ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине «Математика»

«Непрерывная случайная величина»

Авторы
Рябых Г.Ю.
Ворович Е.И.
Тукодова О.М.
Фролова Н.В.
Пристинская О.В.

Ростов-на-Дону, 2021

Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов всех направлений и форм обучения.

Авторы

Доцент, канд.физ.-мат. наук,доцент кафедры «Прикладная математика»Рябых Г.Ю.

Доцент, канд.физ.-мат. наук,доцент кафедры «Высшая математика» Ворович Е.И.

Доцент, канд.физ.-мат. наук,доцент кафедры «Высшая математика» Тукодова О.М.

Старший преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.

Старший преподаватель кафедры «Прикладная математика» ПристинскаяО.В.

Оглавление

1. Непрерывная случайная величина

<u>Определение.</u> Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значения, необходимо также указать вероятности этих значений.

В случае дискретной случайной величины закон распределения случайной величины определялся путем задания всех возможных значений самой величины и вероятностей этих значений.

Однако, такой метод применим далеко не всегда. Например, в случае непрерывной случайной величины, ее значения могут заполнять некоторый произвольный интервал. Очевидно, что в этом случае задать все значения случайной величины с помощью перечисления невозможно.

Поэтому встает задача найти способ задания непрерывных случайных величин.

2. Функция распределения

Пусть x – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, т.е. $X < x$, обозначим через F(x).

<u>Определение.</u> Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x.

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию распределения также называют **интегральной функцией**.

Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

Отметим, что для дискретной случайной величины функция распределения будет разрывной, а для непрерывной случайной величины она является непрерывной.

Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента x.

<u>Свойства функции распределения.</u>

1) значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1].

$$0 \le F(x) \le 1$$

2) F(x) – неубывающая функция.

$$F(x_2) \geq F(x_1) \text{ при } x_2 \geq x_1$$

3) Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале.

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

4) На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности функция распределения равна единице.

5) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Таким образом, не имеет смысла говорить о каком – либо конкретном значении случайной величины. Интерес представляет только вероятность попадания случайной величины в какой – либо интервал, что соответствует большинству практических задач.

3. Плотность распределения

Функция распределения полностью характеризует случайную величину, однако, имеет один недостаток. По функции распределения трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси.

Определение. **Плотностью распределения** вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция f(x) – первая производная от функции распределения F(x).

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения также называют **дифференциальной функцией**.

Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает, как часто появляется случайная величина Х в некоторой окрестности точки x при повторении опытов.

После введения функции распределения и плотности распределения можно дать следующее определение непрерывной случайной величины.

<u>Определение.</u> Случайная величина Х называется **непрерывной**, если ее функция распределения F(x) непрерывна на всей оси ОХ, а плотность распределения f(x) существует везде, за исключением, может быть, конечного числа точек.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что некоторая случайная величина Х примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

<u>Теорема.</u> Вероятность того, что непрерывная случайная величина Х примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.

$$\boxed{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx}$$

Доказательство этой теоремы основано на определении плотности распределения и третьем свойстве функции распределения, записанном выше.

Геометрически это означает, что вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, кривой распределения f(x) и прямыми x=a и x=b.

Функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx}$$

<u>Свойства плотности распределения.</u>

1) Плотность распределения – неотрицательная функция.

$$f(x) \geq 0$$

2) Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от - ∞ до ∞ равен единице.

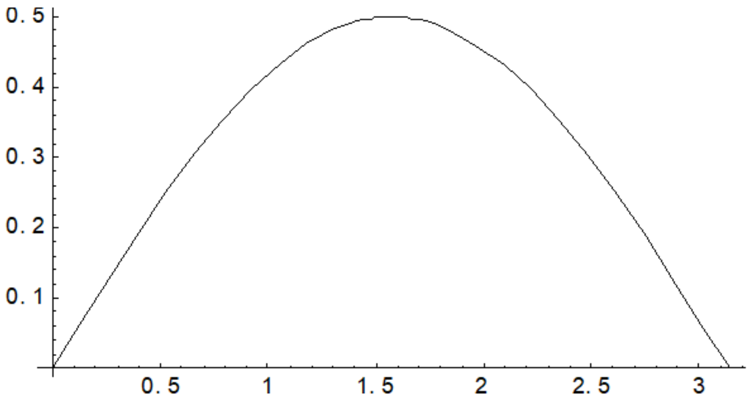
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

<u>Пример.</u> Случайная величина подчинена закону распределения с плотностью:

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x, & при \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & при \quad x < 0 \quad или \quad x > \pi \end{cases}$$

Требуется найти коэффициент a, построить график функции плотности распреде- ления, определить вероятность того, что случайная величина попадет в интервал от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Построим график плотности распределения:



Для нахождения коэффициента а воспользуемся свойством $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} a\sin xdx + \int_{\pi}^{\infty} 0dx = a\int_{0}^{\pi} \sin xdx = -a\cos x\Big|_{0}^{\pi} = 2a = 1;$$

$$a = \frac{1}{2}.$$

Находим вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.

<u>Пример.</u> Задана непрерывная случайная величина х своей функцией распределения f(x).

$$f(x)=\begin{cases} A\cos 2x, & при \quad -\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{4} \\ 0, & при \quad |x|>\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Требуется определить коэффициент A, найти функцию распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина x попадет в интервал $\left(\frac{\pi}{6};2\right)$.

Найдем коэффициент A.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx+\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} A\cos 2xdx+\int\limits_{\pi/4}^{\infty} 0dx=\frac{A\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=A=1.$$

Найдем функцию распределения:

1) На участке $x<-\frac{\pi}{4}$: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dx=0.$

2) На участке $-\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{4}$:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx+\int\limits_{-\pi/4}^{x} \cos 2xdx=\frac{\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{x}=\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}.$$

3) На участке $x>\frac{\pi}{4}$:

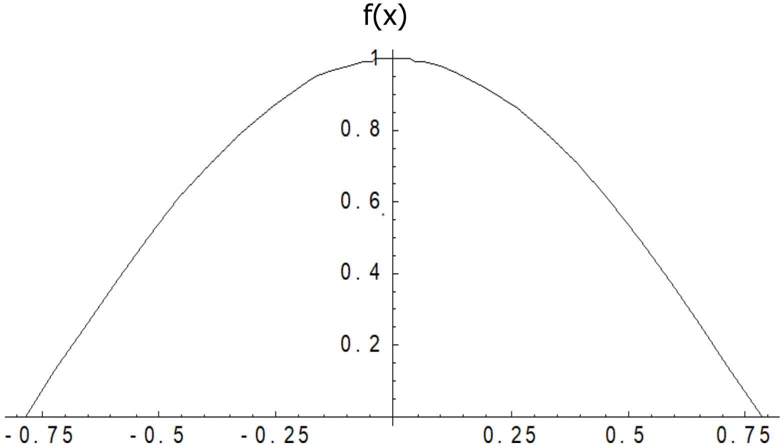
$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx+\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2xdx+\int\limits_{\pi/4}^{x} 0dx=\frac{\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=1.$$

Итого:

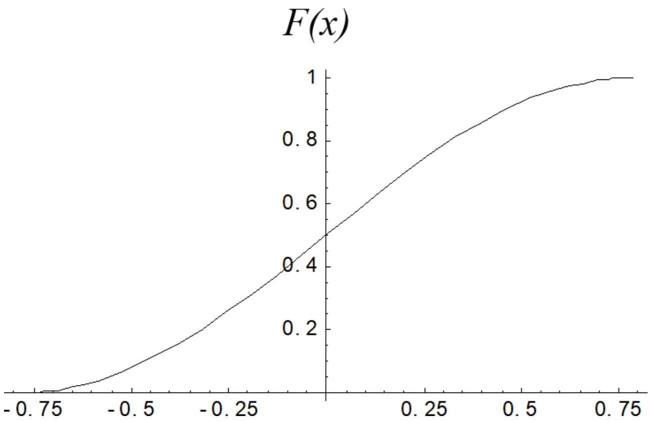
$$f(x)=\begin{cases}\cos 2x, & при \quad -\dfrac{\pi}{4}\le x\le \dfrac{\pi}{4};\\ 0, & при \quad |x|>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<-\dfrac{\pi}{4}\\ \dfrac{\sin 2x+1}{2}, & при \quad -\dfrac{\pi}{4}\le x\le \dfrac{\pi}{4};\\ 1, & при \quad x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

Построим график плотности распределения:



Построим график функции распределения:



Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

$$P\left(\frac{\pi}{6}<x<2\right)=\int_{\pi/6}^{2} f(x)dx=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos 2x dx+\int_{\pi/4}^{2}0dx=\frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0,067;$$

Ту же самую вероятность можно искать и другим способом:

$$P\left(\frac{\pi}{6}<x<2\right)=F(2)-F(\pi/6)=1-\frac{\sin(\pi/3)+1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0,067.$$

4. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Пусть непрерывная случайная величина X задана функцией распределения f(x). Допустим, что все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку [a,b].

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b], называется определенный интеграл

$$\boxed{M(X) = \int_a^b xf(x)dx}$$

Если возможные значения случайной величины рассматриваются на всей числовой оси, то математическое ожидание находится по формуле:

$$\boxed{M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}$$

При этом, конечно, предполагается, что несобственный интеграл сходится.

С точки зрения вероятности можно сказать, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Свойства математического ожидания.

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной.

$$M(C) = C$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак ма-

тематического ожидания.

$$M(Cx) = CM(x)$$

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

Это свойство справедливо для произвольного числа случайных величин.

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$$

Это свойство также справедливо для произвольного числа случайных величин.

Определение. Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

$$\boxed{D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx}$$

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины, для практического вычисления дисперсии используется формула:

$$\boxed{D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2}$$

Свойства дисперсии.

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(C)=0$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

$$D(CX)=C^2D(X)$$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)$$

Справедливость этого равенства вытекает из свойства 2.

Определение. Средним квадратичным отклонением (СКО) называется квадратный корень из дисперсии.

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{D(X)}}$$

Определение. Модой M_0 дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Для непрерывной случайной величины мода – такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум.

$$f(M_0)=\max.$$

Если многоугольник распределения для дискретной случайной величины или кривая распределения для непрерывной случайной величины имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется двухмодальным или многомодальным.

Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется антимодальным.

Определение. Медианой M_D случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины.

$$P(X < M_D) = P(X > M_D)$$

Геометрически медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам.

Отметим, что если распределение одномодальное, то мода и медиана совпадают с математическим ожиданием.

Пример. Для рассмотренного выше примера определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\cos 2xdx = \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos 2xdx; \\ du = dx; & v = \dfrac{\sin 2x}{2}; \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{x\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{2}dx = \frac{\cos 2x}{4}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 0.$$

$$M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-\pi/4}0dx+\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}x^2\cos 2xdx+\int\limits_{\pi/4}^{\infty}0dx=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}x^2\cos 2xdx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x^2; & dv=\cos 2xdx; \\ du=2xdx; & v=\dfrac{\sin 2x}{2}; \end{matrix}\right\}=\frac{x^2\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}-\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}x\sin 2xdx=\left\{\begin{matrix} u=x; & \sin 2xdx=dv; \\ du=dx; & v=-\dfrac{\cos 2x}{2}; \end{matrix}\right\}=\frac{\pi^2}{16}+$$

$$+\frac{x\cos 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}-\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\sin 2x}{4}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}=0{,}1163.$$

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=0{,}1163-0=0{,}1163.$$

При решении практических задач зачастую точно найти закон распределения случайной величины довольно сложно. Однако, все происходящие процессы, связанные со случайными величинами, можно разделить на несколько типов, каждому из которых можно поставить в соответствие какой – либо закон распределения.

Выше были рассмотрены некоторые типы распределений дискретной случайной величины такие как биноминальное распределение и распределение Пуассона.

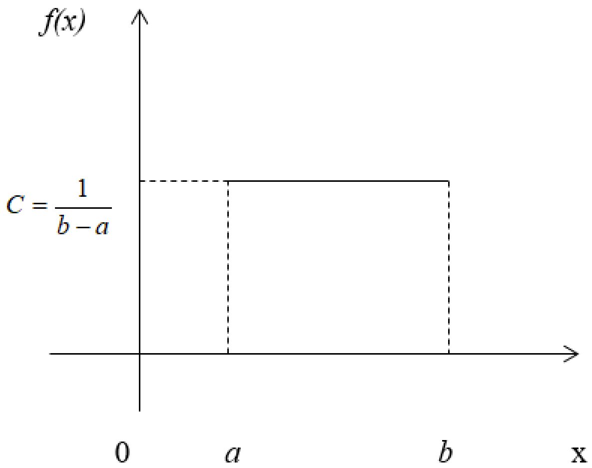
Рассмотрим теперь некоторые типы законов распределения для непрерывной случайной величины.

5. Равномерное распределение

Определение. Непрерывная случайная величина имеет **равномерное** распределение на отрезке [a, b], если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ C, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Постоянная величина С может быть определена из условия равенства единице площади, ограниченной кривой распределения.

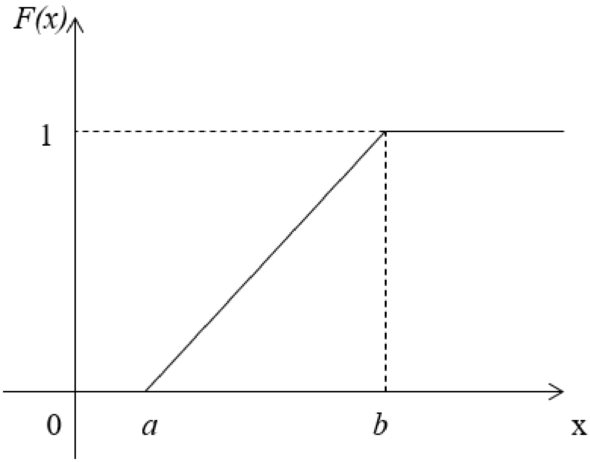


Получаем $C = \dfrac{1}{b-a}$.

Найдем функцию распределения F(x) на отрезке [a,b].

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dx = \frac{x}{b-a}\Big|_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}.$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при \quad a\le x\le b\\ 1, & при \quad x>b\end{cases}$$



Для того, чтобы случайная величина подчинялась закону равномерного распределения необходимо, чтобы ее значения лежали внутри некоторого определенного интервала, и внутри этого интервала значения этой случайной величины были бы равновероятны.

Определим математическое ожидание и дисперсию случайной величины, подчиненной равномерному закону распределения.

$$m_x=\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{a+b}{2}.$$

$$m_{x^2} = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

$$D_x = m_{x^2} - m_x^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

6. Показательное распределение

<u>**Определение.**</u> **Показательным (экспоненциальным)** называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x \ge 0 \end{cases}$$

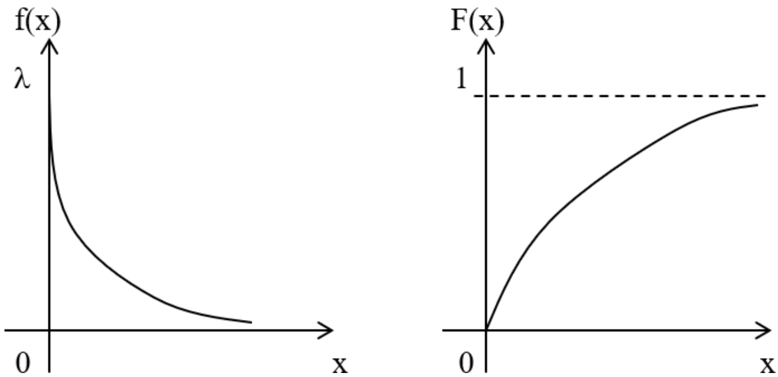
где λ - положительное число.

Найдем функцию распределения.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \lambda\int_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & при \quad x \geq 0 \end{cases}}$$

Графики функции распределения и плотности распределения:



Найдем математическое ожидание случайной величины, подчиненной показательному распределению.

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \left\{ \begin{matrix} u = x; & e^{-\lambda x}dx = dv; \\ du = dx; & -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = v; \end{matrix} \right\} = \lambda\left(-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}dx \right) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Результат получен с использованием того факта, что

$$xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}} - 0 = \begin{Bmatrix} \textit{По} \quad \textit{правилу} \\ \textit{Лопиталя} \end{Bmatrix} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{-\lambda e^{\lambda x}} = 0.$$

Для нахождения дисперсии найдем величину M(X²).

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx$$

Дважды интегрируя по частям, аналогично рассмотренному случаю, получим:

$$M(X^2) = \frac{2}{\lambda^2};$$

Тогда $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Итого:

$$\boxed{M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.}$$

Видно, что в случае показательного распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение равны.

Также легко определить и вероятность попадания случайной величины, подчиненной показательному закону распределения, в заданный интервал.

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Показательное распределение широко используется в теории надежности.

Допустим, некоторое устройство начинает работать в момент времени t0=0, а через какое– то время t происходит отказ устройства.

Обозначим через T непрерывную случайную величину – длительность безотказной работы устройства.

Таким образом, функция распределения $F(t) = P(T<t)$ определяет вероятность отказа за время длительностью t.

Вероятность противоположного события (безотказная работа в течение времени t) равна $R(t) = P(T>t) = 1 – F(t)$.

Определение. **Функцией надежности** R(t) называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы устройства в течение времени t.

Часто на практике длительность безотказной работы подчиняется показательному закону распределения.

Вообще говоря, если рассматривать новое устройство, то вероятность отказа в начале его функционирования будет больше, затем количество отказов снизится и будет некоторое время иметь практически одно и то же значение. Затем (когда устройство выработает свой ресурс) количество отказов будет возрастать.

Другими словами, можно сказать, что функционирование устройства на протяжении всего существования (в смысле количества отказов) можно описать комбинацией двух показательных законов (в начале и конце функционирования) и равномерного закона распределения.

Функция надежности для какого- либо устройства при показательном законе распределения равна:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}.$$

Данное соотношение называют **показательным законом надежности**.

Важным свойством, позволяющим значительно упростить решение задач теории надежности, является то, что вероятность безотказной работы устройства на интервале времени t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t.

Таким образом, безотказная работа устройства зависит только от интенсивности отказов λ и не зависит от безотказной работы устройства в прошлом.

Так как подобным свойством обладает только показательный закон распределения, то этот факт позволяет определить, является ли закон распределения случайной величины показательным или нет.

7. Нормальный закон распределения

<u>Определение.</u> **Нормальным** называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}};}$$

Нормальный закон распределения также называется

законом Гаусса.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

Можно легко показать, что параметры m_x и σ_x, входящие в плотность распределения являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины X.

Найдем функцию распределения F(x).

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx}$$

График плотности нормального распределения называется **нормальной кривой** или **кривой Гаусса**.

Нормальная кривая обладает следующими свойствами:

1) Функция определена на всей числовой оси.

2) При всех x функция распределения принимает только положительные значения.

3) Ось OX является горизонтальной асимптотой графика плотности вероятности, т.к. при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента x, значение функции стремится к нулю.

4) Найдем экстремум функции.

$$y' = -\frac{x-m}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = 0; \qquad x = m;$$

Т.к. при y′ > 0 при x < m и y′ < 0 при x > m , то в точке x = т функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5) Функция является симметричной относительно прямой x = а, т.к. разность (х – а) входит в функцию плотности распределения в квадрате.

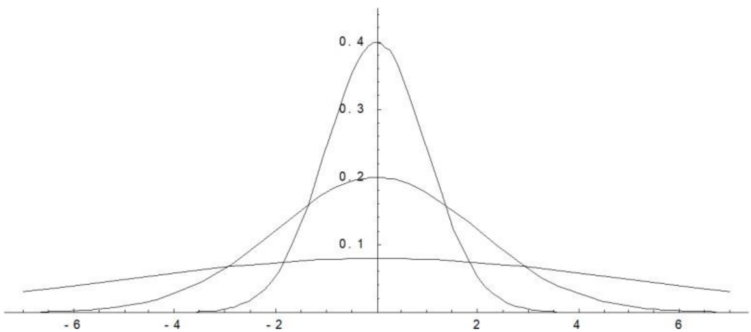
6) Для нахождения точек перегиба графика найдем вторую производную функции плотности.

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\left[1-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right]$$

При x = m + σ и x = m - σ вторая производная равна нулю, а при переходе через эти точки меняет знак, т.е. в этих точках функция имеет перегиб.

В этих точках значение функции равно $\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}$.

Построим график функции плотности распределения.



Построены графики при т =0 и трех возможных значениях среднего квадратичного отклонения σ = 1, σ = 2 и σ = 7.

Как видно, при увеличении значения среднего квадратичного отклонения график становится более пологим, а максимальное значение уменьшается.

Если a > 0, то график сместится в положительном направлении, если a < 0 – в отрицательном.

При a = 0 и σ = 1 кривая называется **нормированной**. Уравнение нормированной кривой:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.}$$

8. Функция Лапласа

Найдем вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Обозначим $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t;$ $\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}} = \alpha;$ $\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}} = \beta;$

Тогда

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)]$$

Т.к. интеграл $\int e^{-t^2} dt$ не выражается через элементарные функции, то вводится в рассмотрение функция

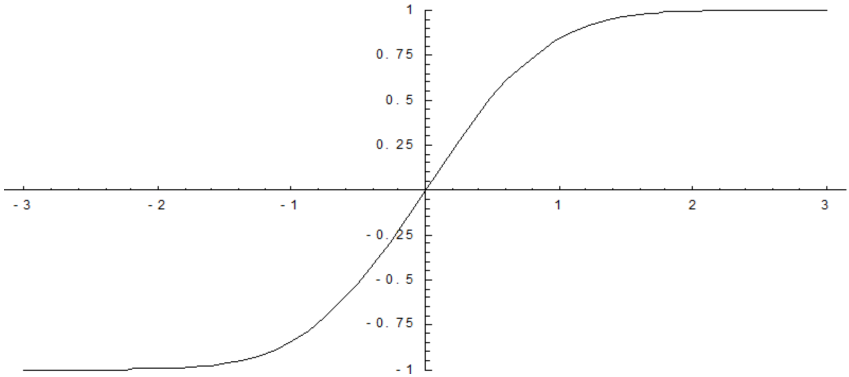
$$\boxed{\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,}$$

которая называется **функцией Лапласа** или **инте-**

гралом вероятностей.

Значения этой функции при различных значениях x вычислены и приводятся в специальных таблицах.

Ниже показан график функции Лапласа.



Функция Лапласа обладает следующими **<u>свойствами</u>**:

1) Ф(0) = 0;

2) Ф(-x) = - Ф(x);

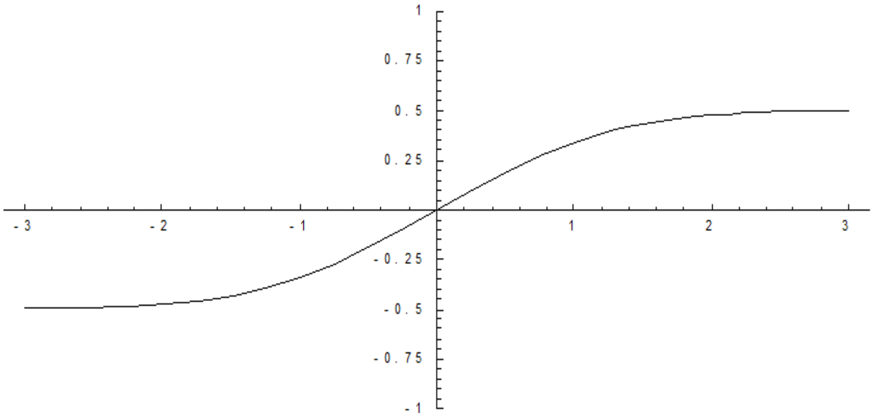
3) Ф(∞) = 1.

Функцию Лапласа также называют **функцией ошибок** и обозначают erf x.

Еще используется **нормированная** функция Лапласа, которая связана с функцией Лапласа соотношением:

$$\boxed{\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt;}$$

Ниже показан график нормированной функции Лапласа.



При рассмотрении нормального закона распределения отметим факт, известный как **правило трех сигм**.

Запишем вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от математического ожидания меньше заданной величины Δ:

$$P(|X-m|<\Delta) = \bar{\Phi}\left[\frac{m+\Delta-m}{\sigma}\right] - \bar{\Phi}\left[\frac{m-\Delta-m}{\sigma}\right] = \bar{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right] - \bar{\Phi}\left[-\frac{\Delta}{\sigma}\right] = 2\bar{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right]$$

Если принять $\Delta = 3\sigma$, то получаем с использованием таблиц значений функции Лапласа:

$$P(|X-m|<3\sigma) = 2\Phi(3) = 2\cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$$

Т.е. вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания на величину, большую чем утроенное среднее квадратичное отклонение, практически равна нулю.

Этот факт называется **правилом трех сигм**.

Пример. Поезд состоит из 100 вагонов. Масса каждого вагона – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожидание а = 65 т и средним квадратичным отклонением σ = 0,9 т. Локомотив может везти состав массой не более 6600 т, в противном случае необходимо прицеплять второй локомотив. Найти вероятность того, что второй локомотив не потребуется.

Второй локомотив не потребуется, если отклонение массы состава от ожидаемого (100·65 = 6500) не превосходит 6600 – 6500 = 100 т.

Т.к. масса каждого вагона имеет нормальное распределение, то и масса всего состава тоже будет распределена нормально.

Получаем:

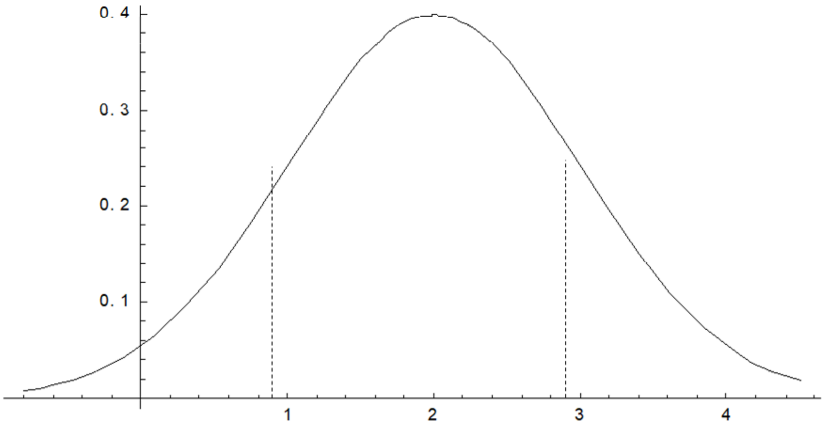
$$P(|X-M(X)|<100=2\bar{\Phi}\left[\frac{100}{100\sigma}\right]=2\bar{\Phi}[1{,}111]=2\cdot 0{,}3665=0{,}733$$

Пример. Нормально распределенная случайная величина X задана своими параметрами – а =2 – математическое ожидание и σ = 1 – среднее квадратическое отклонение. Требуется написать плотность вероятности и построить ее график, найти вероятность того, X примет значение из интервала (1; 3), найти вероятность того, что X отклонится (по модулю) от математического ожидания не более чем на 2.

Плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}};$$

Построим график:



Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 3).

$$P(1 < X < 3) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{2}}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}[\Phi(0{,}7071) + \Phi(0{,}7071)] = 0{,}6778.$$

Найдем вероятность отклонения случайной величины от математического ожидания на величину, не большую чем 2.

$$P(|X-2| < 2) = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(\sqrt{2}) \approx 0{,}95.$$

Тот же результат может быть получен с использованием нормированной функции Лапласа.

$$P(|X-2| < 2) = 2\bar{\Phi}\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) = 2\bar{\Phi}(2) = 2 \cdot 0{,}4772 \approx 0{,}95.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Плотность распределения непрерывной случайной величины задана следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0 \\ \frac{3}{32}\cdot(4x-x^2), & \text{если} \quad 0\le x\le 4 \\ 0, & \text{если} \quad x>4 \end{cases}$$

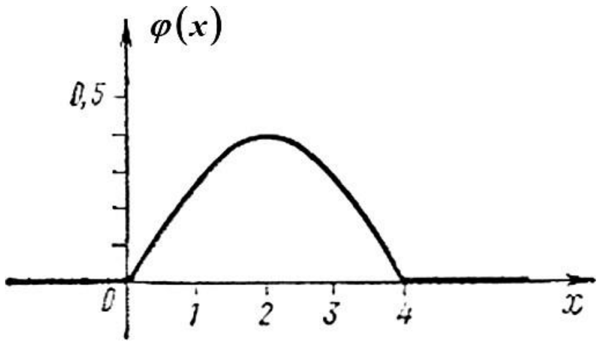


Рис 3.7

График функции $f(x)$ представлен па рис. 3.7.

Определить:

1) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, удовлетворяющее неравенствам $-2\le X\le 3$.

2) Найти функцию распределения заданной случайной величины.

Решение: Используя формулу (3.6), имеем:

$$P(-2\le X\le 3)=\int_{-2}^{3}f(x)dx=\int_{-2}^{0}\phi f(x)dx+\int_{0}^{3}f(x)dx=$$
$$=\int_{-2}^{0}0dx+\int_{0}^{3}\frac{3}{32}(4x-x^2)dx=\frac{27}{32}$$

По формуле (3.6) находим функцию распределения $F(x)$ для заданной случайной величины. Если $-\infty < x \le 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt = 0$.

Если $0 < x \le 4$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t) \cdot dt + \int_{0}^{x} f(t) \cdot dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{x} \frac{3}{32}(4t - t^2) \cdot dt = \frac{6x^2 - x^3}{32}$$

Если $x > 4$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t) \cdot dt + \int_{0}^{4} f(t) \cdot dt + \int_{4}^{x} f(t) \cdot dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{4} \frac{3}{32}(4t - t^2) \cdot dt + \int_{4}^{x} 0 \cdot dt = 1$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0 \\ \dfrac{6x^2 - x^3}{32}, & \text{если} \quad 0 \le x \le 4 \\ 1, & \text{если} \quad x > 4 \end{cases}$$

График функции F(x) изображен на рис. 3.8.

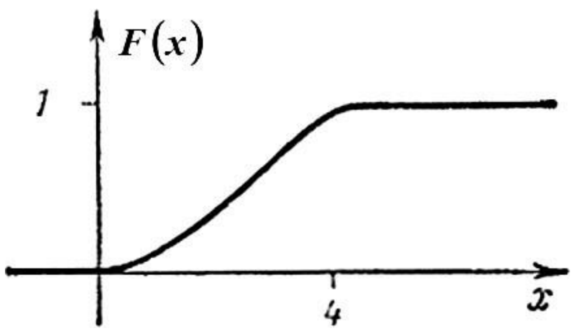


Рис. 3.8.

Пример 2. Пусть случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения вероятностей с параметрами $a = 0$, $\sigma = 2$.

Определить:

1) $P(-2 < X < 3)$; 2) $P(|X| < 0{,}1)$;

Решение:

1) Используя формулу (3.15), имеем

$$P(-2 < X < 3) = \Phi\left(\frac{3-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2-0}{2}\right) = \Phi(1{,}5) - \Phi(-1) = \\ = \Phi(1{,}5) + \Phi(1)$$

Из таблицы II находим, что $\Phi(1) = 0{,}34134$, $\Phi(1{,}5) = 0{,}43319$.

Следовательно,

$P(-2 < X < 3) = 0{,}43319 + 0{,}34134 = 0{,}77453$

2) Так как $a = 0$, то $|\xi| = |\xi - a|$. По формуле (3.16) находим

$$P(|X| < 0{,}1) = 2\Phi\left(\frac{0{,}1}{2}\right) = 2\Phi(0{,}05) = 2 \cdot 0{,}01994 = 0{,}03988$$

Пример 3. В каких пределах должна изменяться случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения, чтобы $P(|X - a| < \varepsilon) = 0{,}9973$.

Решение: По формуле (37) имеем

$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0{,}9973$.

Следовательно, $\Phi(\varepsilon/\sigma) = 0{,}49865$. Из табл. II находим, что этому значению $\Phi(\varepsilon/\sigma)$ соответствует $\varepsilon/\sigma = 3$, откуда $\varepsilon = \ = 3\sigma$.

Из последнего примера следует, что если случайная величина подчиняется нормальному закону распределения, то можно утверждать с вероятностью, равной 0,9973, что случайная величина находится в интервале $[a-3\sigma,\ a+3\sigma]$. Так как данная вероятность близка к единице, то можно считать, что значения нормально распределенной случайной величины практически не выходят за границы интервала $[a-3\sigma,\ a+3\sigma]$. Этот факт называют ***правилом трех сигм***.

Аналогично можно посчитать, что вероятность того, что случайная величина, распределенная по нормальному закону, заключена в интервале $[a-2\sigma,\ a+2\sigma]$, равна 95,44 %. Соответственно в интервале $[a-\sigma,\ a+\sigma]$ равна 67,26 %. То есть:

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=0{,}9973$$

$$P(|X-a|<2\sigma)=2\Phi(2)=0{,}9544$$

$$P(|X-a|<\sigma)=2\Phi(1)=0{,}6826$$

Данные условия наглядно изображены на рис.

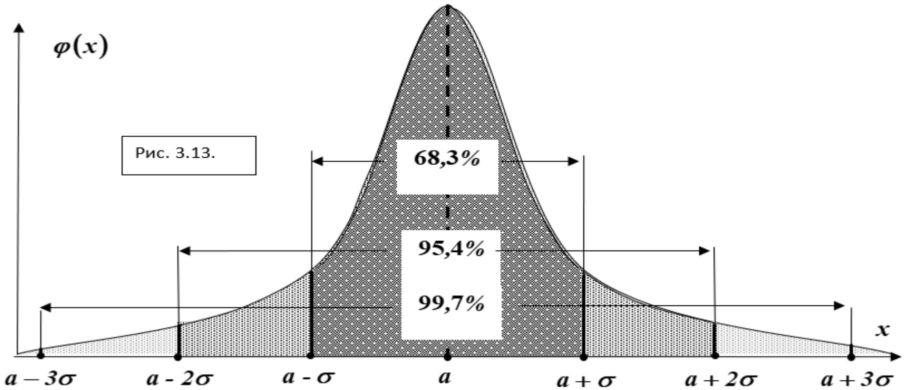


Рис. 3.13.

Пример 4. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ C(2x-x^2), & 0<x<2,\\ 0, & x\ge 2.\end{cases}$$

Найти: 1) C, 2) $F(x)$, 3) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) $P\{0{,}5 < X < 1{,}5\}$.

Решение:

1) Из условия нормированности плотности вероятности следует, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. В нашем случае $\int_0^2 C(2x - x^2)dx = C\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = C\left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{4C}{3} = 1$, откуда $C = \frac{3}{4}$.

2) Связь между $F(x)$ и $f(x)$ задается формулой $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Поэтому при $x \le 0$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$,

при $0 < x < 2$ $F(x) = \frac{3}{4}\int_0^x (2t - t^2)dt = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$,

а для $x \ge 2$ $F(x) = \frac{3}{4}\int_0^2 (2t - t^2)dt + \int_2^x 0 \cdot dx = 1$.

Следовательно, $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3, 0 < x < 2, \\ 1, \ x \ge 2. \end{cases}$

3) $M(X) = \frac{3}{4}\int_0^2 x(2x - x^2)dx = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{16}{3} - 4\right) = 1$;

$$D(X) = \frac{3}{4}\int_0^2 x^2(2x - x^2)dx - 1 = \frac{3}{4}\left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 - 1$$
$$= \frac{3}{4}\left(8 - \frac{32}{5}\right) - 1 = 0{,}2;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}2} \approx 0{,}447$$

$P\{0{,}5 < X < 1{,}5\} = \frac{3}{4}\int_{0,5}^{1,5}(2x - x^2)dx = \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0,5}^{1,5} = 0{,}6875$.

Пример 5. Найти вероятность попадания в интервал (-2;3) для нормально распределенной случайной величины с параметрами $m = 2, \sigma = 3$.

Решение:

$$P\{-2 < X < 3\} = \Phi\left(\frac{3-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-2-2}{3}\right) = \Phi(0,33) - \Phi(-1,33)$$
$$= 0{,}1293 + 0{,}4082 = 0{,}5375.$$

Известно («правило трех сигм»), что практически все возможные значения нормально распределенной случайной величины сосредоточены в интервале $(m - 3\sigma; m + 3\sigma)$. Действительно, вероятность попадания в этот интервал равна 0,9973, то есть выход за его границы можно считать событием практически невозможным $(p = 0{,}27\%)$.

Пример 6. Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины, принимающей значения от 3,5 до 10,1.

Решение:

Будем считать границы интервала равными $m - 3\sigma$ и $m + 3\sigma$. Тогда $m - 3\sigma = 3.5,\ m + 3\sigma = 10.1,$ и следовательно, $M(X) = m = 6.8,\ \sigma = 1.1, D(X) = \sigma^2 = 1{,}21.$

Пример 7. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ sinx \text{ при } 0 < x \le \pi/2, \\ 1 \text{ при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

Решение:

Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f'(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0, \\ cosx \text{ при } 0 < x \leq \pi/2, \\ 0 \text{ при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Заметим, что при $x = 0$ производная $F'(x)$ не существует.

Пример 8. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \frac{3}{2}sin3x$ в интервале $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение: Воспользуемся формулой

$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$

По условию, $a = \frac{\pi}{6}, b = \frac{\pi}{4}, f(x) = \frac{3}{2}sin3x.$

Следовательно, $P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} sin3xdx = \sqrt{2}/4$

Пример 9. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0, \\ cosx \text{ при } 0 < x \leq \pi/2, \\ 0 \text{ при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Решение:

Используем формулу $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

Если $x \leq 0$, то $f(x) = 0$, следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx = 0.$$

Если $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} cosxdx = sinx.$$

Если $x > \pi/2$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} cosxdx + \int_{\pi/2}^{0} 0dx = sinx\Big|_{0}^{\pi/2} = 1.$$

Итак, искомая функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ sinx \text{ при } 0 < x \le \pi/2, \\ 1 \text{ при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Пример 10. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2x$ в интервале $(0; 1)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X.

Решение:

Используем формулу

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx.$$

Подставив $a = 0, b = 1, f(x) = 2x$, получим

$$M(X) = 2\int_{0}^{1} x \cdot x\, dx = 2\int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3}.$$

Пример 11. Найти математическое ожидание случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \dfrac{x}{4} \text{ при } 0 < x \le 4, \\ 1 \text{ при } x > 4. \end{cases}$$

Решение: Найдём плотность распределения величины X:

$$f'(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ 1/4 \text{ при } 0 < x \le 4, \\ 0 \text{ при } x > 4. \end{cases}$$

Найдем искомое математическое ожидание:

$$M(X) = \int_0^4 x \cdot f(x)dx = \int_0^4 x(\frac{1}{4})dx = 2.$$

Пример 12. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -2, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \text{ при} -2 < x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Решение. Найдем плотность распределения:

$$f'(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -2, \\ \frac{1}{4} \text{ при} -2 < x \le 2, \\ 0 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-2}^2 x \cdot f(x)dx = \int_{-2}^2 x\left(\frac{1}{4}\right)dx = 0.$$

(подынтегральная функция нечетная, пределы интегрирования симметричны относительно начала координат).

Найдем искомую дисперсию, учитывая, что $M(X) = 0$:

$$D(X) = \int_{-2}^2 [x - M(X)]^2 f(x)dx = \int_{-2}^2 x^2\left(\frac{1}{4}\right)dx = \frac{2}{4}\int_{-2}^2 x^2 dx = \frac{4}{3}.$$

Пример 13.

Случайная величина X в интервале $(0;\pi)$ задана полностью распределения $f(x) = \frac{1}{2}sinx$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию X.

Решение:

Найдем дисперсию по формуле

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Подставив сюда $M(X) = \pi/2$ (кривая распределения симметрична относительно прямой $= x = \pi/2$), $a = 0, b = \pi, f(x) = \frac{1}{2}sinx$, получим

$$D(X) = \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2 sin\,x\,dx - \left[\frac{\pi}{2}\right]^2. \qquad (*)$$

Дважды интегрируя по частям, найдем

$$\int_0^\pi x^2 sinxdx = \pi^2 - 4. \qquad (**)$$

Подставив (**) в (*) окончательно получим $D(X) = (\pi^2 - 8)/4$.

Пример 14. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

Решение:

Воспользуемся формулой

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Подставив $\alpha = 12$, $\beta = 14$, $a = 10$ и $\sigma = 2$, получим $P\{12 < X < 14\} = \Phi(2) - \Phi(1)$. По таблице приложения 2 находим: $\Phi(2) = 0{,}4772, \Phi(1) = 0{,}3413$. Искомая вероятность $P\{12 < X < 14\} = 0{,}1359$.

Пример 15. Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

Решение:

Математическое ожидание случайных ошибок равно нулю, поэтому применима формула $P(|X| < \delta) = 2\Phi\ (\delta/\sigma)$. Положив $\delta = 15,\ \sigma = 10$, находим $P(|X| < 15) = 2\Phi(1{,}5)$. По таблице приложения 2 находим: $\Phi(1{,}5) = 0{,}4332.$. Искомая вероятность

$P(|X| < 15) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664.$

Пример 16. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}4$ мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

Решение. Так как X — отклонение (диаметра шарика от проектного размера), то $M(X) = a = 0$.

Воспользуемся - формулой $P(|X| < \delta) = 2\Phi\ (\delta/\sigma)$. Подставив

$\delta = 0{,}7,\ \sigma = 0{,}4$, получим

$$P(|X| < 0{,}7) = 2\Phi\left(\frac{0{,}7}{0{,}4}\right) = 2\Phi(1{,}75) = 2 \cdot 0{,}4599 = 0{,}92.$$

Таким образом, вероятность отклонения, меньшего 0,7 мм, равна 0,92. Отсюда следует, что примерно 92 шарика из 100 окажутся годными.

Пример 17. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$; при $x < 0$ $f(x) = 0$.

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (0,13, 0,7).

Решение: Используем формулу:

$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Учитывая, что, по условию, $a = 0{,}13, b = 0{,}7, \lambda = 3$, и пользуясь таблицей значений функции e^{-x}, получим

$P(0{,}13 < X < 0{,}7) = e^{-3 \cdot 0{,}13} - e^{-3 \cdot 0{,}7} = e^{-0{,}39} - e^{-3{,}1} = 0{,}677 - 0{,}122 = 0{,}555$

Пример 18. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t) = 1 - e^{-0{,}01t} (t > 0)$.

Найти вероятность того, что за время длительностью $t = 50$ ч: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Решение:

а) Так как функция распределения $F(t) = 1 - e^{-0{,}01t}$ определяет вероятность отказа элемента за время длительностью t, то, подставив $t = 50$ в функцию распределения, получим вероятность отказа:

$F(50) = 1 - e^{-0{,}01 \cdot 50} = 1 - e^{-0{,}5} = 1 - 0{,}606 = 0{,}394$;

б) события «элемент откажет» и «элемент не откажет» — противоположные, поэтому вероятность того, что элемент не откажет

$P = 1 - 0{,}394 = 0{,}606$.

Этот же результат можно получить непосредственно, пользуясь функцией надежности $R(t) = e^{-\lambda t}$, которая определяет вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t

$$R(50) = e^{-0{,}01 \cdot 50} = e^{-0{,}5} = 0{,}606.$$

Пример 19. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)$, причем

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ a(3x - x^2) \text{ при } 0 \le x \le 3, \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Требуется: 1) Найти коэффициент a; 2) построить график распределения плотности $y = f(x)$; 3) найти вероятность попадания X в промежуток]1, 2[.

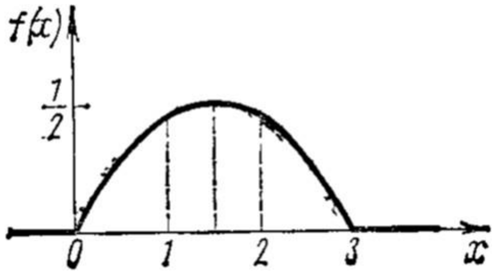


Рис 41.

1) Так как все значения данной случайной величины заключены на отрезке [0, 3], то $\int_0^3 a(3x - x^2)dx = 1$, откуда $a\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 1$, или $a\left(\frac{27}{2} - 9\right) = 1$, т.е. $a = \frac{2}{9}$.

2) Графиком функции $f(x)$ в интервале [0, 3] является парабола $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2$, а вне этого интервала графиком служит сама ось абсцисс (рис. 41).

3) Вероятность попадания случайной величины X в промежуток]1, 2[найдется из равенства

$$P(1<X<2)=\int_1^2\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{27}x^3\right]_1^2$$
$$=\frac{4}{3}-\frac{16}{27}-\frac{1}{3}+\frac{2}{27}=\frac{13}{27}.$$

Пример 20. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<2,\\(x-2)^2 \text{ при } 2\le x\le 3,\\1 \text{ при } x>3.\end{cases}$$

Вычислить вероятности попадания случайной величины X в интервалы]1; 2,5[и]2,5; 3,5[.

Решение:

$P_1=F(2{,}5)-F(1)=(2{,}5-2)^2-0=0{,}25,$

$P_2=F(3{,}5)-F(2{,}5)=1-(2{,}5-2)^2=1-0{,}25=0{,}75.$

Пример 21. Случайная величина X задана функцией распределения, указанной в предыдущей задаче. Найти плотность распределения (дифференциальную функцию распределения) случайной величины.

Решение:

Плотность распределения равна производной функции распределения, т.е. $f(x)=F'(x)$, поэтому

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<2,\\2(x-2) \text{ при } 2\le x\le 3,\\0 \text{ при } x>3.\end{cases}$$

Пример 22. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \frac{1}{2} sinx \text{ при } 0 \le x \le \pi, \\ 0 \text{ при } x > \pi. \end{cases}$$

Показать, что $f(x)$ может служить плотностью вероятности некоторой случайной величины X. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X

Решение:

Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} sinxdx = -\frac{1}{2}cosx\Big|_0^{\pi} = 1.$$

Кроме того, $f(x) \ge 0$. Следовательно, $f(x)$ может служить плотностью вероятности некоторой случайной величины. Так как прямая $x = \frac{\pi}{2}$ является осью симметрии соответствующей дуги кривой $y = \frac{1}{2} sinx$ (рис. 42), то математическое ожидание случайной величины X равно $\frac{\pi}{2}$, т. е. $M(X) = \pi/2$.

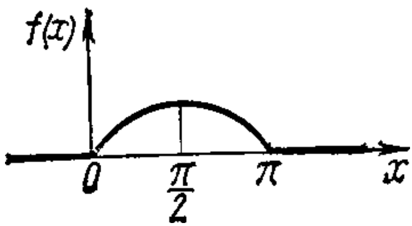


Рис. 42

Найдем дисперсию. Для этого в формуле (4) положим $a = 0$, $M(X) = \frac{\pi}{2}$, тогда остается только вычислить интеграл, определяющий $M(X^2)$; имеем

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2 sinxdx=$$

$$=\frac{1}{2}[-x^2cosx+2xsinx+2cosx]\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}(\pi^2-4).$$

Поэтому

$$D(X)=\frac{1}{2}(\pi^2-4)-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}-2,\sigma_x=\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-2}\approx 0{,}69$$

Пример 23. Непрерывная случайная величина X распределена по

показательному закону:

$$f(x)=\begin{cases}0,\text{при } x<0,\\ 4e^{-4x} \text{ при } x\geq 0.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытаний X попадет в интервал]0,2; 0,5[.

Решение:

Используя формулу $P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$, имеем

$$P(0{,}2<X<0{,}5)=e^{-4\cdot 0{,}2}-e^{-4\cdot 0{,}5}=e^{-0{,}8}-e^{-2}=0{,}4493-0{,}1353=0{,}314.$$

Пример 24. Вероятность безотказной работы элемента распределена по показательному закону $f(t)=0{,}02e^{-0{,}02t}$ $(t>0)$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 50 ч.

Решение:

Используя функцию надежности $R(t)=e^{-\lambda t}$, получим $R(50)=e^{-0{,}02\cdot 50}=e^{-1}=0{,}3679.$

Пример 25. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $m = 40$ и дисперсией $D = 200$.

Вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал]30, 80[.

Решение:

Здесь $a = 30,\ b = 80, m = 40,\ \sigma = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$; пользуясь табл. 3, находим

$$P(30 < X < 80) = 0{,}5\left[\Phi\left(\frac{80-40}{10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{30-40}{10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right)\right] =$$

$$= 0{,}5[\Phi(2) + \Phi(0{,}5)] = 0{,}5[0{,}995 + 0{,}521] = 0{,}758.$$

Пример 26. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Если стандартная длина равна $a = 25$ см и среднее квадратичное отклонение равно $\sigma = 0{,}4$ см, то какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,8?

Решение:

Требуется найти положительное число ε для которого $P(|X - 40| < \ \varepsilon) = 0{,}8$. Так как

$P(|X - 40| < \ \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}4\sqrt{2}}\right) = \Phi(1{,}77\varepsilon)$, то задача сводится к решению неравенства $\Phi(1{,}77\varepsilon) > 0{,}8$. С помощью табл. 3 устанавливаем, что $1{,}77\,\varepsilon > 0{,}91$. Остается найти наименьшее значение ε, удовлетворяющее этому неравенству, откуда $\varepsilon = 0{,}52$

Пример 27. Диаметр детали, изготавливаемой на станке, — случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 25$ см и средним квадратичным отклонением $\sigma = 0{,}4$ см. Найти вероятность того, что две взятые наудачу детали имеют отклонение от математического ожидания по абсолютной величине не более 0,16 см.

Решение:

Вероятность того, что наудачу взятая деталь имеет отклонение в ту или другую сторону от математического ожидания, составляет

$$P(a-\delta < X < a+\delta) = P(|X-a| < \delta) = 2\overline{\Phi}(\frac{\delta}{\sigma}).$$

Отсюда

$$P(|X-25| < 0{,}16) = 2\overline{\Phi}\left(\frac{0{,}16}{0{,}4}\right) = 2\overline{\Phi}(0{,}4) = 2 \cdot 0{,}1554 = 0{,}3108$$

Тогда для двух наудачу взятых деталей искомая вероятность есть $0{,}3108^2 = 0{,}096.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ C(4-x^2), & 2 < x < 4, \\ 0, & x \ge 4. \end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание, дисперсию и вероятность попадания случайной величины в интервал [1.3].

2. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{1}{2}\pi,\\ C\cos x, & -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi,\\ 0, & x\ge \frac{1}{2}\pi.\end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения и вероятность попадания случайной величины в интервал $[\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{6}\pi]$.

3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Cx+2, & 0\le x\le \frac{1}{3},\\ 0, & x>\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения и вероятность попадания случайной величины в интервал $[0.1, 0.2]$.

4. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятности

$$f(x)=\begin{cases}C(x-3), & x\in[3,5]\\ 0, & x\notin[3,5]\end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения и вероятность попадания случайной величины в интервал $[4,5]$.

5. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ C(1 - cos x), & 0 < x < \pi, \\ 1, & x \ge \pi. \end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения и вероятность попадания случайной величины в интервал $[\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.

6. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} C(x+1)^2, & x \in [-1,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения и вероятность попадания случайной величины в интервал $[0,1]$.

7. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ C(x-2)^2, & 2 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание, дисперсию и вероятность попадания случайной величины в интервал [3,4].

8. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 4, \\ C(x-4), & 4 < x \le 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения и вероятность попадания случайной величины в интервал $[5, 8]$.

9. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ C(x-2)^2, & 2 < x \le 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание, дисперсию и вероятность попадания случайной величины в интервал [3,5].

10. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ C(x+1), & -1 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения и вероятность попадания случайной величины в интервал $[0, 2]$.

11. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со среднеквадратичным отклонением σ=0,4 мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди 100 изготовленных.

12. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12,14).

13. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает δ=12 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ=7 мм и математическим ожиданием M=0. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат,

14. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному дифференциальной функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \quad при \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал (0,5, 0,9)., если λ=2.

15. Длительность безотказной работы элемента имеет

показательное распределение $F(x)=1-e^{-\lambda t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью t=52 ч.

А) элемент откажет

Б) элемент не откажет.

Типовой расчет

1 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, -3<x<0, \\ 0, \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (-1; 1).

2. Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины X, если известно, что $P\{X<1\}=0{,}1$ и $P\{X>5\}=0{,}2$. Построить кривую распределения и найти ее максимум.

2 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, x\le 2, \\ ax^{-\frac{9}{2}}, \quad x>2. \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (3; 4).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, причем $M(X) = 3, \sigma(X) = 2.$ Найти $P\{X > 2{,}5\}$ и $P\{1 < X < 4\}$

3 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax(4-x), 1 < x < 4, \\ 0, \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (3; 5).

2. Случайная величина Xимеет нормальный закон распределения, причем $M(X) = -2, D(X) = 1.$ Найти: а) плотность вероятности случайной величины Xи ее значения в точках $x = -1,\ x = 0, x = 2;$ б) вероятности $P\{-2 < X < 0\}$ и $P\{X > 1\}$.

4 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 2, \\ a/x^5, \quad x > 2. \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (3; 4).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m = 2, \sigma = 2$.

Найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) математическое ожидание и дисперсию; в) вероятности $P\{1 < X < 4\}$ и $P\{X < 2{,}5\}$.

5 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)^{-\frac{1}{3}}, 1 < x < 9, \\ 0, \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (2; 3).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, причем $M(X) = 1{,}2$ и $D(X) = 2$.

Найти $P\{|X - 1{,}2| > 2{,}5\sqrt{2}\}$ и $P\{|X - 1{,}2| < 1\}$.

6 вариант

Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax^{\frac{1}{3}}, & 1 < x < 8, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (7; 9).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения. Известно, что $P\{X > 2\} = 0{,}5, P\{X < 3\} = 0{,}975.$

Найти: а) математическое ожидание и дисперсию; б) вероятность $P\{1 < X < 3\}$.

7 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax(4 - x^2), & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (-1; 1).

2. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик проходит через отверстие

диаметра d_1, но не проходит через отверстие диаметра d_2 $(d_2 < d_1)$, то шарик считается годным. Если какое-либо из этих условий нарушится, то шарик бракуется. Считается, что диаметр шарика – случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $m = (d_1 + d_2)/2, \sigma = \beta \cdot (d_1 - d_2)$, где 0 < β < 1/2. Каким следует выбрать коэффициент β, чтобы брак составлял не более 3% всей продукции?

8 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax^{-\frac{1}{4}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a.

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (1/4; 3/4).

2. Средняя температура в квартире в период отопительного сезона равна 22°С, а ее среднее квадратическое отклонение – 0,5 °С. С вероятностью, не меньшей 0,96, найти границы, в которых заключена температура в квартире, считая ее нормально распределенной случайной величиной.

9 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 16, \\ ax^{-\frac{13}{4}}, & x > 16. \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (15; 17).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m = 1, \sigma = 2$.

Найти вероятность того, что модуль этой случайной величины примет значение большее 2,5.

10 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax + ax^3, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (-0,5; 1,5).

2. Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины X, если известно, что $P\{X < 0\} = 0{,}2$ и $P\{X > 3\} = 0{,}15$. Построить кривую распределения и найти ее максимум.

11 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & ax^4, -1<x<3, \\ & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (1,5; 3,5).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m=1, \sigma=2$.

Найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) математическое ожидание и дисперсию; в) вероятности $P\{0<X<3\}, P\{X<1{,}5\}$.

12 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ ax^{-\frac{10}{3}}, & x>1. \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (2; 3).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m=0, \sigma=2$.

Найти вероятность того, что эта случайная величина принимает значение: а) в интервале (-1;2); б) меньше -0,5; в) отличающиеся от своего среднего значения по абсолютной величине не больше, чем на 1.

13 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{x}}, & 0<x<a,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

а) Найти значение параметра a.

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (-1; 1).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m=-10, \sigma=3$. Заданы точки -17, -13, -7, -1, 2 на числовой оси, разделяющие ее на шесть интервалов. Найти вероятности того, что случайная величина X примет значения на этих интервалах.

14 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & -1<x<0,\\ \dfrac{1}{6}, & 1<x<a,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

а) Найти значение параметра a.

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (-0,4; 1,6).

2. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Если стандартная длина равна $m = 40$ см и среднее квадратическое отклонение равно $\sigma = 0{,}4$ см, то какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,8?

15 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, 0 < x < 1, \\ \frac{1}{4}, \quad 2 < x < a, \\ 0, \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a.

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,8; 3,2).

2. При измерении усилия для разрыва нити получается нормально распределенная случайная величина X; среднее усилие составляет 61,3 (н) при среднем квадратическом отклонении 0,5 (н). Найти интервал, симметрично расположенный

относительно среднего значения, в который с вероятностью 0, 95 попадает значение разрывного усилия при очередном измерении.

16 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}ax, & 1 \le x \le 3, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (1,5; 1,7).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m = 2, \sigma = 2$.

Найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) математическое ожидание и дисперсию; в) вероятности $P\{1 < X < 4\}, P\{X < 2{,}5\}$.

17 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,5; 3).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения. Известно, что $M(X) = -1, D(X) = 2$. Найти:

а) плотность вероятности случайной величины X и ее значения в точках $x = -2, x = 0, x = 1$;

б) вероятности $P\{-3 < X < -1\}, P\{X > 0\}$.

18 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{a}, & 3 < x < 4, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (2,5; 3,5).

2. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее размера от проектного не превышает 7 мм. Случайные отклонения размера детали от проектного имеют нормальный закон распределения с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 4$ мм. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

19 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, -1<x<1,\\ \dfrac{1}{2},\ \ 3<x<a,\\ 0, \quad \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,4; 5,6).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами m=2, $\sigma=4$. Найти: а) вероятность $P\{-5<X<30\}$; интервал, симметрично расположенный относительно среднего значения, в который с вероятностью $\gamma=0{,}9$ попадает X.

20 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}, \quad 0<x<a,\\ 0, \quad \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,1; 0,7).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон рас-

пределения. Известно, что $P\{X > 3\} = 0{,}5$, $P\{X < 4\} = 0{,}95$. Найти: а) параметры m и σ закона распределения; б) вероятность $P\{1 < X < 4\}$.

21 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{5}, & -2 < x < a, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a.

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,1; 0,9).

2. Средняя температура T в холодильной камере равна 5°С, а ее среднее квадратическое отклонение – 0,4°С. С вероятностью, не меньшей 0,92, найти границы, в которых заключена величина T.

22 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{3}, & a < x < 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a.

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,2; 1,3).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, причем $M(X)=2$, $\sigma(X)=3$. Найти $P\{X>1{,}5\}$ и $P\{-1<X<3\}$.

23 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{5}, & -1<x<2, \\ a, & 2{,}5<x<4, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a.

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0; 3,5).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, причем $M(X)=2, D(X)=12{,}25$. Найти: а) вероятность $P\{-30<X<1\}$; интервал, симметрично расположенный относительно среднего значения, в который с вероятностью $\gamma=0{,}4$ попадает X.

24 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{a}, & 2<x<5, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (4,5; 6).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами m=3, $\sigma = 2{,}5$. Найти: а) вероятность $P\{-13 < X < 5\}$; интервал, симметрично расположенный относительно среднего значения, в который с вероятностью $\gamma = 0{,}84$ попадает X.

25 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ae^{-5x}, & x > 0. \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,2;1,2).

2. Средняя масса шоколадных конфет, выпускаемых в коробках кондитерской фабрикой, равна 200 г, среднее квадратическое отклонение 5 г. Считая массу m конфет нормально распределенной случайной величиной, найти вероятность того, что масса коробки конфет заключена в пределах (196, 207) г.

26 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3x}, & 1<x<a,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

а) Найти значение параметра a.

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения, не меньшие 2.

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами m=1, $\sigma=2$. Найти вероятность того, что эта случайная величина принимает значение: а) в интервале (-1;1); б) больше 2; в) отличающееся от своего среднего значения по абсолютной величине не больше, чем на 0,5.

27 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<a,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

а) Найти значение параметра a.

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,2; 0,5).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон рас-

пределения с параметрами $m=-8, \sigma=2$. Заданы точки -14, -10, -7, -7, 1 на числовой оси, разделяющие ее на шесть интервалов. Найти вероятности того, что случайная величина X примет значения на этих интервалах.

28 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax^3, & -0<x<4, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a.

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (3; 5).

2. Случайные значения веса зерна распределены по нормальному закону с математическим ожиданием 0,17 г и средним квадратическим отклонением 0,04 г. Доброкачественные всходы дают зерна, вес которых более 0,12 г. Найти процент семян, которые дадут доброкачественные всходы.

29 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, -1<x<2, \\ 0, \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a.

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (-1,5; 1,5).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, причем $M(X) = 2{,}7;\ D(X) = 18.$ Найти $P\{|X - 2{,}7| > 2\}$ и $P\{|X - 2{,}7| < 6\sqrt{2}\}$.

30 вариант

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2ax, & 0 < x < 3, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (2; 3,5).

2. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, причем $M(X) = 3;\ \sigma(X) = 2.$ Найти $P\{X > 2{,}5\}$ и $P\{1 < X < 4\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., Наука.

2. В.Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа.

3. В.Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., Высшая школа.