y_2 = 3,$следователь-

но, $M_1(0; 0),\ M_2(3; 3)$ –стационарные точки;

Исследуем характер стационарных точек, для этого найдём $\Delta = AC - B^2$:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3x^2 - 9y)'_x = 6x;$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(3y^2-9x)'_y=6y;$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(3x^2-9y)'_y=-9;$$

$$\Delta=AC-B^2=6x\cdot 6y-(-9)^2=36xy-81,$$

$$\Delta_1=\Delta|_{M_1}=(36xy-81)|_{M_1}=36\cdot 0\cdot 0-81=-81<0,$$

следовательно, в точке M_1 нет экстремума;

$$\Delta_2=\Delta|_{M_2}=(36xy-81)|_{M_2}=36\cdot 3\cdot 3-81>0,$$

$$A=A|_{M_2}=(6x)|_{M_2}=18>0.$$

Следовательно, M_2 –точка минимума, $z_{min}=z(3;3)=3^3+3^3-9\cdot 3\cdot 3-4=-31$.

в) Областью определения данной функции являются точки, для которых $x>0, y>0$-точки, лежащие в первой четверти.

Найдём стационарные точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(\,2x^2+2y^2-lnx-lny)'_x=4x-\frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(2x^2+2y^2-lnx-lny)'_y=4y-\frac{1}{y}.$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases};\ \begin{cases}4x-\dfrac{1}{x}=0|\cdot x\\ 4y-\dfrac{1}{y}=0|\cdot y\end{cases};\ \begin{cases}4x^2-1=0\\ 4y^2-1=0\end{cases};$$

$x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}, y_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}$-не входят в область определения.

Следовательно, $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ –стационарная точка.

Исследуем характер стационарных точек, для этого найдём частные производные второго порядка:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(4x-\frac{1}{x}\right)'_x=4+\frac{1}{x^2};$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(4y-\frac{1}{y}\right)'_y=4+\frac{1}{y^2};$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(4x-\frac{1}{x}\right)'_y=0.$$

Тогда $\Delta|_M=(AC-B^2)|_M=\left(4+\frac{1}{x^2}\right)\left(4+\frac{1}{y^2}\right)\Big|_M=$

$$=\left(4+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)\left(4+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)=64>0, A>0,$$

следовательно, в точке M функция имеет минимум.

Найдём значение функции в данной точке (минимум функции):

$$z_{min}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-ln\frac{1}{2}-ln\frac{1}{2}=1+2ln2$$

.

г) Найдём стационарные точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^x(4y-xy-y^2)\right)'_x=(e^x)'_x\cdot(4y-xy-y^2)+$$

$$+\left((4y-xy-y^2)\right)'_x\cdot e^x=e^x(4y-xy-y^2)+e^x(-y)=$$
$$=e^x(3y-xy-y^2);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^x(4y-xy-y^2)\right)'_y=e^x(4y-xy-y^2)'_y=$$
$$=e^x(4-x-2y);$$

Решим систему $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$:

$$\begin{cases}e^x(3y-xy-y^2)=0|:e^x\\ e^x(4-x-2y)=0\ |:e^x\end{cases};$$

$$\begin{cases}3y-xy-y^2=0\\ 4-x-2y=0\end{cases};\begin{cases}y(3-x-y)=0\\ 4-x-2y=0\end{cases};$$

Эта система имеет решение, если

$\begin{cases} y = 0 \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases}, \begin{cases} 3 - x - y = 0 \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases},$

то

есть $\begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 3 - y \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 - y \\ 4 - (3 - y) - 2y = 0 \end{cases},$

$\begin{cases} x = 3 - y \\ 1 - y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$

Таким образом, функция z имеет две стационарные точки $M_1\ (4; 0), M_2\ (2; 1)$.

Используя достаточные условия экстремума, исследуем характер стационарных точек,

, для этого найдём частные производные функции z второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(e^x(3y - xy - y^2)\right)'_x = (e^x)'_x \cdot (3y - xy - y^2) +$$

$$+\left((3y - xy - y^2)\right)'_x \cdot e^x = e^x(3y - xy - y^2) + e^x(-y) =$$
$$= e^x(2y - xy - y^2);$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(e^x(4 - x - 2y)\right)'_y = \left(e^x(4 - x - 2y)\right)'_y =$$
$$= e^x(-2) = -2e^x;$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(e^x(3y - xy - y^2)\right)'_y = e^x(3 - x - 2y).$$

Тогда

$$\Delta = AC - B^2 = e^x(2y - xy - y^2)(-2e^x) -$$
$$-(e^x(3 - x - 2y)^2) = 2e^{2x}(y^2 + xy - 2y) -$$
$$-e^{2x}(3 - x - 2y)^2 = e^{2x}(2y^2 + 2xy - 4y - (3 - x - 2y)^2);$$

$$\Delta_1 = \Delta|_{M_1} = \left(e^{2x}(2y^2 + 2xy - 4y - (3 - x - 2y)^2)\right)\Big|_{M_1} =$$
$$= e^{2\cdot 4}(2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - (3 - 4 - 2 \cdot 0)^2) = -e^8 < 0,$$

следовательно, в точке M_1 нет экстремума;

$$\Delta_2 = \Delta|_{M_2} = \left(e^{2x}(2y^2 + 2xy - 4y - (3 - x - 2y)^2)\right)\Big|_{M_2} =$$
$$= e^{2\cdot 1}(2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - (3 - 2 - 2 \cdot 1)^2) = e^2 > 0 -$$

в точке M_2 функция имеет экстремум, так как

$A|_{M_2} = \left(e^x(2y - xy - y^2)\right)\big|_{M_2} = -e^2 < 0$, то это точка максимума.

Найдём значение функции в данной точке (максимум функции)

$$z_{max} = z(2;1) = e^2(4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1) = e^2.$$

Задания для самостоятельного решения.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = f(x;y)$.

1	$z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
2	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$
3	$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
4	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
5	$z = (x-1)^2 - 2y^2$
6	$z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$
7	$z = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$
8	$z = x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy + 1$
9	$z = \sqrt{x}y - y^2 - x + 6y$
10	$z = x^2 + y^2 - 2y + 1$
11	$z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$

12	$z = xy(1 - x - y)$
13	$z = 4x^2y + 24xy + y^2 + 32y - 6$
14	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y + 5\frac{2}{3}$
15	$z = -x^2 + xy - y^2 - 9x +$ $+3y - 20$
16	$z = e^{x^2-y} \cdot (5 - 2x + y)$
17	$z = x^4 + y^4 - 2xy - y^2 - x^2$
18	$z = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$
19	$z = x^2 - (y - 1)^2$
20	$z = x^3 + y^3 - 3xy$

Ответы:

1. $z_{min} = z(0;0) = 0$, $z_{max} = z\left(-\frac{5}{3};0\right) = -\frac{125}{3}$	**11.** $z_{min} = z(1;2) = -7$
2. $z_{min} = z\left(1;\frac{1}{2}\right) = 0$	**12.** экстремумов нет
3. $z_{min} = z(0;3) = -9$	**13.** $z_{min} = z(-3;2) = -10$
4. $z_{min} = z(1;0) = -1$	**14.** $z_{min} = z\left(\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{3}$

5. экстремумов нет	**15.** $z_{max} = z(-5;-1) = 1$
6. $z_{min} = z\left(0;-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$	**16.** экстремумов нет
7. $z_{max} = z(0;0) = 1$	**17.** $z_{min} = z(1;1) = z(-1;-1) = -2$
8. $z_{min} = z(0;0) = 1$	**18.** $z_{min} = z(1;2) = -25$, $z_{max} = z(-1;-2) = 31$
9. $z_{max} = z(4;4) = 12$	**19.** экстремумов нет
10. $z_{min} = z(0;1) = 0$	**20.** $z_{min} = z(1;1) = -1$

11. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности (для случая явного задания поверхности).

Рассмотрим одно из геометрических приложений частных производных функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в

точке $(x_0;y_0)$ некоторой области $D\epsilon R^2$. Рассечем по-

верхность S, изображающую функ-
цию z, плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$ (плоскости

параллельные плоскостям Oyz и Oxz) (рис. 10).

Плоскость $x = x_0$ пересекает

поверхность S по некоторой

линии $z_0(y)$, уравнение кото-

рой получается подстановкой
в выражение исходной функ-
ции $z = f(x;y)$ вместо x чис-

ла x_0.

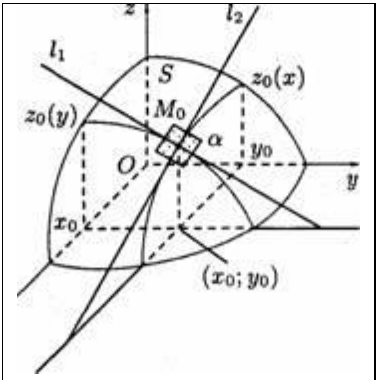


Рис.10

Точка $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$ принадлежит кривой $z_0(y)$.

В силу дифференцируемой функции z в точке M_0

функция $z_0(y)$ также является дифференцируемой в

точке $y = y_0$. Следовательно, в этой точке в плоско-

сти $x = x_0$ к кривой $z_0(y)$ может быть проведена каса-

тельная l_1.

Проводя аналогичные рассуждения для сечения $y = y_0$, построим касательную l_2 к кривой $z_0(x)$ в точке $x = x_0$. Прямые l_1 и l_2 определяют плоскость α, которая называется **касательной плоскостью** к поверхности S в точке M_0.

Касательной плоскостью к поверхности $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$, называется плоскость, содержащие все касательные к поверхности, проведённые в точке M_0.

Нормалью к поверхности в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно касательной плоскости, проведённой через точку M_0.

Составим уравнение касательной плоскости: чтобы получить уравнение касательной плоскости, достаточно составить уравнение плоскости, на которой находятся две касательные прямые, проведённые через точку $M_0\left(x_0;y_0;f(x_0;y_0)\right)$. Одна из касательных прямых будет параллельна плоскости Oxz, другая - параллельна плоскости Oyz .

Уравнения касательных l_1 и l_2 имеют вид:

1)$l_1:\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases};$

2)$l_2:\begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$,где $z_0 = f(x_0; y_0)$

Из аналитической геометрии известно, что уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, бу-

дет следующим:
$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

разделив уравнение на$-C$, и обозначив $\frac{A}{-C} = A_1, \frac{B}{-C} = B_1$

,получим:
$\frac{A}{-C}(x - x_0) + \frac{B}{-C}(y - y_0) + \frac{C}{-C}(z - z_0) = 0$,

$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) - (z - z_0) = 0$,

$z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0)$(19),

В данном уравнении A_1 и B_1 произвольные константы.

Эта плоскость перпендикулярна вектору норма-
ли $\bar{n} = (A_1; B_1; -1)$. .

НайдемA_1 и B_1:

Касательнаяl_1 лежит в плоскости α , следовательно,

координаты всех

точек l_1 удовлетворяют уравнению (19). Этот факт

можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} z - z_0 = \bar{n} = (A_1; B_1; -1) A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) \\ x = x_0 \\ z - z_0 = f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) \end{cases}$$

Разрешая эту систему относитель-
но B_1: $z - z_0 = B_1(y - y_0)$,

$B_1(y - y_0) = f'_y(x_0; y_0)(y - y_0)$, отсюда $B_1 = f'_y(x_0; y_0)$.

Проводя аналогичные рассуждения для касатель-
ной l_2 ,

легко установить, что $A_1 = f'_x(x_0; y_0)$.

Подставив значения A_1 и B_1 в уравнение (19),

получим искомое **уравнение касательной плоско-
сти:**

$$\boldsymbol{z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0)} \quad \textbf{(20)}$$

Используя определение нормали к поверхности и условие перпендикулярности прямой и плоскости (прямая и плоскость перпендикулярны, если нормаль-
ный вектор плоскости-в нашем случае касательной плоскости $\bar{n} = (A_1; B_1; -1)$ параллелен направляющему

вектору прямой- вектору перпендикулярному каса-
тельной плоскости, то есть вектору
$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$) легко получить канони-

ческие **уравнения нормали к поверхности:**

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1} \quad \mathbf{(21)}$$

Замечание: если уравнение $F(x;y;z)=0$ определяет функцию $z=f(x;y)$ (задаёт поверхность S неявно), то уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид (22):

$$F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+$$
$$+F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0 \ (22)$$

Уравнение нормали к поверхности имеет вид (23):

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0;z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0;z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0;z_0)} \quad \mathbf{(23)}$$

Алгоритм нахождения касательной плоскости и нормали к поверхности:

1)найти частные производные функции, которой задана поверхность;

2)найти значения найденных частных производных в точке M_0;

3)найденные значения частных производных и координаты точки M_0подставить в уравнения касательной плоскости и нормали в общем виде.

Пример 26. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке

M_0:**а)** $z = \frac{3x}{x^2-y^2}, M_0(1;0;3)$;

б)$\sqrt{x^2+y^2} - \frac{xy}{z} = 11, M_0(3;-4;2)$;

в) $e^{xyz} - 5z + x^2y - e^z = 4, M_0(2;1;0)$.

Решение.

а) Поскольку поверхность задана явно уравнением $z = \frac{3x}{x^2-y^2}$,то для нахождения

касательной плоскости и нормали к поверхности воспользуемся формулами:

$z - z_0 = f_x'(x_0;y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0;y_0)(y - y_0)$ – уравнение касательной плоскости;

и $\frac{x-x_0}{f_x'(x_0;y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y'(x_0;y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$ – уравнение нормали.

Для этого найдем частные производные данной функции и их значения в точке M_0:

$$f_x' = \left(\frac{3x}{x^2-y^2}\right)_x' = 3\left(\frac{x}{x^2-y^2}\right)_x' =$$

$$= 3\,\frac{(x)_x'(x^2-y^2) - x(x^2-y^2)_x'}{(x^2-y^2)^2} =$$

$$= 3\cdot\frac{x^2-y^2-2x^2}{(x^2-y^2)^2} = -\frac{3(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2};$$

$$f'_y = \left(\frac{3x}{x^2 - y^2} \right)'_y = 3x(\,(x^2 - y^2)^{-1}\,)'_y =$$

$$= -3x(x^2 - y^2)^{-2} \cdot (\,x^2 - y^2\,)'_y \;= \frac{6xy}{(x^2 - y^2)^2};$$

$$f'_x(1;0) = -\frac{3(1^2 + 0^2)}{(1^2 - 0^2)^2} = -3,$$

$$f'_y(1;0) = \frac{6 \cdot 1 \cdot 0}{(1^2 - 0^2)^2} = 0.$$

Найденные значения частных производных и координаты точки M_0 подставить в уравнения касательной

плоскости и нормали:

$$z - 3 = -3(x - 1) + 0(y - 0),$$

$z - 3 = -3x + 3$ или

$3x + z - 6 = 0 -$ уравнение касательной плоскости;

$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-3}{-1}$ —уравнения нормали;

б) Поверхность задана неявно уравнением $\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{xy}{z} = 11$ или

$\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{xy}{z} - 11 = 0$,поэтому в дальнейшем, для

нахождения касательной плоскости и нормали будем использовать следующие формулы

$F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+$
$+F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0$-уравнение касательной плоскости;

$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0;z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0;z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0;z_0)}$ -уравнение нормали.

Обозначив через $F(x;y;z)$левую часть уравнения, имеем$F(x;y;z)=\sqrt{x^2+y^2}-\frac{xy}{z}-11=0$.

Найдем частные производные и их значения в точке $M_0(3;-4;2)$:

$$F'_x=\left(\ (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{xy}{z}-11\right)'_x=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+y^2)'_x-\frac{y}{z}(x)'_x=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{z};$$

$$F'_y=\left(\ (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{xy}{z}-11\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+y^2)'_y-\frac{x}{z}(y)'_y=$$

$$=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{z};$$

$$F_z' = \left((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{xy}{z} - 11 \right)_z' =$$

$$= -xy\left(\frac{1}{z} \right)_z' = -xy(z^{-1})_z' =$$

$$= -xy(-z^{-2}) = \frac{xy}{z^2};$$

$$F_x'(3; -4; 2) = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} - \frac{(-4)}{2} =$$

$$= \frac{3}{5} + 2 = \frac{13}{5} = 2{,}6;$$

$$\boldsymbol{F_y'}(3; -4; 2) = \frac{-4}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{5} - \frac{3}{2} =$$

$$= -\frac{14}{10} = -1{,}4;$$

$$\boldsymbol{F_z'}(3; -4; 2) = \frac{3 \cdot (-4)}{2^2} = -3;$$

Найденные значения частных производных и координаты точки M_0подставить в уравнения касательной

плоскости и нормали:

$$\frac{13}{5}(x - 3) - \frac{14}{10}(y + 4) - 3(z - 2) = 0 | \cdot 5,$$

$$13(x - 3) - 7(y + 4) - 15(z - 2) = 0,$$

$13x-7y-15z-34=0$— уравнение касательной

плоскости,
$\frac{x-3}{2{,}6}=\frac{y+4}{-1{,}4}=\frac{z-2}{-3}$ – уравнения нормали.

в) Поверхность задана неявно уравнением $e^{xyz}-5z+x^2y-e^z=4$ или

$e^{xyz}+x^2y-5z-4=0$,то есть

$F(x;y;z)=e^{xyz}+x^2y-5z-4=0$

Найдем частные производные и их значения в точке $M_0(1;1;0)$:

$F'_x=(e^{xyz}+x^2y-5z-4)'_x=e^{xyz}yz(x)'_x+y(x^2)'_x=$

$=e^{xyz}yz+2xy;$

$F'_y=(e^{xyz}+x^2y-5z-4)'_y=e^{xyz}xz(y)'_y+x^2(y)'_y=$

$=e^{xyz}xz+x^2;$

$F'_z=(e^{xyz}+x^2y-5z-4)'_z=e^{xyz}xy-5;$

$F'_x(1;1;0)=e^{1\cdot1\cdot0}\cdot1\cdot0+2\cdot1\cdot1=2;$

$F'_y(1;1;0)=e^{1\cdot1\cdot0}\cdot1\cdot0+1^2=1;$

$F'_z(1;1;0)=e^{1\cdot1\cdot0}\cdot1\cdot0-5=-5;$

Подставляем полученные значения в формулы, получим:

$2(x-1)+1(y-1)-5(z-0)=0,$

$2x+y-5z-3=0$— уравнение касательной плоскости,

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-5}$ — уравнения нормали.

Задания для самостоятельного решения.

9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в данной точке M_0.

1	$x(y+z)(xy-z)+8=0, M_0(2;1;3)$
2	$x^3y+xz^3-3xy+4x^2=0, M_0(0;-1;2)$
3	$e^z-z+xy=3, M_0(2;1;0)$
4	$x^2+y^2+z^2=14, M_0(1;2;3)$
5	$xyz^2+2y^2+3yz+4=0, M_0(0;2;-2)$
6	$z=x^2+sinxy+2\sqrt{y}, M_0(0;1;2)$
7	$z=sinxcosy, M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$
8	$x^2+y^2-2z^2-10=0, M_0(1;-1;2)$

9	$z=(x-y)\arcsin y+(x-y)^2, M_0(0;1;2)$
10	$z=xy, M_0(1;1;1)$
11	$z=\sqrt{x^2+y^2}-xy, M_0(3;4;-7)$
12	$z=arctg\,\frac{y}{x}, M_0\left(1;1;\frac{\pi}{4}\right)$
13	$(z^2-x^2)xyz-y^5=5, M_0(1;1;2)$
14	$x^3+y^3+z^3+xyz-6=0, M_0(1;2;-1)$
15	$z=2x^2-4y^2, M_0(2;1;4)$
16	$z=x^2-4xy+y^2, M_0(-2;1;13)$
17	$2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8, M_0(2;2;1)$
18	$z=x^2+y^2, M_0(1;2;5)$
19	$x^2+3y^2-4z^2=15, M_0(2;-3;2)$
20	$z=\frac{x^3-3axy+y^3}{a^2}, M_0(a;a;-a)$

Ответы:

1. $2x+17y-5z+4=0$, $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{14}=\frac{z-3}{-10}$	**11.** $17x+11y+5z-60=0$, $\frac{x-3}{17}=\frac{y-1}{11}=\frac{z-3}{5}$

2. $x=0, \frac{x}{14}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-2}{0}$	**12.** $x-y+2z-\frac{\pi}{2}=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{2}}{2}$
3. $x+2y-4=0$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}$	**13.** $2x+y+11z-25=0$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{11}$
4. $x+2y+3z-14=0$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}$	**14.** $x+11y+5z-18=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}$
5. $4x+y+3z+4=0$, $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{3}$	**15.** $8x-8y-z-4=0$, $\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-4}{-1}$
6. $x+y-z+1=0$, $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$	**16.** $x-10y+z+13=0$, $\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{-10}=\frac{z-13}{1}$

7. $2x - 2y - 4z + \pi = 0$, $\dfrac{x - \frac{\pi}{4}}{1} = \dfrac{y - \frac{\pi}{4}}{-1} = \dfrac{z - \frac{\pi}{4}}{-2}$	**17.** $x + y - 4z = 0$, $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-4}$
8. $x - y - 4z + 6 = 0$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-2}{-8}$	**18.** $2x + 4y - z - 5 = 0$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-5}{-1}$
9. $2x + 3y + z + 1 = 0$, $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-1}{-1}$	**19.** $2x - 9y - 8z - 15 = 0$, $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-9} = \dfrac{z-2}{-8}$
10. $x + y - z - 1 = 0$, $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$	**20.** $z + a = 0$, $\dfrac{x-a}{0} = \dfrac{y-a}{0} = \dfrac{z+a}{1}$

12. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.

Пусть функция $z = f(x;y)$- имеет в окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$непрерывные частные производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно, тогда её можно разложить в многочлен n –ой степени(формула Тейлора) в окрестности этой точки:

$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + \frac{df(x_0;y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0;y_0)}{2!} + \dots +$$

$+ \frac{d^n f(x_0;y_0)}{n!} + R_n$ (24), где R_n – остаточный член,

$$df(x_0;y_0) = f'_x(x_0;y_0)dx + f'_y(x_0;y_0)dy \approx$$
$$\approx f'_x(x_0;y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0;y_0)(y-y_0)$$-
дифференциал первого порядка,
$$d^2f(x_0;y_0) = f''_{xx}(x_0;y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0;y_0)dxdy + \cdot$$
$$+ f''_{yy}(x_0;y_0)dy^2 \approx f''_{xx}(x_0;y_0)(x-x_0)^2 +$$
$$+2f''_{xy}(x_0;y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(x_0;y_0)(y-y_0\,)^2 -$$
дифференциал второго порядка и так далее,

Замечание: чем больше слагаемых мы берём, тем большую точность даёт формула Тейлора (24).

Пример 27. Найти несколько первых членов разложения функцию $z = e^x siny$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0;0)$.

Решение.

Найдём первые три слагаемых разложения функцию $z = e^x siny$ в ряд Тейлора, то есть формула приобретает вид:
$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + \frac{df(x_0;y_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0;y_0)}{2!} + R_2$$
1)Найдем значение функции $z = f(x;y)$ в точке $(0;0)$:
$$z = f(0;0) = e^0 sin0 = 0;$$
2)Считаем первый дифференциал в точке $(0;0), df(0;0)$:
$$df(0;0) = f'_x(0;0)(x-0) + f'_y(0;0)(y-0),$$
$f'_x = (e^x siny)'_x = siny(e^x)'_x = e^x siny$,
$f'_y = (e^x siny)'_y = e^x(siny)'_y = e^x cosy$,
$f'_x(0;0) = e^0 sin0 = 0, f'_y(0;0) = e^0 cos0 = 1$,
Следовательно,
$df(0;0) = 0 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-0) = y$;

3)Вычисляем второй дифференциал в точке $(0;0), d^2f(0;0)$:

$$d^2f(0;0) = f''_{xx}(0;0)(x-0)^2 + 2f''_{xy}(0;0)(x-0)\cdot$$
$$\cdot(y-0) + f''_{yy}(0;0)(y-0)^2;$$

$$f''_{xx} = (e^x siny)'_x = siny(e^x)'_x = e^x siny,$$
$$f''_{xy} = (e^x siny)'_y = e^x(siny)'_y = e^x cosy,$$
$$f''_{yy} = (e^x cosy)'_y = e^x(cosy)'_y = -e^x siny,$$
$$f''_{xx}(0;0) = e^0 sin0 = 0,$$
$$f''_{xy}(0;0) = e^0 cos0 = 1,$$
$$f''_{yy}(0;0) = -e^0 sin0 = 0.$$

Получаем:

$$d^2f(0;0) = 0\cdot(x-0)^2 + 1\cdot(x-0)\cdot(y-0) +$$
$$+0\cdot(y-0)^2 = xy;$$

Итак, разложения функцию $z = e^x siny$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0;0)$ имеет вид: $f(x;y) = 0 + y + \frac{xy}{2!} = y + \frac{xy}{2}$.

Пример 28. Разложить функцию $z = 3x^5y^2 - 2x^4y^3 + 5y$ в ряд Тейлора в окрестности в точке $M_0(1;1)$ до третьего порядка.

Решение.

Для разложения исходной функции в ряд Тейлора воспользуемся соответствующей формулой:

$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + \frac{df(x_0;y_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0;y_0)}{2!} +$$
$$+\frac{d^3f(x_0;y_0)}{3!} + r_3$$

1)Найдем значение функции z в точке $M_0(1;1)$:

$$z = f(1;1) = 3 - 2 + 5 = 6;$$

2)Вычислим первый дифференциал в точке $M_0(1;1), df(1;1)$:

$$df(1;1) = f'_x(1;1)(x-1) + f'_y(1;1)(y-1),$$
$$f'_x = (3x^5y^2 - 2x^4y^3 + 5y)'_x = 15x^4y^2 - 8x^3y^3,$$
$$f'_y = (3x^5y^2 - 2x^4y^3 + 5y)'_y = 6x^5y - 6x^4y^2 + 5,$$

$f'_x(1;1) = 15 - 8 = 7$,$f'_y(1;1) = 6 - 6 + 5 = 5$.

Получаем:

$$df(1;1) = 7(x-1) + 5(y-1)$$

3)Вычислим второй дифференциал $d^2f(1;1)$:

$$d^2f(1;1) = f''_{xx}(1;1)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1;1)(x-1)\cdot$$

$$\cdot(y-1) + f''_{yy}(1;1)(y-1)^2,$$

$f''_{xx} = (15x^4y^2 - 8x^3y^3)'_x = 60x^3y^2 - 24x^2y^3$,
$f''_{xy} = (15x^4y^2 - 8x^3y^3)'_y = 30x^4y - 24x^3y^2$,
$f''_{yy} = (6x^5y - 6x^4y^2 + 5)'_y = 6x^5 - 12x^4y$,
$f''_{xx}(1;1) = 60 - 24 = 36$,
$f''_{xy}(1;1) = 30 - 24 = 6$,
$f''_{yy}(1;1) = 6 - 12 = -6$. Следовательно,
$d^2f(1;1) = 36(x-1)^2 + 12(x-1)\cdot$
$\cdot(y-1) - 6(y-1)^2$;

4)Вычисляем дифференциал третьего порядка в точке $M_0(1;1)$,$d^3f(1;1)$:

$$d^3f(1;1) = f'''_{xxx}(1;1)(x-1)^3 + 3f'''_{xxy}(1;1)\cdot$$

$$\cdot(x-1)^2(y-1) + 3f'''_{xyy}(1;1)(x-1)(y-1)^2 +$$

$$+f'''_{yyy}(1;1)(y-1)^3,$$

$f'''_{xxx} = (60x^3y^2 - 24x^2y^3)'_x = 180x^2y^2 - 48xy^3$,
$f'''_{xxx}(1;1) = 180 - 48 = 132$,
$f'''_{xxy} = (60x^3y^2 - 24x^2y^3)'_y = 120x^3y - 72(xy)^2$,
$f'''_{xxy}(1;1) = 120 - 72 = 48$,
$f'''_{xyy} = (30x^4y - 24x^3y^2)'_y = 30x^4 - 48x^3y$,
$f'''_{xyy}(1;1) = -18$,
$f'''_{yyy} = (6x^5 - 12x^4y)'_y = -12x^4$,
$f'''_{yyy}(1;1) = -12$.

Следовательно,

$$d^3f(1;1) = 132(x-1)^3 + 3\cdot 48(x-1)^2(y-1) +$$

$$+3\cdot(-18)(x-1)(y-1)^2+(-12)(y-1)^3=$$
$$=132(x-1)^3+144(x-1)^2(y-1)+$$
$$-54(x-1)(y-1)^2-12(y-1)^3;$$

Итак, разложение исходной функции в ряд Тейлора в окрестности точки M_0 имеет вид:

$$f(x;y)=6+7(x-1)+5(y-1)+18(x-1)^2+$$
$$+6(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+22(x-1)^3+24(x-1)^2\cdot$$
$$\cdot(y-1)-9(x-1)(y-1)^2-2(y-1)^3+r_3.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.В.Соболь, Н. Т. Мишняков, В.М. Порkшеян, Практикум по высшей математике .3-е изд. Ростов н \ Д :Феникс, 2010.
2. Д.Т.Письменный, Конспект лекций по высшей математике (полный курс). 2-е изд. Москва: «Айрис-пресс», 2014.
3. Данко П.Е., Попов, А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: Высш. шк., 2002.