ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

**Учебно-методическое пособие**
по дисциплине
«Математика»

# «Функции нескольких переменных»

Автор
Ермилова О.В.

Ростов-на-Дону, 2024

## Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения всех технических направлений подготовки бакалавриата.

Составлено для проведения теоретических и практических работ по дисциплине «Математика». С целью овладения студентами теоретическими и практическими навыками решения задач по разделу «Функции многих переменных». В пособии рассмотрены следующие вопросы: функции от двух и n переменных, область определения, частные производные и их геометрический смысл, дифференцирование сложных и неявные функции, полный дифференциал и его применение к приближенным вычислениям, экстремумы функции двух переменных, градиент и производная по направлению, касательная плоскость и нормаль к поверхности. В пособии приведены основные теоретические сведения, которые иллюстрируются большим количеством примеров, что значительно упрощает усвоение материала, способствует закреплению приобретённых навыков и справиться с решением поставленных задач.

**Автор**

Старший преподаватель
каф. «Прикладная математика»Ермилова О.В.

# Оглавление

# ГЛАВА1.ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.ГРАФИК И ЛИНИИ УРОВНЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции одной независимой переменной, например,$y = f(x)$ не охватывают всех зависимостей, существующих в природе. Поэтому нам придётся расширить известное понятие функциональной зависимости на случай функций нескольких переменных.

## 1.1. Функция двух переменных, область определения, график функции.

Переменная величина $z$ называется функцией двух независимых переменных $x$ и $y$ :$z = f(x;y)$, заданной на множестве $D$, если по некоторому закону каждой паре $(x, y) \in D$ соответствует определенное значение $z$.Функциональную зависимость $z$ от $x$ и $y$ записывают в виде $z = f(x;y)$или $z = z(x;y)$.

Например, формула $V = \pi R^2 h$- выражающая объем цилиндра, является функцией двух переменных $R$ и $h$, где $R$ – радиус основания цилиндра и $h$ – высота цилиндра.

Аналогично определяется функция $n$-переменных. Пусть $D$ некоторое множество точек в $n$ -мерном пространстве. Если задан закон $f$, в силу которого каждой точке $M(x_1; x_2; \dots; x_n) \in D$ ставится в соответствие некоторое действительное число $u$ , то говорят, что на множестве $D$ определена функция $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$называют независимыми переменными или аргументами функции, а переменную $u$ – за- висимой переменной.

Функцию $n$ переменных принято записывать в виде $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ ,а функции трех переменных в виде $u = f(x; y; z)$.

**Замечание**: функции многих переменных можно обозначать и символом $u = f(M)$, указывая размерность пространства, которому принадлежит точка $M$.

Множество точек $M(x_1; x_2; \dots; x_n)$, для которых функция $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ определена, называют **областью определения** этой функции.

**Обозначение:** $D(f)$ .

Областью определения функции двух переменных является некоторое множество точек плоскости, а областью определения функции трех переменных – некоторое множество точек трехмерного пространства. Например, областью определения функции двух переменных $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$- множество точек плоскости $R^2$,а областью определения функции трех переменных $u = x + y + z$ -множество точек пространство $R^3$.

Множество всех чисел $u$ вида $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$,где $(x_1; x_2; \dots; x_n) \in D(f)$ называют **множеством значений функции**.

**Пример 1.1.** Найти область определения функции: **а)** $z = 3 - x - 3y$; **б)** $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;
**в)** $z = ln(x + y - 1)$.

Решение.

**а)** Так как, аргументы $x$, $y$, могут принимать любые значение, то областью определения данной функции является вся координатная плоскость, то есть $(x; y) \in R^2$;

**б)** Функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ определена, если $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, то есть $x^2 + y^2 \leq 1$. Таким образом, областью определения функции является множество точек, лежащих внутри и на границе круга радиуса $R = 1$, с центром в начале координат (рис.1. а));

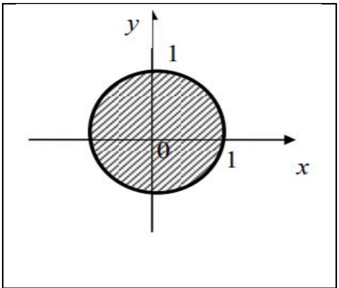



Рис.1.а)

**в)** Областью определения функции $z = ln(x + y - 1)$ будет множество точек плоскости $Oxy$, для которых определена логарифмическая функция, то есть при $x + y - 1 > 0$, $y > 1 - x$. Таким образом, областью определения данной функции является множество точек, лежащих выше прямой $y = 1 - x$(рис.1. б)).

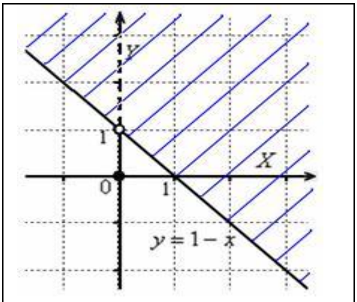



Рис.1.б)

**Графиком функции** двух переменных $z = f(x; y)$ в прямоугольной системе координат $Oxy$ называется геометрическое место точек в трехмерном пространстве, координаты которых $(x; y; z)$ удовлетво-

ряют уравнению $z = f(x;y)$.
Таким образом, если графиком функции одной переменной $y = f(x)$является некоторая линия на плоскости, например, парабола, то графиком функции двух переменных $z = f(x;y)$ является некоторая поверхность, которая располагается в трёхмерном пространстве $R^3$ . С элементарным примером поверхности мы хорошо знакомы ещё из курса аналитической геометрии – это плоскость.

Например, графиком функции $z = 4 - x - 2y$ или $x + 2y + z = 4$,что тоже самое, является плоскость (рис.2), а графиком функции $z = x^2 + y^2$ является параболоид вращения (рис. 3).

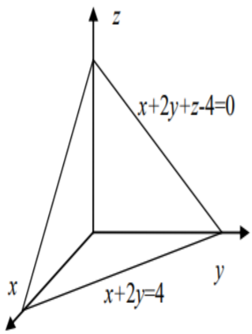


Рис. 2

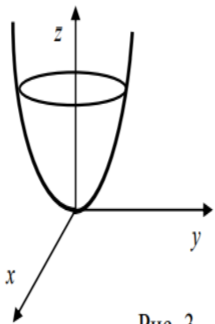


Рис. 3

**Замечание:** как мы уже знаем графиком функции двух переменных, является поверхность**,** но иногда график функции может представлять собой, пространственную прямую, либо даже единственную точку.

## Задания для самостоятельного решения.

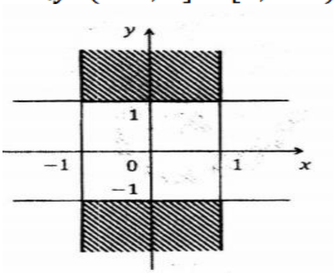
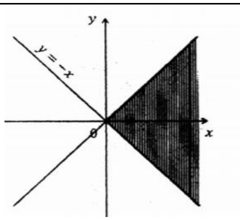
**1.** Найти область определения функции $z = f(x; y)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $z = 2 - x - y$ | **11** | $z = \sqrt{2 - x^2 - 2y^2}$ |
| **2** | $z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ | **12** | $z = ln(3x - y^2)$ |
| **3** | $z = ln(xy)$ | **13** | $z = arcsin(2x + y)$ |
| **4** | $z = ln\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right)$ | **14** | $z = \frac{1}{9 - 9x^2 - 9y^2}$ |
| **5** | $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ | **15** | $z = \sqrt{x^2 + y}$ |
| **6** | $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$; | **16** | $z = \frac{1}{4 - x^2 - 4y^2}$ |
| **7** | $z = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{y^2 - 1}$ | **17** | $z = ln(x^2 + 2y^2 - 2)$ |
| **8** | $z = \sqrt{x - y} - \sqrt{y + x}$ | **18** | $z = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{xy}$ |
| **9** | $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ | **19** | $z = \frac{x + 5}{\sqrt{x + y}}$ |
| **10** | $z = arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$ | **20** | $z = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$ |

**Ответы**:

| | |
|---|---|
| **1.** вся координатная плоскость, то есть $(x; y) \in R^2$. | **11.** $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} \leq 1$- внутренняя часть эллипса $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$,включая граничные точки. |

| | |
|---|---|
| **2.** $x^2+y^2<1$ –все точки, лежащие внутри круга с центром в точке (0;0) радиусом единичной длины, за исключением граничной области. | **12.** $y^2>3x$ -все точки плоскости, лежащие вне параболы $y^2=3x$. |
| **3.** $x,y>0$ или $x,y<0$ все точки плоскости, лежащие в первой и третьей четверти. | **13.** $\frac{-1-y}{2}\leq x\leq\frac{1-y}{2}$ -часть области, заключённая между двумя прямыми $y=1-2x, y=-1-2x$ . |
| **4.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<1$ – внутренняя часть эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$,с полуосями $a=2, b=3$, за исключением граничной области. | **14.** $x^2+y^2\neq 1$-все точки плоскости $Oxy$ за исключение точек, лежащих на окружности $x^2+y^2=1$. |
| **5.** $x^2+y^2\leq 4$ – точки, лежащие внутри окружности $x^2+y^2=4$ и на её границе. | **15.** $y\geq -x^2$ -все точки плоскости $Oxy$, лежащие на параболе и вне параболы $y=-x^2$. |

| | |
|---|---|
| **6.** $x^2+y^2\geq 9$ – точки, лежащие на границе окружности $x^2+y^2=9$ и вне её. | **16.** $4-x^2-4y^2\neq 0$-все точки плоскости $Oxy$ за исключение точек, лежащих на эллипсе $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. |
| **7.** $\begin{cases} x\epsilon[-1;1] \\ y\epsilon(-\infty;1]\cup[1;+\infty) \end{cases}$<br><br> | **17.** $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}\geq 1$-точки, лежащие на границе и вне эллипса $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$. |
| <br><br>**8.** $\begin{cases} y\leq x \\ y\geq -x \end{cases}$ | **18.** $x>0, y>0$- все точки плоскости, лежащие в первой четверти. |
| **9.** $x\geq\sqrt{y}$- все точки, лежащие правее ветви параболы $y=x^2$. | **19.** $y>-x$ -все точки плоскости, лежащие выше прямой $y=-x$. |

| | |
|---|---|
| **10.** $-y \le x \le y$ -часть области, заключённая между двумя прямыми $y=-x, y=x$ . | **20.** $x^2+y^2 \ne 0$- все точки плоскости $Oxy$ за исключение точки $O(0;0)$. |

## 1.2. Линии уровня.

Пусть имеется функция $z=f(x;y)$ график которой представляет собой некоторую поверхность. Построение графиков функций двух переменных во многих случаях весьма затруднительно. Поэтому рассмотрим возможность изображения графика функций двух переменных, основанный на сечении поверхности $z=f(x;y)$ плоскостью $z=C$, где $C$ – любое число (эта плоскость параллельна плоскости $Oxy$ и пересекает ось $z$ в точке $z=C$). Спроецируем линию пересечения этой плоскости с поверхностью $z=f(x;y)$на плоскость $Oxy$ и получим так называемую линию уровня функции $z=f(x;y)$.Таким образом, **линией уровня функции** $z=f(x;y)$называется множество точек $(x;y)$плоскости $Oxy$, в которых функция принимает одно и то же постоянное значение $C$, то есть $z=C$.

Придавая различные значения параметру $C$ , можно получить множество линий уровня функции $z = f(x; y)$.

Для лучшего понимания этого термина будем сравнивать ось $Oz$ с высотой: чем больше значение $z$ – тем больше высота, чем меньше значение $z$ – тем высота меньше.

Образно говоря, **линии уровня** – это горизонтальные «срезы» поверхности на различных высотах. Данные сечения проводятся плоскостями $z = C$, после чего проецируются на плоскость. Таким образом, линии уровня помогают выяснить, как выглядит та или иная поверхность.

**Пример 1.2.** Записать уравнение семейства линий уровня функции $z = (x-2)^2 + (y-1)^2$.Выделить линию уровня, проходящую через точку$M_0(1;1)$. Исследовать форму данной поверхности с помощью линий уровня.

Решение.

Исходя из определения уравнение линии уровня принимает вид$(x-2)^2 + (y-1)^2 = C$.Выделим линию уровня, проходящую через точку $M_0(1;1)$, то есть найдём значение постоянной $C$, при $x = 1, y = 1$:

$$(1-2)^2 + (1-1)^2 = C, C = 1;$$

Тогда уравнение линии уровня, проходящей через точку $M_0(1;1)$, принимает вид:

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$ –уравнение окружности с центром в точке $(2;1)$, с радиусом $R=1$.

Исследуем форму данной поверхности с помощью уравнений линий уровня $(x-2)^2+(y-1)^2=C$. Очевидно, что в данном случае $z=C\geq 0$ -высота не может принимать отрицательные значения, так как сумма квадратов не может быть отрицательна. Таким образом, поверхность располагается в верхнем полупространстве.

Поскольку в условии не сказано, на каких конкретно высотах нужно «срезать» линии уровня, то мы можем выбрать несколько значений $z$ на своё усмотрение, для удобства возьмём $z=0{,}1{,}9{,}81$.

Заметим, что все «срезы» проецируются на плоскость $Oxy$, и поэтому у точек записываются две, а не три координаты.

Исследуем поверхность на нулевой высоте, для этого поставим значение $z=C=0$ в равенство $(x-2)^2+(y-1)^2=z$:

$(x-2)^2+(y-1)^2=C$,

$(x-2)^2+(y-1)^2=0$,

$(x-2)^2=0$, $(y-1)^2=0$,

$x-2=0, y-1=0,$

$x=2, y=1$-то есть, при $C=0$ линия уровня представляет собой точку$(2;1)$.

Для высоты $z=1$линия уровня $z=C$представляет собой окружность$(x-2)^2+(y-1)^2=1^2$ с центром в точке $(2;1)$единичного радиуса.

Теперь выберем, например, плоскость $z=9$ и «разрезаем ей» исследуемую поверхность
$(x-2)^2+(y-1)^2=z$(подставляем в исходное уравнение $z=9$):

$(x-2)^2+(y-1)^2=9;$

Таким образом, для высоты $z=9$

поверхности $z=(x-2)^2+(y-1)^2$ линия уровня

представляет собой окружность с центром в точке$(2;1)$, радиуса $3$ .

Давайте построим ещё одну линию уровня, например, для $z=81$ :

$(x-2)^2+(y-1)^2=81$

– окружность с центром в точке $(2;1)$и

радиуса 9**.**
Линии уровня, располагаются на плоскости, каждая линия подписывается – какой высоте она соответствует. Изобразим то, что у нас получилось (рис.4). Нетрудно понять, что другие линии уровня

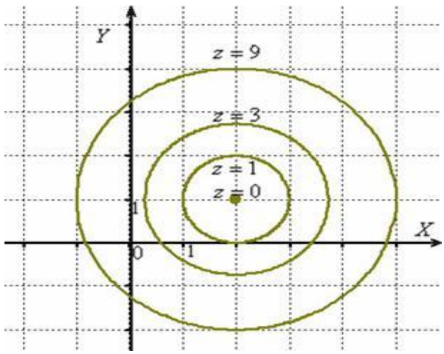



Рис.4

рассматриваемой поверхности тоже представляют собой окружности, при этом, чем выше мы поднимаемся (увеличиваем значение «зет») – тем больше становится радиус. Таким образом, исходная поверхность представляет собой бесконечную чашу, вершина которой расположена на плоскости $z=0$.

**Пример 1.3.** Найти линии уровня функции $z=\frac{x}{\sqrt{y}}$.

Решение.

Линия уровня $z=C$ определяется уравнением

$C=\frac{x}{\sqrt{y}}$или $x=C\sqrt{y}$- полу парабола, расположенная в

первой четверти плоскости $Oxy$ при $C>0$,во второй

четверти при $C<0$. При $C=0$,получим $x=0$-полуось

$Oy(y>0,x=0)$.

**Замечание:** аналогично определяются поверхности уровня функции трех переменных $u = f(x;y;z)$ . Поверхностью уровня функции $u = f(x;y;z)$ называется поверхность $f(x;y;z)$ , в точках которой функция принимает одно и то же значение $u = C$.

**Пример 1.4.** Найти поверхности уровня функции $u = x^2 - y^2 + z^2$.

Решение.

Уравнение семейства поверхностей уровня имеет вид $x^2 - y^2 + z^2 = C$. Если $C = 0$, то получаем $x^2 - y^2 + z^2 = 0$- конус; если $C < 0$, то $x^2 - y^2 + z^2 = C$ – семейство двуполостных гиперболоидов.

**Замечание:** в дальнейшем ограничимся рассмотрением функций двух переменных, так как все основные понятия и теоремы, сформулированные для функций двух переменных, легко обобщаются на случай большего числа переменных.

## 1.3. Предел функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных.

Понятия предела и непрерывности функции двух переменных аналогичны случаю одной переменной. Прежде всего, введем понятие $\delta$- окрестности данной точки $M_0(x_0; y_0)$. Пусть $M_0(x_0; y_0)$ произвольная точка плоскости, под $\delta$ – окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$ понимается множество всех точек плоскости $N(x; y)$ , координаты которых удовлетворяют неравенству $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ . Другими словами – окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$– это все внутренние точки круга с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ и радиусом $\delta$.

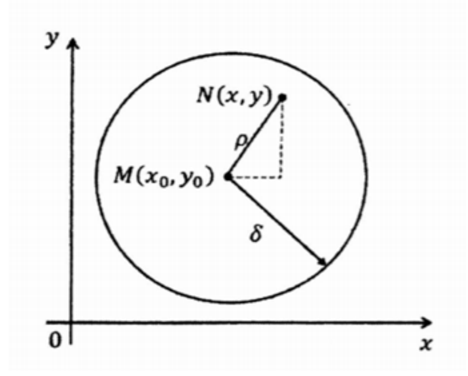


Рис.5

Для дальнейшего удобства введём обозначение:

$\rho = |\overline{M_0N}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ -расстояние между точками $N(x; y)$ и $M_0(x_0; y_0)$.

Тогда для нахождения точки $N(x; y)$ внутри круга радиуса $\delta$ будет выполняться условие $\rho < \delta$.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ кроме, быть может, самой этой точки.

Число $a$ называется **пределом функции**

$z = f(x;y)$при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или

$N(x;y) \to M_0(x_0;y_0)$), если для любого чис-

ла $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ , зависящее от ε, такое,

что для всех точек $N(x;y)$,отличных от точки $M_0(x_0;y_0)$ и отстоящих от этой точки на расстояние ρ

$(0 < \rho < \delta)$ выполняется неравенство$|f(x;y) - a| < \varepsilon$.

**Обозначение:** $a = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y)$

**Геометрический смысл предела функции двух переменных.**

Дадим геометрическую интерпретацию понятия предела в трехмерном пространстве.

Рассмотрим функцию $z = f(x;y)$ определенную на всей плоскости$Oxy$ ,

причем $f(x_0;y_0) = a$. Спроектируем точку $A$, лежащую на графике функции $z = f(x;y)$на

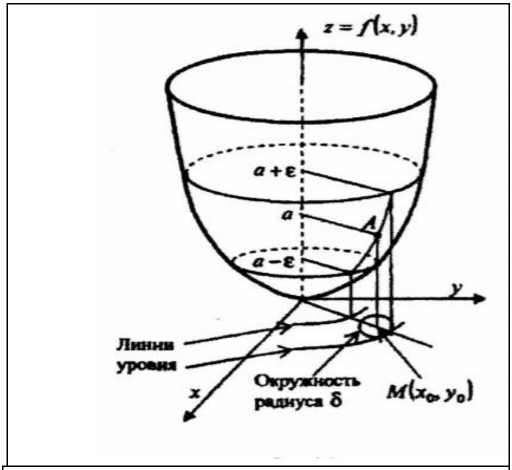



Рис.6

плоскость $Oxy$ . Соответствующую точку $M_0(x_0;y_0)$ на

плоскости выберем центром такого радиуса $\delta$, все точки которого будут находится между линиями уровня. Тогда для всех точек $N(x;y)$ этого круга, отличных от точки $M_0(x_0;y_0)$ и отстоящих от этой точки на расстояние ρ $(0<\rho<\delta)$ , выполняется неравен-

ство $|f(x;y)-a|<\varepsilon$.

Таким образом, $a=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$.

Другими словами, **геометрический смысл** предела функции двух переменных состоит в следующем. Каково бы ни было произвольное число $\varepsilon>0$ , найдется

число $\delta$ -окрестность точки $M_0(x_0;y_0)$ , что во всех ее

точках $N(x;y)$ , отличных от $M_0(x_0;y_0)$ , аппликаты $(z)$

соответствующих точек поверхности $z=f(x;y)$ отли-

чаются от числа $a$ по модулю меньше, чем на $\varepsilon$ .

**Замечание:**

**1)** Вычисление пределов функции двух переменных является более сложно задачей по сравнению с вычислением пределов функции одно переменной. Это связано с тем, что точка $N$ может стремиться к точке $M_0$

по любому направлению на плоскости в отличие от функции одной переменной, где переменная $x$ может стремиться к числу $x_0(x \to x_0)$ на числовой прямой

только справа или слева. Получающиеся при этом многочисленные пределы функции двух переменных должны совпадать друг с другом. В этом случае, легче доказать отсутствие предела функции $z = f(x; y)$

при $N(x; y) \to M_0(x_0; y_0)$,для этого достаточно выбрать

два таких направления, движение по которым приводит к различным пределам.

**2)**Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной. Это означает, что справедливы следующие утверждения: если функции $f(M)$ и $g(M)$

определены на множестве $D$ и имеют в точке

$M_0(x_0; y_0)$ этого множества пределы $a$ и $b$ В соответ-

ственно, то и функции $f(M) \pm g(M), f(M) \cdot g(M)$,

$\frac{f(M)}{g(M)}, (g(M) \neq 0)$ имеют в точке $M_0$ пределы, которые

соответственно равны
$a \pm b, a \cdot b, \frac{a}{b} (b \neq 0)$.

**Пример 1.5.** Найти предел: **а)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

**б)** $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \frac{x^3 + y^3}{x^4 + y^4}$;**в)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$.

Решение.

**а)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\left[\frac{0}{0}\right]$-числитель и знаменатель обращается в ноль в единственной точке$(0;0)$,выясним существует ли там предел?

Проведём небольшое исследование. Будем приближаться к точке $O(0;0)$ по прямой $y=kx$ , где $k$— некоторое число. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-k^2)}{x^2(1+k^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-k^2}{1+k^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Функция $z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ в точке $O(0;0)$предела не имеет, так как при разных значениях $k$ функция имеет различные предельные значения;

**б)**

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y=kx}}\frac{x^3+k^3x^3}{x^4+k^4x^4}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4(\frac{1}{x}+\frac{k^3}{x})}{x^4(1+k^4)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{k^3}{x}}{1+k^4}=\frac{0}{1+k^4}=0$$ ,

так как при различных значениях $k$, функция имеет единственное предельное значение 0, то предел функции $z=\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$,при $x\to +\infty, y\to +\infty$ равен нулю;

**в)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{kx^2+4}}{kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2-\sqrt{kx^2+4}\right)\left(2+\sqrt{kx^2+4}\right)}{kx^2\left(2+\sqrt{kx^2+4}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2^2-\left(\sqrt{kx^2+4}\right)^2}{kx^2\left(2+\sqrt{kx^2+4}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{4-kx^2-4}{kx^2\left(2+\sqrt{kx^2+4}\right)} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{kx^2\left(2+\sqrt{kx^2+4}\right)} = -\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\sqrt{kx^2+4}} = -\frac{1}{4}.$$

## Непрерывность и точки разрыва.

Функция $z = f(x;y)$ называется **непрерывной в точке** $M_0(x_0;y_0)$ если она определена в этой точке и

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$ (или $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$ ).

Функция $z = f(x;y)$ называется непрерывной в области $D$, если она непрерывна в каждой точке области $D$ .

Область непрерывности элементарной функции $z = f\left(x,y\right)$ совпадает с областью ее определения.

Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются точками разрыва этой функции. Точки разрыва функции $z = f(x;y)$ могут образовывать целые линии разрыва, а иногда и более сложные геометрические образы. Так, например, функция $z = \frac{3}{y+x}$ имеет линию разрыва $y = -x$ .

Можно дать другое, равносильное приведенному выше, определению непрерывности функции $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$. Обозначим

$\Delta x = x - x_0$ , $\Delta y = y - y_0$ , $\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0)$ . Величины $\Delta x$ и $\Delta y$ называются приращениями аргументов $x$ и $y$ , а $\Delta z$ — полным приращением функции $f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$.

Функция $z = f(x;y)$ называется **непрерывной в точке** $M_0(x_0;y_0)$, если выполняется равенство $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$ ,

то есть полное приращение функции в этой точке стремится к нулю, когда приращения ее аргументов $x$ и $y$ стремится к нулю.

**Пример 1.6.** Найти точки разрыва функции:
**а)** $z = \frac{x^3 y}{x^2 - y}$;**б)** $z = \frac{x-y}{x+y}$;**в)** $z = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$.

Решение.

**а)** Функция потеряет смысл, если знаменатель обратится в ноль, то есть, когда $x^2 - y = 0$ или $y = x^2$. Следовательно, данная функция имеет линией разрыва параболу $y = x^2$;

**б)** Функция потеряет смысл, если знаменатель обратится в ноль, то есть, когда $x + y = 0$ или $y = -x$. Та-

ким образом, данная функция имеет линией разрыва прямую $y = -x$.

**в)** Функция потеряет смысл, если знаменатель обратится в ноль $x^4 + y^4 = 0$, то есть при $x = 0$ и $y = 0$.

Следовательно, данная функция имеет разрыв в точке $O$ (0;0).

**Замечание:** пользуясь определением непрерывности и теоремами о пределах, можно так же доказать, что арифметические операции над непрерывными функциями и построение сложной функции из непрерывных функций приводит к непрерывным функциям.

## 1.4. Частные производные функций нескольких переменных и их геометрический смысл.

Пусть задана функция $z = f(x;y)$.Так как $x,y$ - независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять своё значение.

Если одному из аргументов функции $z = f(x;y)$ придать приращение, а другой аргумент не изменять, то функция получит частное приращение по одному из аргументов.

Например, дадим независимой переменной $x$ приращение $\Delta x$,сохраняя значение $y$ неизменным, тогда $z$ получит приращение, которое называется частным приращением функции $z$ по переменной $x$.

**Обозначение:**

$d_x z = \Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$- **частное приращение функции $z$ по переменной $x$.**

Аналогично получаем частное приращение функции $z$ по переменной $y$:

$d_y z = \Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

**Частной производной функции нескольких переменных** по одному из её аргументов называется предел отношения частного приращения функции по этому аргументу к соответствующему приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

**Обозначения:**

$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ **-частная производная функции $z$ по переменной $x$;**

$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$**-частная производная функции $z$ по переменной $y$.**

Таким образом, частные производные от функции нескольких переменных являются «производными в направлении координатных осей». Например, при нахождении $\frac{\partial z}{\partial x}$ приращение получает переменная $x$, изменяясь от $x$ до $x + \Delta x$ вдоль оси $Ox$.

**Замечание:**

**1)** для обозначения частных производных могут быть использованы и другие обозначения, а именно

$\frac{\partial z}{\partial x}, z'_x, \frac{\partial f}{\partial x}, f'_x$ – частная производная функции $z$ по переменной $x$;

$\frac{\partial z}{\partial y}, z'_y, \frac{\partial f}{\partial y}, f'_y$ – –частная производная функции $z$ по переменной $y$;

**2)** если необходимо, в скобках указывается точка $(x_0; y_0)$, в которой вычислены частные производные, это записывается следующим образом: $f'_x\,|_{(x_0;y_0)}$ или $f'_x(x_0; y_0)$.

Итак, для функции двух переменных $z = f(x; y)$ рассматриваются частные производные по переменной $x$ и по переменной $y$. Из определения частных производных следует правило их нахождения: частная производная по $x$ есть обыкновенная производная по $x$ функции $f(x; y)$ вычисленная при условии, что $y = const$, при этом используются обычные правила и формулы дифференцирования функции одной переменной, аналогично вычисляется частная производная по переменной $y$.

Если рассматривается функция трех переменных, например $u = f(x; y; z)$, то $u'_x$ вычисляют, полагая $y, z = const$; $u'_y$ вычисляют при $x, z = const$; $u'_z$ вычисляют при $x, y = const$.

**Пример 1.7.** Найти частные производные функции: **а)** $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$; **б)** $z = cos\frac{x^2}{y}$;

**в)** $z = arctg\frac{x+y}{x-y}$; **г)** $u = (sinx)^{yz}$.

Решение.

**а)** Находим частную производную функции $z$

по переменной $x$ ,учитывая, что $y = const$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1)'_x = (x^4)'_x - 2y^3(x^2)'_x +$$
$$+(y^5 + 1)'_x = 4x^3 - 4xy^3;$$

Находим частную производную функции $z$

по переменной $y$ ,учитывая, что $x = const$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1)'_y = (x^4)'_y - 2x^2(y^3)'_y +$$
$$+(y^5)'_y + (1)'_y = -6x^2y^2 + 5y^4;$$

**б)** $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(cos\frac{x^2}{y}\right)'_x = -sin\frac{x^2}{y}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)'_x =$

$$= -sin\frac{x^2}{y}\cdot\frac{1}{y}\cdot(x^2)'_x = -\frac{2x}{y}sin\frac{x^2}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(cos\frac{x^2}{y}\right)'_y = -sin\frac{x^2}{y}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)'_y =$$

$$= -sin\frac{x^2}{y}\cdot x^2\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'_y = -sin\frac{x^2}{y}\cdot x^2\cdot(y^{-1})'_y =$$

$$= -sin\frac{x^2}{y}\cdot x^2\cdot(-y^{-2}) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 sin\frac{x^2}{y};$$

**в)** $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(arctg\,\frac{x+y}{x-y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x =$

$$= \frac{1}{\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x-y)^2}}\cdot\frac{(x+y)'_x\cdot(x-y)-(x-y)'_x(x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= -\frac{2y}{2x^2+2y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(arctg\,\frac{x+y}{x-y}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_y =$$

$$= \frac{1}{\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x-y)^2}} \cdot \frac{(x+y)'_y \cdot (x-y) - (x-y)'_y \cdot (x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2} \cdot \frac{x-y-(-1)(x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{2x}{2x^2+2y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

**г)** Находим частную производную функции $u$ по переменной $x$ ,учитывая, что $y, z = const$,при фиксированном значении $y, z$ производная функции $u = (sinx)^{yz}$ по переменной $x$ находится как производная степенной функции $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ((sinx)^{yz})'_x = yz(sinx)^{yz-1}(sinx)'_x =$$
$$= yz(sinx)^{yz-1}cosx;$$

При фиксированном значении $x, z$ производная функции $u = (sinx)^{yz}$ по переменной $y$ находится как производная показательной функции$(a^u)' = a^u \cdot lna \cdot u'$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = ((sinx)^{yz})'_y = (sinx)^{yz} \cdot ln(sinx) \cdot (yz)'_y =$$
$$= (sinx)^{yz} \cdot ln(sinx)z \cdot (y)'_y = (sinx)^{yz} \cdot ln(sinx) \cdot z;$$

При фиксированном значении $x, y$ производная функции $u = (sinx)^{yz}$ по переменной $z$ находится как производная показательной функции$(a^u)' = a^u \cdot lna \cdot u'$:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = ((sinx)^{yz})'_z = (sinx)^{yz} \cdot ln(sinx) \cdot (yz)'_z =$$
$$= (sinx)^{yz} \cdot ln(sinx) \cdot y(z)'_z = (sinx)^{yz} \cdot ln(sinx) \cdot y.$$

**Пример 1.8.** Показать, что функция
$u = x^3 + 7x^2y + 2xz^2 - 3y^3 + 4xyz + z^3$ удовлетворяет

уравнению $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=3u.$

Решение

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(x^3+7x^2y+2xz^2-3y^3+4xyz+z^3)'_x=$$
$$=3x^2+14xy+2z^2+4yz;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=(x^3+7x^2y+2xz^2-3y^3+4xyz+z^3)'_y=$$
$$=7x^2-9y^2+4xz;$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=(x^3+7x^2y+2xz^2-3y^3+4xyz+z^3)'_z=$$
$$=4xz+4xy+3z^2;$$

Умножая обе части первого найденного равенства на $x$, второе - на $y$ ,третьего на $z$ и складывая их, получим:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=x(3x^2+14xy+2z^2+4yz)+$$
$$+y(7x^2-9y^2+4xz)+z(4xz+4xy+3z^2)=$$
$$=3x^3+14x^2y+2xz^2+4xyz+7x^2y-9y^3+$$
$$+4xyz+4xz^2+4xyz+3z^3=3x^3+21x^2y+$$
$$+6xz^2-9y^3+12xyz+3z^3=3(x^3+7x^2y+$$
$$=+2xz^2-3y^3+4xyz+z^3)=3u.$$

Таким образом, $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=3u$,что и требовалось показать.

**Геометрический смысл частных производных функции двух переменных $z=f(x;y)$.**

Как известно, графиком функции является некоторая поверхность. Графиком функции $z=f(x;y_0)$ является линия пересечения этой поверхности с плоскостью $y = y_0$ (плоскость параллельная плоскости $Oxz$)

Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной, заключаем, что $f_x'(x_0;y_0) = tg\alpha$ ,

где $\alpha$ — угол между осью $Ox$ и касательной, проведенной к функции $z = f(x;y_0)$в точке $M_0\big(x_0;y_0;f(x_0;y_0)\big)$(рис. 7).

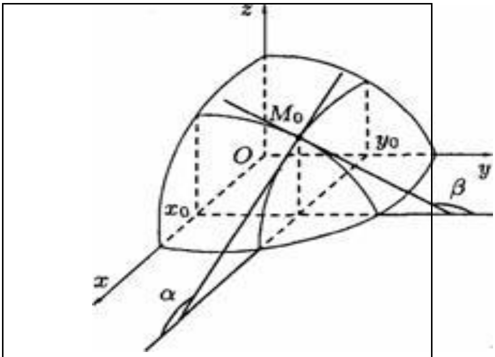


Рис.7

Аналогично, $f_y'(x_0;y_0) = tg\beta$.

**Задания для самостоятельного решения.**

**2**. Найти частные производные первого порядка ФНП по каждому аргументу:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $z = \dfrac{x}{y^3} + \dfrac{y}{x^3} - \dfrac{1}{6x^2y}$ | **11** | $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ |
| **2** | $z = \dfrac{xy}{x - y}$ | **12** | $z = x^2 - 2x\sqrt{y}$ |
| **3** | $z = ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$ | **13** | $u = \dfrac{y^3 - 2x^3}{lnz}$ |
| **4** | $u = x^{\frac{y}{z}}$ | **14** | $z = x^y + y^x$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **5** | $z = xyln(x+y)$ | **15** | $z = e^{x^3-3y^2}$ |
| **6** | $z = x^2 + sin(xy)$ | **16** | $z = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ |
| **7** | $z = e^{\frac{x-4}{y-2}}$ | **17** | $z = arctgxy$ |
| **8** | $u = e^{x^2+y^2} \cdot sin^2 z$ | **18** | $z = xe^{x-2y}$ |
| **9** | $z = x^2 ctg\left(\dfrac{xy}{2}\right)$ | **19** | $u = \dfrac{3^{x-y}}{cos2z}$ |
| **10** | $u = 2^{x-2y+3z}$ | **20** | $u = arcsin\dfrac{xz}{\sqrt{y}}$ |

**Ответы:**

| | |
|---|---|
| **1.** $z'_x = \frac{1}{y^3} - \frac{3y}{x^4} + \frac{1}{3x^3y}$; $z'_y = -\dfrac{3x}{y^4} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{6x^2y^2}$. | **11.** $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. |
| **2.** $z'_x = -\frac{y^2}{(x-y)^2}$; $z'_y = \dfrac{x^2}{(x-y)^2}$. | **12.** $z'_x = 2(x-\sqrt{y})$; $z'_y = -\dfrac{x}{\sqrt{y}}$. |
| **3.** $z'_x = \frac{1}{x}$; $z'_y = -\frac{1}{y}$. | **13.** $u'_x = -\frac{6x^2}{lnz}$; $u'_y = \frac{3y^2}{lnz}$; $u'_z = \frac{2x^3-y^3}{zln^2 z}$. |

| | |
|---|---|
| **4.** $u'_x=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$;<br>$u'_y=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$;<br>$u'_z=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$. | **14.** $z'_x=yx^{y-1}+y^x\ln y$;<br>$z'_y=x^y\ln x+xy^{x-1}$. |
| **5.** $z'_x=y\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$;<br>$z'_y=x\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$. | **15.** $z'_x=3x^2e^{x^3-3y^2}$;<br>$z'_y=-6ye^{x^3-3y^2}$. |
| **6.** $z'_x=2x+y\cos(xy)$;<br>$z'_y=x\cos(xy)$. | **16.** $z'_x=\frac{3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$;<br>$z'_y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. |
| **7.** $z'_x=\frac{1}{y-2}e^{\frac{x-4}{y-2}}$;<br>$z'_y=\frac{4-x}{(y-2)^2}e^{\frac{x-4}{y-2}}$ | **17.** $z'_x=\frac{y}{1+(xy)^2}$;<br>$z'_y=\frac{x}{1+(xy)^2}$. |
| **8.** $u'_x=2xe^{x^2+y^2}\cdot\sin^2 z$;<br>$u'_y=2ye^{x^2+y^2}\cdot\sin^2 z$;<br>$u'_z=e^{x^2+y^2}\cdot\sin 2z$. | **18.** $z'_x=(1+x)e^{x-2y}$;<br>$z'_y=-2xe^{x-2y}$. |
| **9.** $z'_x=2x\,ctg\left(\frac{xy}{2}\right)-\frac{x^2y}{2\sin^2\left(\frac{xy}{2}\right)}$;<br>$z'_y=-\frac{x^3}{2\sin^2\left(\frac{xy}{2}\right)}$.. | **19.** $u'_x=\frac{3^{x-y}\ln 3}{\cos 2z}$;<br>$u'_y=-\frac{3^{x-y}\ln 3}{\cos 2z}$;<br>$u'_z=4\cdot 3^{x-y}\ln 3\,tg 2z$. |

| | |
|---|---|
| **10.** $u'_x = 2^{x-2y+3z}\, ln2;$ <br> $u'_y = -2^{x-2y+3z+1}\, ln2;$ <br> $u'_z = 2^{x-2y+3z} 3\, ln2.$ | **20.** $u'_x = \frac{z}{\sqrt{y-(xz)^2}}$ ; <br> $u'_y = -\frac{xz}{2y\sqrt{y-(xz)^2}}$ ; <br> $u'_z = \frac{x}{\sqrt{y-(xz)^2}}$ . |

## 1.5. Полное приращение и полный дифференциал функции $z = f(x;y)$.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x;y)$заданную в некоторой области. Пусть $M_0(x_0;y_0)$— точка этой области. Найдем изменение этой функции при переходе из точки $M_0(x_0;y_0)$ в точку $M(x;y)$ той же области.

Разность значений функции в точках $M$ и $M_0$ называется **полным приращением** функции $z = f(x;y)$.

**Обозначение:** $\Delta z$ или $\Delta f(x;y)$

Таким образом, $\Delta z = f(M) - f(M_0) = f(x;y) - f(x_0;y_0)$.

Обозначим приращения аргументов $x$ и $y$ при переходе из точки $M_0$ в точку $M$ через $\Delta x$ и $\Delta y$ соответственно: $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$, откуда $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ ,тогда

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0;y_0)$.

Функция $z = f(x;y)$ называется **дифференцируемой** в точке $M(x;y)$,если её полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\boldsymbol{\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y},$$

где$\frac{\partial z}{\partial x} = A$ , $\frac{\partial z}{\partial y} = B$, $\alpha = \alpha(\Delta x; \Delta y) \to 0$ и

$\beta = \beta(\Delta x; \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ .

Сумма первых двух слагаемых $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ в равенстве$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$ представляет собой **главную часть приращения функции**$z = f(x; y)$и называется **полным дифференциалом** этой функции и обозначается

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$$ ,

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, то есть $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$,

таким образом, данное равенство можно переписать в виде :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Полный дифференциал функции $z = f(x; y)$в точке $M_0(x_0; y_0)$ вычисляется по следующей формуле:

$$dz(M_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)dy$$

**Замечания:**

**1)**Аналогично вычисляется полный дифференциал функции трех аргументов, то есть по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz;$$

**2)**Арифметические свойства и правила исчисления дифференциалов функции одной переменной сохраняются и для дифференциалов функции двух (и большего числа) переменных.

**Теорема 1.1:** для того, чтобы функция $z = f(x;y)$ была дифференцируемой в данной точке, достаточно, чтобы она обладала частными производными, непрерывными в этой точке.

Примем теорему 1 без доказательств.

Таким образом, функция имеет полный дифференциал в случае непрерывности её частных производных. Если функция имеет полный дифференциал, то она называется дифференцируемой.

**Частный дифференциал функции** — это произведение частной производной по одной из независимых переменных на дифференциал этой переменной.

**Обозначение:**

$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx$-частный дифференциал функции $z$ по переменной $x$;

$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy$-частный дифференциал функции $z$ по переменной $y$.

Таким образом, **полный дифференциал** — это сумма частных дифференциалов, то есть $\boldsymbol{dz = d_x z + d_y z}$.

**Пример 1.9.** Для функции $f(x;y) = x^2 + xy - y^2$ найти полное приращение $\Delta z$ и полный дифференциал $dz$.

Решение.

$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y) = (x+\Delta x)^2 +$
$+(x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y) - (y+\Delta y)^2 - (x^2+xy-y^2) =$
$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + xy + x\Delta y + \Delta xy + \Delta x\Delta y - y^2 -$
$-2y\Delta y - \Delta y^2 - x^2 - xy + y^2 = [(2x+y)\Delta x + (x-2y)\Delta y] +$
$+(\Delta x^2 + \Delta x\Delta y - \Delta y^2)$.

Итак, $\Delta z = [(2x+y)\Delta x + (x-2y)\Delta y] + (\Delta x^2 + \Delta x\Delta y - \Delta y^2)$- полное приращение,

$dz = (2x+y)\Delta x + (x-2y)\Delta y$ –полный дифференциал (главная часть приращения функции).

**Пример 1.10**. Найти значение полного дифференциала $dz$ и полное приращение $\Delta z$ функции $z = x^2y - y^2x$ в точке $M_0(-1;1)$при $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta y = -0{,}1$.

Решение.

$\Delta z = f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0)$

- полное приращение функции $z$.

$dz(M_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)dy$-полный дифференциал функции$z$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ .

Для того, чтобы вычислить приращение функции в заданной точке
$\Delta z = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - z(x_0; y_0)$,найдем $z(x_0; y_0)$ и

$z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$:

$z(x_0; y_0) = z(-1; 1) = (-1)^2 \cdot 1 - 1^2(-1) = 2$;

$z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = z(-1 + 0{,}1; 1 - 0{,}1) =$

$= z(-0{,}9; 0{,}9) = (-0{,}9)^2 \cdot 0{,}9 - (0{,}9)^2 \cdot (-0{,}9) =$

$= 2 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}9 = 1{,}458;$

Таким образом, полное$\Delta z = 1{,}458 - 2 = -1{,}542.$

Чтобы вычислить полный дифференциал функции$z = x^2 y - y^2 x$ используем формулу
$dz(M_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\Delta y$ , для этого

найдем частные производные заданной функции
$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y$, и определим их значения в точке$M_0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^2y-y^2x)'_x=y(x^2)'_x-y^2(x)'_x=2xy-y^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2y-y^2x)'_y=x^2\cdot(y)'_y-x\cdot(y^2)'_y=x^2-2yx;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)=z'_x(-1;1)=2\cdot(-1)\cdot 1-1^2=-3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)=z'_y(-1;1)=(-1)^2-2\cdot 1(-1)=3.$$

$$dz(M_0)=-3\cdot\ 0{,}1+\ 3\cdot(-0{,}1)=-0{,}6.$$

**Пример 1.11.** Найти полный дифференциал для следующих функций:

**а)** $z=xy+\frac{x}{y}$;**б)** $z=x\sin(x+y)$; **в)** $u=\sqrt{x^2+y-z}$;

**г)**$u=\arcsin\frac{xz+1}{y^3}$.

Решение.

**а)** Полный дифференциал состоит из частных производных, поэтому найдём их:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(xy+\frac{x}{y}\right)'_x=y\cdot(x)'_x+\frac{1}{y}(x)'_x=y+\frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(xy+\frac{x}{y}\right)'_y=x\cdot(y)'_y+x\cdot(y^{-1})'_y=x-\frac{x}{y^2};$$

Подставляя полученные значения $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ в формулу

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ имеем:

$$dz = \left(y + \frac{1}{y}\right)dx + \left(x - \frac{x}{y^2}\right)dy;$$

**б)** $\frac{\partial z}{\partial x} = (xsin(x+y))'_x = (x)'_x \cdot sin(x+y) +$

$+x \cdot (sin(x+y))'_x = sin(x+y) + xcos(x+y) \cdot$

$\cdot (x+y)'_x = sin(x+y) + xcos(x+y);$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (xsin(x+y))'_y = x \cdot (sin(x+y))'_y =$$
$$= xcos(x+y)(x+y)'_x = xcos(x+y);$$
$$dz = (sin(x+y) + xcos(x+y))dx + (xcos(x+y))dy;$$

**в)** Запишем функцию $u = \sqrt{x^2 + y - z}$ трёх переменных в виде $u = (x^2 + y - z)^{\frac{1}{2}}$ и найдём частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left((x^2 + y - z)^{\frac{1}{2}}\right)'_x = \frac{1}{2}(x^2 + y - z)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot (x^2 + y - z)'_x = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y - z}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y - z}};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left((x^2 + y - z)^{\frac{1}{2}}\right)'_y = \frac{1}{2}(x^2 + y - z)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot (x^2 + y - z)'_y = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y - z}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left((x^2+y-z)^{\frac{1}{2}}\right)_z'=\frac{1}{2}(x^2+y-z)^{-\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot(x^2+y-z)_z'=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y-z}};$$

$$du=\frac{x}{\sqrt{x^2+y-z}}dx+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y-z}}dy-$$

$-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y-z}}dz$ или $du=\frac{2xdx+dy-dz}{2\sqrt{x^2+y-z}}$;

**г)**

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(arcsin\frac{xz+1}{y^3}\right)_x'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\cdot\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)_x'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\cdot\frac{1}{y^3}(xz+1)_x'=\frac{z}{\sqrt{y^6-(xz+1)^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(arcsin\frac{xz+1}{y^3}\right)_y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\cdot\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)_y'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\cdot(xz+1)(y^{-3})_y'=\frac{-3(xz+1)y^{-4}}{\frac{\sqrt{y^6-(xz+1)^2}}{y^3}}=$$

$$=-\frac{3(xz+1)}{y\cdot\sqrt{y^6-(xz+1)^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(arcsin\frac{xz+1}{y^3}\right)'_z=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)'_z=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\cdot\frac{1}{y^3}(xz+1)'_z=\frac{x}{\sqrt{y^6-(xz+1)^2}};$$

$$du=\frac{z}{\sqrt{y^6-(xz+1)^2}}dx-\frac{3(xz+1)}{y\cdot\sqrt{y^6-(xz+1)^2}}dy+$$

$+\frac{x}{\sqrt{y^6-(xz+1)^2}}dz$ или $du=\frac{zydx-3(xz+1)dy+xydz}{y\sqrt{y^6-(xz+1)^2}}$.

## 1.6. Применение полного дифференциала функции к приближенным вычислениям.

При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$, а значит, при достаточно малом $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ дифференцируемой функции $z=f(x;y)$ имеет место приближенное равенство $\Delta z\approx dz$ .

Полное приращение имеет вид $\Delta z=f(x+\Delta x;y+\Delta y)-f(x;y)$, следовательно, равенство $\Delta z\approx dz$ можно также переписать в следующем виде:

$$f(x+\Delta x;y+\Delta y)\approx f(x;y)+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

Данной формулой пользуются при приближённых вычислениях.

**Замечание**: с помощью полного дифференциала можно найти границы абсолютной и относительной погрешностей в приближенных вычислениях, приближенное значение полного приращения функции и так далее.

**Пример 1.12.** Вычислить приближенно:**а)** $1,02^{\,5,03}$; **б)** $0,98^{\,2,01}$;**в)** $\sqrt{sin^2 1,55 + 9e^{0,015}}$.

Решение.

**а)** Число $1,02^{\,5,03}$ есть частное значение функции $z = f(x;y) = x^y$,

$1,02^{\,5,03} = (1 + 0,02)^{5+0,03} = (x + \Delta x)^{y+\Delta y}$, где $x = 1$, $\Delta x = 0,02$,

$y = 5$, $\Delta y = 0,03$.

Воспользуемся ранее полученной формулой

$f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x;y) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$,тогда

$1,02^{\,5,03} = f(1 + 0,02; 5 + 0,03) \approx$

$\approx f(1;5) + \frac{\partial z}{\partial x}(1;5) \cdot 0,02 + \frac{\partial z}{\partial y}(1;5) \cdot 0,03$,

, предварительно находим $f(1;5)$ и $\frac{\partial z}{\partial x}(1;5)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1;5)$:

$f(1;5) = 1^5 = 1$,

$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$,

$\frac{\partial z}{\partial x}(1;5) = 5 \cdot 1^4 = 5$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y lnx$,

$\frac{\partial z}{\partial y}(1;5) = 1^5 \cdot ln1 = 0$.

Следовательно,

$1,02^{\,5,03} \approx 1 + 5 \cdot 0,02 + 0 \cdot 0,03 = 1 + 0,1 = 1,1$;

Таким образом, $1,02^{\,5,03} \approx 1,1$.

Для проверки вычислите, применяя калькулятор.

**б)** Принимаем $f(x;y) = x^y$,

$0,98^{\,2,01} = (1-0{,}02)^{2+0{,}01} = (x+\Delta x)^{y+\Delta y}$ , где $x = 1$ ,
$\Delta x = -0{,}02$,
$y = 2$, $\Delta y = 0{,}01$.
Воспользуемся формулой
$f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$,тогда
$0,98^{\,2,01} = f(1-0{,}02; 2+0{,}01) \approx$
$\approx f(1;2) + \frac{\partial z}{\partial x}(1;2)\cdot(-0{,}02) + \frac{\partial z}{\partial y}(1;2)\cdot 0{,}01$,
, находим $f(1;2)$ и $\frac{\partial z}{\partial x}(1;2)$ , $\frac{\partial z}{\partial y}(1;2)$ :
$f(1;2) = 1^2 = 1$,
$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$,
$$\frac{\partial z}{\partial x}(1;2) = 2\cdot 1 = 2,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y lnx,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(1;2) = 1^2\cdot ln1 = 0.$$
Следовательно, $0,98^{\,2,01} \approx 1 + 2\cdot(-0{,}02) + 0\cdot 0{,}01 = 0{,}96$.

**в)** Принимаем $f(x;y) = \sqrt{sin^2x + 9e^y} = (sin^2x + 9e^y)^{\frac{1}{2}}$,
$\sqrt{sin^2 0{,}55 + 9e^{0{,}015}} = \sqrt{sin^2(0+0{,}55) + 9e^{0+0{,}015}} =$
$= \sqrt{sin^2(x+\Delta x) + 9e^{y+\Delta y}}$ , где $x = 0$ , $\Delta x = 0{,}55$,
$y = 0$, $\Delta y = 0{,}015$.
Воспользуемся формулой
$f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$,тогда
$\sqrt{sin^2 0{,}55 + 9e^{0{,}015}} = f(0+0{,}55; 0+0{,}015) \approx$
$\approx f(0;0) + \frac{\partial z}{\partial x}(0;0)\cdot 0{,}55 + \frac{\partial z}{\partial y}(0;0)\cdot 0{,}015$,
, находим $f(0;0)$ и $\frac{\partial z}{\partial x}(0;0)$ , $\frac{\partial z}{\partial y}(0;0)$ :
$f(0;0) = \sqrt{sin^2 0 + 9e^0} = 3$;
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left((sin^2x + 9e^y)^{\frac{1}{2}}\right)'_x = \frac{1}{2}(sin^2x + 9e^y)^{-\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left(sin^2x+9e^y\right)'_x=\frac{2sinxcosx}{2\sqrt{sin^2x+9e^y}}=\frac{sinxcosx}{\sqrt{sin^2x+9e^y}};$$

$\frac{\partial z}{\partial x}(0;0)=0;$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\left(sin^2x+9e^y\right)^{\frac{1}{2}}\right)'_y=\frac{1}{2}\left(sin^2x+9e^y\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left(sin^2x+9e^y\right)'_y=\frac{9e^y}{2\sqrt{sin^2x+9e^y}};$$

$\frac{\partial z}{\partial x}(0;0)=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1{,}5.$ Следовательно,

$\sqrt{sin^2 0{,}55+9e^{0{,}015}}\approx 3+0\cdot 0{,}55+1{,}5\cdot 0{,}015=3{,}0225.$

**Задания для самостоятельного решения.**

**3**. Найти полные дифференциалы следующих функций:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $z=ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$ | **11** | $z=cos\left(x^5y^2\right)$ |
| **2** | $z=x^2y^3$ | **12** | $z=x^5-2xy^2+3xy-x$ |
| **3** | $z=\frac{x}{y^2}$ | **13** | $z=ln\left(x^3+y^3\right)$ |
| **4** | $z=\frac{x-y}{x+y}$ | **14** | $z=e^x\left(4y-xy-y^2\right)$ |
| **5** | $z=x^3-3axy+y^3$ | **15** | $v=arctg\frac{u}{t}$ |
| **6** | $z=\sqrt{x^2-y^2}$ | **16** | $u=x^{y^z}$ |
| **7** | $u=(xy)^z$ | **17** | $z=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **8** | $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ | **18** | $z = \ln tg\,\frac{x}{y}$ |
| **9** | $z = arctg\,\frac{y}{x}$ | **19** | $u = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$ |
| **10** | $u = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$ | **20** | $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$ |

**Ответы:**

| |
|---|
| **1.**$dz = \frac{1}{x+y}\,dx - \frac{x}{y^2+xy}dy$ |
| **2.**$dz = 2xy^3\,dx + 3x^2y^2dy$ |
| **3.** $dz = \frac{1}{y^2}\,dx - \frac{2x}{y^3}dy$ |
| **4.**$dz = \frac{2(ydx - xdy)}{(x+y)^2}$ |
| **5.** $dz = 3((x^2 - ay)\,dx + (y^2 - ax)dy)$ |
| **6.** $dz = \frac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ |
| **7.** $du = yz(xy)^{z-1}\,dx + xz(xy)^{z-1}dy + (xy)^z \ln(xy)dz$ |

| |
|---|
| **8.** $dz = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}dy$ |
| **9.** $dz = \frac{xdy-ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$ |
| **10.** $du = 2cos(x^2+y^2+z^2)\cdot(xdx+ydy+zdz)$ |
| **11.** $dz = -x^4ysin(x^5y^2)(5ydx+2xdy)$ |
| **12.** $dz = (5x^4-2y^2+3y-1)dx+(-4xy+3x)dy$ |
| **13.** $dz = \frac{3}{x^3+y^3}(x^2dx+y^2dy)$ |
| **14.** $dz = e^x((3y-xy-y^2)dx+(4x+2y-4)dy)$ |
| **15.** $dv = \frac{t}{u^2+t^2}du - \frac{u}{u^2+t^2}dt$ |

| |
|---|
| **16.**$u = y^z x^{y^z-1} dxzy^{z-1} x^{y^z} \ln x\, dy + y^z x^{y^z} \ln x \ln y\, dz$ |
| **17.**$dz = \left(\sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}\right) dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dy$ |
| **18.**$dz = \frac{2}{y \sin\frac{2x}{y}} dx - \frac{2x}{y^2 \sin\frac{2x}{y}} dy$ |
| **19.**$du = \frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{xydy+xzdz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}$ |
| **20.**$dz = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2 dx +$ <br> $+3(5x^2y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2)dy$ |

## 1.7. Дифференцирование неявных функций.

Функция $z = f(x; y)$ называется неявной функцией переменных $x$ и $y$, если она определяется уравнением $F(x;y;z)=0$ , то есть уравнением неразрешённым относительно $z$.

Например, $z=x^2+y^2$-явно заданная функция двух переменных$x,y$;

$arctgz-(x+z)y-5=0$ –неявно заданная функция двух переменных ($z$ не выражено через $x,y$).

**Теорема 1.2:** если функция $F(x;y;z)$ дифференцируема по переменным $x,y,z$ в некоторой пространственной области и $F_z'(x;y;z)\neq 0$,то уравнение $F(x;y;z)=0$ определяет однозначную неявную дифференцируемую функцию и её частные производные, могут быть найдены по формулам:

$$z_x'=-\frac{F_x'(x;y;z)}{F_z'(x;y;z)},\quad z_y'=-\frac{F_y'(x;y;z)}{F_z'(x;y;z)}$$

Доказательство.

Найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции $z$,заданной уравнением $F(x;y;z)=0$.

Для этого подставим в уравнение $F(x;y;z)=0$ вместо $z$ функцию $f(x;y)$,получим следующее равенство:

$$F(x;y;f(x;y)) = 0;$$

Продифференцировав равенство $F(x;y;f(x;y)) = 0$ по

переменной $x$ получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x;y;f(x;y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0, y = const;$$

Выражая из полученного равенства $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x$,учитывая,

что $\frac{\partial F}{\partial x} = F'_x, \frac{\partial F}{\partial z} = F'_z$ имеем:

$F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$, отсюда$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$;

Продифференцировав равенство $F(x;y;f(x;y)) = 0$ по

переменной $y$ получим:

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x;y;f(x;y)) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0, x = const;$$

$$F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0, z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Итак, $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$ ,что и требовалось доказать.

**Пример 1.13.** Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и$\frac{\partial z}{\partial y}$ , и полный дифференциал $dz$ функции нескольких переменных $xcosy + ycosz + zcosx - 1 = 0$.

Решение.

Функция $z = f(x; y)$ задана неявно уравнением

$F(x; y; z) = xcosy + ycosz + zcosx - 1 = 0$.

Рассмотрим два способа решения данной задачи:

1 способ :(по формулам,)

Для этого найдем частные производные $F'_x, F'_y, F'_z$ и подставим в данные формулы:

$F'_x = (xcosy + ycosz + zcosx - 1)'_x =$
$= cosy - zsinx;$
$F'_y = (xcosy + ycosz + zcosx - 1)'_y =$
$= -xsiny + cosz,$
$F'_z = (xcosy + ycosz + zcosx - 1)'_z =$
$= cosx - ysinz.$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{cosy - zsinx}{cosx - ysinz} = \frac{zsinx - cosy}{cosx - ysinz};$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-xsiny + cosz,}{cosx - ysinz} = \frac{xsiny - cosz}{cosx - ysinz}.$$

Найдём полный дифференциал $dz$:

$dz = z'_x dx + z'_x dx;$

$$dz = \frac{zsinx - cosy}{cosx - ysinz} dx + \frac{xsiny - cosz}{cosx - ysinz} dy.$$

2 способ:

Вычислим дифференциал от левой и правой частей уравнения $F(x, y, z) = 0$,

учитывая, что $d(UV) = dU \cdot V + dV \cdot U$, а

$F(x, y, z) = xcosy + ycosz + zcosx - 1 = 0$

имеем:

$d(xcosy + ycosz + zcosx - 1) = d(0),$
$d(xcosy) + d(ycosz) + d(zcosx) - d(1) = 0,$
$cosydx + xd(cosy) + coszdy + yd(cosz) +$
$+cosxdz + zd(cosx) = 0,$

$$cosydx - xsinydy + coszdy - ysinzdz +$$
$$+cosxdz - zsinxdx = 0,$$

собирая дифференциалы получим:

$$(cosy - zsinx)dx +$$
$$+(cosz - xsiny)dy + (cosx - ysinz)dz = 0;$$

Таким образом,

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = (cosy - zsinx)dx +$$
$$+(cosz - xsiny)dy + (cosx - ysinz)dz = 0,$$

где $\frac{\partial F}{\partial x} = cosy - zsinx, \frac{\partial F}{\partial y} = cosz - xsiny,$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = cosx - ysinz.$$

Выражая из полученного равенства $dz$,определяем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$(cosx - ysinz)dz = -(cosy - zsinx)dx - (cosz - xsiny)dy$$

$dz = \frac{zsinx-cosy}{cosx-ysinz}dx + \frac{xsiny-cosz}{cosx-ysinz}dy$- полный дифференциал исходной функции, следовательно, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{zsinx-cosy}{cosx-ysinz}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xsiny-cosz}{cosx-ysinz}$-частные производные.

Результаты совпали, следовательно, решение найдено верно.

**Пример 1.14.** Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$

для функции заданной неявно уравнением:

**а)** $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0;$

**б)** $e^z - xyz = 0$; **в)** $cos2z = y^2 - xe^{\frac{y}{z}}.$

Решение.

**а)** Обозначим левую часть данного равенства через функцию

$F(x;y;z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5$ и найдем её частные производные:

$F'_x = (x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5)'_x = 2x - 4,$

$F'_y = (x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5)'_y = -4y,$

$F'_z = (x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5)'_z = 2z + 2;$

Применив формулы $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$, получим:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x-4}{2z+2} = \frac{2-x}{z+1};$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-4y}{2z+2} = \frac{2y}{z+2}.$$

**б)** $F = e^z - xyz$, так как

$F'_x = (e^z - xyz)'_x = -yz,$

$F'_y = (e^z - xyz)'_y = -xz,$

$F'_z = (e^z - xyz)'_z = e^z - xy;$

Учитывая, что по условию $e^z - xyz = 0$ или $e^z = xyz$, что тоже самое, имеем:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{xyz - xy} =$$

$$= \frac{yz}{xy(z-1)} = \frac{z}{x(z-1)};$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-xz}{e^z - xy} = \frac{xz}{xyz - xy} =$$

$$= \frac{xz}{xy(z-1)} = \frac{z}{y(z-1)}.$$

**в)** Запишем данное уравнение в виде $F(x;y;z)=0$:

$cos2z - y^2 + xe^{\frac{y}{z}} = 0.$

Найдём частные производные функции $F(x;y;z)$:

$$F'_x = \left(cos2z - y^2 + xe^{\frac{y}{z}}\right)'_x = e^{\frac{y}{z}}(x)'_x = e^{\frac{y}{z}},$$

$$F'_y = \left(cos2z - y^2 + xe^{\frac{y}{z}}\right)'_y = -2y + x\left(e^{\frac{y}{z}}\right)'_y =$$

$$= -2y + xe^{\frac{y}{z}}\left(\frac{y}{z}\right)'_y = -2y + xe^{\frac{y}{z}} \cdot \frac{1}{z}(y)'_y =$$

$$= -2y + xe^{\frac{y}{z}} \cdot \frac{1}{z} = \frac{-2yz + xe^{\frac{y}{z}}}{z};$$

$$F'_z = \left(cos2z - y^2 + xe^{\frac{y}{z}}\right)'_z = -2sin2z + x\left(e^{\frac{y}{z}}\right)'_z =$$

$$= -2sin2z + xe^{\frac{y}{z}}\left(\frac{y}{z}\right)'_z = -2sin2z + xye^{\frac{y}{z}}(z^{-1})'_z =$$

$$= -2sin2z - \frac{xye^{\frac{y}{z}}}{z^2} = \frac{-2z^2sin2z - xye^{\frac{y}{z}}}{z^2};$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{e^{\frac{y}{z}}}{\frac{-2z^2sin2z - xye^{\frac{y}{z}}}{z^2}} = \frac{z^2e^{\frac{y}{z}}}{2z^2sin2z + xye^{\frac{y}{z}}};$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\dfrac{-2yz + xe^{\frac{y}{z}}}{z}}{\dfrac{-2z^2 sin2z - xye^{\frac{y}{z}}}{z^2}} = \frac{z\left(xe^{\frac{y}{z}} - 2yz\right)}{2z^2 sin2z + xye^{\frac{y}{z}}}.$$

**Пример 1.15.** Найти полный дифференциал функции $z$,определяемой равенством $cos^2x + cos^2y + cos^2z = 1$.

Решение.

Учитывая, что функция $z = f(x; y)$задана неявно уравнением $F(x; y; z) = 0$,

где $F(x; y; z) = \ cos^2x + cos^2y + cos^2z - 1$ и полный

дифференциал вычисляется по формуле
$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$   имеем:

$F'_x = (\ cos^2x + cos^2y + cos^2z - 1)'_x = ((cosx)^2)'_x =$

$= 2cosx(cosx)'_x = -2sinxcosx = -sin2x;$

$F'_y = (\ cos^2x + cos^2y + cos^2z - 1)'_y = ((cosy)^2)'_y =$

$= 2cosy(cosy)'_y = -2sinycosy = -sin2y;$

Аналогично получим $F'_z = -sin2z;$

$$z'_x = -\frac{-sin2x}{-sin2z} = -\frac{sin2x}{sin2z};\ z'_y = -\frac{-sin2y}{-sin2z} = -\frac{sin2y}{sin2z};$$

Найдём полный дифференциал:

$$dz = -\frac{sin2x}{sin2z}dx - \frac{sin2y}{sin2z}dy$$ или $$dz = -\frac{sin2xdx + sin2ydy}{sin2z}.$$

**Задания для самостоятельного решения.**

**4.** Найти частные производные функции $z = f(x; y)$

заданной неявно уравнением $F(x; y; z) = 0$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $z^3 + 3xyz = a^3$ | **11** | $zln(xy) + xe^{-2z} = 0$ |
| **2** | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ | **12** | $z^2 + sin(yz) - x = 0$ |
| **3** | $x + arctg\frac{y}{z - x} = z$ | **13** | $sin(3x - 2z) + x^2yz = 0$ |
| **4** | $x^3y + zy^3 + z^3y = 0$ | **14** | $z^2 - ln2z + xy^3 = 0$ |
| **5** | $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$ | **15** | $x - cos(z + y) - z^3 = 0$ |
| **6** | $x^2 - 2y^2 + z^2 -$<br>$-4x + 2z - 5 = 0$ | **16** | $z - y^2e^{xz} = 0$ |
| **7** | $sin(z + y) +$<br>$+cos(x - z) = 0$ | **17** | $e^x + ylnz - x = 0$ |
| **8** | $3x^2 - 2y^2 + z^2 -$<br>$-5x + 2 = 0$ | **18** | $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ |
| **9** | $x^3 + 3y^2 - x^3z^2 +$<br>$+5z + 8 = 0$ | **19** | $z^3 - tg(3z + x^2y^2) = 0$ |
| **10** | $x - y + z + 3 = xz^2$ | **20** | $x^2y - xy^2 + xyz^3 + 6 = 0$ |

**Ответы:**

| | |
|---|---|
| **1.** $z'_x = -\frac{yz}{xy+z^2}$ ; $z'_y = -\frac{xz}{xy+z^2}$ | **11.** $z'_x = \frac{\frac{z}{x}+e^{-2z}}{2xe^{-2z}-ln(xy)}$ ; $z'_y = \frac{z}{y\left(2xe^{-2z}-ln(xy)\right)}$ |
| **2.** $z'_x = -\frac{c^2x}{a^2z}$ ; $z'_y = -\frac{c^2y}{b^2z}$ | **12.** $z'_x = \frac{1}{2z+ycos(yz)}$ ; $z'_y = -\frac{zcos(yz)}{2z+ycos(yz)}$ |
| **3.** $z'_x = 1$; $z'_y = \frac{z-x}{(z-x)^2+y^2+y}$ | **13.** $z'_x = \frac{2cos(3x-2z)+2xyz}{2cos(3x-2z)-x^2y}$ ; $z'_y = \frac{x^2z}{2cos(3x-2z)-x^2y}$ |
| **4.** $z'_x = -\frac{3x^2}{y^2+3z^2}$ ; $z'_y = -\frac{x^3+3zy^2+z^3}{y^3+3z^2y}$ | **14.** $z'_x = \frac{y^3}{\frac{1}{z}-2z}$ ; $z'_y = \frac{3y^2x}{\frac{1}{z}-2z}$ |
| **5.** $z'_x = \frac{2xy}{e^z+1}$ ; $z'_y = \frac{x^2}{e^z+1}$ | **15.** $z'_x = \frac{1}{3z^2-sin(y+z)}$ ; $z'_y = \frac{sin(y+z)}{3z^2-sin(y+z)}$ |

| | |
|---|---|
| **6.** $z'_x = \frac{2-x}{z+1}$ ; $z'_y = \frac{2y}{z+1}$ | **16.** $z'_x = \frac{zy^2e^{xz}}{1-xy^2e^{xz}}$ ; $z'_y = \frac{2ye^{xz}}{1-xy^2e^{xz}}$ |

| | |
|---|---|
| **7.** $z'_x = \frac{sin(x-z)}{cos(z+y)+sin(x-z)}$ ; $z'_y = -\frac{cos(z+y)}{cos(z+y)+sin(x-z)}$ | **17.** $z'_x = \frac{z(1-e^x)}{y}$ ; $z'_y = -\frac{zlnz}{y}$ |
| **8.** $z'_x = \frac{5-6x}{2z}$ ; $z'_y = \frac{2y}{z}$ | **18.** $z'_x = -\frac{x}{z}$ ; $z'_y = -\frac{y}{z}$ |
| **9.** $z'_x = \frac{3(1-z^2)}{2xz}$ ; $z'_y = \frac{3y}{z}$ | **19.** $z'_x = \frac{2xy^2}{3z^2cos^2(3z+x^2y^2)}$ ; $z'_y = \frac{2yx^2}{3z^2cos^2(3z+x^2y^2)}$ |
| **10.** $z'_x = \frac{z^2-1}{1-2xz}$ ; $z'_y = \frac{1}{1-2xz}$ | **20.** $z'_x = -\frac{2xy-y^2+yz^3}{3xyz^2}$ ; $z'_y = -\frac{x^2-2xy+xz^3}{3xyz^2}$ |

## 1.8. Производная сложной функции.

**1)Случай одной независимой переменной.**

Пусть $z = f(x;y)$ функция двух независимых переменных $x$ и $y$,каждая из которых является функцией одной независимой переменной $t$: $x = x(t), y = y(t)$,тогда функция $z = f(x(t); y(t))$ является сложной функцией одной переменной $t$(переменные $x$ и $y$ промежуточные).

**Теорема 1.3:** если $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $M(x;\ y)\epsilon D$ функция и $x = x(t), y = y(t)$- дифференцируемыми функции независимой переменной $t$, то производная сложной функции $z = f(x(t); y(t))$ вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Доказательство.

Дадим независимой переменной $t$ приращение $\Delta t$,тогда функции $x = x(t)$и $y = y(t)$ получат приращение$\Delta\, x$ и $\Delta\, y$ соответственно, они в свою очередь вызовут приращение $\Delta z$ функции $z = f(x; y)$.

Так как по условию функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $M(x;\ y)$,то её полное приращение имеет вид:

$\Delta z = A \cdot \Delta\, x + B \cdot \Delta\, y + \alpha \cdot \Delta\, x + \beta \cdot \Delta\, y$,

где $\alpha = \alpha(\Delta\, x; \Delta\, y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta\, x; \Delta\, y) \to 0$ при

$\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ .

Учитывая, что $\frac{dz}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$ разделим обе части полного приращения на $\Delta t$ и переходя к пределу в обеих частях равенства имеем:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y | : \Delta t,$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t},$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \right),$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \alpha \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \beta \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt};$$

Таким образом, $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$.

**Замечание:** в частности, если $z = f(x; y), y = y(x)$, получим $z = f\big(x; y(x)\big)$-сложную функцию независимой переменной $x$.

Этот случай сводится к предыдущему заменой $t$ на $x$ $(dx = dt)$,согласно формуле , имеем:

$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$, полная производная функции $z$ по переменной $x$

будет вычисляться следующим образом:

$$\boldsymbol{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}}$$

Формулы

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

носят названия- **формулы полной производной**.

**2)Случай нескольких независимых переменных.**

Если $z = f(x;y)$,где $x = (u;v), y = y(u;v)$, тогда $z = f\big(x(u;v);y(u;v)\big)$—сложная функция двух независимых переменных $u$ и $v$.

Ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ можно найти, используя формулу $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$ заменив в данной формуле $t$ на $u$ ($t = u$) получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};$$

Аналогично, заменив в данной формуле $t$ на $v$ получим:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v};$$

Таким образом, частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, сложной функции $z = f\big(x(u;v);y(u;v)\big)$ можно найти, используя формулы:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}} \\ \boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}} \end{cases}.$$

Таким образом, производная сложной функции $z = f\big(x(u;v);y(u;v)\big)$ по каждой независимой переменной $u$ и $v$ равна сумме произведений частных производных этой функции по ее промежуточным переменным $x$ и $y$ на их производные по соответствующим независимым переменным $u$ и $v$.

Заметим, что в данном случае справедлива формула:

$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$ —полный дифференциал функции $z = f\big(x(u;v);y(u;v)\big)$ .

**Пример 1.16.** Найти производную функции:

**а)** $z = x^2y^3$, где $x = t, y = t^2$;

**б)** $z = x\cos\frac{x}{y}$ , где $x = 1 + 3t, y = \sqrt{1+t^2}$ ;

**в)** $z = \ln(x^2 - y^2)$, где $y = e^x$;

**г)** $z = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{y}$,где $y = e^{(1+x)^2}$;

**д)** $z = \frac{x^2}{y}$ ,где $x = uv$ , $y = \frac{u}{v}$ ;

**е)** $z = 3^{x^2}\operatorname{arctg} y$,где $x = \frac{u}{v}, y = uv$.

Решение.

**а)** Так как функция $z = x^2y^3, x = t, y = t^2$ является сложной функцией одной переменной $t$. Решение может быть найдено по формуле

$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$, поэтому найдём

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2y^3)'_x = y^3(x^2)'_x = 2xy^3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2y^3)'_y = x^2(y^3)'_y = 3x^2y^2;$$

$$\frac{dx}{dt} = (t)' = 1;$$

$$\frac{dy}{dt} = (t^2)' = 2t.$$

Подставим найденные значения в формулу:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = 2xy^3\cdot 1 + 3x^2y^2\cdot 2t =$$

$$= 2xy^3 + 6x^2y^2t = +2t\cdot(t^2)^3 + 6t^2(t^2)^2t =$$

$$= 2t^7 + 6t^7 = 8t^7;$$

**Замечание:** можно как сохранить переменные $x$и$y$ так

и заменить их через $t$(в зависимости от того упроститься или нет выражение после подстановки);
Решение можно было найти иначе, подставив значение для $x = t, y = t^2$ в формулу $z = x^2y^3 = t^2 \cdot (t^2)^3 = t^8$ и вычислив производную $\frac{dz}{dt} = (t^8)' = 8t^7$.

**б)** Так как исходная функция является сложной функцией одной переменной $t$. Решение может быть найдено по формуле $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$, поэтому найдём$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ и подставим полученные значения в формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x\cos\frac{x}{y}\right)'_x = (x)'_x \cdot \cos\frac{x}{y} + x \cdot \left(\cos\frac{x}{y}\right)'_x =$$

$$= \cos\frac{x}{y} - x \cdot \sin\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \cos\frac{x}{y} - x \cdot \sin\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}(x)'_x =$$

$$= \cos\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \cdot \sin\frac{x}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x\cos\frac{x}{y}\right)'_y = x\left(\cos\frac{x}{y}\right)'_y = -x\sin\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\right)'_y =$$

$$= -x\sin\frac{x}{y} \cdot x(y^{-1})'_y = -x^2\sin\frac{x}{y}(-y^{-2}) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \sin\frac{x}{y};$$

$$\frac{dx}{dt} = (1 + 3t)' = 3;$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\sqrt{1 + t^2}\right)' = \left((1 + t^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(1 + t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + t^2)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1 + t^2}} \cdot 2t = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}};$$

$$\frac{dz}{dt} = 3 \cdot \left(\cos\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \cdot \sin\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \sin\frac{x}{y} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}};$$

**в)** Так как исходная функция является сложной функцией одной переменной $x$. Решение может быть найдено по формуле $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$. Найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ и полную производную $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(ln(x^2-y^2)\right)'_x=\frac{1}{x^2-y^2}\cdot(x^2-y^2)'_x=\frac{2x}{x^2-y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(ln(x^2-y^2)\right)'_y=\frac{1}{x^2-y^2}\cdot(x^2-y^2)'_y=-\frac{2y}{x^2-y^2};$$

$$\frac{dy}{dx}=(e^x)'=e^x;$$

На основании формулы $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$ получаем:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{2y}{x^2-y^2}e^x=\frac{2(x-ye^x)}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{2(x-ye^x)}{x^2-y^2}=\frac{2(x-e^{2x})}{x^2-e^{2x}};$$

**г)** Так как исходная функция является сложной функцией одной переменной $x$. Решение может быть найдено по формуле $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(arctg\,\frac{x+1}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+1}{y}\right)'_x=$$

$$=\frac{1}{\frac{y^2+(x+1)^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}(x+1)'_x=\frac{y}{y^2+(x+1)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(arctg\,\frac{x+1}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+1}{y}\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{y}\right)^2}(x+1)(y^{-1})'_y=\frac{x+1}{\frac{y^2+(x+1)^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=$$

$$=-\frac{x+1}{y^2+(x+1)^2};$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(e^{(1+x)^2}\right)'=e^{(1+x)^2}((1+x)^2)'=2e^{(1+x)^2}(1+x);$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y^2+(x+1)^2}-\frac{2(x+1)^2e^{(1+x)^2}}{y^2+(x+1)^2}=$$
$$=\frac{y-2(x+1)^2e^{(1+x)^2}}{y^2+(x+1)^2}=\frac{e^{(1+x)^2}(1-2(x+1)^2)}{e^{2(1+x)^2}+(x+1)^2};$$

**д)** Так как функция $z=\frac{x^2}{y}$ ,где $x=uv$ , $y=\frac{u}{v}$- сложная функция двух независимых переменных $u$ и $v$,поэтому решение может быть найдено по формулам $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\end{cases}$, для этого находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial v}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x^2}{y}\right)'_x=\frac{1}{y}\cdot(x^2)'_x=\frac{2x}{y};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x^2}{y}\right)'_y=x^2\left(\frac{1}{y}\right)'_y=x^2(y^{-1})'_y=-\frac{x^2}{y^2};$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}=(uv)'_u=v(u)'_u=v;$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}=(uv)'_v=u(v)'_v=u;$$
$$\frac{\partial y}{\partial u}=\left(\frac{u}{v}\right)'_u=\frac{1}{v}(u)'_u=\frac{1}{v};$$
$$\frac{\partial y}{\partial v}=\left(\frac{u}{v}\right)'_v=u\cdot\left(\frac{1}{v}\right)'_v=u(v^{-1})'_v=-\frac{v}{v^2}$$

Применяя вышеуказанные формулы, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2x}{y}\cdot v-\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{1}{v};$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{2x}{y}u-\frac{x^2}{y^2}\cdot\left(-\frac{v}{v^2}\right).$$

Итак, $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{2xv}{y} - \dfrac{x^2}{y^2 v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{2xu}{y} + \dfrac{x^2 v}{(yv)^2} \end{cases}$;

**е)** Сложная функция двух независимых переменных $u$ и $v$,поэтому решение может быть найдено по формулам $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3^{x^2} arctgy\right)'_x = arctgy\left(3^{x^2}\right)'_x =$$
$$= arctgy \cdot 3^{x^2} ln3 \cdot (x^2)'_x = 2ln3 \cdot 3^{x^2} xarctg\, y,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(3^{x^2} arctgy\right)'_y = 3^{x^2}(arctgy)'_y = \frac{3^{x^2}}{1+y^2};$$
$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u;$$

Составляем суммы соответствующих произведений:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2\,ln3 \cdot 3^{x^2} x\, arctg\, y}{v} + \frac{3^{x^2} v}{1+y^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{2ln3\;\; 3^{x^2} xuarctg\, y}{v^2} + \frac{3^{x^2} u}{1+y^2}.$$

Ответ можно оставить в такой форме или выразить через u и v:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2ln3 \cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}} \frac{u}{v^2} arctg(uv) + \frac{3^{\frac{u^2}{v^2}} v}{1+u^2 v^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = -2\frac{u^2}{v^3} \cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}} ln3\, arctg(uv) + \frac{u}{1+u^2 v^2} \cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}}.$$

**Пример 1.17.** Показать, что функция $z = arctg\,\dfrac{x}{y}$,

где $x = u+v, y = u-v$, удовлетворяет соотношению $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{u-v}{u^2+v^2}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(arctg\,\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}(x)'_x = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{y^2}\cdot y} = \frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(arctg\,\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot x(y^{-1})'_y = -\frac{x}{\frac{x^2+y^2}{y^2}\cdot y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (u+v)'_u = (u)'_u = 1;$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (u+v)'_v = (v)'_v = 1;$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = (u-v)'_u = (u)'_u = 1;$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = (u-v)'_v = -(v)'_v = -1;$$

Применяя формулы $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\end{cases}$, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{y-x}{x^2+y^2} = \frac{u-v-(u+v)}{(u+v)^2+(u-v)^2} = -\frac{2v}{2u^2+2v^2} =$$

$$= -\frac{v}{u^2+v^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} = .$$

$$= \frac{y+x}{x^2+y^2} = \frac{u-v+u+v}{(u+v)^2+(u-v)^2} = \frac{2u}{2u^2+2v^2} =$$

$$=\frac{u}{u^2+v^2};$$

Покажем, что $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{v}{u^2+v^2}+\frac{u}{u^2+v^2}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$$ —что и требовалось доказать.

**Задания для самостоятельного решения.**

**5. 1)-12),17)-20)** Найти производную функции; **13)-16)** Найти дифференциал функции.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $z=x^2+y^3+xy$, $x=asint, y=acost$ | **11** | $z=yx^2, y=cosx$ |
| **2** | $z=xy^3$, $x=\sqrt{t}$, $y=cost^2$ | **12** | $z=ln(x^2-y^2)$, $y=x^2$ |
| **3** | $z=lnsin\frac{x}{y}$, $x=3t^2$, $y=\sqrt{t^2+1}$ | **13** | $z=x^3+y^3$, $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$ |
| **4** | $z=e^{xy}ln(x+y)$, $x=t^3$, $y=1-t^3$ | **14** | $z=\sqrt{x^2-y^2}$, $x=u^v$, $y=ulnv$ |
| **5** | $z=xyarctg(xy)$, $x=t^2+1$, $y=t^3$ | **15** | $z=e^{x-\frac{2}{y}}$, $x=vcos^2u$, $y=usin^2v$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | $z = e^{2x-3y}$, $x = tgt$, $y = t^2 - t$ | 16 | $z = \frac{x^2}{y}$, $x = u - 2v$, $y = v + 2u$ |
| 7 | $z = x^y$, $x = lnt$, $y = sint$ | 17 | $z = vu^2 + u, u = x + 1$, $v = x + e^y$ |
| 8 | $z = sinx\, ln\, y, x = t^3$, $y = e^t$ | 18 | $z = vu^2 + v, u = x + y^2$, $v = lnx + e^y$ |
| 9 | $z = xe^y, y = \varphi(x)$ | 19 | $z = arctg(x + 2y)$, $x = t^2$, $y = t^3$ |
| 10 | $z = e^{xy}, y = \varphi(x)$ | 20 | $z = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$ |

**Ответы:**

| |
|---|
| **1.** $\frac{dz}{dt} = a^2(sin2t + cos2t - 3acos^2 tsint)$ |
| **2.** $\frac{dz}{dt} = \frac{cos^3 t^2}{2\sqrt{t}} - 3\sqrt{t^3}\, cost^2 sin2t^2$ |
| **3.** $\frac{dz}{dt} = \frac{t}{y} ctg\left(\frac{x}{y}\right)\left(6 - \frac{x}{y^2}\right)$ |
| **4.** $\frac{dz}{dt} = 0$ |
| **5.** $\frac{dz}{dt} = (y\, arctg\, xy + \frac{xy^2}{1+x^2y^2}) \cdot 2t + (y\, arctg\, xy + \frac{x^2y}{1+x^2y^2}) \cdot 3t^2$ |
| **6.** $\frac{dz}{dt} = 2e^{2x-3y}\frac{1}{cos^2 t} - 3e^{2x-3y}(2t - 1)$ |
| **7.** $\frac{dz}{dt} = yx^{y-1}\frac{1}{t} + x^y\, ln\, x\, cos\, t$ |

| |
|---|
| **8.** $\frac{dz}{dt} = t\cos(t^3) + \sin(t^3)$ |
| **9.** $\frac{dz}{dx} = e^y + xe^y\varphi'(x)$ |
| **10.** $\frac{dz}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy}\varphi'(x)$ |
| **11.** $\frac{dz}{dx} = x(2\cos x - x\sin x)$ |
| **12.** $\frac{dz}{dx} = \frac{2(1-2x^2)}{x(1-x^2)}$ |
| **13.** $dz = 3v^2(v^3 + \frac{1}{v^3})du + 3u^3(v^2 - \frac{1}{v^4})dv$ |
| **14.** $dz = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} vu^{v-1} - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} \ln v\right) du + {} + \left(\frac{xu^v \ln u}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{yu}{v\sqrt{x^2-y^2}}\right) dv$ |
| **15.** $dz = e^{x-\frac{2}{y}}\left(\frac{2}{y^2}\sin^2 v - v\sin 2u\right) du + {} + e^{x-\frac{2}{y}}\left(\cos^2 v + \frac{2}{y^2} u\sin 2v\right) dv3 -$ |
| **16.** $dz = \frac{x}{y}\left(2\left(1 - \frac{x}{y}\right) du - \left(4 + \frac{x}{y}\right) dv\right)$ |
| **17.** $\frac{\partial z}{\partial x} = u^2 + 2uv, \ \frac{\partial z}{\partial y} = u^2 e^y$ |

| |
|---|
| **18.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u^2+1}{x} + 2uv + 1,$ <br> $\frac{\partial z}{\partial y} = (2uv+1)\cdot 2y + (u^2+1)e^y$ |
| **19.** $\frac{dz}{dt} = \frac{2t(3t+1)}{1+t^4(1+2t)^2}$ |
| **20.** $\frac{dz}{dt} = -(e^{-t}+e^t)$ |

## 1.9. Градиент функции и производная по направлению.

**Градиент функции.**

Рассмотрим функцию двух переменных $n = 2, z = f(x; y)$.

**Градиентом** функции нескольких переменных в данной точке называется вектор, координаты которого равны частным производным по соответствующим аргументам, вычисленным в данной точке $M(x; y)$.

**Обозначение:**

$$\boldsymbol{gradz|_M = \left(z'_x|_M; z'_y|_M\right)}$$ или

$$\boldsymbol{gradz|_M = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M; \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M\right)}$$

Аналогично вычисляется градиент для функции трёх переменных $u = f(x; y; z)$,то есть

$$gradu|_M = (u'_x|_M; u'_z|_M; u'_z|_M).$$

**Физический смысл градиента.**

**Градиент** функции, то есть вектор $gradz|_M$указывает направление, в котором функция $z$ в точке $M$ возрастает с максимальной скоростью. При этом, максимальная величина скорости равна:

$$|gradz|_M| = \sqrt{(z'_x|_M)^2 + \left(z'_y\big|_M\right)^2};$$

**Пример 1.18.** Найти градиент функции $z = x^2y$ в точке $M(1;2)$,вычислить величину градиента.

Решение.

Вычислим частные производные и их значения в точке $M$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2y)'_x = y \cdot (x^2)'_x = 2xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2y)'_y = x^2(y)'_y = x^2;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = z'_x|_M = (2xy)|_M = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = z'_y\big|_M = (x^2)|_M = 1.$$

Таким образом, $gradz|_M = \left(z'_x|_M; z'_y\big|_M\right) = (4;1)$-градиент функции $z = x^2y$ в точке $M(1;2)$,то есть вектор, в направлении которого функция $z = x^2y$ возрастает в точке $M(1;2)$.

$|gradu|_M| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ –величина градиента-максимальная величина скорости возрастания.

**Пример 1.19.** Найти градиент функции $u = 2^{x+2y-z}$ в точке $M(1;0;1)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2^{x+2y+z})'_x = 2^{x+2y-z} ln2(x + 2y - z)'_x =$$
$$= 2^{x+2y-z} ln2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (2^{x+2y-z})'_y = 2^{x+2y-z} ln2 \cdot (x + 2y - z)'_y =$$
$$= 2^{x+2y-z} ln2 \cdot 2 = 2^{x+2y-z+1} ln2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (2^{x+2y-z})'_z = 2^{x+2y-z} ln2 \cdot (x + 2y - z)'_z =$$

$= -2^{x+2y+3z} ln2;$

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = (2^{x+2y-z} ln2)|_M = 2^{1+2\cdot 0-1} ln2 = ln2;$

$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = (2^{x+2y-z+1} ln2)|_M = 2^{1+2\cdot 0-1+1} ln2 = 2ln2;$

$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (2^{x+2y-z} ln2)|_M = 2^{1+2\cdot 0-1} ln2 = ln2.$

Таким образом,$gradu|_M = (ln2; 2ln2; ln2).$

**Пример 1.20.** Найти точки, в которых модуль градиента функции $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ равен 2.

Решение.

Поскольку $gradz = \left(z'_x; z'_y\right)$,то $|gradz| = \sqrt{{z'_x}^2 + {z'_y}^2}$, найдём точки, где$|gradz| = 2$, для этого вычислим частные производные исходной функции:

$z'_x = \left( (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \right)'_x = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}(x^2 + y^2)'_x =$

$= 3x \cdot \sqrt{x^2 + y^2};$

$z'_y = \left( (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \right)'_y = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}(x^2 + y^2)'_y =$

$= 3y \cdot \sqrt{x^2 + y^2};$

Если $|gradz| = 2$, то

$\sqrt{\left(3x\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(3y\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2} = 2,$

$\sqrt{9x^2(x^2 + y^2) + 9y^2(x^2 + y^2)} = 2,$

$\sqrt{9(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)} = 2,$

$\sqrt{\left(3(x^2 + y^2)\right)^2} = 2,$

$3(x^2 + y^2) = 2$, то есть $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$.

Таким образом точки, в которых модуль градиента функции $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ равен 2, это все точки, лежащие на окружности $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$ – окружность с центром в начале координат и радиусом $R = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

**Производная по направлению.**

Рассмотрим функцию $z = f(x; y)$ определённую и дифференцируемую в некоторой окрестности точки $M(x; y)$ и произвольный вектор $\bar{l}$ - некоторое направление (вектор с началом в точке $M(x; y)$), $\alpha, \beta$-углы, образованные вектором $\bar{l}$ с осями координат (рис.8), $\bar{l}^0 = (cos\alpha; cos\beta)$-орт этого направления. Для характеристики скорости изменения функции $z$ в точке $M(x; y)$ в направлении вектора $\bar{l}$ введём понятие производной по направлению.

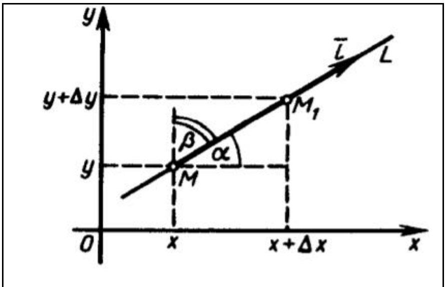


Рис.8

Для этого проведём через точку $M(x; y)$ прямую $L$, чтобы она совпала с вектором $\bar{l}$, и возьмём на прямой некоторую точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$ и найдём скорость изменения функции при движении точки $M$. Направление движения точки $M(x; y)$ будет показывать вектор $\overline{MM_1} = \bar{l}$, через $\Delta l$ обозначим длину отрезка $|\overline{MM_1}|$ ($|\overline{MM_1}| = \Delta l$). Приращение функции $z$ возникающее при переходе от точки $M$ к точке $M_1$ в направлении вектора $\bar{l}$ определяется следующим образом:

$$\Delta z = z(M_1) - z(M) = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y),$$

Предел отношения $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0 (M_1 \to M)$ если он существует, называется **производной функции** $z = f(x;y)$ **в точке** $M$ **в направлении вектора** $\bar{l}$.

.

**Обозначение:**

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \lim_{M_1 \to M} \frac{z(M_1) - z(M)}{|\overline{MM_1}|}$$

Предположим, что функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$.Тогда её приращение можно записать в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \beta_1 \cdot \Delta y,$$

где $\alpha_1 = \alpha_1(\Delta x; \Delta y) \to 0$ и $\beta_1 = \beta_1(\Delta x; \Delta y) \to 0$ при

$\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Разделив обе части равенства на $\Delta l$ и учитывая, что $cos\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta l}$,$cos\beta = \frac{\Delta y}{\Delta l}$, имеем:

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta l} + \alpha_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta l} + \beta_1 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta l},$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot cos\beta + \alpha_1 \cdot cos\alpha + \beta_1 \cdot cos\beta.$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $\Delta l \to 0$,

учитывая, что $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}$ и $\alpha_1, \beta_1$ –бесконечно малые

функции при $\Delta l \to 0$ получим:

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \cdot cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot cos\beta + \alpha_1 \cdot cos\alpha + \beta_1 \cdot cos\beta \right),$$

$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot cos\beta}$ **- производная функции** $\boldsymbol{z}$ **в направлении вектора** $\bar{l}$**.**

**Замечание:** используя понятие градиента функции $gradz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ и учитывая, что орт вектора $\bar{l}$ (единичный вектор $\bar{l}^0$) имеет координаты $\bar{l}^0 = (cos\alpha; cos\beta)$( $\bar{l}^0 = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|}$) представим полученную формулу в виде скалярного произведения векторов $gradz$ и $\bar{l}^0$,то есть

$$\frac{\partial z}{\partial l} = gradz \cdot \bar{l}^0 = \left(gradz, \bar{l}^0\right)$$

**Замечание:** для функции трёх переменных $u = f(x; y; z)$ производная по направлению определяется аналогично, то есть по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot cos\gamma .$$

**Физический смысл производной по направлению.**

Производная $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M$ характеризует скорость изменения функции $z$ в точке $M$ в направлении данного вектора $\bar{l}$. Если $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M > 0$ ,то функция возрастает в направлении вектора $\bar{l}$ со скоростью $\left|\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M\right|$, если $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M < 0$, то функция убывает в направлении вектора $\bar{l}$ со скоростью $\left|\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M\right|$.

**Пример 1.21.** Найти градиент и производную функции $u = x^3y + xz^2 + z^3y$ в точке $M(-1;0;2)$ в направлении вектора $\overline{MM_1} = \bar{\imath} - \bar{\jmath} + \bar{k}$.

Решение.

Поскольку $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = gradu|_M \cdot \bar{l}^0$,то решение данной задачи будет состоять из двух этапов:

1)Найдём $gradu|_M$,для этого вычислим частные производные данной функции и их значения в точке $M$ :

$$u'_x = (x^3y + xz^2 + z^3y)'_x = y \cdot (x^3)'_x + z^2(x)'_x =$$

$$= 3yx^2 + z^2;$$

$$u'_y = (x^3y + xz^2 + z^3y)'_y = x^3(y)'_y + z^3(y)'_y =$$

$$= x^3 + z^3;$$

$$u'_z = (x^3y + xz^2 + z^3y)'_z = x(z^2)'_z + y(z^3)'_z =$$

$$= 2xz + 3yz^2;$$

Найдём значение частных производных в точке $M$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = (3yx^2 + z^2)|_M = 3 \cdot 0 \cdot (-1)^2 + 2^2 = 4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = (x^3 + z^3)|_M = (-1)^3 + 2^3 = 7;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = (2xz + 3yz^2)|_M = 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 2^2 = -4.$$

Таким образом,$gradu|_M = (4; 7; -4)$;

2)Находим единичный вектор $\bar{l}^0$ имеющий данное направление $\overline{MM_1} = \bar{\imath} - \bar{\jmath} + \bar{k} = (1; -1; 1)$,

$$\bar{l}^0 = \frac{\overline{MM_1}}{|\overline{MM_1}|} = \frac{(1; -1; 1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{(1; -1; 1)}{\sqrt{3}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right);$$

3)Находим $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = gradu \cdot \bar{l}^{\,0} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 7 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + (-4) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$= \frac{4\sqrt{3} - 7\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{3} = -\frac{7\sqrt{3}}{3} < 0$-функция убывает в направлении вектора $\bar{l} = \overline{MM_1}$ со скоростью$\left|-\frac{7\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

**Пример 1.22.** Найти производную функции $z = ln(e^x + e^y)$ в начале координат в направлении луча, образующего с осью абсцисс угол $45^0$.

Решение.

1)Найдём $gradz|_O$,для этого вычислим частные производные данной функции и их значения в начале координат $O(0; 0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (ln(e^x + e^y)\ )'_x = \frac{1}{e^x + e^y}(e^x + e^y)'_x = \frac{e^x}{e^x + e^y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (ln(e^x + e^y)\ )'_y = \frac{1}{e^x + e^y}(e^x + e^y)'_y = \frac{e^y}{e^x + e^y};$$

Найдём значение частных производных в точке $O(0;0)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_O = \left.\left(\frac{e^x}{e^x + e^y}\right)\right|_O = \frac{e^0}{e^0 + e^0} = \frac{1}{2};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_O = \left.\left(\frac{e^x}{e^x + e^y}\right)\right|_O = \frac{e^0}{e^0 + e^0} = \frac{1}{2};$$

Таким образом, $gradz|_O = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

2)Находим орт вектора, в направлении которого будем искать производную, то есть вектор единичной длины, образующего с осью абсцисс угол $45^0$:

$$\bar{l}^0 = (cos\alpha; cos\beta) = (cos45^0; cos45^0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

3)Находим $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_O$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_O = gradz|_O \cdot \bar{l}^0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Задания для самостоятельного решения.**

**6**. Вычислить градиент и производную ФНП в точке $M$ в направлении вектора $\bar{l}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $u = xyz$, $M(3;-1;2)$, $\bar{l} = (0;1;3)$. | **11** | $u = x^3y + xz^2 + z^3y$, $M(-1;0;2)$, $\bar{l} = (1;-1;1)$. |
| **2** | $z = \frac{xy}{x^2+y^2+1}$, $M(0;3)$, $\bar{l} = (3;4)$. | **12** | $u = y^x - z^3$, $M(0;e;-1)$, $\bar{l} = (1;2;-2)$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **3** | $u = arctg(xy^2z)$, $M(2;1;0)$, $\bar{l} = 3\bar{i} + 4\bar{k}$. | **13** | $u = x^3y + xz^2 + z^3y$, $M(0;1;2)$, $\bar{l} = (2;2;1)$. |
| **4** | $z = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$, $M(1;1)$, $\bar{l} = (-3;1)$. | **14** | $z = xy^2 + 4x^3y$, $M(2;3)$, $\bar{l} = (3;4)$. |
| **5** | $u = x^2 + 2xz + y^2$, $M(1;2;-1)$, $\bar{l} = (1;2;-2)$. | **15** | $u = ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M(2;-3;1)$, $\bar{l} = (3;-4;2)$. |
| **6** | $z = 2x^2 + xy$, $M(-1;2)$, $\bar{l} = (3;4)$. | **16** | $u = \dfrac{xyz}{x+y+z}$, $M(2;1;3)$, $\bar{l} = (-2;1;2)$ |
| **7** | $u = ln(e^x + e^y + e^z)$, $M(0;0;0)$, $\bar{l} = (1;-2;2)$. | **17** | $z = x^2 - xy + 3y^3$, $M(1;1)$, $\bar{l} = (-5;12)$. |
| **8** | $z = x^2 - xy + y^3$, $M(1;-1)$, $\bar{l} = (3;-4)$. | **18** | $z = 3x^2 + 5y^2$, $M(1;-1)$, $\bar{l} = (1;2)$. |
| **9** | $z = 3x^4 - xy + y^3$, $M(1;2)$, $\bar{l} = (3;-4)$. | **19** | $u = xy^2z^3$, $M(3;2;1)$, $\bar{l} = (2;2;1)$. |
| **10** | $z = ln(2x + 3y)$, $M(1;3)$, $\bar{l} = (5;12)$. | **20** | $u = xy^2 + z^2 - xyz$, $M(1;2;3)$, $\bar{l} = (1;-2;2)$. |

**Ответы:**

| | |
|---|---|
| **1.** $gradu\|_M = (-2;6;-3)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. | **11.** $gradu\|_M = (4;7;-4)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = -\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$. |

| | |
|---|---|
| **2.** $grad z\|_M = \left(\frac{3}{10}; 0\right)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = \frac{9}{50}$. | **12.** $grad u\|_M = (1; 0; -3)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = \frac{7}{3}$. |
| **3.** $grad u\|_M = (0; 0; 2)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = -\frac{1}{6}$. | **13.** $grad u\|_M = (4; 8; 12)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = 12$. |
| **4.** $grad z\|_M = (0; -e)$ $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = \frac{-e\sqrt{10}}{20}$ | **14.** $grad z\|_M = (153; 44)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = 127$ |
| **5.** $grad u\|_M = (0; 4; 2)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = \frac{4}{3}$ | **15.** $grad u\|_M = \left(\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{1}{7}\right)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = \frac{20}{7\sqrt{29}}$ |

| | |
|---|---|
| **6.** $gradz\|_M = (-2;3)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = \frac{6}{5}$ | **16.** $gradu\|_M = \left(\frac{1}{3};\frac{5}{6};\frac{1}{6}\right)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = \frac{1}{6}$ |
| **7.** $gradu\|_M = \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = \frac{1}{9}$ | **17.** $gradz\|_M = (1;8)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = 7$ |
| **8.** $gradz\|_M = (3;2)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = 0{,}2$ | **18.** $gradz\|_M = (6;-10)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = -\frac{14}{\sqrt{5}}$ |
| **9.** $gradz\|_M = (10;11)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = -2{,}8$ | **19.** $gradu\|_M = (4;12;36)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = 22\frac{2}{3}$ |
| **10.** $gradz\|_M = \left(\frac{2}{11};\frac{3}{11}\right)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M = \frac{46}{143}$ | **20.** $gradu\|_M = (-2;1;4)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M = \frac{4}{3}$ |

## 1.10. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.

**Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности заданной неявно.**

Пусть уравнение $F(x;y;z)=0$ определяет

функцию $z = f(x;y)$ , заданную неявно на некотором множестве точек $(x,y) \in D$. Совокупность точек $M(x;y;f(x;y))$, где $(x,y) \in D$, в пространстве $R^3$ образует некоторую поверхность $S$, которая называется графиком функции $z = f(x;y)$.Пусть $M_0(x_0;y_0;z_0)$ — точка поверхности $S$.

**Касательной плоскостью** к поверхности $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$, называется плоскость, содержащие все касательные к поверхности, проведённые в точке $M_0$(см.рис.9).Прямые $l_1$ и $l_2$ определяют плоскость $\alpha$ , которая называется **касательной плоскостью** к поверхности в точке $M_0$.

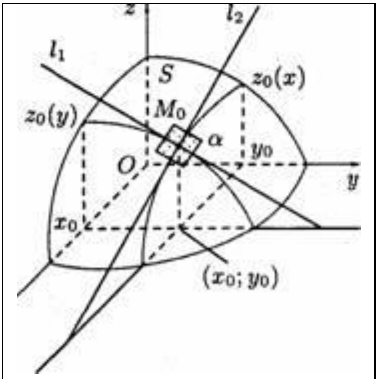


Рис.9

Прямая, проходящая через точку $M_0$ перпендикулярно к касательной плоскости, называется **нормалью** к поверхности.

Уравнение касательной плоскости к поверхности в точке

$M_0(x_0; y_0; z_0)$имеет вид:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

Уравнение нормали к поверхности в точке $M_0$:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

**Замечание:** если поверхность задана явно уравнением$z = f(x; y)$, то уравнения касательной плоскости имеет вид

$$f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

и уравнения нормали определяется равенством

$$\frac{x - x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

**Алгоритм нахождения касательной плоскости и нормали к поверхности:**

**1)**найти частные производные функции, которой задана поверхность;

**2)**найти значения найденных частных производных в точке $M_0$;

**3)**найденные значения частных производных и координаты точки $M_0$подставить в уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

**Пример 1.23.** Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке $M_0$:

**а)** $z = \frac{3x}{x^2-y^2}, M_0(1; 0; 3);$

**б)**$\sqrt{x^2+y^2} - \frac{xy}{z} = 11, M_0(3; -4; 2);$

**в)** $e^{xyz} - 5z + x^2y - e^z = 4, M_0(2; 1; 0).$

Решение.

**а)** Поскольку поверхность задана явно уравнением $z = \frac{3x}{x^2-y^2}$,то для нахождения

касательной плоскости и нормали к поверхности воспользуемся формулами:

$z - z_0 = f_x'(x_0; y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0; y_0)(y - y_0)$ – уравнение касательной плоскости;

и $\frac{x-x_0}{f_x'(x_0;y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y'(x_0;y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$ – уравнение нормали.

Для этого найдем частные производные данной функции и их значения в точке $M_0$:

$$f_x' = \left(\frac{3x}{x^2-y^2}\right)_x' = 3\left(\frac{x}{x^2-y^2}\right)_x' =$$

$$= 3\frac{(x)_x'(x^2-y^2) - x(x^2-y^2)_x'}{(x^2-y^2)^2} =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^2-y^2-2x^2}{(x^2-y^2)^2} = -\frac{3(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2};$$

$$f'_y = \left( \frac{3x}{x^2 - y^2} \right)'_y = 3x(\,(x^2 - y^2)^{-1}\,)'_y =$$

$$= -3x(x^2 - y^2)^{-2} \cdot (\,x^2 - y^2\,)'_y \;= \frac{6xy}{(x^2 - y^2)^2};$$

$$f'_x(1;0) = -\frac{3(1^2 + 0^2)}{(1^2 - 0^2)^2} = -3,$$

$$f'_y(1;0) = \frac{6 \cdot 1 \cdot 0}{(1^2 - 0^2)^2} = 0.$$

Найденные значения частных производных и координаты точки $M_0$ подставить в уравнения касательной

плоскости и нормали:
$z - 3 = -3(x - 1) + 0(y - 0),$

$z - 3 = -3x + 3$ или

$3x + z - 6 = 0$ – уравнение касательной плоскости;

$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-3}{-1}$ —уравнения нормали;

**б)** Поверхность задана неявно уравнением $\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{xy}{z} = 11$ или

$\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{xy}{z} - 11 = 0$,поэтому в дальнейшем, для

нахождения касательной плоскости и нормали будем использовать следующие формулы

$F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+$
$+F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0$-уравнение касательной плоскости;

$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0;z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0;z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0;z_0)}$ -уравнение нормали.

Обозначив через $F(x;y;z)$левую часть уравнения, имеем$F(x;y;z)=\sqrt{x^2+y^2}-\frac{xy}{z}-11=0$.

Найдем частные производные и их значения в точке $M_0(3;-4;2)$:

$$F'_x=\left(\ (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{xy}{z}-11\right)'_x=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+y^2)'_x-\frac{y}{z}(x)'_x=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{z};$$

$$F'_y=\left(\ (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{xy}{z}-11\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+y^2)'_y-\frac{x}{z}(y)'_y=$$

$$=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{z};$$

$$F'_z = \left( (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{xy}{z} - 11 \right)'_z =$$

$$= -xy\left( \frac{1}{z} \right)'_z = -xy( z^{-1} )'_z =$$

$$= -xy( -z^{-2} ) = \frac{xy}{z^2};$$

$$F'_x(3; -4; 2) = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} - \frac{(-4)}{2} =$$

$$= \frac{3}{5} + 2 = \frac{13}{5} = 2{,}6;$$

$$\boldsymbol{F'_y}(3; -4; 2) = \frac{-4}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{5} - \frac{3}{2} =$$

$$= -\frac{14}{10} = -1{,}4;$$

$$\boldsymbol{F'_z}(3; -4; 2) = \frac{3 \cdot (-4)}{2^2} = -3;$$

Найденные значения частных производных и координаты точки $M_0$ подставить в уравнения касательной

плоскости и нормали:

$$\frac{13}{5}(x - 3) - \frac{14}{10}(y + 4) - 3(z - 2) = 0 | \cdot 5,$$

$$13(x - 3) - 7(y + 4) - 15(z - 2) = 0,$$

$13x - 7y - 15z - 34 = 0$— уравнение касательной

плоскости,
$\frac{x-3}{2{,}6} = \frac{y+4}{-1{,}4} = \frac{z-2}{-3}$ – уравнение нормали.

**в)** Поверхность задана неявно уравнением $e^{xyz} - 5z + x^2y - e^z = 4$ или

$e^{xyz} + x^2y - 5z - 4 = 0$,то есть

$F(x; y; z) = e^{xyz} + x^2y - 5z - 4 = 0$

Найдем частные производные и их значения в точке $M_0(1; 1; 0)$:

$F'_x = (e^{xyz} + x^2y - 5z - 4)'_x = e^{xyz}yz(x)'_x + y(x^2)'_x =$

$= e^{xyz}yz + 2xy;$

$F'_y = (e^{xyz} + x^2y - 5z - 4)'_y = e^{xyz}xz(y)'_y + x^2(y)'_y =$

$= e^{xyz}xz + x^2;$

$F'_z = (e^{xyz} + x^2y - 5z - 4)'_z = e^{xyz}xy - 5;$

$F'_x(1; 1; 0) = e^{1\cdot1\cdot0} \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2;$

$F'_y(1; 1; 0) = e^{1\cdot1\cdot0} \cdot 1 \cdot 0 + 1^2 = 1;$

$F'_z(1; 1; 0) = e^{1\cdot1\cdot0} \cdot 1 \cdot 0 - 5 = -5;$

Подставляем полученные значения в формулы, получим:

$2(x-1)+1(y-1)-5(z-0)=0,$

$2x+y-5z-3=0$— уравнение касательной плоскости,

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-5}$ – уравнение нормали.

**Задания для самостоятельного решения.**

**7**. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в данной точке $M_0$.

| | |
|---|---|
| **1** | $x(y+z)(xy-z)+8=0, M_0(2;1;3)$ |
| **2** | $x^3y+xz^3-3xy+4x^2=0, M_0(0;-1;2)$ |
| **3** | $e^z-z+xy=3, M_0(2;1;0)$ |
| **4** | $x^2+y^2+z^2=14, M_0(1;2;3)$ |
| **5** | $xyz^2+2y^2+3yz+4=0, M_0(0;2;-2)$ |
| **6** | $z=x^2+sinxy+2\sqrt{y}, M_0(0;1;2)$ |
| **7** | $z=sinxcosy, M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$ |
| **8** | $x^2+y^2-2z^2-10=0, M_0(1;-1;2)$ |

| | |
|---|---|
| **9** | $z=(x-y)arcsin y+(x-y)^2, M_0(1;0;1)$ |
| **10** | $z=xy, M_0(1;1;1)$ |
| **11** | $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy, M_0(3;4;-7)$ |
| **12** | $z=arctg\frac{y}{x}, M_0\left(1;1;\frac{\pi}{4}\right)$ |
| **13** | $(z^2-x^2)xyz-y^5=5, M_0(1;1;2)$ |
| **14** | $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0, M_0(1;2;-1)$ |
| **15** | $z=2x^2-4y^2, M_0(2;1;4)$ |
| **16** | $z=x^2-4xy+y^2, M_0(-2;1;13)$ |
| **17** | $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8, M_0(2;2;1)$ |
| **18** | $z=x^2+y^2, M_0(1;2;5)$ |
| **19** | $x^2+3y^2-4z^2=15, M_0(2;-3;2)$ |
| **20** | $z=\frac{x^3-3axy+y^3}{a^2}, M_0(a;a;-a)$ |

**Ответы:**

| | |
|---|---|
| **1.** $2x + 7y - 5z + 4 = 0,$ $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{14} = \frac{z-3}{-10}$ | **11.** $17x + 11y + 5z - 60 = 0,$ $\frac{x-3}{17} = \frac{y-1}{11} = \frac{z-3}{5}$ |
| **2.** $x = 0, \frac{x}{14} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{0}$ | **12.** $x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0,$ $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\frac{\pi}{2}}{2}$ |
| **3.** $x + 2y - 4 = 0,$ $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}$ | **13.** $2x + y + 11z - 25 = 0,$ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{11}$ |
| **4.** $x + 2y + 3z - 14 = 0,$ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6}$ | **14.** $x + 11y + 5z - 18 = 0,$ $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$ |
| **5.** $4x + y + 3z + 4 = 0,$ $\frac{x}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{3}$ | **15.** $8x - 8y - z - 4 = 0,$ $\frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-4}{-1}$ |

| | |
|---|---|
| **6.** $x+y-z+1=0$, $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ | **16.** $x-10y+z+13=0$, $\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{-10}=\frac{z-13}{1}$ |
| **7.** $x-y-2z-1=0$, $\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{-1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-1}$ | **17.** $x+y-4z=0$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$ |
| **8.** $x-y-4z+6=0$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-8}$ | **18.** $2x+4y-z-5=0$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$ |
| **9.** $2x-y-z-1=0$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-1}$ | **19.** $2x-9y-8z-15=0$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-9}=\frac{z-2}{-8}$ |
| **10.** $x+y-z-1=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$ | **20.** $z+a=0$, $\frac{x-a}{0}=\frac{y-a}{0}=\frac{z+a}{1}$ |

# ГЛАВА 2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

## 2.1. Частные производные высших порядков

Частные производные второго порядка и выше называются частными производными высших порядков.

Предположим, что функция $z = f(x;y)$ имеет частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x;y), \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x;y)$, которые являются функциями двух переменных. Предположим, что они дифференцируемы.

Частные производные от частных производных первого порядка называются **частными производными второго порядка.**

Существует четыре вида частных производных второго порядка:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x;\ z''_{yy} = (z'_y)'_y; z''_{xy} = (z'_x)'_y; z''_{yx} = (z'_y)'_x.$$

Для них применяются следующие обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x;y) = z''_{xx};$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x;y) = z''_{yy};$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x;y) = z''_{xy} = (z'_x)'_y;$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x;y) = z''_{yx} = (z'_y)'_x.$$

Если полученные функции являются дифференцируемыми, то частные производные от них называются частными производными третьего порядка. Например, $z'''_{yxx} = \left(z''_{yx}\right)'_x$.

Частная производная высшего порядка, взятая по различным переменным, называется **смешанной частной** производной. Такими являются производные: $z''_{xy}, z''_{yx}, z'''_{yxy}$ и так далее.

**Теорема 2.1.(Шварца**): если смешанные частные производные второго порядка непрерывны, то они равны между собой:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Примем без доказательств.

Таким образом, результат смешанного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

**Замечание:** аналогично определяются смешанные частные производные высших порядков, например, $z'''_{yxx} = z'''_{xyx}$.

Таким образом, если частные производные, подлежащие вычислению, непрерывны, то результат многократного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

**Пример 2.1.** Найти частные производные второго порядка от функции:

**а)** $z = y\ln x$;**б)** $z = e^{2x+3y}$;**в)** $z = (x^2 + y^2)\ln 2x$;

**г)** $z = x^2 \sin\sqrt{y}$.

Решение.

**а)** Найдем для начала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (yln x)'_x = y(ln x)'_x = \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (yln x)'_y = ln x(y)'_y = ln x;$$

Теперь дифференцируем вторично:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)'_x = y\left(\frac{1}{x}\right)'_x =$$

$$= y(x^{-1})'_x = -\frac{y}{x^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(ln x) = (ln x)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x}(y)'_y = \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(ln x) = \frac{1}{x};$$

Заметим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

**б)** Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^{2x+3y})'_x = e^{2x+3y}(2x+3y)'_x = 2e^{2x+3y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (e^{2x+3y})'_y = e^{2x+3y}(2x+3y)'_y = 3e^{2x+3y};$$

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2(e^{2x+3y})'_x = 2e^{2x+3y}(2x+3y)'_x = 4e^{2x+3y};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2(e^{2x+3y})'_y = 2e^{2x+3y}(2x+3y)'_y = 6e^{2x+3y};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 2(e^{2x+3y})'_y = 2e^{2x+3y}(2x+3y)'_y = 6e^{2x+3y};$$

**в)** $\frac{\partial z}{\partial x} = \left((x^2+y^2)ln2x\right)'_x = (x^2+y^2)'_x \cdot ln2x +$

$+(ln2x)'_x \cdot (x^2+y^2) = 2xln2x + \frac{1}{2x}(2x)'_x \cdot$

$\cdot (x^2+y^2) = 2xln2x + \frac{1}{x}\cdot(x^2+y^2) =$

$= 2xln2x + x + \frac{y^2}{x};$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left((x^2+y^2)ln2x\right)'_y = ln2x(x^2+y^2)'_y = 2yln2x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(2xln2x + x + \frac{y^2}{x}\right)'_x = 2\ln2x + 2x\frac{1}{2x}(2x)'_x +$$

$$+1 + y^2(x^{-1})'_x = 2ln2x + 3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2yln2x)'_y = 2ln2x(y)'_y = 2ln2x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (2yln2x)'_x =$$

$$= 2y(ln2x)'_x = 2y\frac{1}{2x}(2x)'_x = \frac{2y}{x}.$$

**г)** Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 sin\sqrt{y}\right)'_x = sin\sqrt{y}(x^2)'_x = 2xsin\sqrt{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2\sin\sqrt{y}\right)'_y=x^2\left(\sin\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\right)'_y=x^2\cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\left(y^{\frac{1}{2}}\right)'_y=$$

$$=x^2\cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}=\frac{x^2\cos\left(\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}};$$

Находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(2x\sin\sqrt{y}\right)'_x=2\sin\sqrt{y}(x)'_x=2\sin\sqrt{y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(x^2\cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right)'_y=\frac{x^2}{2}\left(\cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot y^{-\frac{1}{2}}\right)'_y=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\left(\cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\right)'_y\cdot y^{-\frac{1}{2}}+\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)'_y\cdot\cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(-\sin\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(-\frac{\sin\left(y^{\frac{1}{2}}\right)}{2y}-\frac{\cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)}{2y\sqrt{y}}\right)=-\frac{x^2}{4y}\left(\sin\left(\sqrt{y}\right)+\frac{\cos\left(\sqrt{y}\right)}{\sqrt{y}}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(2x\sin\sqrt{y}\right)'_y=2x\left(\sin\sqrt{y}\right)'_y=$$

$$=2x\cos\sqrt{y}\left(\sqrt{y}\right)'_y=2x\cos\sqrt{y}\frac{1}{2\cdot\sqrt{y}}=\frac{x\cos\sqrt{y}}{\sqrt{y}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{x^2\cos\left(\sqrt{y}\right)}{2\cdot\sqrt{y}}\right)'_x=\frac{\cos\left(\sqrt{y}\right)}{2\cdot\sqrt{y}}\left(x^2\right)'_y=\frac{x\cos\sqrt{y}}{\sqrt{y}}.$$

## 2.2. Дифференциалы высших порядков.

Введём понятие дифференциала высшего порядка. Полный дифференциал $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ функцииz $z=f(x;y)$ называют также дифференциалом первого порядка. Пусть функция $z=f(x;y)$имеет непрерывные производные второго порядка. Дифференциалом второго порядка функции $z = f(x;y)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции, то есть

$d^2z = d(dz)$.

Найдём его:

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2;$$

Итак, если $z = f(x;y)$, где $x$ и $y$ — независимые переменные, то **дифференциал второго порядка** функции вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2}$$

Аналогично определяются дифференциалы функции $z$ более высокого порядка, то есть

$d^3z = d(d^2z)$, ..., $d^nz = d(d^{n-1}z)$.

Таким образом, справедлива формула:

$$\boldsymbol{d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \cdot z}$$

Посмотрим, как она работает, например, при $n = 3$ имеем:

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 \cdot z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy +$$

$+3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$-дифференциал третьего порядка.

**Пример 2.2.** Найти полный дифференциал функции второго и третьего порядка для функции: **а)** $z=\frac{x}{y}$;**б)** $z=x^2y$ ;**в)** $z=xy+sin(2x-3y)$.

Решение.

**а)** Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{y}(x)'_x=\frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}\right)'_y=x(y^{-1})'_y=-\frac{x}{y^2};$$

Для того, чтобы найти дифференциал второго порядка, найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{1}{y}\right)'_x=0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(-\frac{x}{y^2}\right)'_y=-x(y^{-2})'_y=\frac{2x}{y^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{1}{y}\right)'_y=(y^{-1})'_y=-\frac{1}{y^2}.$$

Таким образом, дифференциал второго порядка имеет вид:

$$d^2z=0dx^2-\frac{2}{y^2}dxdy+\frac{2x}{y^3}dy^2;$$

Найдём дифференциал третьего порядка, для этого вычислим частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(0)=0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{2x}{y^3}\right)'_y=2x(y^{-3})'_y=-\frac{6x}{y^4};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \left(-\frac{1}{y^2}\right)'_y = -(y^{-2})'_y = \frac{2}{y^3}.$$

Следовательно, дифференциал
третьего порядка имеет вид:

$$d^3z = 0dx^3 + 0dx^2dy + \frac{6}{y^3}dxdy^2 - \frac{6x}{y^4}dy^3.$$

**б)** Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2y)'_x = y(x^2)'_x = 2xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2y)'_y = x^2(y)'_y = x^2;$$

Найдём дифференциал второго порядка,
для этого вычислим частные производные
второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2xy)'_x = 2y(x)'_x = 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x^2)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2xy)'_y = 2x(y)'_y = 2x.$$

Таким образом, дифференциал второго порядка имеет вид:

$$d^2z = 2ydx^2 + 4xdxdy + 0dy^2;$$

Найдём дифференциал третьего порядка,
для этого вычислим частные производные
третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = (2y)'_x = 0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = (0)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (2y)'_y = 2;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = (2x)'_y = 0;$$

$d^3z = 0dx^3 + 2dx^2dy + 0dxdy^2 + 0dy^3 -$ дифференциал третьего порядка.

**в)** Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xy + sin(2x - 3y)\right)'_x = y(x)'_x + cos(2x - 3y) \cdot$$
$$\cdot (2x - 3y)'_x = y + 2cos(2x - 3y);$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(xy + sin(2x - 3y)\right)'_y = x(y)'_y + cos(2x - 3y) \cdot$$
$$\cdot (2x - 3y)'_y = x - 3cos(2x - 3y);$$

Найдём дифференциал второго порядка, для этого вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(y + 2cos(2x - 3y)\right)'_x = -2sin(2x - 3y)(2x - 3y)'_x =$$
$$= -4sin(2x - 3y);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x - 3cos(2x - 3y)\right)'_y = 3sin(2x - 3y)(2x - 3y)'_y =$$
$$= -9sin(2x - 3y);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(y + 2cos(2x - 3y)\right)'_y = 1 - 2sin(2x - 3y) \cdot$$
$$\cdot (2x - 3y)'_y = 1 + 6sin(2x - 3y);$$

Таким образом, дифференциал второго порядка имеет вид:

$$d^2z = -4sin(2x - 3y)dx^2 + 2\left(1 + 6sin(2x - 3y)\right)dxdy +$$
$$-9sin(2x - 3y)dy^2;$$

Найдём дифференциал третьего порядка, для этого вычислим частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -4\left(\sin(2x-3y)\right)'_x = -4\cos(2x-3y)(2x-3y)'_x =$$
$$= -8\cos(2x-3y);$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -9\left(\sin(2x-3y)\right)'_y = -9\cos(2x-3y)(2x-3y)'_y =$$
$$= 27\cos(2x-3y);$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -4\left(\sin(2x-3y)\right)'_y = -4\cos(2x-3y)\cdot$$
$$\cdot(2x-3y)'_y = 12\cos(2x-3y);$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \left(1+6\sin(2x-3y)\right)'_y = 6\cos(2x-3y)\cdot$$
$$\cdot(2x-3y)'_y = -18\cos(2x-3y);$$
$$d^3 z = -8\cos(2x-3y)dx^3 + 36\cos(2x-3y)dx^2dy +$$
$-54\cos(2x-3y)dxdy^2 + 27\cos(2x-3y)dy^3$ – дифференциал третьего порядка.

**Пример 2.3.** Показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$, если $u = arctg(2x-t)$

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(arctg(2x-t)\right)'_x = \frac{1}{1+(2x-t)^2}(2x-t)'_x =$$
$$= \frac{2}{1+(2x-t)^2};$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(arctg(2x-t)\right)'_t = \frac{1}{1+(2x-t)^2}(2x-t)'_t =$$
$$= -\frac{1}{1+(2x-t)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{2}{1+(2x-t)^2}\right)'_x = 2((1+(2x-t)^2)^{-1})'_x =$$

$$= -2(1+(2x-t)^2)^{-2}\cdot(1+(2x-t)^2)'_x =$$
$$= -\frac{2}{(1+(2x-t)^2)^2}\cdot 2(2x-t)(2x-t)'_x =$$
$$= -\frac{8(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2};$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = \left(\frac{2}{1+(2x-t)^2}\right)'_t = 2((1+(2x-t)^2)^{-1})'_t =$$
$$= -2(1+(2x-t)^2)^{-2}\cdot(1+(2x-t)^2)'_t =$$
$$= -2(1+(2x-t)^2)^{-2}\cdot 2\cdot(2x-t)\cdot(2x-t)'_t =$$
$$= \frac{4(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2};$$

Покажем, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = 0$, для этого подставим полученные значения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}$ в данное равенство:

$-\frac{8(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2} + \frac{8(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2} = 0$ – что и требовалось показать.

**Задания для самостоятельного решения.**

**8.** Найти частные производные и дифференциалы второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ для следующих функций:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $z = x^3 + 2x^2y^2 + y^5$ | **11** | $z = e^{4x-y}$ |
| **2** | $z = y^2e^x + x^2y^3 + 1$ | **12** | $z = x\sin(x+y)$ |
| **3** | $z = y^3 + x^2y$ | **13** | $z = arctg\frac{x+y}{x}$ |
| **4** | $z = e^x(\cos y + x\sin y)$ | **14** | $z = \frac{1}{3x-y^3}$ |
| **5** | $z = \frac{x^2}{1-y}$ | **15** | $z = ye^{\frac{x}{y}}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **6** | $z = ln(x - 2y)$ | **16** | $z = cos(x^5y^2)$ |
| **7** | $z = \frac{x^2}{y^2}$ | **17** | $z = x^2 + xlny$ |
| **8** | $z = x^2cos\sqrt{y}$ | **18** | $z = sinxsiny$ |
| **9** | $z = x^{2y}$ | **19** | $z = e^{x^2y^2}$ |
| **10** | $z = xe^y$ | **20** | $z = (x + y)cos(x - 2y)$ |

**Ответы:**

**1.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 4y^2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x^2 + 20\,y^3, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 8xy,$

$d^2z = (6x + 4y^2)dx^2 + 16xydxdy + (4x^2 + 20\,y^3)dy^2.$

**2.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (e^x + 2y)y^2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2(e^x + 3yx^2),$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y(e^x + 3xy), d^2z = (e^x + 2y)y^2dx^2 +$

$+y(e^x + 3xy)dxdy + 2(e^x + 3yx^2)dy^2.$

**3.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x,$

$d^2z = 2ydx^2 + 4xdxdy + 6ydy^2.$

| |
|---|
| **4.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x(\cos y + \sin y(1+x)), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x(\cos y + x\sin y),$ <br> $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^x(\cos y(1+x) - \sin y),$ <br> $d^2z = e^x(\cos y + \sin y(1+x))dx^2 +$ <br> $+2e^x(\cos y(1+x) - \sin y)dxdy - e^x(\cos y + x\sin y)dy^2.$ |
| **5.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{1-y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{(1-y)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2x}{(1-y)^2}$ <br> $d^2z = \frac{2}{1-y}dx^2 - \frac{4x}{(1-y)^2}dxdy - \frac{2x^2}{(1-y)^3}dy^2.$ |
| **6.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x-2y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{4}{(x-2y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2}{(x-2y)^2},$ <br> $d^2z = -\frac{1}{(x-2y)^2}dx^2 + \frac{4}{(x-2y)^2}dxdy - \frac{4}{(x-2y)^2}dy^2.$ |
| **7.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6x^2}{y^4}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{4x}{y^3},$ <br> $d^2z = \frac{2}{y^2}dx^2 - \frac{8x}{y^3}dxdy + \frac{6x^2}{y^4}dy^2.$ |

| |
|---|
| **8.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2cos\sqrt{y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{4y}\left(\frac{sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}} - cos\sqrt{y}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{xcos\sqrt{y}}{\sqrt{y}},$ |
| **9.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y(2y-1)x^{2y-2},$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^{2y}ln^2x, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = x^{2y-1}(y + 4ylnx),$ $d^2z = 2cos\sqrt{y}dx^2 + \frac{2xcos\sqrt{y}}{\sqrt{y}}dxdy + \frac{x^2}{4y}\left(\frac{sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}} - cos\sqrt{y}\right)dy^2.$ |
| **10.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\,e^y, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^y,$ $d^2z = 0dx^2 + 2e^y dxdyx\,e^y + x\,e^y dy^2.$ |
| **11.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 16e^{4x-y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{4x-y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4e^{4x-y},$ $d^2z = 16e^{4x-y}dx^2 - 8e^{4x-y}dxdy + e^{4x-y}dy^2.$ |

| |
|---|
| **12.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x\sin(x+y),$<br>$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \cos(x+y) - x\sin(x+y),$<br>$d^2 z = \big(2\cos(x+y) - x\sin(x+y)\big)dx^2 +$<br>$+2\big(\cos(x+y) - x\sin(x+y)\big)dxdy - x\sin(x+y)dy^2.$ |
| **13.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y(4x+2y)}{(2x^2+2xy+y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x^2+2xy}{(2x^2+2xy+y^2)^2},$<br>$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{2x^2-y^2}{(2x^2+2xy+y^2)^2},$<br>$d^2 z = \frac{y(4x+2y)}{(2x^2+2xy+y^2)^2}dx^2 - \frac{2(2x^2-y^2)}{(2x^2+2xy+y^2)^2}dxdy - \frac{2x^2+2xy}{(2x^2+2xy+y^2)^2}dy^2.$ |
| **14.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{18}{(3x-y^3)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6y(3x+2y^3)}{(3x-y^3)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{18y^2}{(3x-y^3)^3},$<br>$d^2 z = \frac{18}{(3x-y^3)^3}dx^2 - \frac{36y^2}{(3x-y^3)^3}dxdy + \frac{6y(3x+2y^3)}{(3x-y^3)^3}dy^2.$ |
| **15.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{x^2}{y^3}e^{\frac{x}{y}},$<br>$d^2 z = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}dx^2 + 2\frac{x^2}{y^3}e^{\frac{x}{y}}dxdy - \frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}dy^2.$ |

| |
|---|
| **16.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -20x^3y^2 sin(x^5y^2) - 25x^8y^4 cos(x^5y^2)$, <br> $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x^5 sin(x^5y^2) - 4x^{10}y^2 cos(x^5y^2)$, <br> $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -10x^4 y sin(x^5y^2) - 10x^9y^3 cos(x^5y^2)$, <br> $d^2z = \left(-20x^3y^2 sin(x^5y^2) - 25x^8y^4 cos(x^5y^2)\right)dx^2 -$ <br> $-\left(20x^4 y sin(x^5y^2) + 20x^9y^3 cos(x^5y^2)\right)dxdy + e^{4x-y}dy^2$. |
| **17.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x}{y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{1}{y}$, <br> $d^2z = 2dx^2 + \frac{2}{y}dxdy - \frac{x}{y^2}dy^2$. |
| **18.** <br> $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -sinxsiny, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = sinxsiny, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = cosxcosy$, <br> $d^2z = -sinxsinydx^2 + cosxcosydxdy + sinxsinydy^2$. |
| **19.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2e^{x^2y^2}(2x^2+1), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2e^{x^2y^2}(2x^2y^2+1)$, <br> $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4xye^{x^2y^2}(x^2y^2+1)$, <br> $d^2z = 2y^2e^{x^2y^2}(2x^2+1)dx^2 + 4xye^{x^2y^2}(x^2y^2+1)dxdy +$ <br> $+2x^2e^{x^2y^2}(2x^2y^2+1)dy^2$. |

**20.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2\sin(x-2y) - (x+y)\cos(x-2y),$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\sin(x-2y) - 4(x+y)\cos(x-2y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \sin(x-2y) + 2(x+y)\cos(x-2y),$$

$$d^2 z = \big(-2\sin(x-2y) - (x+y)\cos(x-2y)\big)dx^2 +$$
$$+2\big(\sin(x-2y) + 2(x+y)\cos(x-2y)\big)dxdy +$$
$$+\big(4\sin(x-2y) - 4(x+y)\cos(x-2y)\big)dy^2.$$

## 2.3. Экстремумы функции нескольких переменных.

**Определение экстремума функции.**

Понятие максимума, минимума, экстремума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной независимой переменной.

Функция $z = f(x;y)$ имеет максимум в точке

$M_0(x_0;y_0)$, если $f(x_0;y_0) > f(x;y)$ для всех точек $(x;y)$

достаточно близких к точке $(x_0;y_0)$ и отличных

от неё.

Аналогично определяется точка минимума функции:

для всех точек $(x; y)$, отличных

от $(x_0; y_0)$, из окрестности точки $(x_0; y_0)$, выполняется

неравенство $f(x_0; y_0) < f(x; y)$.

.

На рис.10: $N_1$ — точка максимума, а $N_2$ — точка

минимума функции $z = f(x; y)$.

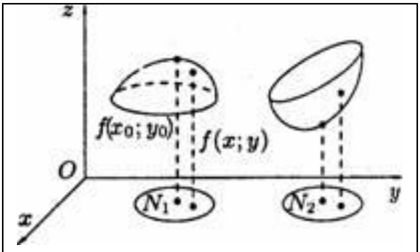



Рис.10

Аналогично определяется экстремум функции трех и большего числа переменных.
Значение функции в точке максимума (минимума) называется **максимумом (минимумом)** функции.
Максимум и минимум функции называют ее **экстремумами.**
В области $D$ функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.
**Замечание**: в силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции $z = f(x; y)$,поэтому перед тем, как найти экстремум

необходимо найти область определения функции.
**Необходимые условия экстремума.**
**Теорема 2.2. (необходимые условия экстремума):** если функция $z = f(x; y)$ имеет в точ-

ке $M_0(x_0;y_0)$ экстремум и имеет в точке $M_0$ частные

производные первого порядка, то в этой точке частные производные равны нулю или не существует, то есть имеет место следующая система:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0;y_0)=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0;y_0)=0 \end{cases};$$

Примем теорему без доказательства.

**Замечание:** равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума.
Точки, в которых выполняется необходимое условие, будем называть точками возможного экстремума.
Точки, в которых частные производные первого порядка функции равны
нулю, то есть $\frac{\partial z}{\partial x}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=0$, называют-

ся **стационарными точками** функции $z$ .

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются **критическими точками.**
Система $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0;y_0)=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0;y_0)=0 \end{cases}$ эквивалентна одному уравне-

нию $dz(x_0;y_0)=0$ .

**Достаточные условия экстремума**.
Не всякая критическая точка будет точкой экстремума.

Если $M_0(x_0;y_0)$ —стационарная точка функции $z=f(x;y)$ $(df(x_0;y_0)=0)$ и

если в некоторой окрестности этой точки второй дифференциал

$$d^2f\ (x_0;y_0)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0;y_0)(dx)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x_0;y_0)dxdy+$$

$+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0;y_0)(dy)^2$- сохраняет знак при любых значениях $dx$и$dy$,не равных нулю одновременно, то функция

в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет экстремум.

При этом если$d^2f\ (x_0;y_0)>0$,то этот экстремум - минимум, если $d^2f\ (x_0;y_0)<0$ –максимум.

**Теорема 2.3. (достаточные условия экстремума):** если в точке $M_0(x_0;y_0)$возможного экстремума и некоторой её окрестности функция $z=f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0;y_0), B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x_0;y_0),$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0;y_0), \Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix};$$

Тогда:

**а)** если $\Delta>0$,то в точке $M_0(x_0;y_0)$ функция имеет экстремум, причём при $A<0, M_0(x_0;y_0)$ –точка максимума; при$A > 0$, $M_0(x_0; y_0)$ –точка минимума;

**б)** $\Delta < 0$,в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремума нет;

**в)** $\Delta = 0$,то в точке$M_0(x_0; y_0)$ экстремум может быть или

не быть, требуется дополнительное исследование.
Примем теорему без доказательств.

**Схема исследования функции на экстремум.**

**1)**Найти область определения функции;

**2)**Найти частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

и определить критические точки (стационарные точки-точки, в которых частные производные равны нулю $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$ и точки, в которых хотя бы одна частная

производная не существует);

**3)**Исследовать характер каждой критической точки при помощи достаточных условий экстремума функции.

**Пример 2.4.** Исследовать на экстремум функцию:

**а)** $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$;

**б)** $z = x^3 + y^3 - 9xy - 4$;

**в)** $z = 2x^2 + 2y^2 - lnx - lny$;

**г)** $z = e^x(4y - xy - y^2)$.

Решение.

**а)** Областью определения данной функции являются все точки плоскости, то есть$(x;y)\epsilon R^2$.

Для того, чтобы найти стационарные точки, найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ и решим систему$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^2+xy+y^2-2x-3y)'_x=2x+y-2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2+xy+y^2-2x-3y)'_y=x+2y-3;$$

$\begin{cases}2x+y-2=0\\ x+2y-3=0\end{cases}, x=\frac{1}{3}, y=\frac{4}{3}$,следовательно,

$M\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ –стационарная точка (точка возможного экстремума);

Исследуем характер стационарной точки,

для этого находим $\Delta=AC-B^2$:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2x+y-2)'_x=2;$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x+2y-3)'_y=2;$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(2x+y-2)'_y=1;$$

$\Delta=AC-B^2=2\cdot 2-1=3>0, A>0$,следовательно, $M\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ –точка минимума,найдём значение функции в этой точке:

$$z_{min}=z\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}-3\cdot\frac{4}{3}=$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}-\frac{6}{9}-4=\frac{15}{9}-4=\frac{5}{3}-4=-\frac{7}{3}.$$

**б)** Областью определения данной функции являются все точки плоскости, то есть $(x; y) \epsilon R^2$.

Найдём стационарные точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 + y^3 - 9xy - 4)'_x = 3x^2 - 9y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 + y^3 - 9xy - 4)'_y = 3y^2 - 9x;$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 | : 3 \\ 3y^2 - 9x = 0 | : 3 \end{cases}; \begin{cases} x^2 - 3y = 0 \\ y^2 - 3x = 0 \end{cases};$$

$\begin{cases} y = \frac{x^2}{3} & (1) \\ y^2 - 3x = 0 & (2) \end{cases}$, подставляя $(1)$ в $(2)$ имеем:

$$\left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - 3x = 0,$$

$$\frac{x^4}{9} - 3x = 0 | : 9,$$

$$x^4 - 27x = 0,$$

$$x(\ x^3 - 27) = 0,$$

$x_1 = 0, x_2 = 3$, тогда, $y_1 = 0, y_2 = 3$, следовательно, $M_1(0; 0)$, $M_2(3; 3)$ – стационарные точки;

Исследуем характер стационарных точек, для этого найдём $\Delta = AC - B^2$:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3x^2 - 9y)'_x = 6x;$$
$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (3y^2 - 9x)'_y = 6y;$$
$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2 - 9y)'_y = -9;$$
$$\Delta = AC - B^2 = 6x \cdot 6y - (-9)^2 = 36xy - 81,$$
$$\Delta_1 = \Delta|_{M_1} = (36xy - 81)|_{M_1} = 36 \cdot 0 \cdot 0 - 81 = -81 < 0,$$

следовательно, в точке $M_1$ нет экстремума;

$$\Delta_2 = \Delta|_{M_2} = (36xy - 81)|_{M_2} = 36 \cdot 3 \cdot 3 - 81 > 0,$$
$$A = A|_{M_2} = (6x)|_{M_2} = 18 > 0.$$

Следовательно, $M_2$ –точка минимума, $z_{min} = z(3;3) = 3^3 + 3^3 - 9 \cdot 3 \cdot 3 - 4 = -31$.

**в)** Областью определения данной функции являются точки, для которых $x > 0, y > 0$-точки, лежащие в первой четверти.

Найдём стационарные точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2x^2 + 2y^2 - lnx - lny)'_x = 4x - \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2x^2 + 2y^2 - lnx - lny)'_y = 4y - \frac{1}{y}.$$

Заметим, что частные производные не существуют при $x = 0, y = 0$,то есть в точке $O(0;0)$,но она не является точкой подозрительной на экстремум, так как не входит в область определения функции.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}; \begin{cases} 4x - \frac{1}{x} = 0 | \cdot x \\ 4y - \frac{1}{y} = 0 | \cdot y \end{cases}; \begin{cases} 4x^2 - 1 = 0 \\ 4y^2 - 1 = 0 \end{cases};$$

$x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}, y_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$-не входят в область определения.

Следовательно, $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ –стационарная точка.

Исследуем характер стационарных точек, для этого найдём частные производные второго порядка:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(4x-\frac{1}{x}\right)'_x=4+\frac{1}{x^2};$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(4y-\frac{1}{y}\right)'_y=4+\frac{1}{y^2};$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(4x-\frac{1}{x}\right)'_y=0.$$

Тогда $\Delta|_M=(AC-B^2)|_M=\left(4+\frac{1}{x^2}\right)\left(4+\frac{1}{y^2}\right)\Big|_M=$

$$=\left(4+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)\left(4+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)=64>0, A>0,$$

следовательно, в точке $M$ функция имеет минимум.

Найдём значение функции в данной точке (минимум функции):

$$z_{min}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-ln\frac{1}{2}-ln\frac{1}{2}=1+2ln2$$

.

**г)** Найдём стационарные точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^x(4y-xy-y^2)\right)'_x=(e^x)'_x\cdot(4y-xy-y^2)+$$

$$+\left((4y-xy-y^2)\right)'_x\cdot e^x=e^x(4y-xy-y^2)+e^x(-y)=$$
$$=e^x(3y-xy-y^2);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^x(4y-xy-y^2)\right)'_y=e^x(4y-xy-y^2)'_y=$$
$$=e^x(4-x-2y);$$

Решим систему $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$:

$$\begin{cases} e^x(3y - xy - y^2) = 0 | : e^x \\ e^x(4 - x - 2y) = 0 \ | : e^x \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3y - xy - y^2 = 0 \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases}; \begin{cases} y(3 - x - y) = 0 \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases};$$

Эта система имеет решение, если

$$\begin{cases} y = 0 \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases}, \begin{cases} 3 - x - y = 0 \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases},$$

то

есть $\begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 3 - y \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 - y \\ 4 - (3 - y) - 2y = 0 \end{cases},$

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ 1 - y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Таким образом, функция $z$ имеет две стационарные точки $M_1$ $(4; 0), M_2$ $(2; 1)$.

Используя достаточные условия экстремума, исследуем характер стационарных точек,

, для этого найдём частные производные функции $z$ второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(e^x(3y - xy - y^2)\right)'_x = (e^x)'_x \cdot (3y - xy - y^2) +$$

$$+\left((3y - xy - y^2)\right)'_x \cdot e^x = e^x(3y - xy - y^2) + e^x(-y) =$$
$$= e^x(2y - xy - y^2);$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(e^x(4 - x - 2y)\right)'_y = \left(e^x(4 - x - 2y)\right)'_y =$$
$$= e^x(-2) = -2e^x;$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(e^x(3y - xy - y^2)\right)'_y = e^x(3 - x - 2y).$$

Тогда

$$\Delta = AC - B^2 = e^x(2y - xy - y^2)(-2e^x) -$$
$$-(e^x(3 - x - 2y)^2) = 2e^{2x}(y^2 + xy - 2y) -$$
$$-e^{2x}(3 - x - 2y)^2 = e^{2x}(2y^2 + 2xy - 4y - (3 - x - 2y)^2);$$

$$\Delta_1 = \Delta|_{M_1} = \left(e^{2x}(2y^2 + 2xy - 4y - (3 - x - 2y)^2)\right)\Big|_{M_1} =$$
$$= e^{2\cdot 4}(2\cdot 0^2 + 2\cdot 4\cdot 0 - 4\cdot 0 - (3 - 4 - 2\cdot 0)^2) = -e^8 < 0,$$

следовательно, в точке $M_1$ нет экстремума;

$$\Delta_2 = \Delta|_{M_2} = \left(e^{2x}(2y^2 + 2xy - 4y - (3 - x - 2y)^2)\right)\Big|_{M_2} =$$
$$= e^{2\cdot 1}(2\cdot 1^2 + 2\cdot 2\cdot 1 - 4\cdot 1 - (3 - 2 - 2\cdot 1)^2) = e^2 > 0 -$$

в точке $M_2$ функция имеет экстремум, так как $A|_{M_2} = \left(e^x(2y - xy - y^2)\right)\Big|_{M_2} = -e^2 < 0$, то это точка максимума.

Найдём значение функции в данной точке (максимум функции):

$$z_{max} = z(2;1) = e^2(4\cdot 1 - 2\cdot 1 - 1) = e^2.$$

**Задания для самостоятельного решения.**

**9**. Исследовать на экстремум функцию $z = f(x;y)$ .

| | |
|---|---|
| **1** | $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ |
| **2** | $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ |
| **3** | $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ |
| **4** | $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ |
| **5** | $z = (x-1)^2 - 2y^2$ |
| **6** | $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$ |
| **7** | $z = 2x^3 + y^3 - 6x - 12y + 3$ |
| **8** | $z = x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy + 1$ |

| | |
|---|---|
| **9** | $z=\sqrt{x}y-y^2-x+6y$ |
| **10** | $z=x^2+y^2-2y+1$ |
| **11** | $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$ |
| **12** | $z=xy(1-x-y)$ |
| **13** | $z=4x^2y+24xy+y^2+32y-6$ |
| **14** | $z=x^2+xy+y^2-2x-3y+5\frac{2}{3}$ |
| **15** | $z=-x^2+xy-y^2-9x+$ $+3y-20$ |
| **16** | $z=e^{x^2-y}\cdot(5-2x+y)$ |
| **17** | $z=x^4+y^4-2xy-y^2-x^2$ |
| **18** | $z=3x^2y+y^3-12x-15y+3$ |
| **19** | $z=x^2-(y-1)^2$ |
| **20** | $z=x^3+y^3-3xy$ |

**Ответы:**

| | |
|---|---|
| **1.** $z_{min}=z(0;0)=0$, $z_{max}=z\left(-\frac{5}{3};0\right)=\frac{125}{27}$, в остальных точках экстремумов нет. | **11.** $z_{min}=z(1;2)=-7$ |

| | |
|---|---|
| **2.** $z_{min} = z\left(1;\frac{1}{2}\right) = 0$ | **12.** экстремумов нет |
| **3.** $z_{min} = z(0;3) = -9$ | **13.** $z_{min} = z(-3;2) = -10$ |
| **4.** $z_{min} = z(1;0) = -1$ | **14.** $z_{min} = z\left(\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{3}$ |
| **5.** экстремумов нет | **15.** $z_{max} = z(-5;-1) = 1$ |
| **6.** $z_{min} = z\left(0;-\frac{2}{3}\right) =$ $= -\frac{4}{3}$ | **16.** экстремумов нет |
| **7.** $z_{max} = z(-1;-2) = 23;$ $z_{min} = z(1;2) = -17;$ в остальных точках экстремумов нет | **17.** $z_{min} = z(1;1) =$ $= z(-1;-1) = -2$ |
| **8.** $z_{min} = z(0;0) = 1$ | **18.** $z_{min} = z(1;2) = -25$, $z_{max} = z(-1;-2) = 31$ |
| **9.** $z_{max} = z(4;4) = 12$ | **19.** экстремумов нет |

| | |
|---|---|
| $z_{min} = z(0;1) = 0$ **10.** | **20.** $z_{min} = z(1;1) = -1$ |

## 2.4. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.

Пусть функция $z = f(x;y)$- имеет в окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$непрерывные частные производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно, тогда её можно разложить в многочлен $n$ –ой степени(формула Тейлора) в окрестности этой точки:

$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + \frac{df(x_0;y_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0;y_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^nf(x_0;y_0)}{n!} + R_n$$

где $R_n$ – остаточный член,

$$df(x_0;y_0) = f'_x(x_0;y_0)dx + f'_y(x_0;y_0)dy \approx$$
$$\approx f'_x(x_0;y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0;y_0)(y-y_0)\text{-}$$

дифференциал первого порядка,

$$d^2f(x_0;y_0) = f''_{xx}(x_0;y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0;y_0)dxdy + \cdot$$

$$+ f''_{yy}(x_0;y_0)dy^2 \approx f''_{xx}(x_0;y_0)(x-x_0)^2 +$$

$$+2f''_{xy}(x_0;y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(x_0;y_0)(y-y_0)^2 -$$

дифференциал второго порядка и так далее.

**Замечание:** чем больше слагаемых мы берём, тем большую точность даёт формула Тейлора.

**Пример 2.5.** Найти несколько первых членов разложения функцию $z = e^x siny$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0;0)$.

Решение.

Найдём первые три слагаемых разложения функции $z = e^x siny$ в ряд Тейлора, то есть формула приобретает вид:

$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + \frac{df(x_0;y_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0;y_0)}{2!} + r_2;$$

1)Найдем значение функции $z = f(x;y)$ в точке $(0;0)$ :

$$f(0;0) = e^0 sin0 = 0;$$

2)Считаем первый дифференциал в точке $(0;0), df(0;0)$:

$df(0;0) = f'_x(0;0)(x-0) + f'_y(0;0)(y-0),$
$f'_x = (e^x siny)'_x = siny(e^x)'_x = e^x siny,$
$f'_y = (e^x siny)'_y = e^x(siny)'_y = e^x cosy,$
$f'_x(0;0) = e^0 sin0 = 0, f'_y(0;0) = e^0 cos0 = 1,$
Следовательно,
$df(0;0) = 0 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-0) = y;$

3)Вычисляем второй дифференциал в точке $(0;0), d^2f(0;0)$:

$$d^2f(0;0) = f''_{xx}(0;0)(x-0)^2 + 2f''_{xy}(0;0)(x-0)(y-0) + $$
$$+ f''_{yy}(0;0)(y-0)^2;$$

$f''_{xx} = (e^x siny)'_x = siny(e^x)'_x = e^x siny,$
$f''_{xy} = (e^x siny)'_y = e^x(siny)'_y = e^x cosy,$
$f''_{yy} = (e^x cosy)'_y = e^x(cosy)'_y = -e^x siny,$
$f''_{xx}(0;0) = e^0 sin0 = 0,$
$f''_{xy}(0;0) = e^0 cos0 = 1,$
$f''_{yy}(0;0) = -e^0 sin0 = 0.$

Получаем:
$d^2f(0;0) = 0 \cdot (x-0)^2 + 1 \cdot (x-0) \cdot (y-0) +$
$+0 \cdot (y-0)^2 = xy;$

Итак, разложения функцию $z = e^x siny$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0;0)$ имеет вид: $f(x;y) = 0 + y + \frac{xy}{2!} = y + \frac{xy}{2}$.

**Пример 2.6.** Разложить функцию $z = 3x^5y^2 - 2x^4y^3 + 5y$ в ряд Тейлора в окрестности в точке $M_0(1;1)$ до третьего порядка включительно.

Решение.

Для разложения исходной функции в ряд Тейлора воспользуемся соответствующей формулой:

$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + \frac{df(x_0;y_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0;y_0)}{2!} +$$
$$+\frac{d^3f(x_0;y_0)}{3!} + r_3;$$

1)Найдем значение функции $z$ в точке $M_0(1;1)$:

$$z(M_0) = f(1;1) = 3 - 2 + 5 = 6;$$

2)Вычислим первый дифференциал в точке $M_0(1;1), df(1;1)$:

$$df(1;1) = f'_x(1;1)(x-1) + f'_y(1;1)(y-1),$$
$$f'_x = (3x^5y^2 - 2x^4y^3 + 5y)'_x = 15x^4y^2 - 8x^3y^3,$$
$$f'_y = (3x^5y^2 - 2x^4y^3 + 5y)'_y = 6x^5y - 6x^4y^2 + 5,$$
$$f'_x(1;1) = 15 - 8 = 7, f'_y(1;1) = 6 - 6 + 5 = 5.$$

Получаем:

$$df(1;1) = 7(x-1) + 5(y-1)$$

3)Вычислим второй дифференциал $d^2f(1;1)$:

$$d^2f(1;1) = f''_{xx}(1;1)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1;1)(x-1)(y-1) +$$
$$+ f''_{yy}(1;1)(y-1)^2,$$

$$f''_{xx} = (15x^4y^2 - 8x^3y^3)'_x = 60x^3y^2 - 24x^2y^3,$$
$$f''_{xy} = (15x^4y^2 - 8x^3y^3)'_y = 30x^4y - 24x^3y^2,$$
$$f''_{yy} = (6x^5y - 6x^4y^2 + 5)'_y = 6x^5 - 12x^4y,$$
$$f''_{xx}(1;1) = 60 - 24 = 36,$$
$$f''_{xy}(1;1) = 30 - 24 = 6,$$

$f''_{yy}(1;1) = 6 - 12 = -6$. Следовательно,

$$d^2f(1;1) = 36(x-1)^2 + 12(x-1)(y-1) - 6(y-1)^2;$$

4)Вычисляем дифференциал третьего порядка в точке $M_0(1;1)$,$d^3f(1;1)$:

$$d^3f(1;1) = f'''_{xxx}(1;1)(x-1)^3 + 3f'''_{xxy}(1;1)\cdot$$

$$\cdot(x-1)^2(y-1) + \ 3f'''_{xyy}(1;1)(x-1)(y-1)^2 +$$

$$+f'''_{yyy}(1;1)(y-1\,)^3,$$

$$f'''_{xxx} = (60x^3y^2 - 24x^2y^3)'_x = 180x^2y^2 - 48xy^3,$$
$$f'''_{xxx}(1;1) = 180 - 48 = 132,$$
$$f'''_{xxy} = (60x^3y^2 - 24x^2y^3)'_y = 120x^3y - 72(xy)^2,$$
$$f'''_{xxy}(1;1) = 120 - 72 = 48,$$
$$f'''_{xyy} = (30x^4y - 24x^3y^2)'_y = 30x^4 - 48x^3y,$$
$$f'''_{xyy}(1;1) = -18,$$
$$f'''_{yyy} = (6x^5 - 12x^4y)'_y = -12x^4,$$
$$f'''_{yyy}(1;1) = -12.$$

Следовательно,

$$d^3f(1;1) = 132(x-1)^3 + 3\cdot 48(x-1)^2(y-1) +$$
$$+3\cdot(-18)(x-1)(y-1)^2 + (-12)(y-1\,)^3 =$$
$$= 132(x-1)^3 + 144(x-1)^2(y-1) -$$
$$-54(x-1)(y-1)^2 - 12(y-1\,)^3;$$

Итак, разложение исходной функции в ряд Тейлора в окрестности точки$M_0$ имеет вид:

$$f(x;y) = 6 + 7(x-1) + 5(y-1) + 18(x-1)^2 +$$

$$+6(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2 + \ 22(x-1)^3 +$$

$$+24(x-1)^2(y-1) - 9(x-1)(y-1)^2 - 2(y-1\,)^3 + r_3.$$

# ЛИТЕРАТУРА

1. Б.В.Соболь, Н.Т. Мишняков, В.М. Поркшеян, Практикум по высшей математике .3-е изд. Ростов н \ Д :Феникс, 2010.

2. Д.Т.Письменный, Конспект лекций по высшей математике (полный курс). 2-е изд. Москва: «Айрис-пресс», 2014.

3. Данко П.Е., Попов, А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: Высш. шк., 2002.