ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Название кафедры»

Учебно-методическое пособие
по дисциплине

«Дискретная математика»

Авторы
Ермилова О.В.

Ростов-на-Дону, 2021

Аннотация

«Учебно-методическое пособие» предназначен для студентов очной формы обучения всех технических направлений подготовки бакалавриата. В пособии изложены основные разделы современной дискретной математики. Рассматриваются вопросы, связанные с теорией множеств, теорией отношений, теорией графов и математической логикой. В каждой главе рассмотрено достаточное количество задач с подробными решениями и примерами, что позволяет эффективно и быстро осваивать изучаемую тему.

Пособие содержит большое количество примеров, графическую интерпретацию основных понятий. Каждый новый термин разобран на примере, что значительно упрощает восприятие материала.

Для закрепления изученного материала и подготовки к зачету или экзамену, в конце каждой главы помещены задания для самостоятельной работы. Это пособие будет полезно студентам и аспирантам первоначального изучающим данную дисциплину, а также всем желающим познакомиться с основами современной абстрактной математики.

Автор

Старший преподаватель каф. «Прикладная математика» Ермилова О.В.

Оглавление

ГЛАВА1.ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Множества основные понятия.

В математике понятие множества является одним из основных, фундаментальным, однако единого определения множества не существует. Одним из наиболее устоявшихся определений множества является следующее: под **множеством** понимают любое собрание определённых и отличных друг от друга объектов, мыслимых как единое целое. Создатель теории множеств немецкий математик Георг Кантор (1845-1918) говорил так: "Множество есть многое, мыслимое нами как целое".

Множества как тип данных оказались очень удобными для программирования сложных жизненных ситуаций, так как с их помощью можно точно моделировать объекты реального мира и компактно отображать сложные логические взаимоотношения. Дадим более точное определение множеству.

Множеством называют совокупность объектов, объединенных по определенному признаку. Объекты, из которых составлено множество, называются его элементами.

Множества обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, а элементы множества строчными(маленькими) буквами.

Обозначение: $A, B, C, D...$ - множества, $a, b, c, d...$ элементы множества.

Множества могут состоять их объектов самой различной природы. Их элементами могут быть буквы, атомы, числа, уравнения, точки, углы и так далее. Например, A - множество книг, стоящих на полке; B -множество всех треугольников на плоскости;

C **-**множество студентов в данной аудитории. Этим объясняется чрезвычайная широта теории множеств и ее приложение к самым разнообразным областям знания (математике, физике, экономике и др.).

Множество, которое не содержит ни одного элемента называется **пустым множеством**.

Обозначение: $\varnothing$

Если все рассматриваемые множества (в конкретной задаче) являются подмножествами более широкого множества U, то множество U называется универсальным множеством.

Таким образом, **универсальное множество** — это множество, содержащее все объекты и все множества.

Например, в коробке лежат шары: 10 красных, 8 белых и 5 чёрных, определим событие А как множество красных шаров, В-множество белых шаров, С-множество чёрных шаров, тогда U -множество шаров, лежащих в коробке.

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишем $a \in A$. В противном случае $a \notin A$.

Множества бывают конечными и бесконечными, конечные множества состоят из какого-то определенного числа элементов, иначе множество бесконечно.

Множество B каждый элемент, которого принадлежит множеству A, называется **подмножеством** множества A.

Обозначение: $B \subset A$

Например, известно, что всякий квадрат является прямоугольником, следовательно, множество квадратов является частью множества прямоугольников, то есть является подмножеством множества прямоугольников.

Пустое множество являются частью любого множества $\varnothing \subset A$.

Множество, элементами которых являются числа, называют **числовыми множествами.**

Числовыми множествами являются:

1)N-множество натуральных чисел (целые положительные числа 1, 2, 3, 4, 5…);

2)Z- множество целых чисел (натуральные числа, противоположные натуральным и ноль …-3,-2,-1,0,1, 2, 3…);

Очевидно, что множество натуральных чисел N вложено во множество целых чисел Z, то есть $\mathrm{N} \subset Z$.

3)Q - множество рациональных чисел (дробных чисел), любое рациональное число представимо в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$ и $n \in N$.

Очевидно, что множество целых чисел Z является подмножеством множества рациональных чисел Q,то есть $Z \subset Q$.

В самом деле – ведь любое целое число можно представить в виде рациональной дроби $\frac{m}{n}$, например, $3 = \frac{3}{1}, -5 = \frac{-5}{1}$ и так далее. Таким образом, целое число можно совершенно законно назвать и рациональным числом.

4)I-множество иррациональных чисел (число стоит под корнем , при этом корень из этого числа не извлекается), например, $\sqrt{3}$.

5)R-множество вещественных чисел (множество рациональных и иррациональных чисел). Таким образом, объединение рациональных и иррациональных чисел образует множество действительных (вещественных) чисел.

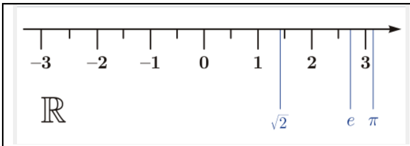


Рис.1.1.

Наглядно понятие вещественного числа можно представить при помощи числовой прямой (см.рис.1.1). Вследствие этого соответствия термин «числовая прямая» обычно употребляется в качестве синонима множества вещественных чисел.

Мы будем говорить, что два **множества** A и B **равны**, если каждый элемент множества A принадлежит B, и наоборот. Иначе говоря, равенство A и B равносильно тому, что выполнены оба включения: $A \subset B, B \subset A$.

Обозначение: $A = B$.

В противном случае $A \neq B$.

Пример 1.1. Какими являются заданные множества по отношению к друг другу: а) A – множество научных дисциплин, за достижения в которых вручается Нобелевская премия, B – множество всех научных дисциплин; б) E – множество бегемотов, F – множество гиппопотамов. Записать отношения между множествами с помощью условной записи.

Решение.

а) Известно, что за достижения в математике Нобелевская премия не вручается. Получается, что не каждый элемент множества B содержится в множестве A, тогда как каждый элемент множества A принадлежит множеству B. То есть $\forall a \in A, a \in B; \exists b \in B, b \notin A$. Исходя из определения подмножества приходим к выводу, что множество A вложено в B. Условная запись $A \subset B$.

б) Каждый бегемот является гиппопотамом, и каждый гиппопотам является бегемотом, то есть $\forall x \in E, x \in F$; $\forall y \in F, y \in E$, следовательно, $E \subset F$, $F \subset E$. По определению равенства множеств приходим к выводу, что множества E и F равны. Условная запись $E = F$.

1.2. Основные способы задания множеств.

Итак, под множествами понимается совокупность любых объектов, объединённых по определенному признаку. Считают, что множество определяется своими элементами, то есть множество задано, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.

Существует **два основных способа задания множеств**:
задание множества перечислением его элементов и **задание множества описанием свойства**, присущего только элементам данного множества.

1)При первом способе в фигурных скобках перечисляются элементы, входящие в состав данного множества.

Обозначение: $X = \{x\}$- множество X состоит из одного элемента x .

Например, $A = \{1,2,3,6\}$ - множество натуральных чисел, делителей числа 6.

Несмотря на кажущееся удобства такого способа, от него чаще всего приходится отказываться, так как он становится либо очень нерациональным (если конечное множество содержит большое число элементов), либо вообще непригодным для задания множества (если все элементы множества перечислить невозможно-множество бесконечно, например, множество Z-множество целых чисел).

Таким образом, способом перечисления можно задать лишь конечные множества.

Замечание: при задании множества способом перечисления не следует указывать один и тот же элемент несколько раз. Например, множество $A = \{1,2,3,4\}$ задано корректно, а множество $A = \{1,2,3,3,4\}$ не корректно, так как элемент 3 повторяется два раза.

2) Если множество бесконечно, то его элементы перечислить нельзя. В таких случаях указывают характеристическое свойство его элементов. Характеристическое свойство – это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит. При втором способе задания также используют фигурные скобки, но теперь внутри фигурных скобок пишут двоеточие, разделяющую описание множества на две части. Слева от двоеточия указывают, из какого множества объектов выбираются элементы данного множества, а справа описывается свойство, которым обладают все элементы, входящие в состав данного множества.

Обозначение:

$M = \{x : x - \text{выполнено свойство } P\ (P(x))\}$.

Например, множество $M = \{x : x^2 - 1 = 0\}$- описывает множество корней уравнения $x^2 - 1 = 0$.

Очень важно умение переходить от одного способа задания множества к другому.

В данном примере можно перейти к заданию данного множества перечислив его элементы, для этого достаточно найти корни уравнения $x^2 - 1 = 0$. Такое задание будет иметь вид $M = \{-1,1\}$.

Замечание: описанием предпочтительно задавать и конечные множества, в которых очень много элементов.

Например, $M = \{x : x \in N, 2 < x < 22^3\}$-множество всех натуральных чисел от 2 до 22^3.

Таким образом, чтобы задать множество достаточно перечислить все его элементы или каким-то образом их описать.

Пример 1.2. Задать различными способами множество: а) M -множество положительных целых чисел меньших шести; б) N -множество натуральных чисел; в) C -множество нечетных цифр; г) D -множество чётных цифр; д) Q- множество рациональных чисел (дробных чисел).

Решение.

а) Зададим множество способом перечисления его элементов $M = \{1,2,3,4,5\}$.

Зададим множество M описанием $M = \{x : x \in Z, 0 < x < 6\}$ или $M = \{x : x$ -целое положительное число, меньшее шести $\}$;

б) Способом перечисления множество N задать нельзя, так как оно бесконечно.

Зададим множество описанием характеристического свойства $N = \{x : x \in Z, x > 0\}$ или

$N = \{x : x$ -целое положительное число $\}$;

в) Всего цифр 10: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 нам необходимы нечетные, то есть задание множества перечислением выглядит так $C = \{1,3,5,7,9\}$.Зададим множество C описанием характеристического свойства $C = \{x : x = 2n - 1, n \in N, 1 \le n \le 5\}$;

г) Нам необходимы четные цифры, то есть 0,2,4,6,8, задание множества перечислением выглядит так $D = \{0,2,4,6,8\}$.Зададим множество D описанием характеристического свойства $D = \{x : x = 2n - 2, n \in N, 1 \le n \le 5\}$;

д) Множество бесконечно, поэтому зададим данное множество описанием его элементов

$Q = \left\{x : x = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\right\}$.

Пример 1.3. Задать перечислением его элементов, если это возможно множество:

а) $A = \{x : 2x^3 + 5x^2 + 2x = 0, x \in Z, x \in [-2;0)\}$;

б) $B = \{x : x \in R, x^2 - 4 = 0\}$;в) $C = \{x : x \in R, 2 < x < 5\}$.

Решение.

Элементами множества $A = \{x : 2x^3 + 5x^2 + 2x = 0, x \in Z, x \in [-2;0)\}$ являются целые числа, которые являются корнями уравнения $2x^3 + 5x^2 + 2x = 0$ и принадлежат полуинтервалу $[-2;0)$.Найдем корни уравнения, принадлежащие полуинтервалу $[-2;0)$:

$2x^3 + 5x^2 + 2x = 0$, $x(2x^2 + 5x + 2) = 0$,

$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = -\frac{1}{2}$,

$x_1 \notin [-2;0)$, $x_2 = -2 \in Z$, $x_2 = -2 \in [-2;0)$, $x_3 \notin Z$.

Таким образом, $A = \{-2\}$;

б) $B = \{x: x\epsilon R, x^2 - 4 = 0\}$— это конечное множество, и его можно задать перечислением элементов, решив уравнение $x^2 - 4 = 0, x_{1,2} = \pm 2.$ Таким образом, $B = \{-2; 2\}$;

в) $C = \{x: x\epsilon R, 2 < x < 5\}$– бесконечное несчетное множество, а именно, числовой промежуток (2;5), поэтому его нельзя задать перечислением его элементов.

Пример 1.4. Задать данное множество описанием характеристического свойства его элементов:

а) $C = \{1,2,3,4\}$;б) $A = \{-3, -2, -1,0,1,2,3\}$.

Решение.

а) Нетрудно заметить, что множество задано перечислением его элементов, при этом каждый элемент множества C – натуральное число, меньшее 4. Именно это свойство элементов множества C является для него характеристическим. В этом случае пишут: $C = \{x : x \in N, x < 5\}$;

б) Заметить, что элементами множества A,заданного перечислением, являются целые числа, модуль которых не превосходит 3. Это свойство является характеристическим для его элементов, поэтому имеем: $A = \{x: x \in Z, |x| \leq 3\}$.

Пример 1.5. Является ли множество $A=\left\{x: x^2-\frac{1}{4}=0, x\in Z\right\}$ пустым?

Решение.

Множество A является пустым, так как не содержит ни одного элемента.

Действительно, $x^2-\frac{1}{4}=0$,

$x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $x_{1,2}=\pm 0{,}5\notin Z$, следовательно $A=\varnothing$.

Пример 1.6. Совпадают ли множества $A=\{1,2,3,4,5\}$ и $B=\{5,4,3,2,1\}$?

Решение.

Да, совпадают(равны), поскольку множества предполагаются не упорядоченными.

Пример 1.7. Равны ли множества $A=\{2,3\}$ и $B=\{x: x^2-5x+6=0\}$?

Решение.

Зададим множество B способом перечисления, для этого найдем корни уравнения $x^2-5x+6=0$, $x_1=3, x_2=2$, $B=\{2,3\}$.Множества A и B равны, так как их элементы совпадают.

Пример 1.8. Определить все подмножества множества $A = \{c, d, e\}$.

Решение.

Таких подмножеств всего 8, перечислим их: $\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{c, e\}, \{c, d, e\}$.

1.3. Операции над множествами и их свойства.

Будем рассматривать следующие основные операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая сумма, дополнение.

Для наглядного представления множеств и отношений между ними используется диаграммы Эйлера – Венна - геометрические схемы, которые используется в математике и других прикладных направлениях. Универсальное множество U изображают в виде прямоугольника, а множества, входящие в универсальное множество, в виде кругов внутри прямоугольника (например, множество A на (рис.1.2. а)), элементу множества A соответствует точка внутри круга.

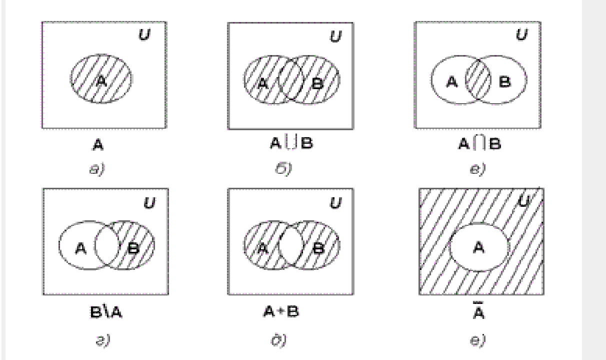


Рис.1.2

Объединением множеств A и B называется множество C, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (рис.1.2. б)).

Обозначение: $C = A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Пример 1.9. $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$. $A \cup B - ?$

Решение.

Составляем объединение множество $A \cup B$ состоящее из объединения элементов множеств A и B. Итак, $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$.

Пример 1.10. U- множество всех студентов некоторого университета, A – множество студентов, которые учатся на экономическом факультете, B – множество студентов, изучающих английский язык. Описать множество $A \cup B$.

Решение.

Так как A – множество студентов, которые учатся на экономическом факультете,а B – множество студентов, изучающих английский язык, то объединения элементов множеств A и B, получим множество $A \cup B$ – множество студентов, которые либо учатся на экономическом факультете, либо изучают английский язык, либо учащихся на экономическом факультете и изучающих английский язык (и то и другое вместе).

Пример 1.11. Множество U - множество точек числовой прямой $(-\infty;+\infty)$, A -множество точек отрезка $[-1;1]$, B –множество точек полуинтервала $(0;4)$. $A \cup B - ?$

Решение.

Зададим данные множества при помощи характеристического свойства, так как множества бесконечны:

$U = \{x : x \in (-\infty;+\infty)\}$, $A = \{x : x \in [-1;1]\}$, $B = \{x : x \in (0;4)\}$.

Объединяя все точки отрезка $[-1;1]$ и интервала $(0;4)$ получим полуинтервал $[-1;4)$.Итак, $A \cup B = \{x : x \in [-1;4)\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество C, каждый элемент которого принадлежит и множеству A ,и множеству B одновременно (рис 1.2.в)).

Обозначение: $C = A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Эта операция легко может приводить к пустым множествам. Будем говорить, что множества A и B не пересекаются, если $A \cap B = \varnothing$.

Пример 1.12. Даны множества $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{1,2,3,4\}$,

$B = \{2,4,6,8\}$. $A \cap B - ?$

Решение.

Составляем множество $A \cap B$, состоящее из тех элементов, которые принадлежат множествам A и B одновременно. Итак, $A \cap B = \{2,4\}$.

Пример 1.13. Множество U - множество точек числовой прямой $(-\infty;+\infty)$, A -множество точек интервала $[-1;1]$, B – множество точек интервала $(0;3)$. $A \cap B - ?$

Решение.

Зададим данные множества:

$U = \{x : x \in (-\infty;+\infty)\}$, $B = \{x : x \in (0;3)\}$, $A = \{x : x \in [-1;1]\}$.

Для отрезка $[-1;1]$ и интервала $(0;3)$ пересечением является полуинтервал $(0;1]$, так как он принадлежит отрезкам $[-1;1]$ и $(0;3)$ одновременно. Таким образом, $A \cap B = \{x : x \in (0;1]\}$.

Пример 1.14. Показать, что множества A и B не пересекаются, если: а) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{6,8\}$;б) A - множество точек интервала $(-1;0]$, B – множество точек интервала $[2;+\infty)$.

Решение.

а) Множество $A \cap B = \varnothing$, так как множествам A и B не имеют общих элементов;

б) $A \cap B = \varnothing$-пересечение промежутков $(-1;0], [2;+\infty)$ представляет собой пустое множество, так как не имеет общих точек соприкосновения.

Следовательно, множества A и B не пересекаются.

Разностью множеств A и B называется множество C, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат B.

Обозначение: $C = A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Аналогично определяется разность $B \setminus A$ (рис.1.2. г)).

Разумеется, $A \setminus A = \varnothing$.

Пример 1.15. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$. $A \setminus B \; - ?$

Решение.

Получим множество $A \setminus B$, удалив из A все элементы, которые принадлежат B. Итак, $A \setminus B = \{1,2,3,4\} \setminus \{2,4,6,8\} = \{1,3\}$.

Симметрической разностью (кольцевой суммой) множеств A и B называется множество C, состоящее из тех элементов, которые не являются одновременно элементами обоих множеств (рис.1.2. д)).

Обозначение: $C = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ или $C = A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Пример 1.16. $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$. $A \Delta B$ $-?$

Решение.

Учитывая, что $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ и объединяя множества $A \setminus B = \{1,3\}$ и $B \setminus A = \{6,8\}$, получим $A \Delta B = \{1,3\} \cup \{6,8\} = \{1,3,6,8\}$.

Дополнением множества A до множества U называется множество $\overline{A}$, состоящее из всех элементов универсального множества не содержащихся в A (рис.1.2. е)).

Обозначение: $\overline{A} = U \setminus A = \{x : x \in U \text{ и } x \notin A\}$.

Пример 1.17. $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{1,2,3,4\}$,

$B = \{2,4,6,8\}$. $\overline{A}, \overline{B}\ -?$

Решение.

$\overline{A} = U \setminus A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus \{1,2,3,4\} = \{0,5,6,7,8,9\}$,

$\overline{B} = U \setminus B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus \{2,4,6,8\} = \{0,1,3,5,7,9\}$.

Пример 1.18. U - множество точек числовой прямой $(-\infty;+\infty)$, A -множество точек отрезка $[1;3]$, B - множество точек интервала $(2;4)$. Найти множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B, B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \Delta B\ -?$

Решение.

Зададим данные множества:

$U = \{x: x\epsilon(-\infty; +\infty)\}$, $A = \{x: x\epsilon[1;3]\}$, $B = \{x: x\epsilon(2;4)\}$,

$A \cup B = \{x : x \in [1;4)\}$, $A \cap B = \{x : x \in (2;3]\}$;

Найдём множества:

$A \setminus B = \{x: x\epsilon[1;2]\}$, $B \setminus A = \{x: x\epsilon(3;4)\}$,

$\bar{A} = U \setminus A = \{x: x\epsilon(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)\}$,

$\overline{B} = U \setminus B = \{x : x \in (-\infty;+\infty) \setminus (2;4) = (-\infty;2] \cup [4;+\infty)\}$,

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x : x \in [1;2] \cup (3;4)\}$.

Пример 1.19. U - множество целых чисел, A - множество четных чисел, B - целые числа, делящиеся на 5. Найти множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B, B \setminus A$,

$\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \Delta B\ -?$

Решение.

Зададим данные множества и найдем решение:

$U=\{x: x\in Z\}$, $A=\{x: x-$ оканчивается на 0,2,4,6,8 $\}$,

$B=\{x: x-$ оканчивается на 0,5 $\}$,

$A\cup B=\{x: x-$ оканчивается на 0,2,4,5,6,8 $\}$-объединили четные числа и числа, делящиеся на 5;

$A\cap B=\{x: x-$ оканчивается на 0 $\}$-пересечение образуют четные числа, делящиеся на 5, то есть числа, делящиеся на 10, то есть оканчивающиеся нулём;

$A\setminus B=\{x: x-$ оканчивается на 2,4,6,8 $\}$-из множества четных чисел убрали числа, делящиеся на 5, получили множество чисел оканчивающихся на 2,4,6,8;

$B\setminus A=\{x: x-$ оканчивается на 5 $\}$- от множества чисел делящиеся на 5 отнимаем множество четных чисел (оканчивающихся 0,2,4,6,8) получаем множество чисел, оканчивающихся на 5;

$\overline{A}=\{x: x-$ оканчивается на 1,3,5,7,9 $\}$-от множества целых чисел отнимаем множество четных чисел, получаем множество нечетных чисел;

$\overline{B}=\{x: x-$ оканчивается на 1,2,4,6,7,8,9 $\}$-от множества целых чисел отнимаем множество чисел делящиеся на 5, получаем множество целых чисел за исключением чисел оканчивающихся на 0 и 5;

$A\Delta B = \{x : x -$ оканчивается на 2,4,5,6,8 $\}$,так как $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, объединяем множество чисел оканчивающихся на 2,4,6,8 и множество чисел, оканчивающихся на 5.

Пример 1.20. А - множество делителей числа 10, - множество делителей числа 16. Задайте множества А и В, перечислением их элементов. Найдите их пересечение, объединение, симметрическую разность, дополнение.

Решение.

Делителями числа 10, то есть числами, которые делятся на 10 без остатка являются 1,2,5,10, аналогично рассуждая относительно множества В получим:

$A = \{1,2,5,10\}, B = \{1,2,4,8,16\}$.

Тогда $A \cup B = \{1,2,4,5,8,10,16\}$, $A \cap B = \{1,2\}$,

$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{5,10\} \cup \{4,8,16\} =$

$= \{4,5,8,10,16\}$.

Замечание: операции над множествами можно рассматривать для произвольного числа множеств.

Свойства операций над множествами.

Введенные выше операции над множествами подчиняются следующим основ- ным законам:

1) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность);

2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность);

3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность);

4) $(A \cap B) \cup A = A$, $(A \cup B) \cap A = A$ (закон поглощения);

5) $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap U = A$, $A \cup U = U$ (свойство нуля и единицы);

6) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (идемпотентность);

7) $A \cap \overline{A} = \varnothing, A \cup \overline{A} = U$ (свойство дополнения);

8) $\overline{\overline{A}} = A$ (закон двойного дополнения);

9) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (законы де Моргана);

10) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ (выражение для разности).

Операция симметрической разности множеств обладает следующими свойствами:

11) $A \Delta B = B \Delta A$;

12) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$;

13) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

14) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Данные соотношения алгебры множеств позволяют упрощать различные выражения, содержащие множества.

Докажем методом эквивалентных преобразований, например, тождество 13) $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, используя свойства операций над множествами имеем:

$$(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=(A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\left((A\cup B)\cap\overline{A}\right)\cup\left((A\cup B)\cap\overline{B}\right)=$$
$$=\left(A\cap\overline{A}\cup B\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cup B\cap\overline{B}\right)=\left(\varnothing\cup B\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cup\varnothing\right)=\left(B\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)=$$
$$=(B\setminus A)\cup(A\setminus B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\Delta B..$$

Справедливость каждого тождества проверяется построением диаграмм Эйлера – Венна, отдельно для левой и правой частей, с последующим сравнением результатов. Совпадения конечных диаграмм показывает, что данное тождество верно.

Проверим, например, третье равенство (дистрибутивность): $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Для этого построим диаграммы левой и правой части равенства и сравним результаты (рис.1.3):

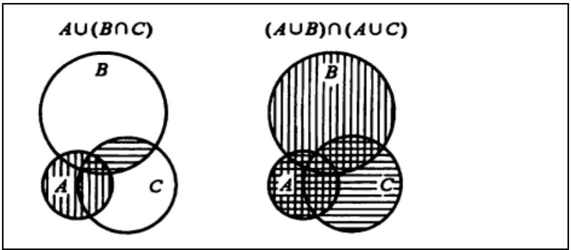


Рис.1.3

Диаграммы совпали, следовательно, равенство верно. Аналогично можно проверить оставшиеся свойства, убедитесь в этом самостоятельно.

Пример 1.21. Даны множества $A=\{x:2<x\le 6, x\in N\}$, $B=\{x:1<x<4, x\in N\}$, $C=\{x:x^2-4=0, x\in N\}$.Найти множества $A\cap B\cap C,\ \ A\cup B\cup C.$

Решение.

Перепишем множества A,B,C перечислив их элементы:

$A=\{3,4,5,6\}$, $B=\{2,3\}, C=\{2\}$. $(A\cap B)\cap C=\{3\}\cap\{2\}=\varnothing$,

$(A\cup B)\cup C=\{2,3,4,5,6\}\cup\{2\}=\{2,3,4,5,6\}.$

Пример 1.22. Доказать равенство:

а) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$; б) $(\bar{A}\cup B)\cap A=A\cap B$;

в) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.

Решение.

а) Рассмотрим правую часть равенства $A\setminus(A\setminus B)$ и используя выражение для разности $A\setminus B=A\cap\overline{B}$, затем закон де Моргана $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, закон двойного дополнения $\overline{\overline{A}}=A$, дистрибутивность $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ имеем:

$$A\setminus(A\setminus B)=A\setminus\left(A\cap\overline{B}\right)=A\cap\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)=A\cap\left(\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}\right)=A\cap\left(\overline{A}\cup B\right)=$$
$$=\left(A\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap B\right)=\varnothing\cup\left(A\cap B\right)=A\cap B;$$

б) $(\bar{A}\cup B)\cap A=(\bar{A}\cap A)\cup(B\cap A)=$

$= \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$;

в) Рассмотрим правую часть равенства $(A \setminus B) \setminus C = \left(A \cap \overline{B}\right) \setminus C = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

Преобразуем левую часть $A \setminus \left(B \cup C\right) = A \cap \left(\overline{B \cup C}\right) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. Правая и левая части равенства совпали, что и требовалось доказать.

Пример 1.23. Упростить выражение: а) $\overline{A \cup \overline{B}}$;б) $\overline{(\bar{A} \cap \overline{(\bar{A} \cup B)})}$;в) $\left(A \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$.

Решение.

а) Используя закон де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ и закон двойного отрицания $\overline{\overline{A}} = A$ имеем:

$\overline{A \cup \bar{\bar{B}}} = \bar{A} \cap \bar{\bar{B}} = \bar{A} \cap B$;

б) Аналогично поступая, имеем:

$\overline{(\bar{A} \cap \overline{(\bar{A} \cup B)})} = \bar{\bar{A}} \cup \overline{\overline{(\bar{A} \cup B)}} = A \cup (\bar{A} \cup B) = U$;

в) Используя коммутативный и дистрибутивный законы, упрощаем исходное выражение:

$$\left(A \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = \left(B \cap A\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = B \cap \left(A \cup \overline{A}\right) = B \cap U = B.$$

1.4. Декартово произведение множеств.

Два элемента a и b называются **упорядоченной парой**, если указано, какой из этих элементов первый, какой второй.

Обозначение: $(a;b)$-упорядоченную пара элементов a и b.

Аналогично определяется упорядоченная система из n элементов $a_1, a_2, ..., a_n$.

Обозначение: $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Элементы $a_1, a_2, ..., a_n$ называются **координатами** упорядоченной системы $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Декартовым (прямым) произведением множеств A и B называется множество $A \times B$ всех возможных упорядоченных пар (a, b), в которых первый элемент $a \in A$, а второй элемент $b \in B$.

Обозначение: $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$.

Аналогично определяется **декартово произведение** множеств B и A ,то есть множество $B \times A$ всех упорядоченных пар (b, a), в которых $b \in B$, $a \in A$.

Если перемножаются одинаковые множества, то произведение $A \times A = A^2$ называется **декартовым квадратом**. В частности, если $A = R$,то произведение $R \times R = R^2$ - множество всевозможных пар вещественных чисел, то есть множество точек $(x; y)$ декартовой системы координат Oxy.

Аналогично, определяется декартово произведение n-множеств $A_1, A_2,..., A_n$,то есть $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2,..., a_n): a_1 \in A_1, a_2 \in A_2,..., a_n \in A_n\}$.

В частности, если $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$,то $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = A \times A \times \ldots \times A = A^n$.

Декартово произведение множеств само является множеством, и поэтому к нему применимы все изученные ранее способы задания и операции над множествами.

Пример 1.24. Даны множества $A = \{d, 5, f\}$, $B = \{-1, d\}$.Найти $A \times B$, $B \times A$.

Решение.

Запишем декартово произведение множеств $A = \{d, 5, f\}$, $B = \{-1, d\}$, перечисление пар удобно осуществлять по следующему алгоритму: «сначала к первому элементу множества A последовательно присоединяем каждый элемент множества B, затем ко второму элементу множества A присоединяем каждый элемент множества B, затем к третьему элементу множества A присоединяем каждый элемент множества B »:

$A\times B=\{(d,-1),(d,d),(5,-1),(5,d),(f,-1),(f,d)\}$;

$B\times A=\{(-1,d),(-1,5),(-1,f),(d,d),(d,5),(d,f)\}$ – здесь схема записи аналогична.

Замечание:

1)Данный алгоритм применяем исключительно для удобства – и в том, и в другом случае пары можно перечислить в каком угодно порядке – здесь важно записать все возможные пары;

2)Обратите внимание на запись, мы употребляем круглые скобки, когда важен порядок элементов:

(2, 3) и (3, 2) — это разные упорядоченные пары. Если же порядок не важен, то будем писать фигурные скобки: {2, 3} = {3, 2}, так как это множество, состоящее из чисел 2 и 3;

3) Заметим, что график функции f — это подмножество декартова произведения $R\times R=R^2$. С помощью декартовой системы координат каждую упорядоченную пару чисел $(x;y)$ можно изобразить точкой на плоско-

сти, тогда график функции, например, $f(x)=x^2$, то есть множество $\{(x;y):y=x^2\}$ изображается параболой.

Пример 1.25.

$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $B=\{A,B,C,D,E,F,G,H\}$.

Найти $A\times B$.

Решение.

$A\times B=\{(1,A),(1,B),...,(1,H),(2,A),(2,B),...,(2,H),...,(8,H)\}$

- множество клеток игрового поля «Морского боя», представимо в виде декартова произведения данных множеств.

Пример 1.26. Даны множества $M_1=\{x:2\le x\le 5\}$ и $M_2=\{y:1\le y\le 4\}$. Найдите и изобразите на координатной плоскости $M_1\times M_2$.

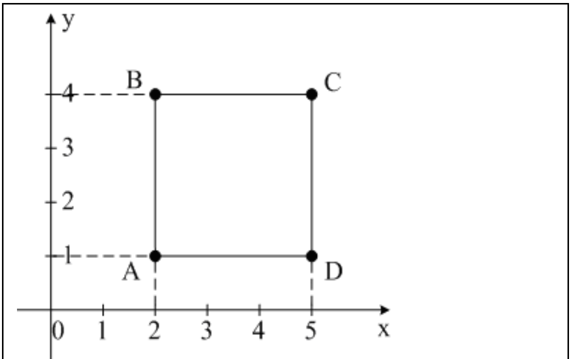


Рис.1.4

Решение.

В соответствии с определением декартова произведения $M_1 \times M_2 = \{(x;y): 2 \le x \le 5, 1 \le y \le 4\}$ – множество точек, расположенных в квадрате с вершинами $A(2;1)$, $B(2;4)$, $C(5;4)$, $D(5;1)$ (рис.1.4).

Основные свойства декартова произведения:

1) Декартово произведение не обладает свойством коммутативности, то есть

$$A \times B \ne B \times A.$$

Замечание: декартово произведение множеств коммутативно, тогда и только тогда, когда множества равны, то есть $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$;

2) Декартово произведение ассоциативно, то есть $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;

3) Если хотя бы одно из множеств A или B пусто, то и декартово произведение этих множеств –пустое множество, то есть

$A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$;

4) Дистрибутивность декартово произведения относительно объединения множеств, то есть $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

5) Дистрибутивность де- картово произведения относительно пересечения множеств, то есть$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

6) Дистрибутивность декартово произведения относительно разности множеств, то есть $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Докажем, например, свойство дистрибутивность декартово произведения относительно пересечения множеств:

$$\forall x \epsilon A \times (B \cap C) \Rightarrow x = (a, d), a \in A, d \in B \cap C \Rightarrow$$

$$x = (a, d), a \in A, d \in B, d \epsilon C \Longrightarrow x = (a, d) \in A \times B, x = (a, d) \in A \times C,$$

$$\Rightarrow \; x = (a, d) \in (A \times B) \cap (A \times C);$$

$$\forall x \epsilon (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow x = (a, d), (a, d) \in A \times B, (a, d) \in A \times C,$$

$$\Longrightarrow a \in A, d \in B, d \in C \Longrightarrow a \in A, d \in B \cap C \Rightarrow \; x = (a, d) \in A \times (B \cap C).$$

Пример 1.27. Найти $A \times B, B \times A$и убедиться, что в случае: **а)** $A = B = \{1,2\}$, $A \times B = B \times A$;

б) $X = \{1,2\}, Y = \{3,4\}$, $X \times Y \neq Y \times X$.

Решение.

а) $A\times B=\{1,2\}\times\{1,2\}=\{(1;1),(1;2),(2;1),(2;2)\}$,

$B\times A=\{1,2\}\times\{1,2\}=\{(1;1),(1;2),(2;1),(2;2)\}$.

Итак, $A\times B=B\times A\Leftrightarrow A=B$.

б) $X\times Y=\{1,2\}\times\{3,4\}=\{(1;3),(1;4),(2;3),(2;4)\}$,

$Y\times X=\{3,4\}\times\{1,2\}=\{(3;1),(3;2),(4;1),(4;2)\}$.

Итак, $X\times Y\neq Y\times X$.

Пример 1.28. Даны множества $A_1=\{0,1\}, A_2=\{1,2\}, A_3=\{3\}$.Показать, что $(A_1\times A_2)\times A_3=A_1\times(A_2\times A_3)$.

Решение.

Вычислим $(A_1\times A_2)\times A_3$:

$A_1\times A_2=\{0,1\}\times\{1,2\}=\{(0;1),(0;2),(1;1),(1;2)\}$, тогда $(A_1\times A_2)\times A_3=\{(0;1),(0;2),(1;1),(1;2)\}\times\{3\}=$ $=\{(0;1;3),(0;2;3),(1;1;3),(1;2;3)\}$.

Найдем $A_1\times(A_2\times A_3)$:

$A_2\times A_3=\{1,2\}\times\{3\}=\{(1;3),(2;3)\}$,тогда $A_1\times(A_2\times A_3)=\{0,1\}\times\{(1;3),(2;3)\}=$ $=\{(0;1;3),(0;2;3),(1;1;3),(1;2;3)\}$. Все элементы множеств совпадают, следовательно $(A_1\times A_2)\times A_3=A_1\times(A_2\times A_3)$.

Пример 1.29. Проверить справедливость свойства дистрибутивности декартова произведения относительно объединения, если $A = \{3,4,5\}, B = \{5,7\}, C = \{7,8\}$

Решение.

Необходимо проверить равенство $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, поэтому для начала найдём $B \cup C, A \times B, A \times C$: **Пример 1.29.** Проверить справедливость свойства дистрибутивности декартова произведения относительно объединения, если $A = \{3,4,5\}, B = \{5,7\}, C = \{7,8\}$

Решение.

Необходимо проверить равенство $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, поэтому для начала найдём $B \cup C, A \times B, A \times C$:

$$B \cup C = \{5,7,8\}, A \times B = \{3,4,5\} \times \{5,7\} =$$
$$= \{(3;5),(3;7),(4;5),(4;7),(5;5),(5;7)\},$$
$$A \times C = \{3,4,5\} \times \{7,8\} =$$
$$= \{(3;7),(3;8),(4;7),(4;8),(5;7),(5;8)\};$$
$$A \times (B \cup C) = \{3,4,5\} \times \{5,7,8\} = \{(3;5),(3;7),$$
$$(3;8),(4;5),(4;7),(4;8),(5;5),(5;7),(5;8)\},$$
$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(3;5),(3;7),(4;5),(4;7),(5;5),$$
$$,(5;7)\} \cup \{(3;7),(3;8),(4;7),(4;8),(5;7),(5;8)\} =$$
$$= \{(3;5),(3;7),(3;8),(4;5),(4;7),(4;8),(5;5),(5;7),(5;8)\},$$

следовательно $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Пример 1.30. Выяснить верно ли равенство $C \times (B \setminus A) = (C \times B) \Delta (C \times (A \cap B))$ для множеств $A=\{1,2\}, B=\{2,3\}, C=\{1,3\}$.

Решение.

Рассмотрим из каких элементов состоит левая часть равенства и сравним с правой:

$C\times(B\setminus A)=\{1,3\}\times(\{2,3\}\setminus\{1,2\})=\{1,3\}\times\{3\}=\{(1;3),(3;3)\}$,

$$(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))=(\{1,3\}\times\{2,3\})\Delta(\{1,3\}\times(\{1,2\}\cap\{2,3\}))=$$
$$=\{(1;2),(1;3),(3;2),(3;3)\}\Delta(\{1,3\}\times\{2\})=\{(1;2),(1;3),(3;2),(3;3)\}\Delta\{(1;2),(3;2)\}=$$
$$=(\{(1;2),(1;3),(3;2),(3;3)\}\setminus\{(1;2),(3;2)\})\cup(\{(1;2),(3;2)\}\setminus\{(1;2),(1;3),(3;2),(3;3)\})=$$
$$=\{(1;3),(3;3)\}\cup\varnothing=\{(1;3),(3;3)\}.$$

Итак, $C\times(B\setminus A)=(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))$.Верно!

1.5. Мощность множества.

Введём понятие мощности множества. Если множество состоит из конечного числа элементов: $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$,то его **мощностью** называется

число n (число его элементов).

Обозначение: $|A|$ или

Например, мощность множества $A=\{1,2,3\}$ равна 3, то есть $|A|$ =3.

Мощность пустого множества равна нулю.

Рассмотрим множество A = {1, 2, 3},

где |A| = 3, и множество B = {5, 6, 7, 8}, где |B| = 4.

Составим всевозможные подмножества множества А: ∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}- получили 8 подмножеств.

Составим всевозможные подмножества множества В:

∅, {5}, {6}, {7}, {8}, {5,6}, {5,7}, {5,8}, {6,7}, {6,8}, {7,8}, {5,6,7}, {5,7,8}, {6,7,8}, {5,6,8}, {5, 6, 7, 8}-получили 16 подмножеств.

Используя результаты рассмотренных примеров, можно предположить справедливость следующего равенства: $n = 2^m$, где n – количество подмножеств данного конечного множества, m – мощность множества (количество элементов данного множества).

Справедливость предположения подтверждает теорема, которую мы примем без доказательства.

Теорема 1.1: если для конечного множества А его мощность равна m , то количество всех подмножеств данного множества, обозначаемое Р(А), равно 2^m.

Пример 1.31. Вычислить количество подмножеств множества М – делителей числа 10.

Решение.

Составим множество М и найдем его мощность:

М = {1,2,5,10}. Мощность |М| = 4, тогда количество подмножеств равно Р(М) = 2^4 = 16.

1.6. Сравнение множеств.

Сравнение конечных множеств по количеству элементов может производиться не только пересчетом элементов этих множеств, но и установлением соответствия между элементами данных множеств.

Например, пусть сравниваются по количеству элементов множество A-множество студентов учебной группы и множество B- множество стульев в учебной аудитории. Можно пересчитать студентов и стулья и, определив, таким образом, что студентов-20, а стульев-25, прийти к выводу, что множество B содержит больше элементов, чем множество A.Но можно поступить и по-другому: поставить в соответствие элементам множества A элементы множества B.Это можно осуществить, посадив каждого студента на стул. Так как при этом пять стульев окажутся свободными, мы опять-таки приходим к выводу, что множество B содержит больше элементов, чем множество A.

Идея второго метода сравнения в особенности актуальна для бесконечных множеств, так как пересчитать количество элементов таких множеств невозможно. Таким образом, мощность множества — это обобщение понятия количества (числа элементов множества), которое имеет смысл для всех множеств, включая бесконечные.

Перейдём к точным формулировкам. Пусть даны два множества A и B .Говорят, что между элементами множеств A и B установлено взаимно **однозначное соответствие,** если указано правило, по которому каждому элементу a из A сопоставлен один элемент b из B ,называемый образом элемента a,причём выполнены следующие два условия:

1)любые два элемента из A имеют различные образы;

2)каждый элемент из B является образом некоторого элемента из A .

Два множества A и B называются **равномощными (эквивалентными)**, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Таким образом, два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое количество элементов.

Обозначение:$A \sim B$.

Пример 1.32. Показать, что множества A и B равномощные ,если A -множества нечетных цифр, B -множества четных цифр.

Решение.

Мощность множества $|A| = 5$. Так как, множество A состоит из 5 элементов: $A = \{1,3,5,7,9\}$. Мощность множества $|B| = 5$- множество B так же состоит из 5 элементов: $B = \{0,2,4,6,8\}$.Таким образом, множества A и B равномощные, то есть $A \sim B$.

Пример 1.33. Соедините следующие пары множеств знаком «=», если они равны, и знаком «~», если они эквивалентны: **а)** A – множество сторон треугольника, B- множество углов треугольника; **б)** A - множество букв в слове «колос», $B = \{\text{к}, \text{л}, \text{с}, \text{о}\}$.

Решение.

а) $A \sim B$, так как треугольник имеет три угла (множество углов треугольника A состоит из трех элементов), треугольник состоит из трех сторон (множество сторон треугольника содержит три элемента-три стороны);
б)Так как A - множество букв в слове «колос», состоит из 4 элементов (букв о, к, с, л), то задавая его пере-

числением элементов $A = \{к, л, с, о\}$ имеем:

$A \subset B, B \subset A$, следовательно, $A = B = \{к, л, с, о\}$.

Рассмотрим пример эквивалентных бесконечных множеств.

Пример 1.34. Показать, что множество натуральных чисел N эквивалентно множеству четных положительных чисел P.

Решение.

Для этого установим между множествами $N = \{n : n \epsilon Z, n > 0\}$ и $P = \{2n : n \epsilon Z, n > 0\}$ взаимно однозначное соответствие следующим образом, каждому элементу n множества натуральных чисел N поставим в соответствие элемент $2n$ множества четных положительных чисел P:

$1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 4, 3 \leftrightarrow 6, \ldots, n \leftrightarrow 2n$

Таким образом, $N \backsim P$. Так как множество четных положительных чисел является подмножеством множества натуральных чисел $P \subset N$, то этот пример показывает, что бесконечное множество может быть эквивалентно своему подмножеству. Ясно, что такая ситуация не может иметь места для конечных множеств.

Пример 1.35. Множество N всех натуральных чисел и множество Z_- –всех целых отрицательных чисел.

Решение.

$Z_- = \{-n: n\epsilon Z, n > 0\}$,$N = \{n: n\epsilon Z, n > 0\}$. Взаимное однозначное соответствие получится, если каждому натуральному числу $n\epsilon N$ поставить в соответствие число$-n\epsilon Z_-$:

$1 \leftrightarrow -1, 2 \leftrightarrow -2, 3 \leftrightarrow -3, \ldots,$

$$n \leftrightarrow -n.$$

Таким образом, $N \backsim Z_-$.

Пример 1.36. Покажем, что множество целых чисел Z эквивалентно множеству натуральных чисел N.

Решение.

Для этого установим между этими множествами взаимно однозначное соответствие следующим образом: каждому элементу $n \epsilon Z$ поставим в соответствие элемент $2n \epsilon N$,если $n > 0$ и элемент$-2n + 1 \epsilon N$, $n \leq 0$:

$1 \leftrightarrow 2, 0 \leftrightarrow 1, -1 \leftrightarrow 3, \dots, n \leftrightarrow 2n, -n \leftrightarrow 2n + 1$.Итак,

$N \backsim Z$.

Бесконечное множество A называется **счетным**, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел N, то есть $A \backsim N$, таким образом все элементы множества A можно занумеровать натуральными числами.

Наглядно это можно представить так: каждый элемент множества пронумерован ему присвоен номер (натуральное число), и каждое натуральное число использовано ровно один раз. Например, когда первоклассник считает камушки, говоря «один, два, три ...», то научно говоря, он устанавливает взаимно однозначное соответствие между предметами и натуральными числами.

Для счётных множеств происходит то же самое, только процесс этот бесконечный: мы пересчитываем элементы множества, присваивая им номера, располагая их в последовательность, и в результате (если представить, что этот процесс завершился) каждый элемент приобретает свой номер (натуральное число).

Счётными являются множества натуральных чисел, целых чисел, рациональных чисел. Любые объекты, которые можно определить со взаимно-однозначным сопоставлением со счётным множеством-счётные.

Несчетное множество-такое бесконечное множество, которое не является счётным, таковы, в частности, множества вещественных чисел, комплексных чисел.

Таким образом, любое множество является либо конечным, либо счётным, либо несчётным.

Пример 1.37. Покажите, что множество A четных чисел, счётное.

Решение.

Бесконечное множество $A = \{x: x = 2n - 2, n \epsilon N\}$- счётно, так как его элементы можно пронумеровать натуральными числами, то есть установить взаимно однозначное соответствие, каждому натуральному числу $n \epsilon N$ поставить в соответствие число $2n - 2 \epsilon A$:

$1 \leftrightarrow 0{,}2 \leftrightarrow 2{,}3 \leftrightarrow 4, \ldots, n \leftrightarrow 2n - 2$.

1.7. Отображения множеств и их виды.

Теперь рассмотрим важнейшее в математике понятие отображения. Между элементами двух множеств X и Y могут устанавливаться определенные отношения.

Если каждому элементу x множества X по некоторому правилу f ставится в соответствие элемент y множества Y, то говорят, что задано отображение X в Y, при этом элемент y называют образом элемента x, а x прообразом элемента y.

В том случае если в соответствие ставится x единственный элемент, отображение называется **взаимно однозначным** или просто **функцией**.

Обозначение: $f : X \to Y$

Множество X называется областью определения отображения f, элементы множества Y образуют область значений. Вместо слова «отображение» можно употреблять термин «функция» — это то же самое. В школьном курсе математики изучаются в основном функции, определённые на числовых множествах, мы будем рассматривать и другие ситуации. Так, например, если X — множество треугольников, а Y — множество окружностей на плоскости, то $y(x)$ — окружность, описанная около треугольника x. Отображение $f : X \to Y$, сопоставляет каждому треугольнику описанную около него окружность.

Любое отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет двум обязательным требованиям:

1) каждого элемента x из X можно найти его значение $f(x)$;

2) Значение $f(x)$ определяется единственным образом.

Рассмотрим пример отображения:

Пусть X ={Аня, Ваня, Саша, Юля, Максим, Оля }- множество студентов и предложим им 6 тем для рефератов (множество Y) Y = {векторы, определители, матрицы, производные, теория пределов, комплексные числа} установим правило $f : X \to Y$, которое ставит в соответствие каждому студенту x множества X единственную тему реферата $y = f(x)$ множества Y :

Аня $\rightarrow$ *Векторы*, *Ваня* $\rightarrow$ *Определители* ,…,

Оля $\rightarrow$ *Комплексные числа* .

Заметим, что данные множества X и Y эквивалентны, так как для них установлено взаимно-однозначное отображение.

Иллюстрация к понятию отображения множества X во множество Y, то есть к понятию функции приведена на рис. 1.5.

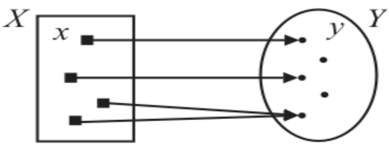
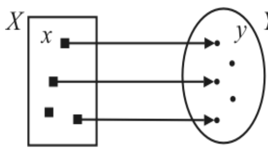
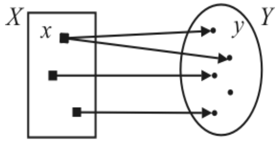
	Каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$.
Рис.1.5.	

Иллюстрация соответствия, не являющегося функциями представлена на рис.1.6.

а)		Не каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие элемент $y \in Y$;

б)		Одному элементу $x \in X$ поставлены в соответствие два элемента $y \in Y$.
Рис.1.6.		

Отображения бывают**: сюръективные, инъективные, биективные.**

1)Если множество значений Y_f функции $f : X \to Y$ совпадает с множеством Y, то есть $Y_f = Y$, то отображение f называется **сюръекцией**.

2) Если в отображении $f : X \to Y$ разным элементам $x \in X$ соответствуют разные элементы $y \in Y$, то есть при $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$ то отображение множества X во множество Y называется **инъекцией**.

3) Если отображение $f : X \to Y$ является одновременно сюръекцией и инъекцией, то оно называется **биекцией**.

Очевидно, что биективное отображение $f : X \to Y$ является **взаимно однозначным отображением**.

Иллюстрации к разным типам отображений приведены на рис. 1.7.

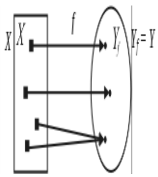
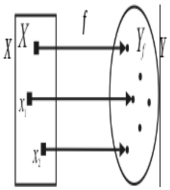
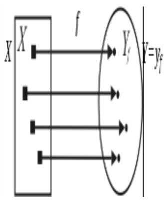
1		сюръекция $f : X \to Y$, так как $Y_f = Y$
2		инъекция $f : X \to Y$, при $x_1 \neq x_2$ выполняется $y_1 \neq y_2$
3		биекция $f : X \to Y$, так как $\forall x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$ (обратное верно)

Рис. 1.7.

Так, в примере, рассмотренном выше $\text{Аня} \to \text{Векторы}, \text{Ваня} \to \text{Определители}, \ldots,$ $\text{Оля} \to \text{Комплексные числа}$, каждому студенту поставлена в соответствие одна уникальная тема реферата, и обратно – за каждой темой реферата закреплён один и только один студент. Таким образом, это биективное отображение.

Если к множеству X = {Аня, Ваня, Саша, Юля, Максим, Оля } добавить 7-го студента Олега X_1 = {Аня, Ваня, Саша, Юля, Максим Оля, Олег }) то либо один из студентов останется без темы Y = {Векторы, определители, матрицы, производные, теория пределов, комплексные числа} (отображения не будет вообще), либо какая-то тема достанется сразу двум студентам получится сюръективное отображение.

Если к множеству Y = {векторы, определители, матрицы, производные, теория пределов, комплексные числа}, данного примера добавить седьмую тему – кривые второго порядка(Y_1 ={Векторы, определители, матрицы, производные, теория пределов, комплексные числа}), а множество X = {Аня, Ваня, Саша, Юля, Максим, Оля } оставить неизменным ,то одна из тем останется невостребованной, таким образом получим инъективное отображение.

Пример 1.38. Определить тип отображения:

а)$X = R, Y = R,\ f : R \to R\ , f(x) = x^2;$

б) $X = R_+, Y = R_+, f : R_+ \to R_+, f(x) = x^2$;

в) $X = R_+, Y = R_+, R_+ \to R_+, f(x) = e^x$;

г) $f: R \to R, f(x) = e^x$.

Решение.

а) Рассмотрим отображение $f : R \to R$, возводящее каждое действительное число в квадрат: $f(x) = x^2$. Заметим, что $X = R$ – область определения, $Y = R$- область значений, $Y_f = R_+ = [0, +\infty)$ – множество значений функции f. Отображение $f : R \to R$ не является сюръективным и биективным, так как область значений функции $f(Y_f = R_+)$ не совпадает с областью значений отображения $Y = R$. Действительно, например, для $-1 \epsilon Y, -1 \neq x^2$, отрицательные числа не могут быть квадратами действительных чисел.

Отображение не является инъективным, так как каждому «игреку» области значения Y соответствует два значения «икс» области определения X, то есть найдутся $x_{1,2} \epsilon X$, такие, что $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$, действительно$x_{1,2} = \pm 1 \epsilon X, \exists f(\pm 1) = (\pm 1)^2 = 1 \epsilon Y$.

Итак, данная функция не относится ни к одному из перечисленных типов.

б) Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$, каждому элементу x ставится в соответствие единственный элемент y , обратное тоже верно, значит это взаимно однозначное отображение, то есть биективное отображение;

в) $f(x) = e^x$— биективная функция в $R_+ = (0, +\infty)$,так как каждому значению x соответствует единственное значение y ;

г)Функция $f(x) = e^x$ в $R = (-\infty, +\infty)$ является инъекцией, так как у отрицательных «игреков» и нуля не будет прообразов(соответствующих элементов $x \in \mathrm{X}$), действительно, например, при

$y = 0, y = -1$, уравнения $e^x = 0, e^x = -1$ не имеют решения.

Пример 1.39. Пусть $\mathrm{A} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \subset \mathrm{N}, \mathrm{B} = \{0,1\} \subset \mathrm{Z}$ **.** Поставим в соответствие каждому числу $x\epsilon\mathrm{A}$ его остаток при делении на 2. Является ли это соответствие отображением? Какой тип у этого отображения? Какой элемент является образом элемента 6, 7?

Решение.

Рассмотрим первый элемент из множества $\mathrm{A}, x = 1$,остаток при делении его на два имеется, действительно $\frac{x}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$,то есть истина $\exists y = 1\epsilon B$,аналогично рассуждая имеем $x = 2\epsilon A, \frac{x}{2} = \frac{2}{2} = 1$ –остатка нет, то есть ложь $\exists y = 2\epsilon B$ и так далее.

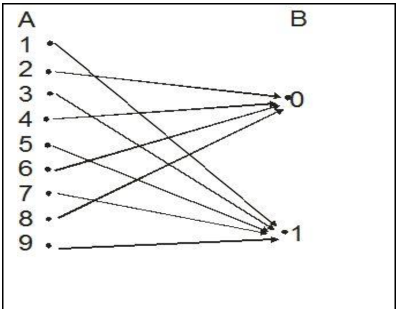


Рис.1.8

Изобразив заданное соответствие(рис.1.8), видим, что:

1) каждый элемент множества A, является точкой исхода;

2) у каждой точки исхода, имеется только по одной точке прибытия. (Значит, указанное соответствие является отображением множества A во множество B).

Так как во множестве B есть элемент (например, 0), для которого прообразом (элементом $x \in A$) является несколько элементов из A, то это отображение не является взаимно-однозначным, оно является сюръективным.

Образом числа 6 является число 0 $\in B$, образом числа 7 – число $1 \in B$.

Пример 1.40. Пусть X – множество треугольников плоскости, $Y = R$. Выберем единицу измерения длин и сопоставим каждому треугольнику число – периметр этого треугольника. Будет ли это соответствие отображением? Какой тип у заданного отображения?

Решение.

Каждый треугольник на плоскости имеет однозначно определенный периметр. Поэтому каждому треугольнику из множества X сопоставляется единственное число $Y = R$, то есть это соответствие является отображением X в R. При этом у двух разных треугольников может быть одинаковый периметр. Другими словами, отображение не является взаимно однозначным, сюръективное отображение

Пример 1.41. $X = \{0,1,2,3,4\} \subset N, Y = Z$.

Отображение $f : X \to Y$ задано следующим образом: $x \to y = f(x) = 2x - 1$. Определить тип этого отображения.

Решение.

Для каждого $x \in \mathrm{X}$ найдем образ $\mathrm{y} \in \mathrm{Y}$. Соответствующие результаты запишем в таблицу:

x	1	2	3	4
$y = f(x)$	1	3	5	7

Множество значений отображения f есть множество $\mathrm{A} = \{-1,1,3,5,7\} \subset Y$. У каждого элемента $y \in Y$ в X имеется только по одному прообразу. Следовательно, отображение взаимно однозначное, а именно биекция.

1.8. Отношения над множествами и их виды.

Отношения – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества. Наиболее изученными являются унарные и бинарные отношения.

Унарные (одноместные) отношения отражают наличие какого-то определенного свойства R у элемента множества A.Все элементы из множества A,которые обладают свойством R,образуют некоторое подмножество, называемое унарным отношением R.

Например, множество A= {Юрий, Инна, Игорь, Елена, Ирина} — это компания друзей. Если свойство R -«быть девушкой», то унарное отношение

множество R = {Инна, Елена, Ирина}.

Бинарным (двухместным) отношение между элементами множеств A и B называется любое подмножество R множества декартова произведения $A \times B$,то есть $R \subset A \times B$.

Таким образом, бинарные отношения используются для определения взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов множества R.

Если R - некоторое бинарное отношение и пара $(a;b)$ принадлежит этому отношению ($(a;b)\epsilon R$), то говорят, что a и b связаны бинарным отношением R.

Обозначение: $a\,Rb$- элементы a иb связаны отношении R.

Таким образом, $a\,Rb=(a;b)\epsilon R\subset A\times B$.

Если $R\subset A\times A$,то говорят, что бинарное отношение определено на множестве A.

Примерами множеств с введёнными на них бинарными отношениями являются графы и частично упорядоченные множества.

Областью определения бинарного отношения R называется множество элементов области определения(отправления), которые присутствуют в парах отношения R.

Обозначение:$\mathrm{Dom}\,R=\{a\epsilon A:\exists b\epsilon B((a;b)\epsilon R)\}$

Областью значения бинарного отношения R называется множество элементов области значения(прибытия), которые присутствуют в парах отношения R.

Обозначение:$\mathrm{Im}\,R=\{b\epsilon B:\exists a\epsilon A((a;b)\epsilon R)\}$.

Пусть R есть отношение между A и B,$R\subset A\times B$.

Введем следующие понятия:

$R^{-1} = \{(a;b):(b;a)\epsilon R\}$-обратное отношение;

$\bar{R} = \{(a;b):(a;b) \notin R\} \subset A \times B$-дополнения отношения;

$I = \{(a;a): a\epsilon A\} \subset A^2$-тождественное отношение;

$U = \{(a;b): a\epsilon A, b\epsilon B\} = A \times B$-универсальное отношение.

Пример 1.42. Дано множество $A = \{-1,0,1\}$. Найти бинарное отношение $R \subset A \times A$, $\mathrm{Dom}\, R, \mathrm{Im}\, R, R^{-1}, \bar{R}, I$,если R означает: **а)** «быть строго больше»; **б)** «быть равными».

Решение.

В данном случае, бинарное отношение определено на множестве A,поэтому для начала найдем множество $A^2 = A \times A$:

$$A \times A = \{-1,0,1\} \times \{-1,0,1\} =$$
$$= \{(-1;-1),(-1;0),(-1;1),(0;-1),(0;0),(0;1),(1;-1),(1;0),(1;1)\}.$$

а) Бинарное отношение R «быть строго больше» запишем в виде

$R = \{(a;b): a,b\epsilon A, a > b\} \subset A^2$. Следовательно,

$R = \{(0;-1),(1;-1),(1;0)\}$ -в каждой паре первый элемент больше второго;

$R^{-1} = \{(-1;0),(-1;1),(0;1)\}$- множество обратных пар (обратное отношение);

$\mathrm{Dom}\, R = \{0,1\}$- множество элементов области отправления, которые присутствуют в парах отношения R (область определения отношения R);

$\operatorname{Im} R = \{-1{,}0\}$ –множество элементов области прибытия, которые присутствуют в парах отношения R (область значений отношения R);

$\bar{R} = \{(-1;-1),(-1;0),(-1;1),(0;0),(0;1),(1;1)\}$-множество пар $\subset A \times A$ не входящих в R (дополнения отношения R);

$I = \{(-1;-1),(0;0),(1;1)\}$ -множество пар $(a;a) \subset A \times A$,где $a \epsilon A$ (тождественное отношение R).

б) Бинарное отношение R -«быть равными» запишем в виде

$R = \{(a;b): a,b\epsilon A, a = b\} \subset A^2$. Следовательно,

$R = \{(-1;-1),(1;1),(0;0)\}$ в каждой паре первый и второй элемент равны.

$R^{-1} = R = \{(-1;-1),(1;1),(0;0)\}$,

$\operatorname{Dom} R = \operatorname{Im} R = \{-1{,}0{,}1\}$,

$\bar{R} = \{(-1;0),(-1;1),(0;-1),(0;1),(1;-1),(1;0)\}$,

$I = R = \{(-1;-1),(0;0),(1;1)\}$. Таким образом, отношение R тождественное.

Отношения, определенные на конечных множествах, можно задать **матрицей бинар-**

ного отношения– бинарному отношению $R \subset A \times A$, где $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$соответствует квадратная матрица порядка n, в которой элементc_{ij}, стоящий на пересечении iстроки иj столбца, равен 1, если между a_i иa_j имеет место отношение R, или нулю, если оно отсутствует, то есть$c_{ij} = \begin{cases} 1, a_i R a_j \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$;

Пример 1.43. Дано множество

$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.Составить матрицу отношения R, если:

$R = \{(a,b): a, b \epsilon A, a + b - \text{нечётное число}\}$.

Решение.

Бинарному отношению $R \subset A \times A$, соответствует квадратная матрица порядка $n = 7$, где $c_{ij} = 1$,если сумма чисел $a + b$ нечётное число и $c_{ij} = 0$ в противном случае. Таким образом, получим матрицы бинарного отношенияR:

R	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	1	0	1	0	1	0	1
7	0	1	0	1	0	1	0

Пример 1.44. Пусть A – алфавит (множество

всех букв в русском алфавите). Задано множество М= {а,б,в,г,д,е,и,к,л} – подмножество множества А.

Задать матрицей следующее отношение:

$R = \{(a,b): a, b\epsilon A, a - \text{согласная}, b - \text{гласная}\}$.

Решение.

В соответствии с определением матрицы бинарного отношения имеем:

R	а	б	в	г	д	е	и	к	л
а	0	0	0	0	0	0	0	0	0
б	1	0	0	0	0	1	1	0	0
в	1	0	0	0	0	1	1	0	0
г	1	0	0	0	0	1	1	0	0
д	1	0	0	0	0	1	1	0	0
е	0	0	0	0	0	0	0	0	0
и	0	0	0	0	0	0	0	0	0
к	1	0	0	0	0	1	1	0	0
л	1	0	0	0	0	1	1	0	0

Свойства бинарных отношений.

Перечислим ряд важных свойств, которыми могут обладать бинарные отношения.

1) Рефлективность. Бинарное отношение R на множестве A называется **рефлексивным**, если для любого элемента $x\epsilon A$ выполняется xRx.

Кратко это можно записать так $\forall \boldsymbol{x\epsilon A}\ (\boldsymbol{xRx})$

Например, A -множество прямых, R -отношение параллельности. Очевидно, отношение R рефлексивно, так как любая прямая параллельна самой себе.

2) Антирефлексивность. Бинарное отношение R на множестве A называется антирефлексивным, если для любого элемента $x\epsilon A$ не выполняется xRx.

Краткая запись $\forall \boldsymbol{x\epsilon A}\ (\overline{\boldsymbol{xRx}})$**.**

Например, A -множество целых чисел, R - отношение «быть меньше». Очевидно, отношение $R -$ антирефлексивно , так как для любого элемента $x\epsilon A$ не выполняется xRx,элемент x не является меньше x (самого себя).

3)Симметричность. Бинарное отношение R на множестве A называется симметричным, если для любых $x, y\epsilon A$, бинарное отношение выполняется в обе стороны, то есть из xRy следует $yR\ x$.

Краткая запись, $\forall \boldsymbol{x, y\epsilon A}\ (\boldsymbol{xRy} \Rightarrow \boldsymbol{yR\ x})$**.**

Например, A -множество студентов некоторого техникума, R- отношение «учиться в одном техникуме». Отношение Rсимметрично, так как для пары элементов (Иванов, Петров) данного бинарного отношения выполняется: «Иванов учиться в одном техникуме с Петровым». Очевидно, что для пары (Петров, Иванов) отношение так же выполняется: «Петров учиться в одном техникуме с Ивановым».

4) Антисимметричность. Бинарное отношение

R на множестве A называется антисимметричным, если ни для каких различающихся элементов $x, y\epsilon\ A$, не выполняется одновременно xRy и $yR\ x$. Кратко это можно записать так $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\epsilon\ \boldsymbol{A}\ (\boldsymbol{xRy} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{yR\ x}})$

Например, A -множество сотрудников некоторой организации, R -отношение «быть начальником». Отношение, R -антисимметрично, так как для пары элементов (Рыжков, Зуев) данного бинарного отношения, выполняется: «Рыжков начальник Зуева». Очевидно, что для пары (Зуев, Рыжков) отношение не выполняется: «Зуев начальник Рыжкова».

5) Транзитивность. Бинарное отношение R на множестве A называется транзитивным, если для любых $x, y, z\epsilon\ A$, из того, что выполняется xRy и yRz ,следует xRz.То есть, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\epsilon\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{xRy} \wedge \boldsymbol{yRz} \Rightarrow \boldsymbol{xRz})$

Например, A -множество братьев, R -отношение «быть братом». Отношение R -транзитивно. Действительно, пара элементов (Иван, Василий) - «Иван брат Василия» и пары (Василий, Дмитрий)- «Василий брат Дмитрия», делают справедливым отношение (Иван, Дмитрий)- «Иван брат Дмитрия».

Пример 1.45. Бинарное отношение $R = \{(1;1), (1;2), (2;3), (2;2), (2;4)\}$ задано на множестве $A = \{1,2,3,4\}$, определить его свойства.

Решение.

1)Рефлексивность $\forall\, x\epsilon\, A, (x;x)\epsilon R$ –не выполняется. Так как, например $x = 3\epsilon\, A$, а пара $(3;3) \notin R$. Бинарное отношение не является рефлексивным;

2)Антирефлексивность $\forall\, x\epsilon\, A, (x;x) \notin R$ - не выполняется. Так, например, $x = 1$, пара $(1;1)\epsilon R$. Бинарное отношение не является антирефлексивным;

3)Симметричность $\forall\, x, y\epsilon\, A, xRy \;\Leftrightarrow\; yR\,x$- не выполняется.

Например, $x = 1\epsilon\, A\,, y = 2\,\epsilon\, A$,пара $(1;2)\epsilon R$, а пара$(2;1) \notin R$ не принадлежит множеству R. Бинарное отношение не является симметричным.

4)Антисимметричность элементов $x, y\epsilon\, A$,означает,что не выполняется одновременно xRy и $yR\,x$, так как

для пар $(1;2), (2;3), (2;4)$ не существует обратных в данном отображении, то бинарное отношение является антисимметричным.

5)Транзитивность $\forall\, x, y, z\epsilon\, A$, из того, что xRy и yRz $\Leftrightarrow\; xRz$ - не выполняется. Например, при $x = 1\epsilon\, A\,, y = 2\,\epsilon\, A, z = 3$ пара $(1;2)\epsilon R$ и пара $(2;3)\,\epsilon R$, а пара $(1;3) \notin R$. Бинарное отношение не является транзитивным.

Таким образом, заданное бинарное отношение обладает только одним свойством- антисимметричности.

Пример 1.46. Определить свойства бинарного отношения R -«быть делителем», заданном на множестве натуральных чисел N .

Решение.

Отношение R запишем в виде $R = \{(a;b): a \text{ делитель } b\} \subset N \times N$.

1)Отношение R - рефлексивно, так как любое число a является делителем самого себя и пары $(a;a)$ являются элементами отношения R;

2) Отношение $R-$ антисимметрично, так как если$(a;b) - a$ делитель b,не является верным ,что b делитель a например, для пары$(2;4)$ -2 является делителем числа 4 (действительно,4 делится на 2),но для пары$(4;2)$ -4 не является делителем (2 не делится на 4 нацело),то есть пара$(2;4) \in R, (4;2) \notin R$;

3) Отношение $R-$ транзитивно, так как если a делитель b и b делитель c,то a делитель c, то есть $\forall\, a, b, c \epsilon N$ из того, что выполняется aRy и yRz ,следует xRz.

Например, $a = 2, b = 4, c = 24 \epsilon N$, 2 делитель 4 $(4:2 = 2)$и 4 делитель 24$(24:4 = 6)$,то 2 делитель

24 $(24:2=12)$.

Виды отношений.

Кам мы уже знаем, отношения могут обладать (или не обладать, в зависимости от задачи) следующими свойствами: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность.

Существуют два основных вида отношений: отношение эквивалентности, отношение порядка (частичного порядка, строгого порядка, линейного порядка).

Если бинарное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно одновременно, то оно называется **отношением эквивалентности (эквивалентностью)**.

Пример 1.47. Показать, что отношение R - «быть равным» на множестве натуральных чисел является отношением эквивалентности.

Решение.

Введем множество N– множество натуральных чисел и отношение $R = \{(a,b): a, b \epsilon N, a = b\}$.Это отношение будет отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно одновременно. Покажем это:

1) R -рефлексивно, так как для любого натурального числа $a \epsilon N$ справедливо aRa, так как любое число a является равным самому себе и пары $(a; a)$ являются элементами отношения R;

2) R -симметрично, так как для любых чисел $a, b \in N$, таких что выполняется $aRb \Leftrightarrow bR\,a$, то есть бинарное отношение выполняется в обе стороны(если элемент a равен b, то и b равен a);

3) R- транзитивно, так как для любых чисел a, b, $c \in N$, таких, что $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ (если $a{=}b$ и $b{=}\,c$, то $a{=}\,c$).

Очень часто на некотором множестве задан порядок элементов, одни элементы в каком-то смысле превосходят другие, в соответствии с этим существуют разные типы порядков: частичный, строгий.

Бинарное отношение на некотором множестве называется **отношением порядка**, если оно транзитивно и антисимметрично. Например, множество всех пар $(a; b)$ людей, для которых a старше b, является отношением порядка. Множество, на котором введено отношение порядка, называют упорядоченным.

Бинарное отношение, которое одновременно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно называется **отношением частичного (нестрогого) порядка**. Очевидно, что бинарное отношение R «быть не меньше» $R = \{(a; b): a, b \epsilon A, a \geq b\}$) определяет нестрогий порядок.

Бинарное отношение называется отношением **строгого порядка**, если оно одновременно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Отношение нестрогого порядка обозначают символом $\leqslant$.

Отношение строгого порядка обозначают символом <.

Очевидно, что бинарное отношение R «быть не меньше» ($R = \{(a; b): a, b \epsilon A, a > b\}$)является отношением строгого порядка. Заметим, что отношение «больше или равно» и «меньше или равно» — нестрогого, причем линейного порядка.

Пример 1.48. Показать, что отношение R -«быть начальником», заданное на множестве сотрудников устанавливает частичный порядок.

Решение.

Зададим множество сотрудников $A = \{x : x - \text{сотрудник}\}$ и бинарное отношение $R = \{(a; b) : a, b \epsilon A, a \text{ начальник } b\}$.

Для того, чтобы данное отношение устанавливало частичный порядок, необходимо, чтобы оно было одновременно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, покажем это:

1)отношение -рефлексивно, так как для любого $a \in A$, справедливо aRa, то есть любой сотрудник a является начальником сам себе и пары $(a; a)$ являются элементами отношения R;

2) отношение R - антисимметрично, так как из того, что « a начальник b» не следует, что «b начальник a »;

3) отношениеR - транзитивно, так как для любых a, b, c ∈ таких, что $(a; b) \in R$ (a является начальником b) и $(b; c) \in R$ (b является начальником c), следует, что $(a; c) \in R$ (a является начальником c).

Мы показали, что данное отношение является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным, следовательно является отношением частичного порядка.

Пример 1.49. Задать бинарное отношение R - «предшествования букв» на множестве букв русского алфавита и показать, что отношение устанавливает строгий порядок.

Решение.

$A = \{a: a - \text{буква русского алфавита}\}$,

$R = \{(a; b): a, b \epsilon A, a \text{ предшествует } b\}$. Отношение R устанавливает строгий порядок,так как является одновременно антирефлексивным, антисимметричным и транзитивным, покажем это:

1)отношение R -антирефлексивно, $\forall\ a \epsilon\ A, (a; a) \notin R$, так как любая буква не является предшествующим самой себе;

2) отношение R - антисимметрично, так как из того ,что выполняется aRb- « a предшествует b» не выполняется bRa- « b не является предшествующей a»;

3)отношение R - транзитивно, $\forall a, b, c \epsilon\ A(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$,действительно из того, что $aRb - a$предшествуетb и bпредшествуетc , следует ,что aпредшествуетc.

Данное отношение является антирефлексивным, антисимметричным и транзитивным, следовательно является отношением строгого порядка.

Пример 1.50. Показать, что отношение «не младше» на множестве некоторой группы людей является отношением частичного порядка. Для соблюдения всех тонкостей скажем, что их даты рождения различны.

Решение

Данное отношение устанавливает частичный порядок, так как является одновременно рефлексивным, антисимметрично и транзитивным, покажем это:

отношение транзитивно (если человек a не младше человека b, а человек b не младше человека С, то человек a не младше человека c);

антисимметрично (если человек a не младше человека b и человек b не младше человека a, то это один и тот же человек);

рефлексивно (каждый человек не младше самого себя).

Задания для самостоятельного решения.

1. Задать с помощью характеристического свойства элементов множество M всех положительных чисел.

2. Задать перечислением элементов множества, заданные указанием характеристического свойства элементов: $M = \{x : x \in N, x < 5\}$.

3. Прочитайте следующие записи и перечислите элементы каждого из множеств:

а) $A = \{x : x \in N, -2 \le x \le 5\}$;**б)** $B = \{x : x \in Z, |x| < 3\}$.

4.Перечислить все подмножества множества $A = \{a, b, c\}$.

5.Равны ли множества A и B :**а)** $A = \{x : x$ -чётное положительное целое число, меньшее семи $\}$, $B = \{2,4,6\}$;**б)** $A = \{x : x \in Z, 1 < x < 4\}$,
$B = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$.

6. Задайте множество другим способом (если это возможно):

а) $A = \{x : x \in N,\ x \le 9\}$;**б)** $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$;**в)**
$A = \{x : x^2 - 3 = 0, x \in R\}$.

7. X – множество млекопитающих, A = {львы, тигры, волки, лисы}, B = {медведи, волки, орлы, страусы, обезьяны, киты}. Какие из данных множеств являются подмножеством множества X ?

8. Какие из следующих множеств пусты: а) Множество людей на Марсе; б) множество городов России с населением более 1 млн.; в) множество европейских государств, название которых начинается с буквы Е; г) множество натуральных чисел, меньших 1?

9. Установите, принадлежат ли множеству $B=\left\{x: x=\dfrac{n^2+9}{n^2}, n\in N\right\}$, числа 2, 5, -7?

10. Задайте числовое множество описанием характеристического свойства элементов: **а)** $(0;11)$; **б)** $[-12{,}3;1{,}1)$; **в)** $[-5;3]$; **г)** $(-\infty;-13{,}22]$;

11. Найти $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B, B\setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\Delta B$, если:

а) $U=\{-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5\}$, $A=\{-4,-2,1,3\}$,

$B=\{x:(x-1)(x+2)(x^2-8x+16)=0\}$;

б) $U=\{a,в,c,d,e,f\}, A=\{a,в,c\}, B=\{c,d,e,f\}$;

в) U - множество точек числовой прямой $(-\infty;+\infty)$, A - множество точек отрезка $[-1;3]$, B - множество точек полуинтервала $(1;5]$.

12. Пусть U – универсальное множество всех книг в мире. А – множество книг, имеющихся в донской публичной библиотеке; В – множество книг о компьютерах; С – множество книг на иностранных языках; Д - множество книг издательства «Наука»; Е - множество книг в твердом переплете. Каков содержательный смысл следующих множеств: а) $(A\cup B)\cap C$; б) $\bar{B}\setminus\bar{C}$;в)

$(A \cup B) \cap A$.

13. Определить множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \triangle B$, если:

а) $A = \{x: x^2 - 3x < 0\}, B = \{x: x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$;

б) $A = \{x: |x - 1| < 2\}, B = \{x: |x - 2| < 3\}$.

14. U - множество всех учащихся и преподавателей некоторого техникума, A -множество всех преподавателей, B -множество учащихся, успевающих по всем предметам на отлично, C -множество неуспевающих учеников, D- множество учащихся в группе №1. Найти: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $B \cap D$, $D \setminus C$, $C \setminus D$, $A \cup \overline{C}$, $A \cup (B \cap D)$.

15. Найти элементы множества $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, если $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A_1 = \{1,2,3,4.5\}$, $A_2 = \{2,3,4,5,6,7\}$, $A_3 = \{3,4,5,7,8\}$.

16. Найти элементы множеств $A \cup B \cup C$ и $A \cap B \cap C$, если A -множество точек полуинтервала $[1;5)$, B -множество точек отрезка $[0;7]$, C -множество точек полуинтервала $[-1;3)$.

17. Найти элементы множества

$\overline{B}\cap C\cup\overline{A}\cap C\cap D\cup A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$, если

$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{1,2,4.5\}, B=\{2,3,4,5,9\},$

$C=\{0,3,4,5,6,9\}, D=\{3,4,5,6,7\}.$

18. Доказать равенство с помощью соотношений алгебры множеств:

а) $\overline{A\cup\overline{B}}=\overline{A}\cap B$; **б)** $(A\cup\overline{B})\cap\overline{A}=\overline{A}\cap\overline{B}$;

в) $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$; **г)** $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$;

д) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C).$

19. Найти элементы множества $A\times B$, если:

а) $A=\varnothing, B=\{1\}$; **б)** $A=B=\{0,1\}$; **в)** $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$;

г) $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2\}$.

20. Пусть $X=\{a,c\}$, $Y=\{a\}$. Найдите множества $X\times Y, Y^2, X\times Y\times X$.

21. Декартово произведение имеет вид $A\times B=\{(2;q),(4;q),(2;p),(4;p),(2;y),(4;y),(2;z),(4;z)\}$. Чему равны множества A и B ?

22. X – множество точек отрезка [0; 2], Y – множество точек отрезка [2; 3]. Найти: $X\times Y, Y\times X$.

23. Даны множества $A=\{x:1<x\leq 5, x\in N\}$, $B=\{x:1<x<3, x\in N\}$, $C=\{x:x^2-9=0, x\in N\}$. Из каких элементов состоят множества: **а)** $(A \cap B) \cup (B \cup C)$;

б) $A \times C$; **в)** $A \times B \times C$.

24. $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,4\}$, $A_3 = \{2,4\}$. Найти $A_1 \times A_2 \times A_3$.

25. Выяснить, верно ли равенство $C \times (B \setminus A) = (C \times B) \Delta (C \times (A \cap B))$, для множеств $A = \{a, d\}$, $B = \{b, d\}$, $C = \{c\}$.

26. Чему равна мощность множества A -множества букв русского алфавита**.**

27. Соедините следующие пары множеств знаком «=», если они равны, и знаком «~», если они эквивалентны: **а)** A – множество колец на пне дерева, B – множество лет, прожитым деревом; **б)** A - множество букв в слове «математика», B = {а, е, и, к, м, т};

в) A – множество углов треугольника, B – множество сторон треугольника.

28. Покажите, что множество счётно: **а)** множество неотрицательных целых чисел; **б)** множество кубов натуральных чисел.

29. Покажите, что множество A нечётных натуральных чисел счётно.

30. Даны два множества: A = {Саша, Петя, Иван, Катя, Вика} и B= {Суханов, Петров, Куликова, Васильева, Ивлиев}. Зададим соответствие, при котором каждому имени сопоставляется фамилия начинающаяся на туже букву, что и имя. Будет ли это соответствие отображением? Какого типа?

31. Между множеством имя $X =$ {Андрей, Борис, Михаил, Алексей, Константин, Василий, Валентина, Клара, Семен, Мария, Софья, Олег, Трофим, Юрий, Яков} и множеством Y- букв русского алфавита установлено соответствие, при котором каждому имени сопоставляется его первая буква. Будет ли это соответствие отображением X в Y? Если "да", то какого типа? Найдите образ множества X.

32. Даны два множества: A = {Париж, Москва, Варшава, Лондон} и B = {Франция, Россия, Англия, Польша, Швеция}. Зададим соответствие между ними: «город $x \epsilon A$ находится в стране $y \epsilon B$». Будет ли это соответствие отображением? Какого типа?

33.Дано множество $M = \{1,2,3\}$.Найти бинарное отношение $R \subset M \times M$,если R -означает: **а)** «быть больше»;

б) «быть равными»; **в)** «быть меньше»; г**)** «быть не больше».

34. Дано множество $M = \{3,4,5,6\}$.Записать бинарное отношение R - «быть делителем» перечислением его элементов. Найти $\mathrm{Dom}\, R, \mathrm{Im}\, R, R^{-1}, \bar{R}, I$.

35. Дано множество M - цифр. Найти бинарное отношение $R = \{(a, b): a, b \epsilon M, a - b = 5\}$.

36. Дано М- множество действительных чисел. Задать бинарное отношение

$R = \{(a; b): a, b \in M, a^2 + b^2 = 1\}$ перечислением его элементов.

37.Задано бинарное отношение $R = \{(a; b), (a; c), (c; c)(c; d)\}$. Найти $\mathrm{Dom}\, R, \mathrm{Im}\, R, R^{-1}$.

38.Дано множество $M = \{1,2,3,4\}$и бинарное отношение R - «иметь общий делитель отличный от единицы». Найти $\mathrm{Dom}\, R, \mathrm{Im}\, R, R^{-1}, \bar{R}, I$.

39.Составить матрицу отношения $R = \{(a, b): a, b \epsilon A, a + b - \text{делитель } a \cdot b\}$,гд $A = \{1,2,3,4,5,6\}$.

40.Определить для каких пар чисел $(a; b)$ выполняется отношение R: **а)** «находиться на одинаковом расстоянии от начала координат»; **б)** « находиться на разном расстоянии от начала координат»; в) «быть симметричным относительно оси Ox ».

41. На множестве $M = \{1,2,3,4\}$ определены бинарные отношения: **а)** $R = \{(a;b): a,b \in M, a+b - \text{чётно}\}$; **б)** $R = \{(a;b): a,b \in M, a \cdot b - \text{нечётно}\}$. Задать эти бинарные отношения перечислением элементов, указать свойства этих бинарных отношений.

42. Определить свойства бинарного отношения перпендикулярности прямых.

43. Дано множество натуральных чисел N.Показать, что бинарное отношение R является отношением нестрогого порядка: **а)** отношение «$\leq$»; **б)** отношение «$\geq$».

44. Дано множество целых чисел Z.Показать, что бинарное отношение R является отношением строгого порядка: **а)** отношение «быть не больше»; **б)** отношение «быть не меньше».

45.Даны бинарные отношения: **а)** R -«быть братом» на множестве братьев А; **б)** «многоугольник М подобен многоугольнику N» на множестве многоугольников; **в)** на множестве прямых пространства отношение «совпадают»**.** Установить, являются ли заданные отношения отношениями эквивалентности.

Ответы:

1. $M = \{x : x \in R, x > 0\}$ **.2.** $M = \{1,2,3,4\}$.

3.а) $A = \{1,2,3,4,5\}$; **б)** $B = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

4. $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$.

5.а) $A = B = \{2,4,6\}$;**б)** $A = B = \{2,3\}$ **.6.** $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$;

б) $A=\{x: x\in Z, |x|\le 4\}$;**в)** $A=\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$.**7.** $A\subset X$.

8. Пустые множества а), в), г).

9. $2\in B, 5\notin B, -7\notin B.$

10.а) $A=\{x: 0<x<11, x\in R\}$;**б)** $B=\{x: -12{,}3\le x<1{,}1, x\in R\}$;

в) $C=\{x: -5\le x\le 3, x\in R\}$;**г)** $D=\{x: x\le -13{,}22, x\in R\}$.

11.а) $A\cup B=\{-4,-2,1,3,4\}$, $A\cap B=\{-2,1\}$,

$A\setminus B=\{-4,3\}, B\setminus A=\{4\}$, $\overline{A}=\{-5,-3,-1,2,4,5\}$,

$\overline{B}=\{-5,-4,-3,-1,2,3,5\},\ A\Delta B=\{-4,3,4\}$;

б) $A\cup B=\{a,в,c,d,e,f\}$, $A\cap B=\{c\}$, $A\setminus B=\{a,в\}, B\setminus A=\{d,e,f\}$,

$\overline{A}=\{d,e,f\}$, $\overline{B}=\{a,в\}$, $A\Delta B=\{a,в,d,e,f\}$;**в)** $A\cup B=[-1;5]$,

$A\cap B=(1;3]$, $A\setminus B=[-1;1], B\setminus A=(3;5], A\oplus B=[-1;1]\cup(3;5]$

12.а) $(A\cup B)\cap C$ -множество книг донской публичной библиотеки, а также книг о компьютерах издательства «Наука» в твердом переплете; **б)** $\bar{B}\setminus\bar{C}=\bar{B}\cap C$ - множество книг не о компьютерах на иностранных языках; **в)** $(A\cup B)\cap A=A$ -множество книг донской публичной библиотеки ;

13.а)

$A\cup B=\{x: x\epsilon(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(3;+\infty)\}, A\cap B=\{x: x\epsilon(0;1)\}, A\setminus B=\{x: x\epsilon[1;3]\},$
$B\setminus A=\{x: x\epsilon(-\infty;0]\cup[3;+\infty)\}, A\bigtriangleup B=\{x: x\epsilon(-\infty;0]\cup[1;+\infty)\}$
;**б)** $A\cup B=\{x: x\epsilon(-1;5)\},$

$A\cap B=\{x: x\epsilon(1;3)\}, A\setminus B=\emptyset, B\setminus A=\{x: x\epsilon(-\infty;0]\cup[3;+\infty)\}, A\bigtriangleup B=\{x: x\epsilon(-\infty;0]\cup[1;+\infty)\}$

14. $\overline{A}$-множество всех учащихся без преподавателей; $\overline{B}$ - множество преподавателей и учащихся ,кроме успевающих по всем предметам на отлично; $B \cap D$-множество отличников ,обучающихся в группе №1; $D \setminus C$-множество успевающих учеников группы №1; $C \setminus D$- множество неуспевающих учащихся всех групп, кроме первой. $A \cup \overline{C}$- множество преподавателей и всех успевающих учащихся ; $A \cup (B \cap D)$- множество преподавателей и отличников из группы №1;

15. $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{3,4,5\}$.**16.** $A \cup B \cup C = \{x : x \in [-1;7]\}$, $A \cap B \cap C = \{x : x \in [1;3)\}$.**17.** $\overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap C \cap D \cup A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \{0,1,3,6\}$

19. а) $A \times B = \varnothing$;**б)** $A \times B = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$;

в) $A \times B = \{(1;a),(1;b),(2;a),(2;b),(3;a),(3;b)\}$;**г)** $A \times B =$ $= \{(a;1),(a;2),(b;1),(b;2),(c;1),(c;2)\}$.**20.** $X \times Y = \{(a;a),(c;a)\}$; $Y^2 = \{(a;a)\}$; $X \times Y \times X = \{(a;a;a),(c;a;a),(a;a;c),(c;a;c)\}$.**21.** $A = \{2,4\}$, $B = \{q, p, y, z\}$.**22.** $X \times Y$ -множество точек квадрата с вершинами $(0;2),(0;3),(2;2),(2;3)$; $Y \times X$ - множество точек квадрата с вершинами $(2;0),(3;0),(2;2),(3;2)$.**23.**

а) $(A \cap B) \cup (B \cup C) = \{2,3\}$; **б)** $A \times C = \{(2;2),(3;2),(4;2),(5;2)\}$;

в) $A \times B \times C = \{(2;2;3),(3;2;3),(4;2;3),(5;2;3)\}$.

24. $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(1;1;2),(1;1;4),(1;4;2),(1;4;4),(2;1;2),(2;1;4),(2;4;2),(2;4;4)\}$.

25.Верно.**26.** $|A| = 33$.**27.а)** $A = B$;**б)** $A = B$;**в)** $A \sim B$.**30.**биективное отображение.**31.**сюръективное отображение.**32.**инъективное отображение.**33.а)** $R = \{(3;2),(3;1),(2;1)\}$;**б)** $R = \{(1;1),(2;2),(3;3)\}$;**в)** $R = \{(1;2),(1;3),(2;3)\}$; **г)** $R = \{(1;1),(1;2),(1;3),(2;2),(2;3),(3;3)\}$.

34. $R = \{(3;3),(3;6),(4;4),(5;5),(6;6)\}$,
$\mathrm{Dom}\, R = \{3,4,5,6\}, \mathrm{Im}\, R = \{4,5,6\}$,
$R^{-1} = \{(3;3),(6;3),(4;4),(5;5),(6;6)\}$,
$\bar{R} = \{(3;4),(3;5),(4;3),(4;5),(4;6),$
$(5;3),(5;4),(5;6),(6;3),(6;4),(6;5)\}$,
$I = \{(3;3),(4;4),(5;5),(6;6)\}$.
35. $R = \{(5;0),(6;1),(7;2),(8;3),(9;4)\}$.
36. $R = \{(0;1),(1;0),(0;-1),(-1;0),(-0{,}6;-0{,}8),$
$(0{,}6;-0{,}8),(-0{,}6;0{,}8),(0{,}6;0{,}8)\}$.
37. $\mathrm{Dom}\, R = \{a,c\}, \mathrm{Im}\, R = \{b,c,d\}$,
$R^{-1} = \{(b;a),(c;a),(c;c),(d;c)\}$.
38.$R = \{(2;2),(2;4),(3;3),(4;2),(4;4),(5;5)\}$,
$R^{-1} = \{(2;2),(4;2),(3;3),(2;4),(4;4),(5;5)\}$,
$\mathrm{Dom}\, R = \{2,3,4,5\}, \mathrm{Im}\, R = \{2,3,4,5\}$,
$\bar{R} = \{(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(2;1),$
$(2;3),(3;1),(3;2),(3;4),(4;3),(4;1)\}$,
$I = \{(1;1),(2;2),(3;3),(4;4)\}$.

40. а) отношение «находиться на одинаковом расстоянии от начала координат» – выполняется для пар точек находящихся на одной и той же окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = 1$,то есть $R = \{(x;y): x, y \epsilon M, x^2 + y^2 = 1\}$, **б)**отношение «находиться на разном расстоянии от начала координат» выполняется для тех и только тех пар точек, для которых $x^2+y^2 \neq 1$,то есть

$R=\{(x;y): x,y\epsilon M, x^2+y^2\neq 1\}$, **в)**отношение «быть симметричным относительно оси Ox» выполняется для всех пар точек (x_1,y_1) и (x_2,y_2) , удовлетворяющих условию $x_1=x_2, y_1=-y_2$,то есть

$R=\{(x;y): x_1,x_2,y_1,y_2\epsilon M, x_1=x_2, y_1=-y_2\}$.

41.а)

$R=\{(1;1),(1;3),(2;2),(2;4),(3;1),(3;3)$

$(4;2),(4;3),(4;4)\}$-рефлексивно, симметрично.

б) $R=\{(1;1),(1;3),(3;1),(3;3)\}$-антирефлексивно, антисимметрично бинарное отношение.

42. антирефлексивное, симметричное бинарное отношение.**43. а)** $R=\{(x;y): x,y\epsilon M, x\leq y\}$, -нестрогий порядок; **б)** $R=\{(x;y): x,y\epsilon M, x\geq y\}$, -нестрогий порядок.**44. а)** $R=\{(x;y): x,y\epsilon M, x<y\}$ -строгий порядок; **б)** $R=\{(x;y): x,y\epsilon M, x>y\}$, -нестрогий порядок.**45. а)**не является отношением эквивалентности ,так как не является рефлексивным, симметричным и транзитивным одновременно; **б)** является отношением эквивалентности ,так как является рефлексивным, симметричным и транзитивным; **в)** является отношением эквивалентности ,так как рефлексивно, симметрично и транзитивно.

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ.

Математическая логика вместе с теорией множеств является фундаментом, на котором построена вся современная математика. С прикладной точки зрения математическая логика составляет основу для построения языков программирования.

2.1. Алгебра (логика) высказываний: высказывания и операции над ними.

Основными понятиями логики высказываний являются высказывания и логические связки (операции над высказываниями).

Под **высказыванием** обычно понимают повествовательное предложение, утверждающее, что-либо о чем-либо, о котором мы можем сказать истинно оно или ложно. Логика высказываний рассматривает эти предложения не с точки зрения их смысла, содержания, а только с точки зрения их истинности или ложности. Таким образом, логическими значениями высказываний являются истина и ложь.

Приведем **примеры высказываний:**

1. «Париж - столица Англии» (высказывание ложное);

2. «Два умножить на два равно четырём» (высказывание истинное);

3. «Два меньше трех» (истинное);

4. «В неделе десять дней» (ложное);

5. «x целое число меньше единицы» (не является высказыванием, так как имеет переменную);

6. «Слава, совет науке» (не является высказыванием, так как не повествовательное предложение);

7. «Карась не рыба» (ложное).

Если в предложении отсутствует смысл, то нельзя сказать истина это или ложь. Высказывания, представляющие собой одно утверждение, принято называть **простым** или **элементарным.** Примерами элементарных высказываний могут служить высказывания 1)-4). Высказывания, которые получается из элементарных с помощью грамматических связок НЕ, И, ИЛИ, ЕСЛИ, ТО, ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, принято называть **сложными** или **составными**. Так высказывание 7) получается из простого высказывания "Карась рыба" с помощью отрицания "НЕ".

Таким образом, сложным (составным) называется высказывание, составленное из простых с помощью логических связок.

Условимся, высказывания называть логическими переменными и обозначать заглавными буквами латинского алфавита, возможно с индексами: $A, B, X, Y, C_1, A_1, \ldots$.

Пример 2.1.Среди следующих составных высказываний выделите элементарные: а) А: «5$\in$N или 5>9»; б) В: «Если 12:4, то 12:2»; в) С: «Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда две его противоположные стороны равны и параллельны».

Решение.

Высказывания А, В и С составные, потому что содержат логические связки «или», «если…», «то…», «тогда и только тогда». Выделим элементарные высказывания:

а) A_1: «5$\in$N», A_2: «5>9»;

б) B_1: «12:4», B_2: «12:2»;

в) C_1: «Данный четырехугольник – параллелограмм»; C_2: «Две противоположные стороны данного четырехугольника равны и параллельны»;C_3:«Две противоположные стороны данного четырехугольника равны параллельны»;

Полученные высказыванияA_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2,C_3 являются элементарными(простыми), так как не содержат логических связок.

Считается, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно и не одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

Если высказывание A истинно, то будем писать $A=1$;

Если высказывание A ложно, то будем писать $A=0$.

Например, высказывание A :«Пять меньше семи» истинно $A=1$,а высказывание B :«Три больше десяти» ложно $B=0$.

Основная задача логики высказываний заключается в том, чтобы на основании истинности или ложности простых высказываний определить истинность или ложность сложных высказываний.

Пример 2.2. Укажите среди следующих предложений высказывания и укажите их истинность: а) Река Обь впадает в Черное море; б) 2у-4=5; в) 5+3=9; г) вы любите сладости? д)3-1=2; ж) Скажите, пожалуйста, что задано.

Решение.

Предложение д) – истин- ное высказывание; предложения а), в) – ложные высказывания; предложения б), г), ж) – не являются высказываниями, так как нельзя определить их истинность, так, например, предложение б) содержит переменную у.

Операции над высказываниями.

В логике над высказываниями производятся следующие основные операции (логические связки): отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция. Они рассматриваются как средство вычисления логического значения сложного высказывания по логическим значениям составляющих его простых высказываний.

1) Отрицание (логическая связка «не»).

Отрицанием высказывания A называется новое высказывание, которое истинно, если высказывание A ложно и ложно, когда A истинно.

Обозначение: $\overline{A}$ (или $\neg A$)

Читается: «не A » («не верно, что A »)

Любую логическую операцию можно определить с помощью **таблицы истинности**. Принцип формирования таблицы истинности таков: «на входе» нужно перечислить все возможные комбинации истины и лжи, которые могут принимать элементарные высказывания. «На выходе» же получаем соответствующие логические значение сложного высказывания.

В частности, логическая связка-отрицание может быть проиллюстрирована следующей таблицей истинности:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Например, из простого высказывания A: "Анна учится в ДГТУ", путем добавления частички не получим сложное высказывание $\overline{A}$: "Анна не учится в ДГТУ". Действительно, если высказывание A: "Анна учится в ДГТУ" – истинно, то его отрицание $\overline{A}$: "Анна не учится в ДГТУ"– ложно.

2) Конъюнкция (логическое умножение).

Конъюнкцией двух высказываний A и B называется сложное логическое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания A и B истинны, и ложным во всех остальных случаях.

Обозначение: $A \wedge B$ ($A \& B$, $A \cdot B$).

Читается: « A и B ».

Эта логическая связка может быть также проиллюстрирована таблицей истинности, в которой показаны значения истинности сложного высказывания в зависимости от значений истинности составляющих его простых высказываний A и B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Например, из высказываний A: «Компьютер работает», B: «Питание включено» можно образовать составное высказывание $A \wedge B$: «Компьютер работает и питание включено». Очевидно, что $A \wedge B = 1$,тогда и только тогда, когда $A = 1, B = 1$. В трёх других случаях (проанализируйте самостоятельно каких) питание выключится и компьютер работать не будет: $A \wedge B = 0$.

3) Дизъюнкция (логическое сложение).

Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется сложное логическое высказывание, которое считается ложным, в случае ложности всех составляющих высказываний (ложности A и B) и истинным во всех остальных случаях .

Обозначение: $A \vee B$.

Читается: « A или B ».

Дизъюнкция задается с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Например, из высказываний A: «Иван ужинал», B :«Иван смотрел телевизор» можно образовать составное высказывание $A \vee B$:

«Иван ужинал или смотрел телевизор» - ложно, если оба высказывания ложны.

Замечание: Союз «или» использован в этом предложении в не исключающем смысле — Иван мог смотреть телевизор и одновременно ужинать (одно не исключает другого).

Таким образом, высказывание называется логическим сложением или дизъюнкцией, если употребляется в не исключающем смысле.

Например, повествовательное предложение «Иван ужинал или занимался плаванием» не является логическим сложением. Здесь союз «или» имеет исключающий характер — две описываемые ситуации исключают друг друга: нельзя одновременно заниматься плаванием и ужинать.

4) Эквиваленция (логическое тождество).

Эквиваленцией двух высказываний A и B называется новое высказывание, которое истинно, если оба высказывания A и B одновременно ложны или одновременно истинны.

Обозначение: $A \leftrightarrow B$ ($A \sim B$, $A \Leftrightarrow B$).

Читается: « A равносильно B » (« A тогда и только тогда, когда B »)

Эквивалентность задается таблицей истинности:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Например, для высказываний A:"$2+2=4$"; B:"$5-2=3$";

A_1 :"$2+2=5$"; B_1 :"$5-2=4$". Имеем: $A \leftrightarrow B$ и $A_1 \leftrightarrow B_1$.

5) Импликация (логическое следование).

Импликацией высказываний A и B называется новое высказывание , которое считается ложным, если A истинно ,а B ложно, и истинным во всех остальных случаях. В данном случае высказывание A называется посылкой, а B – заключением.

Обозначение: $A \to B$ ($A \Rightarrow B$).

Читается: «если A, то B» (из A следует B)

Задается импликация таблицей истинности:

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Например, если высказывание A :«Выглянет солнце",B:«Станет тепло», то получим сложное высказывание $A \to B$: «Если выглянет солнце, то станет тепло».

Очевидно, что данное высказывание $A \to B$ истинно, так как из истинной посылки (из того, что выглянет солнце), сделано истинное заключение (станет тепло).

Замечание: математическая логика формальна, её интересует истинность или ложность высказываний, но не их содержание. Так, если мы составим импликацию: ″ Если люди не летают, то дважды два равно четырём″, то она будет истинной. Иными словами, любое истинное высказывание можно обосновать любой истиной, и с точки зрения формальной логики это будет истина. Ещё интереснее ситуация с ложным посылом: любой ложью можно обосновать всё, что угодно – как истину, так и ложь, например, высказывание «Если Земля квадратная, то $3>2$» -истинно.

Данные факты получили название парадокс импликации, но в действительности мы, конечно же, рассматриваем примеры, осмысленные с точки зрения нашей содержательной логики.

В исчислении высказываний, кроме явных определений, существуют неявные. Рассмотрим операции, с помощью которых может быть выражена любая из пяти основных логических операций (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, эквиваленция, импликация). К ним относятся: сложение по модулю 2; стрелка Пирса; штрих Шеффера.

6) Сложение по модулю 2 (исключающее «или», неравнозначность-отрицание эквиваленции)

Неравнозначностью двух высказываний A и B называется высказывание, истинное, когда значения истинности A и B не совпадают, и ложное — в противном случае.

Обозначается: $A \oplus B$.

Читается: «либо A , либо B » (понимается — в разделительном смысле).

Таблица истинности для неравнозначности имеет вид:

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Эту операцию иногда называют антиэквивалентность, легко заметить, ведь сравнивая таблицы истинности эквивалентности и сложения по модулю 2 получим противоположные значения истинности. В связи с этим, неравнозначность может быть выражена через основные логические операции следующим образом: $A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}$.

Например, из высказываний A: «Иван играл в футбол», B:«Иван играл в хоккей» можно образовать составное высказывание $A \oplus B$: «Либо Иван играл в футбол, либо в хоккей».

7)Стрелка Пирса (отрицание сложения).

Стрелкой Пирса высказываний A и B называется высказывание, истинное, тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны $A, B = 0$.

Обозначается: $A \downarrow B$.

Читается: «ни A, ни B».

Задается таблицей истинности:

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Например, из высказываний A: «Новое здание было высоким», B:« Новое здание было серого цвета», можно образовать составное высказывание $A \downarrow B$: «Новое здание было ни высоким (А), ни серым(В)». Это высказывание истинно только тогда, когда ложны оба высказывания, входящие в это сложное высказывание.

Сравнивая таблицы истинности оператора $\downarrow$ и $\vee$,заметим, что оператора $\downarrow$ представляет собой полную противоположность оператору $\vee$ следовательно операция Стрелка Пирса представима в виде: $A \downarrow B = \overline{A \vee B}$.

8) Штрих Шеффера (отрицание умножения).

Штрих Шеффера высказываний A и B называется высказывание, ложное, тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны $A, B = 1$.

Обозначается: $A|B$.

Читается: «A и B несовместны» или «Не верно, что A и B».

A	B	$A \mid B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Заметим, что оператор штрих Шеффера является полной противоположностью оператору $\wedge$,поэтому логическую операцию штрих Шеффера можно представить в виде: $A|B = \overline{A \wedge B}$.

Например, высказывания A: "2 x 2 = 4» и B:"2 x 2 = 5», образуют истинное высказывание $A|B = \overline{1 \wedge 0} = \overline{0} = 1$.

Пример 2.3. Представить логическими формулами следующие высказывания: **а)** «Сегодня суббота или воскресенье»; **б)** «Идет снег или дождь»; **в)** «Если погода солнечная, то асфальт не мокрый»; **г)** «Функция ни четная, ни периодическая»; **д)** «Что в лоб, что по лбу».

Решение.

а) Нам дано сложное высказывание «Сегодня суббота или воскресенье». Выделим из него простые высказывания: A-сегодня суббота, а B-сегодня воскресенье. Тогда высказывание «Сегодня суббота или воскресенье» представимо формулой: $A \oplus B$ (это сложное высказывание состоит из двух простых высказываний A и B, соединенных связкой «или» в разделительном смысле);

б) Пусть A-идет снег, B-идет дождь. Тогда логическая формула для высказывания «Идет снег или дождь» имеет вид: $A \vee B$ (это сложное высказывание состоит из двух простых высказываний A и B, соединенных связкой «или» в не разделительном смысле, то есть могут произойти одновременно);

в) Пусть A: «Погода солнечная», B: «Асфальт мокрый», $\bar{B}$: «Асфальт не мокрый», тогда высказывание

«Если погода солнечная, то асфальт не мокрый» представимо формулой: $A \to \bar{B}$;

г) Пусть A: «Функция чётная», B: «Функция периодическая». Тогда высказывание «Функция ни четная, ни периодическая» представимо формулой: $A \downarrow B = \overline{A \vee B}$;

д) Пусть A: «В лоб», а B: «По лбу». Тогда высказывание «Что в лоб, что по лбу» будет записано формулой: $A \leftrightarrow B$.

Итак, в математической логике для записи сложных высказываний используются следующие логические операции над простыми высказываниями: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция - основные; сложение по модулю 2, стрелка Пирса, штрих Шеффера-выражаются через основные. Все эти операции можно рассматривать как функции логической переменной, то есть переменной, принимающей числовые значения лишь из множества {0,1}. При этом сама функция принимает числовые значения из этого же множества.

2.2. Формулы алгебры логики.

Высказывательными переменными называются такие переменные, вместо которых можно подставлять конкретные высказывания. Буквы, обозначающие высказывания, логические связки и скобки составляют алфавит языка алгебры высказываний. С помощью элементов алфавита можно построить разнообразные логические формулы. Дадим более четкое определение логической формулы.

Сложные высказывания, которые могут быть получены из элементарных высказываний по средствам логических операций (логических связок) называются **формулами алгебры логики,** если они удовлетворяют следующим условиям:

1) Каждая высказывательная переменная является формулой;

2) Если A и B – формулы, то выражения $\overline{A}, (A \wedge B), (A \vee B), (A \leftrightarrow B), (A \rightarrow B)$ так же являются формулами;

3) Не существует никаких других формул, кроме тех, которые получаются в результате применения конечного числа соглашений 1),2).

Обратите внимание на второй пункт – он позволяет рекурсивным образом сделать сколь угодно длинную формулу. Так, если $C_1 = A \wedge B, C_2 = A \to B$ - формулы, то $C_1 \vee C_2 = (A \wedge B) \vee (A \longrightarrow B)$ – тоже формула;

Таким образом, формулой является любая логическая операция, например, логическое умножение $A \wedge B$, а выражение $A \wedge \vee B$ не является формулой, так как не понятно нужно складывать высказывания или умножать.

Порядок действий в формуле.

Считается, что операция отрицания $\neg$ сильнее чем конъюнкция $\wedge$, и обе они сильнее чем дизъюнкция $\vee$, а $\neg$, $\wedge$, $\vee$ сильнее, чем $\to$, $\leftrightarrow$. Операции $|$, $\downarrow$, $\oplus$ имеют тот же приоритет, что и $\neg$, так как $A|B = \overline{A \wedge B}$, $A \downarrow B = \overline{A \vee B}$, $A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}$. Таким образом, порядок действий в формулах алгебры логики, следующий: 1) отрицание $\neg$; 2) конъюнкция $\wedge$ 3) дизъюнкция $\vee$; 4) импликация $\to$; 5) эквивалентность $\leftrightarrow$.

Таким образом, в формуле без скобок сначала выполняется $\neg$, затем $(\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow)$ и так далее … низший приоритет имеет эквивалентность $\leftrightarrow$.

Определение формулы таково, что формулы насыщены скобками и трудночитаемы, поэтому обычно принимают следующие соглашение об упрощении записи формул:

1) Наружные скобки в записи формул можно опускать;

Например, $(A \vee B) = A \vee B$.

2) Часть скобок, определяющих порядок действий, можно опускать;

Например, в формуле $(A \to (B \vee C))$ скобки можно опустить $A \to B \vee C$,так как дизъюнкция сильнее импликации;

Формулу $A \to (\overline{B \vee (A \wedge C)})$ можно записать в виде $A \to \overline{B \vee A \wedge C}$,так как отрицание и без скобок выполняется первым действием, а конъюнкция сильнее дизъюнкции.

Так запись $A \vee B \wedge C$ подразумевает, что сначала нужно осуществить логическое умножение, а затем – логическое сложение (конъюнкция связывает сильнее, чем дизъюнкция);

3) Однотипные операций, выполняются в порядке их следования (слева на право);

Например, $A \to B \to C \to B = (((A \to B) \to C) \to D)$,или например, $A \vee B \vee C = (A \vee B) \vee C$.

4)Конъюнкцию можно обозначать знаком «·» или знак конъюнкции опускать;

То есть, вместо $A \wedge B$ можно писать $A \cdot B$ или AB .

5) Для изменения порядка логических операций используются скобки;

В первую очередь выполняются операции в скобках, затем все остальные логические операции в порядке старшинства.

Например, формулы $A \wedge (B \vee C)$и $A \wedge B \vee C$ две разные формулы.

Замечание: порядок операций в логике такой же как в алгебре чисел, сначала умножаем, а затем складываем.

Пример 2.4. Даны формулы: а) $A \vee B \to C \wedge D \leftrightarrow \overline{A}$; б) $A \vee (B \to C) \wedge D \leftrightarrow \overline{A}$.Определить порядок вычисления формул.

Решение.

а) Для формулы $A \vee B \to C \wedge D \leftrightarrow \overline{A}$порядок вычисления, следующий:

1) отрицание $\overline{A}$; 2) конъюнкция $C \wedge D$; 3) дизъюнкция $A \vee B$; 4) импликация $(A \vee B) \to (C \wedge D)$;5) эквива-

ленция $(A \vee B \to C \wedge D) \leftrightarrow \overline{A}$;

б) $A \vee (B \to C) \wedge D \leftrightarrow \overline{A}$:1) отрицание $\overline{A}$; 2) импликация $B \to C$; 3) конъюнкция $(B \to C) \wedge D$; 4) дизъюнкция $A \vee ((B \to C) \wedge D)$; 5) эквиваленция $(A \vee (B \to C) \wedge D) \leftrightarrow \overline{A}$.

Пример 2.5. Представить логической формулой и определить порядок действий следующего высказывания: «Если допоздна работаешь за компьютером и при этом пьешь много кофе, то утром просыпаешься в плохом настроении или с головной болью».

Решение.

Задано сложное высказывание. Выделим из него простые высказывания: A :«Допоздна работаешь за компьютером», B :«Пьешь много кофе», C : «Утром просыпаешься в дурном настроении», D : «Утром просыпаешься с головной болью». Тогда сложное высказывание «Если допоздна работаешь с компьютером и при этом пьешь много кофе, то утром просыпаешься в плохом настроении или с головной болью» представимо формулой: $A \wedge B \to C \vee D$.Порядок действий в формуле, следующий: $A \overset{1}{\wedge} B \overset{3}{\to} C \overset{2}{\vee} D$.

Подформулой формулы F называется любая её часть, которая сама является формулой.

Пример 2.6. Выписать все подформулы следующей формулы: $A \vee \left(\overline{A} \to \left(\overline{A \leftrightarrow B}\right)\right)$.

Решение.

Исходная формула имеет следующие подформулы: $A, B, \overline{A}, A \leftrightarrow B, \overline{A \leftrightarrow B}, \overline{A} \to \left(\overline{A \leftrightarrow B}\right)$, $A \vee \left(\overline{A} \to \left(\overline{A \leftrightarrow B}\right)\right)$.

Логическое значение формулы алгебры логики, полностью определяется логическими значениями входящих в нее элементарных высказываний. Например, логическим значением формулы $A \vee (\bar{A} \to \overline{A \leftrightarrow B})$,в случае, если $A = 1, B = 1$,будет истина, так как

$1 \vee (\bar{1} \to \overline{1 \leftrightarrow 1}) = 1 \vee (0 \to 0) = 1 \vee 1 = 1.$

Все возможные логические значения формулы, в зависимости от значений входящих в нее элементарных высказываний, могут быть описаны полностью, с помощью таблицы истинности.

Пример 2.7. Пусть высказывание A : «Студент Иванов выполняет домашнее задание по математической логике», B : «Студент Иванов успевает по математической логике». Дать словесную формулировку высказывания $F=\overline{B}\leftrightarrow\overline{A}$ и составить для него таблицу истинности.

Решение.

$\overline{B}\leftrightarrow\overline{A}$ - «Студент Иванов не успевает по математической логике тогда и только тогда, когда он не выполняет домашнее задание по математической логике». Таблица истинности имеет вид:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$F=\overline{B}\leftrightarrow\overline{A}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

Логическое выражение принимает истинное значение только на наборах $F(A,B)=F(0,0)=F(1,1)=1$,таким

образом, заданное высказывание истинно, когда оба высказывания A и B ложны, либо истинны одновременно.

Формула, истинная при всех возможных значениях логических переменных, называется **тождественно истинной** или **тавтологией**. Например, тавтологией является формула $A \vee \overline{A} = 1$.Действительно, построив таблицу истинности данной формулы

A	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$
0	1	1
1	0	1

Убеждаемся в этом, так как формула принимает только истинные значения при всех возможных значениях логической переменной (третий столбец таблицы истинности состоит из единиц).

Тавтологии являются теоремами алгебры логики. Они задают правильные рассуждения, верные при любых значениях высказываний, входящих в них.

Пример 2.8. Показать, что формула $A \to (B \to A)$ является тавтологией.

Решение.

Составим таблицу истинности для данной функции:

A	B	$B \to A$	$A \to (B \to A)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Формула является тавтологией, так как она принимает истинное значение при всех значениях высказывательных переменных.

Формула, ложная при всех возможных значениях переменных, называется **тождественно ложной** или **противоречием**. Например, противоречием является формула $A \wedge \overline{A} = 0$,постройте таблицу истинности и убедитесь в этом самостоятельно.

Пример 2.9. Показать, что формула

$F = \left(A \leftrightarrow \overline{A}\right) \wedge \left(A \vee B \to A\right)$ является тождественно ложной.

Решение.

Составим таблицу истинности:

A	B	$\overline{A}$	$A \leftrightarrow \overline{A}$	$A \vee B$	$A \vee B \to A$	F
0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0

Формула является тождественно ложной, так как она принимает ложное значение при всех значениях переменных.

Существуют формулы, которые не являются ни тождественно ложными, ни тождественно истинными. Такие формулы могут принимает как ложные, так и истинные значение при всех значениях переменных.

Пример 2.10. Определить истинность высказывания и построить его отрицание: а) «За окном светит солнце и нет дождя»; б) «Противоположные углы параллелограмма равны и в сумме составляют 180 градусов».

Решение.

а) Нам дано сложное высказывание. Выделим из него простые высказывания:

A: «За окном светит солнце», B: «За окном идёт дождь». Составим логическую формулу, соответствующую данному высказыванию: $F = A \wedge \bar{B}$ -«За окном светит солнце и нет дождя». Построим таблицу истинности для данной логической функции:

A	B	$\bar{B}$	F
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

Логическое выражение принимает истинное значение только на наборе

$F(A,B) = F(1,0) = 1$, следовательно данное высказывание истинно, тогда и только тогда, когда высказывание A - истинно, а B -ложно. Заметим, что формула $F = A \wedge \bar{B}$ принимает как истинные, так и ложные значения, следовательно, не является ни тождественно ложной, ни тождественно истинно . Отрицанием высказывания $A \wedge \bar{B}$ является высказывание $\overline{A \wedge \bar{B}}$: «Неверно, что за окном светит солнце и нет дождя».

б) Из данного сложного высказывания выделим два простых высказывания.

Первое A: «Противоположные углы параллелограмма равны»- истинно (тавтология), так как равенство противоположных углов - это свойство параллелограмма, то есть $A = 1$;

Второе B :«Противоположные углы параллелограмма в сумме составляют 180 градусов»-ложно, так как у параллелограмма 180 градусам равна сумма углов, прилежащих к одной стороне, а противоположные углы в сумме либо меньше 180 градусов, либо больше (за исключением частного случая, когда параллелограмм является прямоугольником),то есть $B=0$-ложно. Составим логическую формулу соответствующую данному высказыванию $F = A \wedge B$: «Противоположные углы параллелограмма равны и в сумме составляют 180 градусов», оно является ложным, так как конъюнкция высказываний ложна тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний ложно, то есть $F = A \wedge B = 1 \wedge 0 = 0$. Таким образом, исходное высказывание ложно, то есть формула $F = A \wedge B$ является тождественно ложной (противоречием).

Отрицанием высказывания $A \wedge B$ (отрицание конъюнкции - штрих Шеффера) является высказывание $\overline{A \wedge B} = A|B$:« Неверно, что противоположные углы параллелограмма равны и в сумме составляют 180 градусов».

Две формулы называются **равносильными** (или просто равными), если они принимают одинаковые значения при любом наборе значений входящих в эти формулы логических переменных. Другими словами, две формулы равны, если у них совпадают таблицы истинности.

Связь между понятиями равносильности и эквивалентности.

Если формулы A и B равносильны, то формула $A \leftrightarrow B$ тавтология, и обратно, если формула $A \leftrightarrow B$ тавтология, то формулы A и B равносильны.

Пример 2.11. Показать, что формулы равносильны $A \leftrightarrow B$ и $\overline{A}\overline{B} \vee AB$ и убедиться, что формула

F = ($A \leftrightarrow B$) $\leftrightarrow$ ($\overline{A}\overline{B} \vee AB$) является тавтологией.

Решение.

Составим таблицу истинности для данных формул и сравним соответствующие им столбцы:

A	B	$A \leftrightarrow B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	AB	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}\overline{B} \vee AB$	F
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	1	1

Третий и восьмой столбец совпадают, следовательно, формулы равносильны. Формула

F = ($A \leftrightarrow B$) $\leftrightarrow$ ($\overline{A}\overline{B} \vee AB$) является тавтологией, так как девятый столбец состоит только из единиц (формула принимает истинное значение при любых значениях высказывательных переменных).

Замечание: очевидно, что отношение равносильности формул алгебры логики является отношением эквивалентности, так как:

1. рефлексивно, то есть F= F для любой формулы F;
2. симметрично, то есть если F =G, то G= F для любых формул F и G;
3. транзитивно, то есть если F =G и G =K, то F =K для любых формул F, G, K.

2.3. Логические (булевы) функции.

Теория, которая изучает логические формулы, определенные выше, называется алгеброй высказываний. Она изучает строение сложных логических высказываний и способы установления их истинности. Операций над высказываниями можно рассматривать как функции, у которых значения аргументов (логических переменных) и значение самих функций принадлежат двухэлементному множеству {0,1}. Такие функции называют булевыми (логическими) функциями.

Иначе говоря, **булева функция** – это функция, аргументы и значение которой принадлежит множеству {0,1}. Множество {0,1} мы будем в дальнейшем обозначать через B, то есть B= {0, 1}. **Булеву функцию** от n аргументов можно рассматривать как nместную алгебраическую операцию на множестве В.

Обозначение: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ булева функция от n аргументов.

Между элементарными высказываниями и булевыми переменными определено взаимно-однозначное соответствие, каждой формуле алгебры высказываний соответствует единственная булева функция, и наоборот, каждой булевой функции соответствует формула алгебры высказываний.

Итак, всякой формуле однозначно соответствует некоторая функция, при этом говорят, что формула реализует функцию.

Например, рассмотрим булеву (логическую) функцию $f = f(x_1, x_2)$ двух переменных x_1 , x_2 ,и запишем в функциональном виде ту же конъюнкцию: $f(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$.

Первая основная задача математической логики- вычислить значения истинности логической функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, когда переменным $x_1, x_2, ..., x_n$ придаются конкретные значения 0 или 1-это можно сделать при помощи таблицы истинности, в левой части которой перечислены все возможные наборы значений ее аргументов ,то есть, двоичных векторов длины n, таких наборов всего $m = 2^n$ –количество строк в таблице, а в правой части таблицы- число различных булевых функций, зависящих от n переменных, их число определяется формулой $2^m = 2^{2^n}$.

Запишем более подробный алгоритм построения таблицы истинности:

Алгоритм построения таблицы истинности.

1. Определить количество наборов входных переменных - всевозможных сочетаний значений переменных, входящих в выражения, по формуле: 2^n, где n - количество входных переменных (определяем количество строк таблицы).
2. Внести в таблицу все наборы входных переменных.
3. Определить количество логических операций и последовательность их выполнения.
4. Заполнить столбцы результатами выполнения логических операций в обозначенной последовательности.

Таким образом, таблица истинности для функции n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет выглядеть так:

x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n	$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\right)$
0	0	…	0	0	$f(0,0,\ldots,0,0)$
0	0	…	0	1	$f(0,0,\ldots,0,1)$
…	…	…	…	…	…
c_1	c_2	…	c_{n-1}	c_n	$f\left(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n\right)$
…	…	…	…	…	…
1	1	…	1	0	$f(1,1,\ldots,1,0)$
1	1	…	1	1	$f(1,1,\ldots,1,1)$

Замечание:

1)Чтобы не повторить или не пропустить ни одного возможного сочетания значений входных переменных, следует вносить входные переменные по порядку возрастания соответствующих двоичных чисел. Такой порядок является общепринятым и позволяет задать логическую функцию набором её значений $f = f\left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$,где $c_i \in \{0,1\}$, $1 \leq i \leq n$;

2)При построении таблицы истинности необходимо учитывать порядок выполнения логических операций. Напомним, операции в логическом выражении выполняются слева направо с учетом скобок в следующем порядке: отрицание(инверсия); конъюнкция; дизъюнкция; импликация; эквивалентность (сложение по модулю два). Для изменения указанного порядка выполнения логических операций используются круглые скобки;

3)Записывая таблицу истинности логической функции от n переменных, нет необходимости каждый раз перечислять все наборы длины n — достаточно записать вектор значений логической функции, понимая, что i-я компонента этого вектора есть значение функции на i-м наборе (двоичном коде числа i). Можно также перечислить номера тех наборов, на которых функция принимает значение 1.

Особую роль в алгебре логике играют логические функции одной и двух переменных - унарные и бинарные логические операции, которые широко используются при описании систем, явлений, формализации рассуждений и так далее.

Булевы функции одной переменной.

При $n=1$ получим функцию от одной переменной $f(x)$, которая задается таблицей истинности:

x	$f_1=0$	$f_2=x$	$f_3=\overline{x}$	$f_4=1$
0 1	0 0	0 1	1 0	1 1

В таблице $m = 2^n = 2^1 = 2$ строки, действительно, переменная x может принять лишь два значения 0 или 1.В таблице $2^m = 2^{2^n} = 2^{2^1} = 4$ столбцов- это означает, что существует всего 4 различных функций одной переменной (см. таблицу выше).

Здесь, функции $f_1 = 0$ и $f_4 = 1$ являются константами, так как не зависят от x.

Функция $f_2 = x$ тождественная функция, $f_3 = \overline{x}$ является логическим отрицанием.

Булевы функции двух переменной.

При $n = 2$ получим функцию двух переменных $f(x_1, x_2)$, которая задается таблицей истинности:

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Действительно, при $n = 2$ здесь имеется $m = 2^n = 2^2 = 4$ строки. Две переменные, определенные на множестве {0, 1} могут принять лишь четыре (упорядоченные) пары значений:(0,0), (0,1), (1,0), (1,1). Очевидно, что существует всего

$2^m = 2^{2^n} = 2^{2^2} = 16$ различных функций двух переменных, так как существует лишь 16 различных упорядоченных четверок чисел, содержащих числа 0,1). Все эти функции представлены в таблице выше. Большинство логических функций двух переменных, имеют собственное имя.

Две из них являются константами: $f_1 = 0$ и $f_{16} = 1$ константы, то есть функции, не зависящие от переменных x_1 и x_2.

Четыре зависят от одной переменной: $f_4 = x_1$, $f_6 = x_2$ - тождественные функции совпадающие с значениями своих переменных x_1 и x_2 соответственно; $f_{13} = \overline{x_1}$, $f_{11} = \overline{x_2}$ - тождественные функции совпадают с отрицаниями переменных x_1 и x_2 соответственно.

И только десять зависит от обеих переменных, к ним относятся функции: $f_2 = x_1 \wedge x_2$ - конъюнкция, $f_8 = x_1 \vee x_2$ - дизъюнкция , $f_{10} = x_1 \leftrightarrow x_2$ -эквивалентность, $f_{14} = x_1 \rightarrow x_2$, $f_{12} = x_2 \rightarrow x_1$ –импликации,

$f_3 = \overline{x_1 \rightarrow x_2}$, $f_5 = \overline{x_2 \rightarrow x_1}$ - их отрицания;

три оставшихся $f_7 = x_1 \oplus x_2$ – сложение по модулю, $f_9 = x_1 \downarrow x_2$ -стрелка Пирса, $f_{15} = x_1 \mid x_2$ – штрих Шеффера с помощью которых может быть выражена любая из пяти основных логических операций (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, эквивалентность, импликация). Как они определяются мы изучили ранее (см. логические операции над высказываниями).

Функции 0, 1, x , $\bar{x}$, $x \vee y$, $x \wedge y$, $x \oplus y$, $x \downarrow y$, $x \to y$, $x \leftrightarrow y$, $x | y$, обычно называют **элементарными**.

Рассмотрим задачу на построение булевой функции двух переменных $f(x_1, x_2)$.

Пример 2.12. Построить таблицу истинности для формулы $f(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 \to x_1$.

Решение.

Функция $f(x_1, x_2)$ зависит от двух переменных, то есть таблица состоит из $2^n = 2^2 = 4$ строк, построим её в соответствии с порядком действий:

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \wedge x_2 \to x_1$
0	0	0	1
0	1	0	1

1	0	0	1
1	11	1	1

Таким образом, формула $x_1 \wedge x_2 \to x_1$ реализует функцию $f(x_1,x_2)=(1111)$.

Рассмотрим задачу на построение булевой функции трех переменных $f(x_1,x_2,x_3)$.

Пример 2.13. Вычислить все возможные значения истинности функции $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1 \vee x_2) \leftrightarrow (x_3 \to \overline{x_1})$, в зависимости от значений истинности составляющих ее переменных и записать все полученные данные в таблицу истинности.

Решение.

Так функция $f(x_1,x_2,x_3)$зависит от трех переменных$n=3$, то имеется $2^3=8$строк, соответствующих всем различным комбинациям значений переменных. Рассмотрим значения истинности функции на данных наборах переменных:

$$f(0,0,0)=(0 \vee 0) \leftrightarrow (0 \to \bar{0})=0 \leftrightarrow (0 \to 1)=0 \leftrightarrow 1=0;$$

$$f(0,0,1)=(0 \vee 0) \leftrightarrow (1 \to \bar{0})=0 \leftrightarrow (1 \to 1)=0 \leftrightarrow 1=0;$$

$$f(0,1,0)=(0 \vee 1) \leftrightarrow (0 \to \bar{0})=1 \leftrightarrow (0 \to 1)=1 \leftrightarrow 1=1;$$

$$f(0,1,1)=(0 \vee 1) \leftrightarrow (1 \to \bar{0})=1 \leftrightarrow (1 \to 1)=1 \leftrightarrow 1=1;$$

$$f(1,0,0)=(1\vee 0)\leftrightarrow(0\to\bar{1})=1\leftrightarrow(0\to 0)=1\leftrightarrow 1=1;$$

$$f(1,0,1)=(1\vee 0)\leftrightarrow(1\to\bar{1})=1\leftrightarrow(1\to 0)=1\leftrightarrow 0=0;$$

$$f(1,1,0)=(1\vee 1)\leftrightarrow(0\to\bar{1})=1\leftrightarrow(0\to 0)=1\leftrightarrow 1=1;$$

$$f(1,1,1)=(1\vee 1)\leftrightarrow(1\to\bar{1})=1\leftrightarrow(1\to 0)=1\leftrightarrow 0=0.$$

Запишем все полученные данные в таблицу истинности:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Существенная и не существенные переменные. Удаления (введения) фиктивных переменных.

Логическая функция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ **существенно зависит** от переменной x_i, если существует такой набор значений $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n$, что

$f(c_1, \ldots, c_{i-1}, 0, c_{i+1}, \ldots, c_n) \neq f(c_1, \ldots, c_{i-1}, 1, c_{i+1}, \ldots, c_n)$.

В этом случае x_i называется **существенной переменной**, в противном случае, то есть если $f(c_1, \ldots, c_{i-1}, 0, c_{i+1}, \ldots, c_n) = f(c_1, \ldots, c_{i-1}, 1, c_{i+1}, \ldots, c_n)$, переменная x_i называют **несущественной (фиктивной) переменной -** изменение значения x_i не меняет значения функции. Очевидно, что постоянные функции не имеют существенных переменных.

Пример 2.14. Какими являются переменные x_1, x_2 – существенными или несущественными для функций (заданных таблицей истинности): а) f_1;б) f_2.

Решение.

а) Для функции f_1 переменная x_1 – существенная, так как $f_1(0,0) \neq f_1(1,0)$,$f_1(0,1) \neq f_1(1,1)$,а переменная x_2 – несущественная: $f_1(0,0) = f_1(0,1)$, $f_1(1,0) = f_1(1,1)$;

б) Для функции f_2 переменная x_1 – несущественная, так как $f_2(0,0) = f_2(1,0)$, $f_2(0,1) = f_2(1,1)$, а переменная x_2 – существенная: $f_2(1,0) \neq f_2(1,1)$, $f_2(0,0) \neq f_2(0,1)$.

Замечание: для выявления фиктивных (несущественных) переменных можно не строить в явном виде таблиц истинности левой и правой частей неравенства, а сравнивать соответствующие части вектора-столбца значений функции.

Иногда полезно удалять несущественные переменные логической функции. Смысл удаления фиктивных переменных очевиден, так как они не влияют на значения функции и являются с этой точки зрения лишними. Так полезно вводить фиктивные переменные для получения функций, зависящих от одного и того же количества переменных.

Алгоритм удаления фиктивных переменных.

Алгоритм удаления фиктивной переменной x_i состоит в вычеркивании из таблицы истинности всех строк, в которых $x_i = 0$ (или всех строк, в которых $x_i = 1$), и столбца переменной x_i. Полученная таким образом таблица будет определять некоторую функцию $g(x_1,..., x_{i-1}, x_{i+1},..., x_n)$, причем на любом наборе значений c_1, ..., $c_{i-1}, c_{i+1},..., c_n$, переменных $x_1,..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1},..., x_n$ для функций f и g выполняется равенство

$f(c_1,...,c_{i-1},c_i,c_{i+1},...,c_n)=g(c_1,...,c_{i-1},c_{i+1},...,c_n)$. Говорят, что функция g получена из функции f путем удаления фиктивной переменной, а также, что f получена из g путем введения фиктивной переменной.

Пример 2.15. Какими являются переменные x_1, x_2 – существенными или несущественными для функций f_1, f_2 заданных таблицей истинности, если они фиктивные удалить их.

x_1	x_2	f_1	f_2
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Решение.

Для функции f_1 переменная x_2 – существенная, так как $f_1(0,0)\neq f_1(0,1)$, $f_1(1,0)\neq f_1(1,1)$, а переменная x_1 – несущественная: $f_1(0,1)=f_1(1,1)$, $f_1(0,0)=f_1(1,0)$;

Для функции f_2 переменная x_2 – несущественная, так как $f_2(0,0)=f_2(0,1)$, $f_2(1,0)=f_2(1,1)$, а переменная x_1 – существенная: $f_1(1,0)\neq f_2(0,0)$, $f_1(1,1)\neq f_2(0,1)$.

Таким образом, для функции f_1 - x_1 несущественная переменная, а для функции f_2 - x_2 несущественная переменная. Удалим фиктивные переменные применяя алгоритм для удаления фиктивных переменных: удаляя фиктивную переменную x_1 для функции f_1 таблица слева, получим результат (таблица справа), аналогично для f_2 (удаляя фиктивную переменную x_2)- таблица ниже:

x_1	x_2	f_1
~~0~~	~~0~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~1~~
1	0	0
1	1	1

x_2	f_1
0	0
1	1

x_1	x_2	f_2
~~0~~	~~0~~	~~0~~
0	1	0
~~1~~	~~0~~	~~1~~
1	1	1

x_1	f_2
0	0
1	1

Удалив фиктивную переменную x_1 функции $f_1(x_1, x_2)$ и фиктивную переменную x_2 функции $f_2(x_1, x_2)$, получим равные функции $f_1(x_2) = f_2(x_1) = f(x)$.Значит, исходные функции равны с точностью до фиктивных переменных.

Пример 2.16. Показать, что переменная x_3 является несущественной для функций $f(x_1,x_2,x_3)$заданной таблицей истинности и удалить ее.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Решение.

Для функции f переменная x_3 –несущественная (фиктивная), так как $f(0,0,0) = f(0,0.1) = 0$.

Удалим фиктивную переменную x_3. Применив алгоритм для удаления фиктивной переменой x_3 (таб. слева), получаем результат (таб. справа).

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~
0	1	0	1
~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
1	0	0	1
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~
1	1	0	0
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2.4. Равносильность формул.

Назовем эквивалентными (или равносильными) формулы, которые представляют равные функции. Равносильность формул в алгебре логики обозначается знаком тождественного равенства ≡ (или =). Ниже мы приведем ряд пар эквивалентных формул (тождеств), отражающих существенные свойства логических операций и важные соотношения между различными операциями. Они позволяют находить для булевых функций по одним задающим их формулам другие более простые формулы. Равносильности можно разбить на три группы: основные логические равносильности, равносильности выражающие одни логические операции через другие, равносильности выражающие основные законы алгебры логики.

1.Основные логические равносильности:

1) $x \vee x = x$ – идемпотентность дизъюнкции;

2) $x \wedge x = x$ – идемпотентность конъюнкции;

3) $x \vee 0 = x$;

4) $x \vee 1 = 1$;

5) $x \wedge 0 = 0$;

6) $x \wedge 1 = x$;

7) $\overline{\overline{x}} = x$ – закон двойного отрицания;

8) $x \wedge \overline{x} = 0$ – закон противоречия;

9) $x \vee \overline{x} = 1$ – закон исключенного третьего.

2. Равносильности выражающие одни логические операции через другие:

1) $x \to y = \overline{x} \vee y$;

2) $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$;

3) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ – первый закон Моргана;

4) $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ – второй закон Моргана.

Замечание: из равносильностей данной группы следует, что всякую формулу алгебры логики можно заменить равносильной ей формулой, содержащей только две логические операции: конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание. Дальнейшее исключение логических операций невозможно.

3.Равносильности выражающие основные законы алгебры логики:

1) $x \vee y = y \vee x$ – коммутативность дизъюнкции;

2) $x \wedge y = y \wedge x$ – коммутативность конъюнкции;

3) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ – ассоциативность дизъюнкции;

4) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ – ассоциативность конъюнкции;

5) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;

6) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

Замечания: Данные законы имеют место в алгебре чисел. Поэтому над формулами алгебры логики можно производить те же преобразования, которые проводятся в алгебре чисел.

Доказательство всех утверждений получается сравнением таблиц истинности левой и правой частей формулы.

Построим, например, таблицы, доказывающие равносильности 2.2), 2.4) ,3.6) дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции. Остальные рекомендуется проверить самостоятельно.

Докажем формулу 2.2) $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$:

x	y	$x \to y$	$y \to x$	$(x \to y) \wedge (y \to x)$	$x \leftrightarrow y$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Доказано, так как пятый и шестой столбец совпадают.

Доказательство. 2.4) $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \wedge y$	$\overline{x \wedge y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Доказано, так как шестой и седьмой столбец совпадают.

Доказательство. 3.6) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

x	y	z	$x \vee y$	$x \vee z$	$(x \vee y) \wedge (x \vee z)$	$y \wedge z$	$x \vee (y \wedge z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1

1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Доказано, так как шестой и восьмой столбец совпадают.

Логическую функцию можно задать с помощью таблицы истинности (табличный способ задания логической функции), другой способ задания- аналитический, то есть в виде формулы.

Использование табличного задания функций часто неудобно. Во-первых, число строк в таблице экспоненциально зависит от числа переменных функции. Уже при пяти переменных, число строк таблицы должно быть равно 32. Во-вторых, что более важно, при анализе свойств функции, нельзя выполнять какие-либо алгебраические преобразования для упрощения этого процесса. В-третьих, представление функции таблицей единственно, а формулой не единственно. Например, функцию штрих Шеффера можно представить формулами: $x_1|x_2 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} = \overline{x_1 \wedge x_2}$.

Приведенные выше равносильности остаются справедливыми при подстановке вместо переменных любых логических функций и, следовательно, любых формул, представляющих эти функции. Важно лишь соблюдать следующие два правила: **правило подстановки** и **правило замены**.

Правило замены: если в формуле заменить некоторую подформулу на равносильную, то получится равносильная формула.

Таким образом, если некоторая формула F содержит в качестве подформулы F_1, то можно заменить F_1 на эквивалентную(равносильную) ей F_2. Полученная с помощью такой замены новая формула G эквивалентна исходной F.

Например, в формуле $F = x \wedge (\bar{x} \vee x)$заменим подформулу $F_1 = \bar{x} \vee x$ на равносильную ей $F_2 = \bar{x} \vee x = 1$,получим формулу $G = x \wedge 1$ эквивалентную исходной,то есть $x \wedge (\bar{x} \vee x) = x \wedge 1$.

Правило подстановки формулы вместо переменной: если в равносильных формулах вместо всех вхождений некоторой переменной x подставить некоторую формулу, то получатся равносильные формулы.

Например, возьмём $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ – второй закон де

Моргана и подставим вместо всех вхождений переменной x формулу $\bar{x}z$, тогда в левой части равенства получим $\overline{x \wedge y} = \overline{\bar{x}z \wedge y} = \overline{\bar{x}z} \vee \bar{y} = \bar{\bar{x}} \vee \bar{z} \vee \bar{y}$. В правой $\bar{x} \vee \bar{y} = \overline{\bar{x}z} \vee \bar{y} = \bar{\bar{x}} \vee \bar{z} \vee \bar{y}$.Действительно,

$\bar{\bar{x}} \vee \bar{z} \vee \bar{y} = \bar{\bar{x}} \vee \bar{z} \vee \bar{y}$.

Рассмотрим применение данного правила на **законах поглощения** и **склеивания**.

Закон поглощения:

$x \vee (x \wedge y) = x$ -для логического сложения;

$x \wedge (x \vee y) = x$ -для логического умножения.

Проверим, справедливость данных формул:

$x \vee (x \wedge y) = x \vee xy = x(1 \vee y) = x \cdot 1 = x \wedge 1 = x$, в формуле заменили подформулу $1 \vee y$ на равносильную $1 \vee y = 1$, получили формулу x равносильную исходной;

Аналогично, для второй формулы $x \wedge (x \vee y) = (x \wedge x) \vee (x \wedge y) = x \vee xy = x(1 \vee y) = x$.

Закон склеивания:

$xy \vee x\bar{y} = x$ - для логического сложения;

$(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = x$ для логического умножения.

Действительно $xy \vee x\bar{y} = x(y \vee \bar{y}) = x \wedge 1 = x$,

$(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = (x \vee y)(x \vee \bar{y}) = x \vee x\bar{y} \vee xy \vee y\bar{y} = x(1 \vee \bar{y} \vee y) \vee 0 = x$.

Итак, помимо своего «логического» назначения, равносильности широко используются для преобразования и упрощения формул. Под упрощением логических формул понимают изменение исходного логического выражения в соответствии с законами алгебры логики, приводящее к логическому выражению, в котором меньше операций конъюнкции и дизъюнкции, и нет отрицаний не элементарных выражений. Также выражение считается упрощенным, если получившееся выражение содержит меньше логических переменных.

Методика упрощения формулы логики с помощью равносильных преобразований.

1. С помощью зависимостей между операциями перейти к формуле, содержащей только дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;
2. Пользуясь законами де Моргана и законом двойного отрицания, убрать все отрицания до переменных, то есть перейти к формуле, содержащей отрицание не выше, чем над переменными;
3. Раскрыть скобки, пользуясь дистрибутивными законами и ассоциативностью конъюнкции и дизъюнкции;
4. Удалить лишние конъюнкции и повторения пере-

менных в конъюнкциях, используя идемпотентность, законы противоречия,
исключенного третьего, поглощения;

5. Удалить константы с помощью свойств констант.

Пример 2.17. Упростить формулы: а) $p \wedge \overline{p} \vee \overline{q}$; б) $m \wedge (\overline{p} \vee m \vee s) \wedge t \wedge (t \vee \overline{q})$;в) $(x \to y) \downarrow (\overline{y \to x})$.

Решение.

а) $p \wedge \overline{p} \vee \overline{q} = (p \wedge \overline{p}) \vee \overline{q} = 0 \vee \overline{q} = \overline{q}$;

$$б)\ m \wedge (\overline{p} \vee m \vee s) \wedge t \wedge (t \vee \overline{q}) = m \cdot (\overline{p} \vee m \vee s) \cdot t \cdot (t \vee \overline{q}) = (m\overline{p} \vee mm \vee ms) \wedge (tt \vee t\overline{q}) =$$

$$= (m\overline{p} \vee m \vee ms)(t \vee t\overline{q}) = (m(\overline{p} \vee 1 \vee s)t(1 \vee \overline{q})) = (m(1 \vee s))t \cdot 1 = (m \cdot 1)t = mt = m \wedge t;$$

Замечание: если вам достаточно трудно упростить формулу, перепишите выражение с помощью более привычных операций умножения и сложения, а после упрощения вернитесь к исходным операциям.

Покажем, как это сделать на данном примере:

$$m(\overline{p} + m + s)t(t + \overline{q}) = (m\overline{p} + mm + ms)(tt + t\overline{q}) = (m\overline{p} + ms)(t + t\overline{q}) = m(\overline{p} + 1 + s)t(1 + \overline{q}) = mt;$$

в) Учитывая, что $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$ имеем:

$$(x \to y) \downarrow (\overline{y \to x}) = \overline{(x \to y)} \cdot (\overline{\overline{y \to x}}) = (\overline{\overline{x} \vee y})(\overline{y} \vee x) = x\overline{y}(\overline{y} \vee x) = x\overline{y} \vee x\overline{y} = x\overline{y};$$

Пример 2.18. Проверить с помощью равносильных преобразований является ли формула тождественно ложной (противоречием), тождественно истинной, или ни тем, ни другим:

а) $\bar{a} \vee (b \to a)$;б) $a \wedge b \wedge \overline{a \wedge b}$;в) $(a \leftrightarrow b) \vee (\bar{a} \leftrightarrow \bar{b})$.

Решение.

а) $\bar{a} \vee (b \to a) = \bar{a} \vee \bar{b} \vee a = (\bar{a} \vee a) \vee \bar{b} = 1 \vee \bar{b} = 1$- тавтология;

б) $a \wedge b \wedge \overline{a \wedge b} = ab\overline{ab} = ab(\bar{a} \vee \bar{b}) = ab\bar{a} \vee ab\bar{b} = 0 \vee 0 = 0$- противоречие;

в) $(a \leftrightarrow b) \vee (\bar{a} \leftrightarrow \bar{b}) = (a \to b)(b \to a) \vee (\bar{a} \to \bar{b})(\bar{b} \to \bar{a}) = (\bar{a} \vee b)(\bar{b} \vee a) \vee (a \vee \bar{b})(b \vee \bar{a}) =$
$= (\bar{a}\bar{b} \vee \bar{a}a \vee b\bar{b} \vee ba) \vee (\bar{a}\bar{b} \vee \bar{a}a \vee b\bar{b} \vee ab) = (\bar{a}\bar{b} \vee ab) \vee (\bar{a}\bar{b} \vee ab) = \bar{a}\bar{b} \vee ab -$

формула не является ни тавтологией, ни противоречием**.**

Решение логических задач с помощью алгебры логики.

Условие логической задачи с помощью соответствующих обозначений записывают в виде формулы алгебры логики. После равносильных преобразований формулы получают ответ на все вопросы задачи.

Обычно используется следующая схема решения:

1. изучается условие задачи;
2. вводится система обозначений для логических высказываний;
3. конструируется логическая формула, описывающая логические связи между всеми высказываниями условия задачи;
4. определяются зна- чения истинности этой

логической формулы;

5. из полученных значений истинности формулы определяются значения истинности введённых логических высказываний, на основании которых делается заключение о решении.

Пример 2.19. По обвинению в ограблении перед судом предстали Иванов, Петров, Сидоров. Следствием установлено: 1) Если Иванов не виновен или Петров виновен, то Сидоров виновен ;2) Если Иванов не виновен, то Сидоров не виновен. Виновен ли Иванов?

Решение.

Введем краткие обозначения для сформулированных условий и составить логическую формулу, выражающую принятое решение в символической форме. Нам даны сложные высказывания 1),2).Выделим из них простые высказывания: И-Иванов виновен, П-Петров виновен, С-Сидоров виновен, тогда условие 1) можно записать в виде $\overline{И} \vee П \to C$, а условие 2) в виде $\overline{И} \to \overline{C}$. Так как оба условия должны выполняться одновременно, то они должны быть соединены логической связкой «и», таким образом логическая формула выглядит так $\left(\overline{И} \vee П \to C\right) \wedge \left(\overline{И} \to \overline{C}\right)$.

Найдем более простую равносильную данной формулу:

$$\Phi=\left(\overline{И}\vee П\to С\right)\wedge\left(\overline{И}\to\overline{С}\right)=\left(\overline{\overline{И}\vee П}\vee С\right)\wedge\left(И\vee\overline{С}\right)=\left(И\overline{П}\vee С\right)\left(И\vee\overline{С}\right)=И\overline{П}\vee И\overline{П}\,\overline{С}\vee$$
$$\vee С\overline{С}\vee СИ=И\overline{П}\left(1\vee\overline{С}\right)\vee СИ=И\overline{П}\vee СИ=И\left(\overline{П}\vee С\right)$$

Пользуясь найденной более простой формулой, дадим словесную формулировку установленных следствием решений: «Иванов виновен, при этом Петров не виновен или Сидоров виновен». Следовательно, Иванов виновен.

Пример 2.20. На языке алгебры логике составьте истинное тождество, соответствующее заданному условию задачи. Школьник Миша, оставшийся в классе на перемене, был вызван к директору по поводу разбитого в это время окна в кабинете. На вопрос директора кто это сделал, мальчик ответил: «Я не бил окно и Коля тоже». Известно, что он либо сказал чистую правду, либо в одной части заявления соврал, а другое его высказывание истинно, либо оба факта исказил.

Решение.

Составим простые высказывания: K – Коля разбил окно; M - Миша разбил окно.

Запишем формулы, соответствующие сложным высказываниям:

$\overline{M}\wedge\overline{K}$ -Я не бил окно и Коля тоже (сказал чистую правду);

$\overline{M} \wedge K \vee M \wedge \overline{K}$ - Миша не бил окно, Коля разбил окно или Миша разбил окно, а Коля не бил окно (либо в одной части заявления соврал, а другое его высказывание истинно);

$M \wedge K$ - Коля разбил окно, и Миша разбил окно (оба факта исказил).

Все три факта истинны по условию $\overline{M} \wedge \overline{K} = 1$, $\overline{M} \wedge K \vee M \wedge \overline{K} = 1$, $M \wedge K = 1$

Составим истинное тождество, соответствующему заданному условию задачи: $\left(\overline{M} \wedge \overline{K}\right) \vee \left(\overline{M} \wedge K \vee M \wedge \overline{K}\right) \vee \left(M \wedge K\right) = 1$.

Пример 2.21. По подозрению в совершенном преступлении задержали Брауна, Джона и Смита. Один из них был уважаемым в городе стариком, другой был малоизвестным чиновником, третий – известным мошенником. В процессе следствия старик говорил правду, мошенник лгал, а третий задержанный в одном случае говорил правду, а в другом – ложь. Вот, что они утверждали:1) Браун: «Я совершил это. Джон не виноват»;2) Джон: «Браун не виноват. Преступление совершил Смит». 3)Смит: «Я не виноват, виновен Браун». Определите имя старика, мошенника, чиновника и кто из них виноват, если известно, что преступник один.

Решение.

Составим простые высказывания: Б - виноват Браун, Д-виноват Джон, С-виноват Смит. Утверждения задержанных можно записать в виде конъюнкций: 1) $Б \wedge \overline{Д}$;2) $\overline{Б} \wedge C$;3) $Б \wedge \overline{C}$, из которых по условию задачи, две ложны, а одна истинна. Поэтому будет истинной формула $Ф$ = $Б \wedge \overline{Д} \vee \overline{Б} \wedge C \vee Б \wedge \overline{C}$ = 1.

Таблица истинности формулы имеет вид:

	$Б$	$Д$	C	$Б \wedge \overline{Д}$	$\overline{Б} \wedge C$	$Б \wedge \overline{C}$	$Ф$
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1	0	1
3	0	1	0	0	0	0	0
4	0	1	1	0	1	0	1
5	1	0	0	1	0	1	1
6	1	0	1	1	0	0	1
7	1	1	0	0	0	1	1
8	1	1	1	0	0	0	0

Формула $Ф$ истинна в пяти из восьми случаев. Случай 5 следует исключить из рассмотрения, так как здесь оказываются истинными две конъюнкции, а это противоречит условию задачи. В случаях 4, 6, 7 оказываются истинными по два высказывания Д и С, Б и С, Б и Д соответственно, что также противоречит условию задачи. Следовательно, справедлив случай 2, то есть Смит – известный мошенник, оба его высказывания ложны: $\Phi(0,0,1)=1$-не виновен Браун, не виновен Джон и виновен Смит. Значит, истинна пара высказываний Джона, а у Брауна первое высказывание (Я совершил это)-ложно, а второе(Джон не виноват)-истинно, следовательно Джон – уважаемый в городе старик, а Браун – малоизвестный чиновник.

Пример 2.22. Кто из учеников A, B, C и D играет, а кто не играет в шахматы, если известно следующее: а) если A или B играет, то C не играет; б) если B не играет, то играют C и D; в) ученик C играет в шахматы.

Решение.

Определим следующие простые высказывания:

A — «ученик A играет в шахматы»; B — «ученик B играет в шахматы»; C — «ученик C играет в шахматы»; D — «ученик D играет в шахматы». С помощью простых высказываний запишем высказывания из условия: а) $A\vee B\to\overline{C}$;б) $\overline{B}\to C\cdot D$;в) C

Составим конъюнкцию записанных

выше сложных высказываний: $\left(A \vee B \to \overline{C}\right)\cdot\left(\overline{B} \to C \cdot D\right)\cdot C$.

Упростим полученную формулу:

$$\left(\left(A \vee B\right) \to \overline{C}\right)\cdot\left(\overline{B} \to C \cdot D\right)\cdot C = \left(\overline{\left(A \vee B\right)} \vee \overline{C}\right)\cdot\left(B \vee C \cdot D\right)\cdot C = \left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right.$$

$$= \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot B \cdot C \vee B \cdot \overline{C}\cdot C \vee \overline{C}\cdot C \cdot D \vee \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C \cdot D = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C \cdot D,$$

В шахматы играют ученики C и D, а ученики A, B не играют.

2.5. Разложение логических функций по переменным.

Совершенные нормальные формы.

Для любой формулы можно указать равносильную ей формулу, содержащую лишь три основные операции: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция.

Например, импликация и эквиваленция легко выражаются через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию: $x \to y = \overline{x} \vee y$, $x \leftrightarrow y = \left(\overline{x} \vee y\right) \wedge \left(\overline{y} \vee x\right)$.

Если логическая функция выражена через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание переменных, то такая форма её представления называется **нормальной**.

Таким образом, нормальная форма логической формулы не содержит импликации, эквиваленции и отрицания не элементарных формул.

Пример 2.23. Преобразовать формулу $\overline{x \to y}$ к нормальной форме.

Решение.

Преобразуем формулу $\overline{x \to y}$ так, чтобы она содержала лишь три основные операции: $\neg, \vee, \wedge$.

Используя равносильные преобразования, имеем: $\overline{x \to y} = \overline{\overline{x} \vee y} = \overline{\overline{x}} \wedge \overline{y} = x \wedge \overline{y}$.

Выразить данную формулу через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию возможно не одним способом, а многими. К примеру, рассматриваемая в примере формула равносильна также следующим формулам, содержащим из логических связок лишь $\neg, \vee, \wedge$: $(x \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge \overline{x})$, $(x \wedge \overline{y}) \wedge (x \vee \overline{x})$ и так далее.

Нормальная форма существует в двух видах:

1) Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) — это формула, имеющая вид конъюнкций нескольких (или одной) элементарных дизъюнкций.

Формулу называют **элементарной дизъюнкцией**, если она образована дизъюнкцией некоторого числа переменных или их отрицаний.

Замечание: в элементарных дизъюнкциях каждая переменная или ее отрицание встречается не более одного раза.

Например, $\bar{x}$, $x \vee z, x \vee \bar{y} \vee z$ - элементарные (простые) дизъюнкты,

$(x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee z)$- конъюнкция двух элементарных дизъюнкций, то есть конъюнктивная нормальная форма; $x \vee \bar{y} \vee z$ - конъюнкция одной элементарной дизъюнкции.

Примеры 2.24. Какие из нижеперечисленных формул являются, а какие не являются КНФ:

1) $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee z)$;2) $(\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{x})$;3) $\overline{(x \vee z)} \wedge (y \vee x)$;

4) $x \vee (y \wedge z)$;5) $\bar{y} \vee z$;6) $\bar{x}$.

Решение.

Вторая формула не является КНФ, так как вторая входящая в неё дизъюнкция не является элементарной (содержит переменную и ее отрицание). Третья формула не является КНФ, так как отрицание в первой скобке расположено не над переменной, а над сложным выражением. Четвертая формула не является КНФ, так как не является конъюнкцией элементарных дизъюнкций. Все остальные примеры являются элементарными конъюнкциями.

2)Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) - эта формула, имеющая вид нескольких (или одной) дизъюнкций элементарных конъюнкций.

Формулу называют **элементарной конъюнкцией**, если она образованна конъюнкцией некоторого числа переменных или их отрицаний.

Замечание: в элементарных конъюнкциях каждая переменная или ее отрицание встречается не более одного раза.

Например, x, $x \wedge y$, $x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$ - элементарные (простые) конъюнкты, $(x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$- дизъюнкция двух элементарных конъюнкций, то есть дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ).

Примеры 2.25. Какие из нижеперечисленных формул являются, а какие не являются ДНФ:

1) $(x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (y \wedge z)$;2) $(x \wedge y) \vee z$;3) $x \wedge (y \vee z)$;4) x;

5) $\overline{y} \vee z$; 6) $\overline{y \vee z}$;7) $\overline{x} \wedge y$.

Решение.

Третья формула не является ДНФ, так как является КНФ. Шестая не является ДНФ, так как в ДНФ отрицание может располагаться лишь над переменными, а здесь отрицание располагается над логической операцией. Остальные формулы являются дизъюнктивными нормальными формами. При этом четвертая, пятая и седьмая формула является одновременно ДНФ и КНФ**.**

Алгоритм приведения формулы к ДНФ:

1. Выразить все логические операции в формуле через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание.

2. Используя, законы де Моргана, переносят все отрицания к переменным и сокращают двойные отрицания.

3. Используют закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции, преобразуют формулу так, чтобы все конъюнкции встречались раньше дизъюнкции.

Алгоритм приведения к КНФ аналогичен, только на шаге 3 делают так, чтобы все дизъюнкции встречались раньше конъюнкции.

Пример 2.26. Привести к КНФ формулу: **а)** $\overline{(x \vee y) \vee z}$; **б)** $(x \to y) \wedge \left(\bar{y} \to z \to \bar{x}\right)$.

Решение.

а) Приведём к КНФ данную формулу для этого уберем отрицания не элементарных дизъюнкций используя закон де Моргана: $\overline{(x \vee y) \vee z} = \overline{(x \vee y)} \wedge \bar{z} = \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$ - КНФ;

б) Для этого заменим $\to$ на $\wedge, \vee, \neg$, используя формулу $x \to y = \bar{x} \vee y$, затем применяем закон де Моргана и закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$(x \to y) \wedge \left(\left(\bar{y} \to z\right) \to \bar{x}\right) = \left(\bar{x} \vee y\right) \wedge \left(\left(\overline{\bar{y} \to z}\right) \vee \bar{x}\right) = \left(\bar{x} \vee y\right) \wedge \left(\left(\overline{y \vee z}\right) \vee \bar{x}\right) =$$
$$= \left(\bar{x} \vee y\right) \wedge \left(\left(\bar{y} \wedge \bar{z}\right) \vee \bar{x}\right) = \left(\bar{x} \vee y\right) \wedge \left(\bar{x} \vee \bar{y}\right) \wedge \left(\bar{x} \vee \bar{z}\right) = \left(\bar{x} \vee y\right)\left(\bar{x} \vee \bar{y}\right)\left(\bar{x} \vee \bar{z}\right) \text{- КНФ.}$$

Пример 2.27. Привести к ДНФ формулу: **а)** $\overline{x \wedge y \vee z}$; **б)** $(x \to y) \downarrow \overline{y \to z}$.

Решение.

а) Приведём к ДНФ данную формулу, для этого уберем отрицания неэлементарных конъюнкций используя закон де Моргана и закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$\overline{(x \wedge y) \vee z} = \overline{(x \wedge y)} \wedge \bar{z} = \left(\bar{x} \vee \bar{y}\right) \wedge \bar{z} = \left(\bar{x} \wedge \bar{z}\right) \vee \left(\bar{y} \wedge \bar{z}\right) = \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \text{ -ДНФ;}$$

б) Учитывая, что $x \to y = \bar{x} \vee y$ и $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$ имеем:

$$(x \to y) \downarrow \overline{y \to z} = (\bar{x} \vee y) \downarrow \overline{\bar{y} \vee z} = \overline{(\bar{x} \vee y)} \wedge \overline{\overline{\bar{y} \vee z}} = \left(x \wedge \bar{y}\right) \wedge \left(\bar{y} \vee z\right) =$$
$$= \left(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{y}\right) \vee \left(x \wedge \bar{y} \wedge z\right) = \left(x \wedge \bar{y}\right) \vee \left(x \wedge \bar{y} \wedge z\right) = x\bar{y} \vee x\bar{y}z - ДНФ.$$

Очевидно, что каждая формула имеет бесконечно много ДНФ и КНФ.

Пример 2.28. Найти несколько ДНФ для формулы

$\overline{\bar{\bar{x}} \vee y} \wedge (\bar{z} \to x)$.

Решение.

1) $\overline{\bar{\bar{x}} \vee y} \wedge (\bar{z} \to x) = \bar{\bar{x}} \wedge \bar{y} \wedge (\bar{\bar{z}} \vee x) = x\,\bar{y}\,(z \vee x) = x\bar{y}z \vee x\bar{y}$;

2) $\overline{\bar{\bar{x}} \vee y} \wedge (\bar{z} \to x) = x\bar{y}z \vee x\bar{y} = x\bar{y}(z \vee 1) = x\bar{y}$;

3) $\overline{\bar{\bar{x}} \vee y} \wedge (\bar{z} \to x) = x\bar{y}z \vee x\bar{y} \vee x\bar{y}$ и так далее.

Пример 2.29. Привести формулу ДНФ к КНФ:

а) $x \vee y\bar{z}$; **б)** $xy \vee y\bar{z}$.

Решение.

а) $x \vee y\bar{z} = x \vee (y \wedge \bar{z}) = (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{z})$-КНФ;

б) $xy \vee y\bar{z} = y(x \vee \bar{z})$- КНФ.

Пример 2.30. Привести $(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z})$ - к ДНФ.

Решение.

$(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z} = \bar{y}(\bar{x} \vee 1 \vee \bar{z}) \vee \bar{x}\bar{z} = \bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} - \text{ДНФ}$.

Среди нормальных форм (всевозможных выражений данной формулы через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание) выделяют **совершенные нормальные формы** особенно важные, как в алгебре логике, так и в её приложениях. Рассмотрением таких выражений, имеющих единственное представление, мы сейчас и займёмся. Различают со- вершенную конъюнктивную нормальную форма (СКНФ) и совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ).

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) — это КНФ, удовлетворяющая четырем условиям:

1) различны все члены конъюнкции;

2) различны все члены каждой дизъюнкции;

3) ни одна дизъюнкция не содержит переменную вместе с отрицанием этой переменной;

4) каждая дизъюнкция содержит все переменные, входящие в исходную формулу.

Пример 2.31. Какие из нижеперечисленных формул являются, а какие не являются СКНФ:

1) $(x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

2) $(x \vee y) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y})$;3) $\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$;

4) $(x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$;

5) $(x \vee y \vee z \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee \bar{z})$.

Решение.

Вторая и четвертая КНФ не являются СКНФ, так как не все входящие в них дизъюнкции содержат все три переменные, пятая не СКНФ, так как первая дизъюнкция содержит переменную вместе с отрицанием. Первая и третья формулы являются СКНФ.В частности, третья формула является СКНФ, состоящей из одного полного дизъюнкта (содержащего все три переменные).

Алгоритм приведения к СКНФ:

1) привести формулу с помощью равносильных преобразований к КНФ;

2) удалить члены конъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием (если такие окажутся);

3) из одинаковых членов конъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;

4) из одинаковых членов каждой дизъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;

5) если в какой-нибудь дизъюнкции не содержится переменной x_i из числа переменных, входящих в исходную формулу, добавить к этой дизъюнкции член $x_i \wedge \overline{x_i}$ и применить закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции;

6) если в полученной конъюнкции окажутся одинаковые члены, воспользоваться предписанием из п. 3.;

7) Полученная формула и является СКНФ данной формулы.

Замечание: Любая булева функция, которая не является тождественно истинной, может быть представлена единственным образом в СКНФ.

Пример 2.32. Привести следующие формулы к СКНФ с помощью равносильных преобразований:

а) $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$;**б)** $f(x,y,z) = (x \vee z \vee \overline{y}) \wedge (x \vee z) \wedge y$;

в) $f(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2) \wedge x_1 \wedge x_2$.

Решение.

а) Используя определение операции сложение по модулю два $x \oplus y = \overline{x \leftrightarrow y}$ и следующие равносильности $x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x)$, $x \to y = \bar{x} \vee y$,$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$,

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ преобразуем формулу к СКНФ:

$$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \leftrightarrow x_2} = \overline{(x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1)} = \overline{(\overline{x_1} \vee x_2)(\overline{x_2} \vee x_1)} =$$
$$= \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_2\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_1 \vee x_2x_1} = \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1x_2}$$
$$= (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) - \text{СКНФ};$$

б) Так как формула имеет вид КНФ, а во второй дизъюнкции не хватает переменной y, добавим к ней $y \wedge \overline{y}$, а в третьей дизъюнкции не хватает x и z, поэтому добавим $x \wedge \overline{x}$,$z \wedge \overline{z}$ и применяя дистрибутивный закон имеем:

$$(x \vee z \vee \overline{y}) \wedge (x \vee z) \wedge y = (x \vee z \vee \overline{y}) \wedge (x \vee z \vee (y \wedge \overline{y})) \wedge (y \vee (x \wedge \overline{x})) =$$
$$= (x \vee z \vee \overline{y}) \wedge (x \vee z \vee y) \wedge (x \vee z \vee \overline{y}) \wedge ((y \vee x) \wedge (y \vee \overline{x})) = (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee z) \wedge ((y \vee x) \vee (z \wedge \overline{z}) \wedge (y \vee \overline{x}) \vee (z \wedge \overline{z})) = (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) = (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) - СКНФ.$$

в) Приведем формулу к КНФ, а затем добавив недостающие переменные получим СКНФ:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2) \wedge x_1 \wedge x_2 = (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge x_1 \wedge x_2 = КНФ = (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee (x_2 \wedge \overline{x_2})) \wedge$$
$$\wedge (x_2 \vee (x_1 \wedge \overline{x_1})) = (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2) =$$
$$= (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) - СКНФ;$$

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) — это ДНФ, удовлетворяющая четырем условиям:

1) различны все члены дизъюнкции;

2) различны все члены каждой конъюнкции;

3) ни одна конъюнкция не содержит одновременно переменную и отрицание этой переменной;

4) каждая конъюнкция содержит все переменные, входящие в формулу.

Пример 2.33. Какие из нижеперечисленных формул являются, а какие не являются СДНФ:

1) $(x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z})$;2) $(x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee \overline{y}$;

3) $x \wedge y \wedge \bar{z}$;

4) $(x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z)$;5) $(\overline{\bar{x} \wedge y \wedge z}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$.

Решение.

Вторая формула не является СДНФ, так как первая и третья, входящие в нее конъюнкции содержат не все переменные, четвертая не СДНФ вторая и третья дизъюнкция совпадают. Пятая формулы содержит отрицание не над переменной, а над более сложной формулой, поэтому не является СДНФ. Первая, третья формулы являются СДНФ. В частности, третья формула является СДНФ, состоящей из одного полного конъюнкта (содержащего все три переменные).

Алгоритм приведения к СДНФ:

1) привести формулу с помощью равносильных преобразований к ДНФ;

2) удалить члены дизъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием (если такие окажутся);

3) из одинаковых членов дизъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;

4) из одинаковых членов каждой конъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;

5) если в какой-нибудь конъюнкции не содержится переменной x_i из числа переменных, входящих в исходную формулу, добавить к этой конъюнкции член $x_i \vee \overline{x_i}$ и применить закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции;

6) если в полученной дизъюнкции окажутся одинаковые члены, воспользоваться предписанием из п. 3;

7) Полученная формула и является СДНФ данной формулы.

Замечание: Любая булева формула, которая не является тождественно ложной, имеет единственную СДНФ.

Пример 2.34. Преобразовать данную функцию f в СДНФ: **а)** $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\left(\overline{x_2} \vee x_1 x_3 \vee x_2 \overline{x_3}\right)$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3$. **в)** $f(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$.

Решение.

а) Раскроем скобки и увидим, что в первой конъюнкции не хватает x_3, умножив её на член $x_3 \vee \overline{x_3}$ и применив дистрибутивные закон получим СДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\left(\overline{x_2} \vee x_1 x_3 \vee x_2 \overline{x_3}\right) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_1 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\left(x_3 \vee \overline{x_3}\right) \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} =$$
$$= \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3};$$

б) В первой конъюнкции не хватает переменной x_2, x_3, добавив к этой конъюнкции члены $x_2 \vee \overline{x_2}$, $x_3 \vee \overline{x_3}$, а к третьей член $x_1 \vee \overline{x_1}$ и применив дистрибутивные закон получим СДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3 = \overline{x_1}(x_2 \vee \overline{x_2})(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3 (x_1 \vee \overline{x_1}) = (\overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2})(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee$$
$$\vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 = \overline{x_1} x_2 x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3.$$

в) $f(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$-СДНФ.

Построение СДНФ и СКНФ по таблице истинности.

Правило построения СКНФ по таблице истинности

Для каждого набора переменных, при котором функция равна нулю, записывается сумма, причем переменные, которые имеют значение 1, берутся с отрицанием. Далее, образуем конъюнкции всех полученных дизъюнкций.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1

Пример 2.35. Привести СКНФ функции f, заданной таблицей истинности:

1	1	0	0
1	1	1	1

Решение.

Воспользуемся правилом построения СКНФ. Имеется три набора на которых функция равна 0: $f(0,1,0) = f(0,1,1) = f(1,1,0) = 0$ (третья, четвертая, седьмая строки в таблице), далее записываем сумму (дизъюнкцию) переменных x_1, x_2, x_3, причем переменные, которые имеют значение 1 берутся с отрицанием: $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3,\ x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3},\ \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$. Записывая конъюнкции данных элементарных дизъюнкций, получим СКНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3\right) \wedge \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\right).$$

<u>Правило построения СКНФ по таблице истинности</u>

Для каждого набора переменных, при котором функция равна единицы, записывается произведение (конъюнкция), причем переменные, которые имеют значение 0, берутся с отрицанием. Далее, образуем дизъюнкции всех полученных конъюнкций.

Пример 2.36. Привести СКНФ функции f, заданной таблицей истинности (справа).

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Решение.

Воспользуемся правилом построения СДНФ. Для каждого набора на которых функция равна 1: $f(0,0,0) = f(0,0,1) = f(1,0,0) = f(1,0,1) = f(1,1,1) = 1$, записываем конъюнкции переменных x_1, x_2, x_3, причем переменные, которые имеют значение 0 берутся с отрицанием:

$$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3},\ \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3,\ x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3},\ x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3,\ x_1 \wedge x_2 \wedge x_3.$$

Записывая дизъюнкции данных элементарных конъюнкций, получим СДНФ:

$$f(x_1,x_2,x_3) = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

Пример 2.37. Привести функцию f заданную таблицей истинности к: **а)** СДНФ; **б)** СКНФ.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Решение.

а) Выписываем наборы, где функция истинна $f(0{,}1{,}0) = f(0{,}1{,}1) = f(1{,}0{,}1) = f(1{,}1{,}1) = 1$, составляем по ним элементарные конъюнкции $\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3$, $\overline{x}_1 x_2 x_3$, $x_1 \overline{x}_2 x_3$, $x_1 x_2 x_3$, образуя дизъюнкции всех полученных конъюнкций, получим СДНФ: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

б) Выписываем ложные значения функции $f(0{,}0{,}0) = f(0{,}0{,}1) = f(1{,}0{,}0) = f(1{,}1{,}0) = 0$, составляем по данным наборам элементарные дизъюнкции $x_1 \vee x_2 \vee x_3$, $x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$, $\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$, $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$, образуем конъюнкции данных дизъюнкций, получаем СКНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)$$

.

Пример 2.38. Запишите СДНФ и СКНФ формулы двумя способами (с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности):

а) $\overline{(x \wedge y) \vee z}$ **; б)** $x_1 \to x_2 | \overline{x_1}$.

Решение.

а)<u>1 способ</u>: (с помощью равносильных преобразований)

Используя равносильные преобразования и законы логики, приведем данную формулу к ДНФ, а затем к СДНФ:

$$\overline{(x \wedge y) \vee z} = \overline{(x \wedge y)} \wedge \bar{z} = \left(\bar{x} \vee \bar{y}\right) \wedge \bar{z} = \left(\bar{x} \wedge \bar{z}\right) \vee \left(\bar{y} \wedge \bar{z}\right) = \text{ДНФ} = \left(\left(\bar{x} \wedge \bar{z}\right) \wedge \left(y \vee \bar{y}\right)\right) \vee \left(\left(\bar{y} \wedge \bar{z}\right) \wedge \left(x \vee \bar{x}\right)\right) =$$
$$= \left(\bar{x} \wedge y \vee \bar{z}\right) \vee \left(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}\right) \vee \left(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}\right) \vee \left(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}\right) = \left(\bar{x} \wedge y \vee \bar{z}\right) \vee \left(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}\right) \vee \left(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}\right) - \text{СДНФ};$$

Приведем данную формулу к КНФ, а затем к СКНФ:

$$\overline{(x \wedge y) \vee z} = \overline{(x \wedge y)} \wedge \bar{z} = \left(\bar{x} \vee \bar{y}\right) \wedge \bar{z} = \text{КНФ} = \left(\left(\bar{x} \vee \bar{y}\right) \vee \left(z \wedge \bar{z}\right)\right) \wedge \left(\bar{z} \vee \left(x \wedge \bar{x}\right)\right) = \left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z\right) \wedge \left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\bar{z} \vee x\right) \wedge \left(\bar{z} \vee \bar{x}\right) = \left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z\right) \wedge \left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}\right) \wedge \left(\left(\bar{z} \vee x\right) \vee \left(y \wedge \bar{y}\right)\right) \wedge \left(\left(\bar{z} \vee \bar{x}\right) \vee \left(y \wedge \bar{y}\right)\right) = \left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z\right) \wedge$$
$$\wedge \underline{\left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}\right)} \wedge \left(x \vee y \vee \bar{z}\right) \wedge \left(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}\right) \wedge \left(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}\right) \wedge \underline{\left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}\right)} = \left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z\right) \wedge \left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}\right) \wedge$$
$$\wedge \left(x \vee y \vee \bar{z}\right) \wedge \left(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}\right) \wedge \left(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}\right) - \text{СКНФ}.$$

<u>2 способ</u>:(с помощью таблицы истинности)

Для построения СДНФ составим таблицу истинности для данной формулы:

x	y	z	$x \wedge y$	$(x \wedge y) \vee z$	$\overline{(x \wedge y) \vee z}$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1

1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

Отметим те строки таблицы, в которых формула (последний столбец) принимает значение 1: $f(0{,}0{,}0)=f(0{,}1{,}0)=f(1{,}0{,}0)=1$ составляем по ним элементарные конъюнкции, причем переменные ,которые имеют значение 0 берутся с отрицанием : $(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})$-1 строка, $(\bar{x}\wedge y\wedge\bar{z})$ -3 строка, $(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})$-5 строка .Составляем дизъюнкции этих конъюнкции получим совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ): $(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})\vee(\bar{x}\wedge y\wedge\bar{z})\vee(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})$;

Отметим те строки таблицы (выше), в которых формула принимает значение 0: $f(0{,}0{,}1)=f(0{,}1{,}1)=f(1{,}0{,}1)=f(1{,}1{,}0)=f(1{,}1{,}1)=0$. Для каждой такой строки выпишем формулу, ложную на наборе переменных x,y,z: $(x\vee y\vee\bar{z})$-2 строка, $(x\vee\bar{y}\vee\bar{z})$-4 строка, $(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})$-6 строка, $(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)$-7 строка, $(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})$-8 строка. Составляя конъюнкции этих дизъюнкций, получим СКНФ:

$$\left(x \vee y \vee \bar{z}\right) \wedge \left(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}\right) \wedge \left(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}\right) \wedge \left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z\right) \wedge \left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}\right).$$

б)1 способ:

$x_1 \rightarrow x_2|\overline{x_1} = x_1 \rightarrow \overline{x_2 \wedge \overline{x_1}} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_1 = (\overline{x_1} \vee x_1) \vee \overline{x_2} = 1 \vee \overline{x_2} = 1$- формула является тождественно истинной, поэтому СКНФ не имеет

, но может представлена единственным образом в СДНФ;

Построим СДНФ формулы:

$x_1 \rightarrow x_2|\overline{x_1} = 1 = \overline{x_1} \vee x_1 = \left(\overline{x_1} \wedge (x_2 \vee \overline{x_2})\right) \vee \left(x_1 \wedge (x_2 \vee \overline{x_2})\right) = \overline{x_1} \wedge x_2 \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \vee x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge \overline{x_2}$

-СДНФ;

2 способ:(сделайте задание самостоятельно).

Пример 2.39. Для эквиваленции $x \leftrightarrow y$, при помощи таблицы истинности, написать: **а)** СДНФ; **б)** СКНФ.

x_1	x_2	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Решение.

а) Запишем соответствующую таблицу истинности и выпишем наборы, где функция истинна $f(0{,}0) = f(1{,}1) = 1$, составляем по ним элементарные конъюнкции $\overline{x_1 x_2}$, $x_1 x_2$,таким образом СДНФ имеет вид $f(x_1, x_2) = \overline{x_1}\ \overline{x_2} \vee x_1 x_2$;

б) Выписываем ложные значения функции $f(0,1)=f(1,0)=0$, составляем по данным наборам элементарные дизъюнкции $x_1 \vee \overline{x_2}$, $\overline{x_1} \vee x_2$,составляя их конъюнкции $f(x_1,x_2)=\left(x_1 \vee \overline{x_2}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2\right)$- СКНФ.

Таким образом, СДНФ, СКНФ определяется для каждой функции однозначно. Единственная функция не имеющая СКНФ – константа 1. Единственная функция не имеющая СДНФ – константа 0.

Формулы, содержащие кроме переменных и скобок только знаки операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, называются **булевыми формулами**.

Следовательно, введенные СДНФ и СКНФ, являются булевыми формулами. Всякая логическая функция может быть представлена булевой формулой.Итак,под булевой алгеброй понимается алгебра, в которой логические операции состоят только из дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

2.6. Двойственность.

Булева функция $f^*(x_1,x_2,...,x_n)$называется **двойственной** к функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$, если она получена из функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ инверсией(отрицанием) всех аргументов и самой функции.

Обозначение: $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$

Возьмём отрицания над обеими частями равенства $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ и подставим $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ вместо $x_1, x_2, ..., x_n$, получим $\overline{f^*}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ $= \overline{\overline{f}}(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, ..., \overline{\overline{x}}_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то есть функция f^* двойственна к f. Отношение двойственности между функциями симметрично.

Из определения двойственности следует, что для любой функции, двойственная определяется однозначно. Может оказаться так, что функция двойственна самой себе $(f^*)^* = f$.

Пример 2.40. Построить функции двойственные к данным: **а)** $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$; **б)** $f(x_1, x_2) = \overline{x_1 \wedge x_2}$;
в) $f(x) = \overline{x}$; **г)** $f(x) = 0$.

Решение.

а) $f^*(x_1, x_2) = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2} = \overline{\overline{x}}_1 \wedge \overline{\overline{x}}_2 = x_1 \wedge x_2$, получим, что двойственной к дизъюнкции функцией является конъюнкция;

б) $f^*(x_1, x_2) = \overline{\overline{\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2}} = \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$;

в) $f^*(x) = \overline{\left(\overline{\overline{x}}\right)} = \overline{x}$;

г) $f^*(x) = \overline{0} = 1$.

Таким образом, дизъюнкция и конъюнкция, двойственны (в силу законов де Моргана). Константа 1 и константа 0 двойственны в силу свойств констант: $\overline{1} = 0$, $\overline{0} = 1$.

Из определения двойственности следует, что для любой функции, двойственная определяется однозначно. Может оказаться так, что функция двойственна самой себе $\left(f^*\right)^* = f$ (см. пример 2.40. в)).

В соответствии с выше сказанным получим следующее утверждение, называемое принципом двойственности.

Принцип двойственности в булевой алгебре*.*

Если в формуле *F,* представляющую функцию, все конъюнкции заменить на дизъюнкции, дизъюнкции – на конъюнкции, 1 на 0, 0 на 1, то получим формулу F^*, представляющую функцию f^*, двойственную f.

Две формулы, содержащие три основные операции (конъюнкцию, дизъюнкцию, отрицание) называются **двойственными**, если каждую из них можно получить из другой заменой знаков 0 на1,1на 0, $\vee$ на $\wedge$.

То есть, две булевы функции называются двойственными друг к другу *если они на* *всех* противоположных наборах принимают противоположные значения.

Двойственную функцию можно построить как при помощи равносильных преобразованиях, так и при помощи таблицы истинности, посмотрим, как это сделать на следующем примере.

Пример 2.41. Построить функцию двойственную к стрелке Пирса $f(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$:**а)**при помощи равносильных преобразований; **б)** при помощи таблицы истинности.

Решение.

а) Учитывая, что

$$f(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2},$$

$$f^*(x_1, x_2) = \overline{\overline{\overline{x_1}} \wedge \overline{\overline{x_2}}} = \overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}.$$

Заметим, что $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} = x_1 | x_2$,то есть двойственной для стрелки Пирса функцией будет штрих Шеффера $x_1 | x_2 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$.

б) Построим таблицу истинности:

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$f(x_1, x_2) = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$	$f(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = x_1 \wedge x_2$	$f^*(x_1, x_2) = \overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2})$
0	0	1	1	1	0	1

0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0

Заметим, что в таблице пятый столбец (соответствует исходной функции) и седьмой (соответствует двойственной к исходной функции), убеждаемся, что на любых двух противоположных наборах, двойственные функции принимают разные значения, например, $f(0{,}0)=1$, $f^*(1{,}1)=\overline{f}(\overline{1},\overline{1})=0$.

Функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется **самодвойственной**, если $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\overline{f}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$.

Пример 2.42. Показать, что функция $f=x_1\,x_2\vee x_1\,x_3\vee x_2\,x_3$ самодвойственная.

Решение.

$$\overline{f}(\overline{x_1},\overline{x_2},.\overline{x_3})=\overline{(\bar{x}_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_3)\vee\bar{x}_2\bar{x}_3}=\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_3}\wedge\overline{\bar{x}_2\bar{x}_3}=\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2}\wedge\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3}\wedge\overline{\bar{x}_2\bar{x}_3}=$$
$$=(x_1\vee x_2)(x_1\vee x_3)(x_2\vee x_3)=(x_1\vee x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3)(x_2\vee x_3)=(x_1(1\vee x_2\vee x_3)\vee x_2x_3)$$
$$(x_2\vee x_3)=(x_1\vee x_2x_3)(x_2\vee x_3)=x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3\vee x_2x_3=x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3.$$

Для выяснения самодвойственности функции можно использовать не только равносильные преобразования, но и сравнивать значений функции в таблице истинности (рассмотрим, как это сделать ниже).

Алгоритм построения самодвойственной функции при помощи таблицы истинности.

1.Построить таблицу истинности для функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$;

2.Для построения функции $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ необходимо перевернуть (переписать в обратном направлении) столбец, получившийся в результате выполнения пункта 1, то есть число, стоящее в первой строке, записать в последнюю строку; число, стоящее во второй строке - в предпоследнюю строку и так далее. Для получения функции $\overline{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ необходимо инвертировать компоненты столбца $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$.

Пример 2.43. При помощи таблицы истинности выяснить, является ли функция f самодвойственной:

а) $f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$;**б)** f = (01110001);

в) $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \leftrightarrow x_2) \to \overline{x_3}$ **.**

Решение.

а) Зададим f табличным способом и, согласно алгоритму, получим:

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$	$f(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = \overline{x_1} \to \overline{x_2}$	$\overline{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$
0	0	1	1	1	1	0

0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0

Так как $f\ (x_1, x_2) \neq \overline{f}\ (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, следовательно функция не является самодвойственной.

б) Построим таблицу истинности:

x_1	x_2	x_3	$f\left(x_1, x_2, x_3\right)$	$f\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\right)$	$\overline{f}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}\right)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1

$f\ (x_1, x_2, x_3) = \overline{f}\ (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, следовательно, функция является самодвойственной.

в) Построим таблицу истинности:

x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_1 \leftrightarrow x_2$	$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \leftrightarrow x_2) \to \overline{x}_3$	$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$	$\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0

$f(x_1, x_2, x_3) \neq \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$, следовательно функция не является самодвойственной.

2.7. Полином Жегалкина.

Полином Жегалкина был предложен в 1927 году Иваном Жегалкиным в качестве удобного средства для представления функций булевой логики.

Полином Жегалкина — есть полином(многочлен) с коэффициентами вида 0 и 1, где в качестве произведения берётся конъюнкция, а в качестве сложения — исключающее или$\oplus$.

Полином Жегалкина представляет собой сумму по модулю два попарно различных произведений не инвертированных переменных, где ни в одном произведении ни одна переменная не встречается больше одного раза, то есть имеет вид:

$$a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus \ldots$$

$\ldots \oplus a_{12\ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$- логические переменные, $a_0, a_1, \ldots, a_{12\ldots n} \in \{0; 1\}$— логические константы, коэффициенты принимающие значение либо 0, либо 1 в зависимости от того какое значение принимает логическая функция на том или ином наборе переменных.

Для булевой функции двух переменных $f(x_1; x_2)$полином Жегалкина имеет вид:

$$P(x_1; x_2) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12} x_1 x_2;$$

Для булевой функции трёх переменных $f(x_1; x_2; x_3)$ полином Жегалкина имеет вид:

$$P(x_1; x_2; x_3) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus$$

$$\oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus a_{23} x_2 x_3 \oplus a_{123} x_1 x_2 x_3;$$

Например,$1 \oplus x_1 \oplus x_2 x_3$-полином Жегалкина, где $n = 3$,

$a_0 = a_1 = a_{23} = 1$, а $a_2 = a_3 = a_{12} = a_{13} = a_{123} = 0.$

Теорема Жегалкина: каждая булева функция от n

переменных может быть реализована в виде канонического полинома Жегалкина от n переменных, причем, такое представление единственное.

Напомним, что двоичное сложение (сложение по модулю два) – это отрицание эквиваленции:

$x \oplus y = \overline{x \leftrightarrow y}$.

Законы двоичного сложения.

коммутативность: $x \oplus y = y \oplus x$;

ассоциативность: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;

идемпотентность: $x \oplus x = 0$;

дистрибутивность: $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$;

свойство нуля и единицы: $x \oplus 1 = \overline{x}$; $x \oplus 0 = x$.

Представления булевой функции в виде полинома

Существует два способа представления булевой функции в виде полинома: метод неопределенных коэффициентов и метод равносильных преобразований.

Метод равносильных преобразований.

Данный метод основан на применении равносильных преобразований данной булевой функции, представленной в виде формулы, к виду полинома.

Алгоритм построения полинома по фор-

муле:

1. заменить формулу равносильной, содержащей только операции конъюнкцию и отрицание.
2. снять отрицания, пользуясь равносильностью: $x \oplus 1 = \overline{x}$
3. раскрыть скобки: $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$
4. упростить, используя равносильности: $x \oplus 0 = x, x \oplus x = 0$.

Пример.2.44. Представить булеву функцию в виде полинома: **а)** $x \wedge \bar{y}$;**б)** $(x \to y)(y \to \overline{x})$;**в)** $x|y \downarrow z$;**г)**$(x \to y)(y \downarrow z)$.

Решение.

а) $x \wedge \bar{y} = x\bar{y} = x(y \oplus 1) = xy \oplus x;$

б)$(x \to y)(y \to \overline{x}) = (\overline{x} \vee y)(\overline{y} \vee \overline{x}) =$

$= \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{x} \vee y\overline{y} \vee y\overline{x} = \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x} \vee y\overline{x} =$

$= \overline{x}(\overline{y} \vee 1 \vee y) = \overline{x} = x \oplus 1;$

в) $x|y \downarrow z = (x|y) \downarrow z = \overline{xy} \downarrow z =$

$= \overline{\overline{xy} \vee z} = xy\bar{z} = xy(z \oplus 1) = xyz \oplus xy;$

г)$(x \to y)(y \downarrow z) = (\bar{x} \vee y)(\overline{y \vee z}) =$

$= \overline{x\bar{y}}\,\bar{y}\bar{z} = (1 \oplus x\bar{y})(1 \oplus y)(1 \oplus z) =$

$= \big(1 \oplus x(1 \oplus y)\big)(1 \oplus y \oplus z \oplus yz) =$

$= (1 \oplus x \oplus xy)(1 \oplus y \oplus z \oplus yz) = 1 \oplus y \oplus$

$\oplus z \oplus x \oplus xz \oplus yz \oplus xy \oplus xy \oplus xy \oplus xyz \oplus xyz$

$\oplus xyz = 1 \oplus y \oplus z \oplus x \oplus xz \oplus yz.$

Метод неопределённых коэффициентов (табличный метод построения полинома).

Построения полинома методом неопределённых коэффициентов рассмотрим на примере 2.45.

Пример.2.45. Найти полином Жегалкина, реализующий функцию методом неопределённых коэффициентов: **а)** $f(x_1; x_2) = x_1 | x_2$ **б)** $f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 x_2 \vee x_3) \rightarrow \overline{x_2}$.

Решение.

а) Для этого сначала необходимо построить таблицу истинности данной функции:

x_1	x_2	$f(x_1; x_2) = x_1 \| x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Как уже известно, общий вид полинома Жегалкина для функции двух переменных имеет вид:
$P(x_1; x_2) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12} x_1 x_2$,
поэтому должны выполняться равенства:

$f(0; 0) = P(0; 0) = 1$,тогда

$f(0;0) = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_{12} \cdot 0 \cdot 0 = a_0,$

следовательно, $a_0 = 1$;

$f(0;1) = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_{12} \cdot 0 \cdot 1 = a_0 \oplus a_2,$

следовательно, $a_0 \oplus a_2 = 1, 1 \oplus a_2 = 1, \overline{a_2} = 1,$

$a_2 = 0$;

$f(1;0) = P(1;0) = 1,$то есть

$f(1;0) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_{12} \cdot 1 \cdot 0 = a_0 \oplus a_1,$

то есть $1 \oplus a_1 = 1, \overline{a_1} = 1, a_1 = 0$;

$f(1;1) = P(1;1) = 0,$то есть

$f(1;1) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_{12} \cdot 1 \cdot 1 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12},$

$0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{12} = 0, 0 \oplus a_{12} = 0, \overline{a_{12}} = 0, a_{12} = 1.$

Подставляя коэффициенты в общий вид полинома Жегалкина, получим: $f(x_1;x_2) = 1 \oplus x_1 x_2$;

Замечание: тот же результат можно получить проще, если находить решение методом равносильных преобразований, действительно

$f(x_1;x_2) = x_1 | x_2 = \overline{x_1 x_2} = 1 \oplus x_1 x_2$;

б) Построить таблицу истинности данной функции:

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_2}$	$x_1 x_2$	$x_1 x_2 \vee x_3$	$(x_1 x_2 \vee x_3) \to \overline{x_2}$

0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0

Для булевой функции трёх переменных $f(x_1;x_2;x_3)$ полином Жегалкина имеет вид:

$P(x_1;x_2;x_3) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus$

$\oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{123}x_1x_2x_3,$

поэтому должны выполняться равенства:

$f(0;0;0) = a_0 = 1;$

$f(0;0;1) = a_0 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow 1 \oplus a_3 = 1, \overline{a_3} = 1, a_3 = 0;$

$f(0;1;0) = a_0 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow 1 \oplus a_2 = 1, \overline{a_2} = 1, a_2 = 0;$

$f(0;1;1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = 0 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{23} = 0,$

$1 \oplus a_{23} = 0, \overline{a_{23}} = 0, a_{23} = 1;$

$f(1;0;0) = a_0 \oplus a_1 = 1 \Rightarrow 1 \oplus a_1 = 1, \overline{a_1} = 1, a_1 = 0;$

$f(1;0;1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13} = 1 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{13} = 1,$

$1 \oplus a_{13} = 1, \overline{a_{13}} = 1, a_{23} = 0;$

$f(1;1;0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = 0 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{12} = 0,$

$1 \oplus a_{12} = 0, \overline{a_{12}} = 0, a_{12} = 1;$

$f(1;1;1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123} = 0 \Rightarrow$

$1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{123} = 0{,}1 \oplus a_{123} = 0, a_{123} = 1.$

Подставляя коэффициенты в общий вид полинома Жегалкина, получим: $f(x_1;x_2;x_3) = 1 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3$.

2.8. Полнота систем функций алгебры логики.

Булевы функции удобно задавать формулами. Формула представляет собой более компактный способ задания булевой функции, чем табличный, однако она задает функцию через другие функции. В связи с этим, для любой системы булевых функций $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$возникает естественный вопрос:

всякая ли булева функция представима формулой над F?

Система булевых функций $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$называется **полной**, если любая булева функция может быть выражена через функции этой системы с помощью составления из них сложных функций.

Составление сложных функций из элементарных функций систем называется суперпозицией.

Познакомимся с достаточным условием полноты системы.

Пусть система функций $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ (I) полная и любая из функций этой системы может быть выражена через функции $g_1, g_2, \ldots, g_l$, тогда система $\{g_1, g_2, \ldots, g_l\}$(II) тоже полная.

Докажем полноту следующих систем: {-, V, Λ}, {-, V}, {-, Λ}, {-, $\rightarrow$}, {x|y}, {x$\downarrow$y}, {0, 1, V, Λ, +}.

Полнота первой системы следует из того, что любую булеву функцию можно представить в виде ДНФ или КНФ.

Опираясь на достаточное условие полноты, докажем, что вторая систем тоже полная. За полную систему примем {-, V, Λ}. Выразим функции этой системы через отрицание и дизъюнкцию. Нужно выразить только конъюнкцию: $xy \equiv \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$. следовательно, система {-, V} полная.

С помощью той же полной системы докажем полноту {-, Λ}. Для этого нужно выразить дизъюнкцию: $x \vee y \equiv \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$.

Для доказательства полноты системы

{-, $\to$}воспользуемся полной системой {-, V}. Выразим дизъюнкцию отрицание и импликацию: $x \vee y \equiv \overline{\overline{x}} \vee y \equiv \overline{x} \to y$. Полнота доказана.

Для доказательства полноты системы {x|y} за полную примем, например, {-, Λ}. Выразим отрицание и конъюнкцию через штрих Шеффера:

$$\overline{x} \equiv x \mid x,$$
$$xy \equiv \overline{\overline{xy}} \equiv \overline{x \mid y} \equiv (x \mid y)(x \mid y).$$

Полнота доказана.

При доказательстве полноты системы {x↓y} за полную систему примем {-, V}. Выразим обе функции через стрелку Пирса:

$$\overline{x} \equiv x \downarrow x,$$
$$x \vee y \equiv \overline{\overline{x \vee y}} \equiv \overline{x \downarrow y} \equiv (x \downarrow y)(x \downarrow y).$$

Полнота доказана.

Полноту системы можно доказать, опираясь на то, что любая булева функция представима в виде полинома, или доказав с помощью достаточного условия. Воспользуемся полной системой {-, Λ}. Выразим 0, 1 и + через отрицание и конъюнкцию:

$$0 \equiv x\overline{x},$$

$$1 \equiv \overline{\overline{x}x},$$

$$x + y \equiv \overline{x \leftrightarrow y} \equiv \overline{(\overline{x} \vee y)(\overline{y} \vee x)} \equiv x\overline{y} \vee y\overline{x} \equiv \overline{\overline{x\overline{y}}\,\overline{y\overline{x}}}.$$

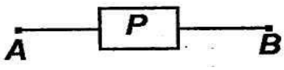
2.9. Приложение алгебры высказываний к релейно-контактным схемам (РКС).

В технике автоматического управления широко используются релейно- контактные (переключательные) схемы (РКС). Под такой схемой понимают схематическое изображение некоторого устройства, состоящее из трех элементов:

1) **переключателей,** которыми могут быть механические устройства, электромагнитные реле, полупроводники и так далее;

2) соединяющие их **проводники**;

3) **входы** в схему и **выходы** из нее (полюсы), клеммы на которые подается напряжение.

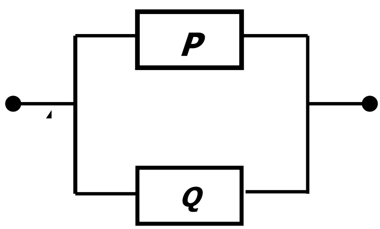
Простейшая схема содержит один переключатель P и имеет один вход *A* и один выход *B*. Переключателю *P* поставим в соответствие высказывание *K*, гласящее: «Переключатель *P* замкнут». Если *K* истинно, то импульс, поступающий на полюс А, может быть снят на полюсе *B*, то есть схема пропускает сигнал. Если *K* ложно, то переключатель разомкнут, и схема 

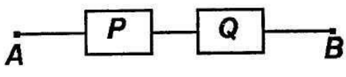
не проводит сигнал.

Таким образом, если принять во внимание не смысл высказывания, а только его значение, то можно считать, что любому высказыванию может быть поставлена в соответствие переключательная схема с двумя полюсами (двухполюсная схема).

Формулам, включающим основные логические операции, также могут быть поставлены в соответствие переключательные схемы. Конъюнкции двух высказываний $P \wedge Q$ ставится в соответствие схема:

дизъюнкции $P \vee Q$ схема:



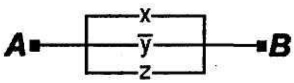


Так как любая формула алгебры логики может быть записана в ДНФ или КНФ, то ясно, что каждой формуле алгебры логики можно поставить в соответствие некоторую РКС, а каждой РКС можно поставить в соответствие некоторую формулу алгебры логики. Поэтому возможности схемы можно выявить, изучая соответствующую ей формулу, а упрощение схемы можно свести к упрощению формулы.

Пример 2.46. Составить РКС для формулы: $\bar{x}\wedge y\to(z\vee x)$.

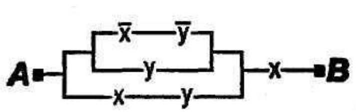
Решение.

Сначала упростим данную формулу с помощью равносильных преобразований: $\bar{x}\wedge y\to(z\vee x)=\overline{\bar{x}\wedge y}\vee z\vee x=x\vee\bar{y}\vee z\vee x=x\vee\bar{y}\vee z$. Тогда РКС для данной формулы имеет вид:



.

Пример 2.47. Упростить РКС:



Решение.

Составим для данной РКС формулу (функцию) проводимости и упростим её:

$f(x,y)=(\bar{x}\wedge\bar{y}\vee y\vee x\wedge y)\wedge x=$

$$\left(\overline{x}\,\overline{y} \vee y \vee xy\right)x = \left(y(1 \vee x) \vee \overline{x}\,\overline{y}\right)x = xy \vee \overline{x}x\overline{y} = xy.$$

Упрощенная схема выглядит так:  .

Пример 2.48. По заданной таблице истинности составить логическую функцию, упростить ее и построить логическую схему.

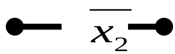
x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Решение.

Запишем СДНФ (или СКНФ). Составляем конъюнкции для каждой строки, где значения функции равны 1, при этом переменные, значения которых равны 0, запишем с отрицанием: $\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$, $x_1 \wedge \overline{x_2}$.Объединив полученные конъюнкции дизъюнкцией, получим следующую логическую функцию:

$f(x_1, x_2) = \left(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}\right) \vee \left(x_1 \wedge \overline{x_2}\right) = \overline{x_2}\left(\overline{x_1} \vee x_1\right) = \overline{x_2}$ упростим ее.

Соответствующая данной функции схема выглядит так:



.

Задания для самостоятельного решения.

1. Записать утверждения в виде логического выражения:

а) Если он купит компьютер, он не будет смотреть телевизор, а будет выполнять лабораторную работу;

б) Чтобы купить автомобиль, нужно иметь достаточно собственных денег или взять кредит в банке;

в) Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник параллелограмм.

2. Определить истинность высказывания:

а) Гости смеялись, шутили и не расходились по домам;

б) Я заплатил бы за работу по ремонту телевизора (*З*), только если бы он стал работать (*Р*). Он же не работает. Поэтому я платить не буду.

3. Составить таблицу истинности для функций: **а)** $f(x_1,x_2)=\overline{x_1 \wedge \overline{x_2}}$; **б)** $\overline{b \to a}$; **в)** $\overline{\bar{a} \leftrightarrow \bar{b}}$;**г)** $\overline{\bar{a} \vee b}$;

д) $\overline{a \to \bar{b}}$; **е)** $\bar{b} \to \bar{a}$;**ё)** $(a \to b) \vee \bar{c}$; **ж)** $\overline{a \wedge b \vee c}$;

з) $\bar{x} \vee y \to x \wedge \bar{y}$; **и)** $f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \wedge \overline{x_2} \to (x_1 \vee x_2) \wedge \overline{x_3}$;

й) $(x \to y) \oplus ((y \to \bar{z}) \to x \wedge y)$;**к)** $(a \vee (b \vee c)) \leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

4. Проверить эквивалентны ли формулы (используя таблицы истинности): **а)** $a \vee b$ и $\overline{\bar{a} \wedge \bar{b}}$; **б)** $a \wedge (b \vee c)$ и $ab \vee ac$; **в)** $x \leftrightarrow y$ и $(x \to y) \wedge (y \to x)$; **г)** $x_1 | x_2$ и $\overline{x_1 \wedge x_2}$;

д) $\bar{x} \to \bar{y}$ и $y \to x$;**е)** $((a \wedge b) \to c)$ и $(a \to (\bar{b} \vee c))$.

5.Проверить с помощью таблицы истинности и при помощи равносильных преобразований является ли формула тождественно ложной или тождественно истинной: **а)** $x_1 \wedge \overline{x_1 \vee x_2}$;**б)** $\bar{x} \wedge y \vee \overline{x \vee y} \vee x$;**в)** $(\overline{a \vee b}) \wedge a \wedge \bar{b}$;

г) $\bar{a} \vee (b \to a)$; **д)** $((a \to b) \wedge b) \to a$; **е)** $(a \leftrightarrow \bar{a}) \wedge (a \vee b \to a)$;

ё) $p \wedge (p \to q) \to q$;**ж)** $(a \to b) \to (\bar{b} \leftrightarrow \bar{a})$;

з) $a \wedge (a \to b) \wedge (a \to \bar{b})$;**и)** $a \to (\bar{b} \to (\overline{a \to b}))$.

6.Упростить формулы:

а) $A_2 \wedge (A_1 \vee \bar{A}_2)$;**б)** $\overline{\bar{A} \wedge C} \vee B \wedge \bar{C}$;**в)** $\overline{\bar{B} \wedge C \vee C}$;

г) $A \wedge B \vee \bar{A} \wedge B \vee A$;**д)** $x \vee (y \wedge x \wedge z)$;

е) $p \to q \to p \to \bar{p}$; **ё)** $(x \leftrightarrow y) \to \overline{xy}$;

ж)$(\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee B \wedge C)$;**з)** $\overline{A_1 \to A_2} \vee (A_2 \to \bar{A}_1)$;

и)$(\bar{p} \vee \bar{p} \wedge \bar{q}) \downarrow \bar{q}$;**й)**$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \bar{r})$;

к)$\overline{(x \vee y) \to (\overline{y \vee z})}$;**л)** $p | (p \vee q \wedge \bar{p})$.

7. После обсуждения состава участников предполагаемой экспедиции было решено, что должны выполняться два условия:1) если поедет Арбузов, то должны поехать еще Брюквин или Вишневский;2) если поедут Арбузов и Вишневский, то поедет и Брюквин. Требуется: **а)** ввести краткие обозначения для сформулированных условий и составить логическую формулу, выражающую принятое решение в символической форме; **б)** для полученной формулы найти возможно более простую равносильную формулу; **в)** пользуясь найденной более простой формулой, дать новую и более простую словесную формулировку принятого решения о составе участников экспедиции.

8. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал математическую логику?» получен верный ответ – «Если изучал первый, то изучал и третий, но не верно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал математическую логику?

9. Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:1) Если первый сдал, то и второй сдал;2) Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал;3) Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал;

4) Если четвертый сдал, то и первый сдал.

10. С помощью равносильных преобразований приведите к ДНФ формулы:

а) $(x \vee y \wedge z) \wedge (x \vee z)$; **б)** $(x \to y) \wedge x \wedge y$;

в) $\left(\overline{x \wedge y} \to \bar{x}\right) \wedge \left(\overline{x \wedge y \to \bar{\bar{y}}}\right)$; **г)** $\left(x_1 \wedge x_2 \vee \overline{x_2} \wedge x_3\right) \wedge \left(\overline{\overline{x_1} \wedge x_4}\right)$;

д) $(b \to a) \vee (b \to a \wedge c)$;**е)** $a \wedge c \to \bar{b} \leftrightarrow a \to c \wedge \bar{b}$.

11. С помощью равносильных преобразований приведите к КНФ формулы:

а) $x \to \overline{y} \wedge z$; **б)** $a \vee b \to c$; **в)** $\overline{a} \to b \leftrightarrow c$; **г)** $\overline{x_1 \wedge x_2 \to \overline{x_3}}$;

д) $(x \to y) \wedge ((\overline{y} \to z) \to \overline{x})$; **е)** $(x_2 \to x_1) \wedge (\overline{x_1 \vee x_2}) \wedge (x_1 \to x_3)$;

ё) $x_1 \downarrow (x_1 \oplus \overline{x_2})$.

12. Для следующих формул записать СДНФ и СКНФ используя соответствующую таблицу истинности и равносильные преобразования: **а)** $x \to y$; **б)** $x_1 | x_2$.

13. Найти СДНФ и СКНФ функции $f(x_1, x_2, x_3)$ заданной таблицей истинности:

а)

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

; **б)**

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

14. Преобразовать данную функцию f в СДНФ с помощью равносильных преобразований:

а) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_3$;

в) $f(x, y, z) = x \to y \to z$; **г)** $f(x, y) = x \vee (\overline{x} \leftrightarrow y) \to \overline{x \vee y}$;

д) $f(x, y, z) = x \vee \overline{y}\,\overline{z}$; **е)** $f(x, y) = x \downarrow y$;

ё) $f(a, b, c) = a \leftrightarrow (b \vee \overline{c})$.

15. Преобразовать данную функцию f в СКНФ с помощью равносильных преобразований:

а) $(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z})$; **б)** $f(x, y, z) = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (x \wedge y \vee z)$;

в) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3 \to x_1 \wedge x_2)$; **г)** $f(a, b, c) = \overline{a \wedge b \vee c} \wedge \overline{c}$;

д) $f(a, b, c) = \overline{\overline{a} \to \overline{b} \vee c}$; **е)** $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$;

ё) $f(x, y, z) = x \leftrightarrow y \vee \overline{z}$.

16. Привести следующие формулы к СДНФ и к СКНФ двумя способами (при помощи равносильных преобразований и при помощи таблиц истинности):

а) $f(x, y, z) = x \wedge (\overline{y} \vee z)$; **б)** $f(x, y, z) = (x \vee \overline{z}) \to (y \to z)$.

17. Построить двойственную формулу: **а)** $\overline{x_1} \to \overline{x_2}$;

б) $\overline{x_1 \wedge x_2 \vee \overline{x_3}}$; **в)** $xy \vee xz \vee yz \vee y$; **г)** $x \vee y \to z$;

д) $(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) x_4 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}$; **е)** $\overline{\overline{x} \to \overline{y} \vee z}$.

18. Является ли функция самодвойственной:

а) $f=(1011)$; **б)** $f(x)=\bar{x}$; **в)** $f(x_1,x_2)=x_1\leftrightarrow x_2$;

г) $f=(0101)$; **д)** $x\to y$; **е)** $\overline{x_1}\leftrightarrow\overline{x_2}$; **ё)** $f=(00101101)$;

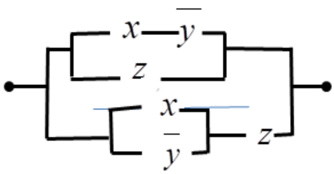
ж) $(x_1\downarrow x_2)\mid x_3$; **з)** $f=(10101100)$; **и)** $\overline{x\to y}\vee\bar{z}$;

й) $(x\leftrightarrow y)\wedge(y\leftrightarrow z)$; **к)** $f=(00110011)$; **л)** $\overline{x_1\oplus x_2\oplus x_3}$.

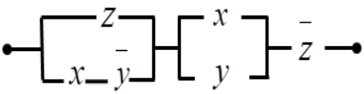
19. Путем равносильных преобразований построить полиномы для формул: **а)** $x\to y$; **б)** $x_1\to(x_2\to\overline{x_1}x_2)$; **в)** $x_1(x_2\leftrightarrow\overline{x_2}x_1)$; **г)** $(x_1\downarrow x_2)\mid(x_2\downarrow x_3)$; **д)** $(x\mid y)\downarrow z$.

20. Выразить импликацию через функции системы $\{1, +, \Lambda\}$.

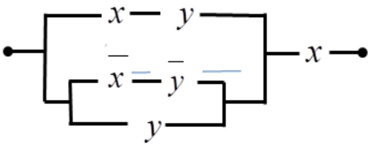
21. Выразить дизъюнкцию и конъюнкцию через функции системы $\{\bar{\ }, \to\}$.

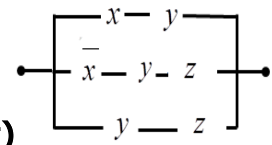
22. Упростить РКС: **а)** 

;

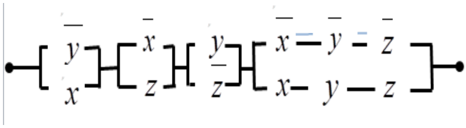
б) 

;

в) 

; **г)** 

;

д)  .

23. Составить РКС для формулы:

а) $\bar{x}\wedge\bar{y}\vee\bar{x}\wedge y\vee x\wedge\bar{y}$;**б)** $x\wedge\left(z\wedge\bar{y}\vee y\vee x\right)$;

в) $a\vee b\wedge c\to\bar{a}\wedge\bar{b}$;**г)** $z\wedge\overline{x\wedge\bar{y}}\to\bar{x}$;**д)** $\left(\bar{y}\to x\right)\to\overline{z\wedge y}$;

е) $(x\to y)\wedge(y\to z)\to\left(\bar{x}\to\bar{z}\right)$.

24. По данной логической функции, составить РКС:

а) $f=(0100)$;**б)** $f=(1110)$;**в)** $f=(0011)$;**г)** $f=(0101)$;

д) $f=(00111111)$;**е)** $f=(01111110)$.

Ответы: 1.а) $\left(A\to\bar{B}\right)\cdot C$;**б)** $A\leftrightarrow\left(B\vee C\right)$;**в)** $A\wedge B\to C$.

2.а) $\Phi(A,B,C)=A\wedge B\wedge\bar{C},\ \Phi(1,1,0)=1$ истинно, если

первое и второе высказывание истинно, а третье ложно; **б)** $\Phi=3\to P\wedge\bar{P}\leftrightarrow\bar{3}=1$ истинно на любом наборе

переменных (тавтология).

3.а) $f=(1101)$;**б)** $f=(0100)$;**в)** $f=(0110)$;**д)** $f=(0001)$;

е) $f=(1101)$;**ё)** $f=(11111011)$;**ж)** $f=(10101000)$;

з) $f=(0100)$;**и)** $f=(11111011)$;**й)** $f=(11100011)$;

к) $f=(10000111)$.

4. а) эквивалентны; **б)** эквивалентны; **в)** эквивалентны; **г)** эквивалентны; **д)** эквивалентны; **е)** эквивалентны. **5. а)** тождественно ложная; **б)** тождественно истинная; **в)** тождественно ложная; **г)** тождественно истинная; **д)** $a \vee \overline{b}$- формула не является ни противоречием, ни тавтологией; **е)** тождественно ложная;

ё) тождественно истинная; **ж)** $a \vee \overline{b}$ -формула не является ни противоречием, ни тавтологией; **з)** тождественно ложная; **и)** тождественно истинная.

6. а) $A_1 A_2$; **б)** $A \vee \overline{C}$;**в)** $\overline{C}$;**г)** $A \vee B$;**д)** x;**ё)** $\overline{x} \vee \overline{y}$;**е)** $\overline{p}$;**ж)** $\overline{A}$;**з)** $\overline{A_1} \vee \overline{A_2}$;**и)** pq;**й)** $p \vee q$;**к)** $xz \vee y$;**л)** $\overline{p}$.

7.а) $(А \to Б \vee В) \wedge (А \wedge В \to Б)$;**б)** $\overline{А} \vee Б = А \to Б$;**в)** Если поедет Арбузов, то поедет и Брюквин. **8.**Логику изучал второй студент.

9. Четыре студента сдали экзамен.

10.а) $yz \vee x$; **б)** xy;**в)** xy;**г)** $x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_2} x_3 \overline{x_4}$;

д) $\overline{b} \vee a$;**е)** $abc \vee \overline{a} \vee \overline{b}c$;

11.а) $(x \vee \overline{y})(x \vee z)$;**б)** $(\overline{a} \vee c)(\overline{b} \vee c)$;**в)** $(\overline{a} \vee c)(\overline{b} \vee c)(a \vee b \vee \overline{c})$;**г)** $x_1 x_2 x_3$;

д) $(\overline{x} \vee y)(\overline{x} \vee \overline{z})$; **е)** $\overline{x_1}\,\overline{x_2}$;**ё)** $x_1 x_2$.

12.а) $x \to y = \bar{x} \vee y$ -СКНФ, $x \to y = (\bar{x} \wedge \overline{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y)$-СДНФ;

б) $x_1 | x_2 = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\, x_2 \vee x_1 \overline{x_2}$ -СДНФ, $x_1 | x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$ -СКНФ.

13.а)

$$f(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3})\vee(x_1\overline{x_2}x_3)\vee(\overline{x_1}x_2x_3)\vee(x_1x_2x_3)-\text{СДНФ},$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2\vee\overline{x_3})(x_1\vee\overline{x_2}\vee x_3)(\overline{x_1}\vee x_2\vee x_3)(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee x_3)-\mathit{СКНФ};$$

б)

$$f(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3)\vee(\overline{x_1}x_2x_3)\vee(x_1\overline{x_2}x_3)-\text{СДНФ},$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2x_3)\wedge(x_1\overline{x_2}x_3)\wedge(\overline{x_1}x_2x_3)\wedge(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3)\wedge(\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3})-\mathit{СКНФ}.$$

14.а) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3\vee x_1x_2\overline{x_3}\vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee x_1\overline{x_2}x_3\vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$;

б) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1}x_2x_3\vee\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\vee x_1x_2\overline{x_3}\vee x_1x_2x_3\vee x_1\overline{x_2}x_3$;

в) $f(x,y,z)=xyz\vee x\overline{y}z\vee x\overline{y}\,\overline{z}\vee\overline{x}yz\vee\overline{x}\,\overline{y}z$ **;г)** $f(x,y)=\overline{x}y\vee x\overline{y}$;

д) $xyy\vee x\overline{y}z\vee xy\overline{z}\vee x\overline{y}\,\overline{z}\vee\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ **;е)** $\overline{x}\,\overline{y}$ **;ё)** $f(a,b,c)=\overline{a}\,\overline{b}c\vee ab\overline{c}\vee abc\vee a\overline{b}\,\overline{c}.$

15.а) $(x\vee y\vee z)(x\vee y\vee\overline{z})(x\vee\overline{y}\vee\overline{z})$;

б) $(x\vee y\vee z)(x\vee\overline{y}\vee z)(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z})(\overline{x}\vee y\vee z)$;

в) $(x_1\vee x_2\vee x_3)(x_1\vee x_2\vee\overline{x_3})(x_1\vee\overline{x_2}\vee x_3)(x_1\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3})$;

г) $(\overline{a}\vee\overline{b}\vee\overline{c})(\overline{a}\vee\overline{b}\vee c)(a\vee b\vee\overline{c})(\overline{a}\vee b\vee\overline{c})(a\vee\overline{b}\vee\overline{c})$;

д) $(\overline{a}\vee\overline{b}\vee\overline{c})(\overline{a}\vee\overline{b}\vee c)(a\vee b\vee c)(a\vee b\vee\overline{c})(\overline{a}\vee b\vee c)(\overline{a}\vee b\vee\overline{c})(a\vee\overline{b}\vee\overline{c})$;

е) $(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z})(\overline{x}\vee y\vee\overline{z})(x\vee\overline{y}\vee\overline{z})(x\vee y\vee z)$;

ё) $(x\vee y\vee z)(\overline{x}\vee y\vee\overline{z})(x\vee\overline{y}\vee z)(x\vee\overline{y}\vee\overline{z}).$

16.а) $(x\vee y\vee z)(x\vee y\vee\overline{z})(x\vee\overline{y}\vee z)(x\vee\overline{y}\vee\overline{z})(\overline{x}\vee\overline{y}\vee z)$- СКНФ;

$x\overline{y}\,\overline{z}\vee x\overline{y}z\vee xyy-\text{СДНФ};$

б) $(x\vee\overline{y}\vee z)(\overline{x}\vee\overline{y}\vee z)$- СКНФ;

$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$ – СДНФ..

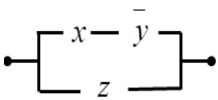
17.а) $x_1\overline{x_2}$ **;б)** $\overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_3$ **;в)** $yx \vee z$; **г)** $\bar{y}z \vee \bar{x}$; **д)** $\overline{x_1}x_2x_3 \vee x_4\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)$**;е)** $y \vee \bar{z} \vee \bar{x}$.

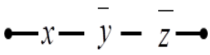
18.а)несамодвойственна;**б)**самодвойственна;**в)**несамодвойственна**;г)**самодвойственна;**д)**самодвойственна**;** **е)**несамодвойственна;**ж)**несамодвойственна; **з)**несамодвойственна**;и)** несамодвойственна; **й)** несамодвойственна;**к)** несамодвойственна;**м)**несамодвойственна.

19.а) $1 \oplus x \oplus xy$ **;б)** $1 \oplus x_1x_2$**;в)** x_1x_2;

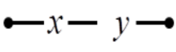
г) $1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3$;

д) $xy \oplus xyz$.

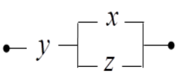
22. а) 

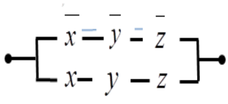
, $x\bar{y} \vee z$; **б)** 

, $x\bar{y}\bar{z}$;

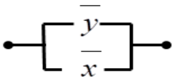
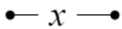
в) 

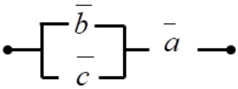
, xy;

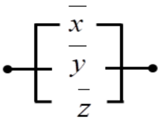
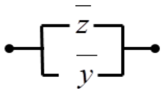
г) 

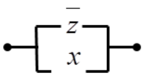
, $y(x \vee z)$; **д)** 

, $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz$;

23.а)  , $\bar{y} \vee \bar{x}$; **б)**  , x;

в)  , $\bar{a}\left(\bar{b} \vee \bar{c}\right)$;

г)  , $\bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}$; **д)**  , $\bar{y} \vee \bar{z}$;

е)  , $x \vee \bar{z}$.

ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ.

При необходимости проанализировать взаимосвязь между достаточно большим количеством неких однородных объектов мы, скорее всего, непроизвольно начнем рисовать на бумаге точки (кружочки), изображающие наши объекты, и соединять эти точки линиями или стрелками, отображающие интересующие нас отношения между рассматриваемыми объектами. Имея перед глазами рисунок (схему), легче оценить зависимости между объектами. Такие схемы широко используют в различных областях.

Теория графов – раздел математики, используемый для решения задач химии, экономики, электротехники и автоматики, но наиболее широкое её применение в программировании, так как задает очень удобный язык для описания программных моделей. Особенно важно наличие наглядной графической интерпретации понятия графа, так как помогают наглядно представить взаимоотношения между объектами. Элементы здесь изображают точками (кружками, квадратами), а связи между элементами – линиями или стрелками. С графами, сами того не замечая, мы сталкиваемся постоянно. Например, графом является схема движения автобуса. Точками на ней представлены остановки, а линии соединяют остановки. Другим примером может служить система родственных связей в каком-нибудь городе. Вершинами такого графа служили бы все жители города. Люди, находящиеся в непосредственном родстве (братья, сестры, родитель и ребенок) были бы соединены ребрами, а между дальними родственниками можно было бы найти цепочку из ребер близкого родства. Между людьми, не находящимися в родстве в этом графе, не нашлось бы никакой связи.

3.1. Основные понятия теории графов

V – некоторое множество. Напомним, что $V^2 = V \times V = \{(v_i, v_j): v_i, v_j \epsilon V\}$-декартов квадрат некоторого множества. Введем следующие обозначения:

$< v_i, v_j >$-пара элементов, $< v_i, v_j >= (v_i, v_j)$ упорядоченная или$< v_i, v_j >= \{v_i, v_j\}$ неупорядоченная.

Основным объектом изучения теории графов является граф, который определяется следующим образом.

Графом называется совокупность точек (объектов) и соединяющих их линий (связей). Точки графа при этом называются его **вершинами**, а связывающие их линии – **рёбрами**(дугами).

Пусть в графе имеется m вершин $V: v_1, v_2, \ldots, v_m$ и n рёбер $E: e_1, e_2, \ldots, e_n$ Тогда, подразумевая под V $(V \neq \varnothing)$ **множество вершин графа**, под E **множество его ребер**, графом называют совокупность этих двух множеств.

Обозначение: $G(V, E)$.

В случае, когда числа вершин m и рёбер n конечны, граф называется **конечным**.

Число вершин обозначается $|V| = m$, число ребер $|E| = n$.

Обычно граф изображают диаграммой**:** вершины - точками (или кружками) и подписывают маленькими прописными буквами с индексами $V: v_1, v_2, \ldots, v_m$ (или без индекса $V: a, b, .c..$), а ребра, соединяющие две вершин, изображаются линиями и подписывают аналогично $E: e_1, e_2, \ldots, e_n$, где

$e_1 =< v_1, v_2 >, e_2 =< v_2, v_3 >, \ldots, e_n =< v_{m-1}, v_m >$.

Пусть ребро e представляет собой пару вершин v_1 и v_2 .Неупорядоченная пара вершин $e = \{v_1, v_2\}$ (рис.3.1) называется **ребром**, при этом вершины v_1 и v_2 называют концевыми точками или концами ребра e говорят, что ребро e соединяет эти вершины. Так же говорят, что ребро e **инцидентно** вершинам v_1 и v_2,

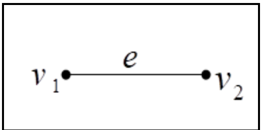


Рис.3.1

которые в свою очередь, инцидентны ребру e.

Замечание: инцидентность понятие, используемое только в отношении между разнородными объектами, то есть вершина инцидентна ребру или ребро инцидентно вершине (две вершины или два ребра не могут быть инцидентны).

Два ребра, инцидентные одной вершине, называются **смежными**, то есть рёбра, имеющих общую вершину. Две вершины, инцидентные одному ребру, также называются **смежными**.

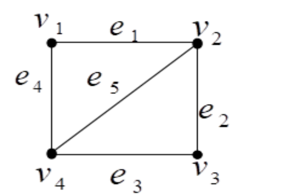


Рис.3.2

Например, у графа на рис. 3.2. вершины v_1 и v_2, v_1 и v_4, v_4 и v_3, v_3 и v_2 -смежные; v_1 и v_3-не смежные; ребра e_1, e_2, e_5; e_4, e_5, e_3; e_1, e_4; e_2, e_3-смежные; e_1, e_3; e_2, e_4 -не смежные.

Замечание: смежность понятие, используемое только в отношении между однородными объектами, то есть смежными могут быть только ребра или только вершины.

Ребро $e=(v_1,v_2)$, имеющее направление от одной вершины к другой (рис.3.3), называется **дугой** (или **ориентированным**, или **направленным**) и изображается стрелкой, направленной от вершины, называемой **началом** v_1 к вершине, именуемой **концом** v_2.

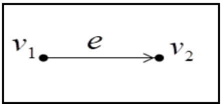


Рис.3.3

Граф, содержащий только дуги -**ориентированным** (или орграфом), а элементы множества V при этом называются **узлами**(рис.3.3).

Граф, содержащий только ребра, называется **неориентированным** (рис.3.4).

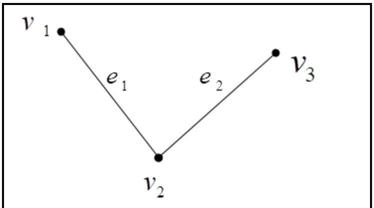


Рис.3.4

Пример 3.1. Дано графическое изображение графа. Задать граф, представленный на рисунке аналитически:

а) рис. 3.4.; **б)** рис. 3. 5.

Решение.

а) При аналитическом задании графа требуется установить отношение инцидентности ребер соответствующим вершинам.

Таким образом, выписываются все ребра, в конце выписываются все изолированные вершины.

На рисунке 3.4 изображен граф с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ и множеством ребер $E = \{e_1, e_2\}$, установим отношение инцидентности ребер соответствующим вершинам, то есть $e_1 = \{v_1, v_2\}$,$e_2 = \{v_2, v_3\}$;

б) На рисунке 3.5 представлен граф с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$и множеством ребер $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, где

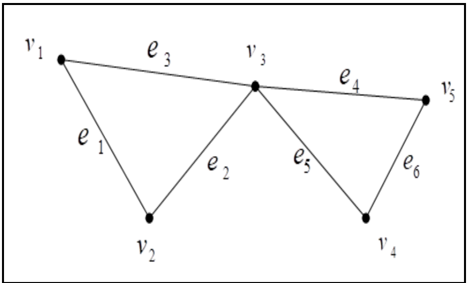


Рис.3.5

$e_1 = \{v_1, v_2\}, e_2 = \{v_2, v_3\}, e_3 = \{v_1, v_3\}, e_4 = \{v_3, v_5\},$
$e_5 = \{v_3, v_4\}, e_6 = \{v_4, v_5\}$.

Таким образом, для задания неориентированного графа аналитически требуется установить отношение инцидентности ребер соответствующим вершинам. При этом порядок указания вершин при описании ребра здесь безразличен, так как рассматривается неориентированный граф.

Замечание: при изображении графа несущественными являются геометрические свойства ребра (длина, кривизна и так далее). На рисунке 3.6 представлены две внешне различные диаграммы одного и того же графа, так как в обоих случаях содержится одна и та же информация о вершинах и ребрах графа и их взаимном расположении.

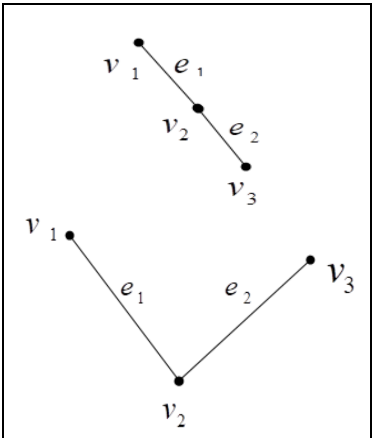


Рис.3.6

Ребро, соединяющее вершину саму с собой, называют **петлёй**. Ребра, инцидентные одной и той же паре вершин, называются **параллельными**, или **кратными**.

Степенью вершины v графа называется число ребер, которым эта вершина принадлежит.

Обозначение: $\rho(v)$ (или $\deg v$)

Замечание: для неориентированного графа, петля считается за два ребра.

Вершина называется **изолированной**, если ее степень равна нулю $\rho(v)=0$ и **висячей (концевой)**, если ее степень равна 1 .Ребро, инцидентное висячей вершине, называют **концевым.**

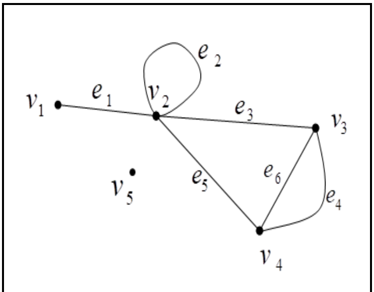


Рис.3.7

Например, на рисунке 3.7 ребра e_4, e_6, - кратные, ребро e_2 - является петлей. Вершина v_1 - висячая, так как $\rho(v_1)=1$, следовательно ребро e_1 - висячее, вершина v_5 - изолированная, так как $\rho(v_5)=0$.

Теорема 3.1. Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер, то есть $\sum_{i=1}^{n}\rho(v_i)=2|E|=2m.$

Доказательство.

Доказательство тривиально, так как любое ребро инцидентно двум вершинам.

Таким образом, сумма степеней вершин графа равна четному числу.

В орграфе у каждой вершины две степени: **входящая** -число ребер, входящих в вершину

v - $\rho_-(v)$ и **исходящая** -число ребер, исходящих из вершины v - $\rho_+(v)$).

Замечание: Петля несет вклад в обе степени по одному.

Пример 3.2. Определить степени вершин графа, изображенного на рисунке и убедиться в том, что сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу ребер:

а) рис.3.7**; б)** рис.3.8.

Решение.

а) На рис.3.7. изображен неориентированный граф с множеством вершин $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ и множеством рё-

бер $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$,где

$e_1=\{v_1,v_2\}, e_2=\{v_2,v_2\}, e_3=\{v_2,v_3\}, e_4=\{v_3,v_4\}$,

$e_5=\{v_2,v_4\}, e_6=\{v_3,v_4\}$.

Найдем степени вершин графа, учитывая, что ребро $e_2=\{v_2,v_2\}$– является петлей (считается за два ребра): $\rho(v_1)=1, \rho(v_2)=5; \rho(v_3)=3, \rho(v_4)=3, \rho(v_5)=0.$

Покажем, что сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер:

$$\sum_{i=1}^{5}\rho(v_i)=\rho(v_1)+\rho(v_2)+\rho(v_3)+\rho(v_4)+\rho(v_5)=1+5+3+3+0=12=2|E|$$ -

сумма степеней вершин равна удвоенному числу ребер;

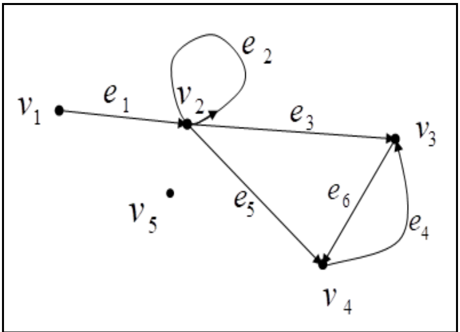


Рис. 3.8.

б) На рис.3.8. изображен ориентированный граф с множеством вершин $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ и множеством дуг $E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_2),(v_2,v_3),(v_4,v_3),(v_2,v_4),(v_3,v_4),v_5\}$.

Найдем степени вершин графа (входящих $\rho_-(v)$- и исходящих- $\rho_+(v)$)и покажем, что сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер, учитывая, что дуга (v_2,v_2)– является петлей (несет вклад в обе степени по одному) :

$$\sum_{i=1}^{5}\rho_-(v_i)=\rho_-(v_1)+\rho_-(v_2)+\rho_-(v_3)+\rho_-(v_4)+\rho_-(v_5)=0+2+2+2+0=6$$

-сумма степеней вершин, входящих в нее дуг;

$$\sum_{i=1}^{5}\rho_+(v_i)=\rho_+(v_1)+\rho_+(v_2)+\rho_+(v_3)+\rho_+(v_4)+\rho_+(v_5)=1+3+1+1+0=6$$

-сумма степеней вершин, выходящих из нее дуг. Итак,

$$\sum_{i=1}^{5}\rho_{-}(v_i)+\sum_{i=1}^{5}\rho_{+}(v_i)=12=2\cdot 6=2|E|.$$

Основные виды графов.

Часто рассматриваются следующие родственные графам объекты:

Псевдограф – граф, содержащий как петли, так и кратные ребра (рис.3.9);

Мультиграф – граф, содержащий кратные ребра(рис.3.10);

Простой граф – граф без петель и кратных ребер (рис.3.11);

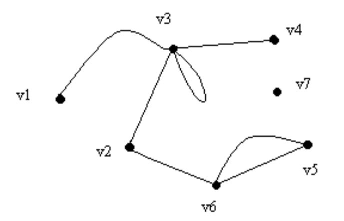


Рис. 3.9. Псевдограф

Полный граф – простой граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром, то есть любые две его вершины смежные (многоугольник, в котором проведены все диагонали) (рис.3.12).

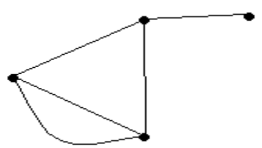


Рис. 3.10. Мультиграф.

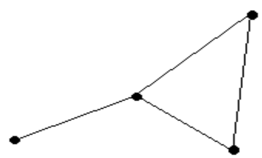


Рис. 3.11. Простой граф.

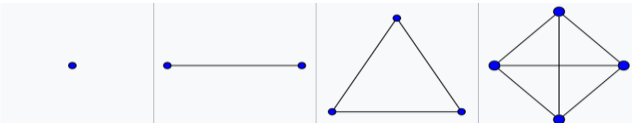


Рис. 3.12. Полные графы.

Изоморфизм графов.

Два графа $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2)$ называются **изоморфными**, если существует биекция $h: V_1 \to V_2$, сохраняющая смежность.

Обозначение: $G_1 \approx G_2$

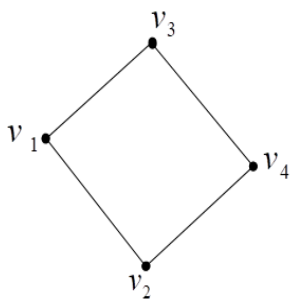


Рис.3.13.1)

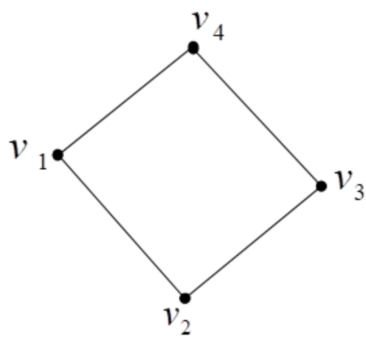


Рис.3.13.2)

На рис. 3.13.1),2) изображены два графа с одним и тем же множеством вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. При внимательном рассмотрении можно обнаружить, что это разные графы - в верхнем имеется ребро $\{v_2; v_4\}$,а в нижнем - такого нет. В то же время, если не обращать внимания на наименования вершин, то эти графы явно одинаково устроены: каждый из них - цикл из четырех вершин. Во многих случаях при исследовании строения графов имена или номера вершин не играют роли, и такие графы, один из которых получается из другого переименованием вершин, удобнее было бы считать одинаковыми. Для того чтобы это можно было делать "на законном основании", вводится понятие **изоморфизма** графов. Иными словами, изоморфные графы различаются только обозначением вершин.

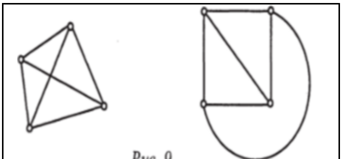


Рис. 3.14.

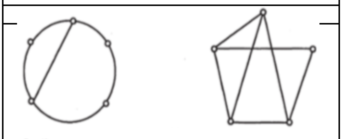


Рис. 3.15.

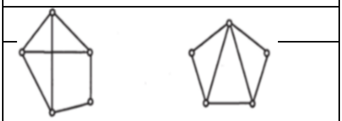


Рис. 3.16.

Например, на рис.3.14 представлены изоморфные графы.

На рис.3.15 графы не изоморфны, так как они имеют разное количество ребер.

На рис.3.16 не изоморфны, так как во втором графе есть вершина степени четыре, а в первом графе такой вершины нет.

3.2. Способы задания графов.

Помимо геометрического (графического) и аналитического способов задания графов существует еще матричный способ задания графов

Матричный способ задания графов.

При большом числе элементов, рисунок графа теряет наглядность. В таком случае граф целесообразно задать матричным способом. Такое задание графа удобно и для анализа на компьютере. Граф можно задать различными матрицами, выбор которых диктуется особенностями конкретной задачи. Чаще всего граф задают с помощью **матриц смежности** и **инцидентности**.

Пусть G - произвольный неориентированный (ориентированный) граф с m вершинами и n ребрами, где $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ — вершины , а $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ — ребра графа. Занумеруем произвольным образом вершины графа.

Матрицей смежности неориентированного графа $G(V,E)$, называется квадратная матрица $A(G)=a_{ij}$ порядка m (размера $m\times m$), элементы которой $a_{ij}=s$, где s - число ребер, соединяющих вершины v_i и v_j .

Пример 3.3. Составить матрицу смежности для неориентированного графа изображенного на рис. 3.17.

Решение.

Матрица смежности квадратная, размера (имеется пять вершин) 5×5. Для удобства нахождения матрицы смежности внесём все данные в таблицу, заполнив ее следующим образом: сначала рассмотрим первый ряд таблицы - первая вершина смежна со второй и третьей, соответствующие ячейки заполняем единицами, остальные нули и так далее. Итого, получим:

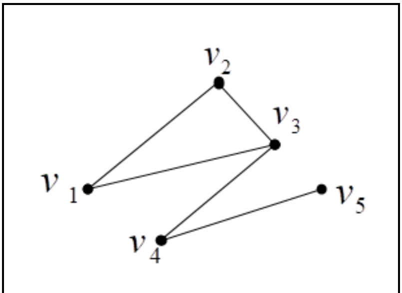


Рис.3.17

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	0	0
v_2	1	0	1	0	0
v_3	1	1	0	1	0
v_4	0	0	1	0	1
v_5	0	0	0	1	0

При таком упорядочивании вершин матрица смежности $A(G)$ выглядит следующим образом, $A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Замечание:

1) Можно заметить, что матрица смежности для неориентированного графа является симметричной (действительно, $A(G)=(A(G))^T$);

2) Для каждого графа имеется несколько матриц смежности, отвечающих различным упорядочениям множества вершин графа. Очевидно, что одна такая матрица смежности получается из другой с помощью некоторой перестановки строк и аналогичной перестановки столбцов;

3) Если граф имеет кратные ребра (дуги), то в матрице смежности $a_{ij}=s$, где s -кратность ребра.

По матрице смежности легко построить графическое изображение графа.

Пример 3.4. Построить граф по матрице смежности

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Составим таблицу, соответствующую данной матрице:

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	0	0	1	0	0
v_2	0	0	1	1	1	0
v_3	0	1	0	0	0	1
v_4	1	1	0	0	1	0
v_5	0	1	0	1	0	1
v_5	0	0	1	0	1	0

По первой строке матрицы смежности замечаем, что первая вершина является смежной с четвертой, то есть соединена с четвертой единственным ребром (в соответствующей ячейке стоит единица), обратное тоже верно, поскольку граф неориентированный. Рассуждая, далее аналогично получим: вторая соединена с третьей, пятой и шестой вершинами; третья со второй и шестой; четвертая с первой, второй и пятой; пятая со второй, четвертой и шестой; шестая с третьей и пятой. Итак, граф, соответствующий данной матрице, имеет вид, представленный на рис.3.18.

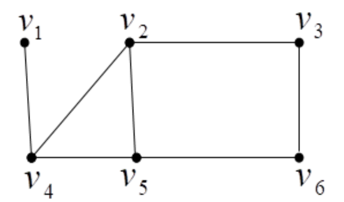


Рис.3.18

Матрицей смежности ориентированного графа $G(V,E)$, называется квадратная матрица $A(G)=a_{ij}$ порядка m (размера $m\times m$), элементы которой $a_{ij}=s$, где S - число дуг, исходящих из вершины v_i и заходящих в вершину v_j.

Замечание: для ориентированных графов матрица смежности не будет симметричной.

Пример 3.5. Составить матрицу смежности для ориентированного графа представленного на рис.3.19.

Решение.

Матрица смежности квадратная, размера 4×4.

Заполняем таблицу: из первой вершины выходят три дуги к четвертой и одна к третьей–отмечаем это в первой строке таблицы, аналогично заполняя остальные строки, получим:

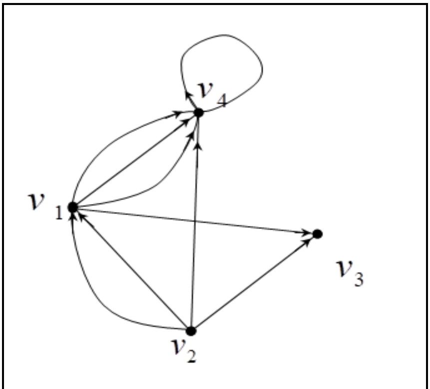


Рис. 3.19

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	0	1	3
v_2	2	0	1	1
v_3	0	0	0	0
v_4	0	0	0	1

Таким образом, матрица смежности имеет вид $A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 3.6. Построить орграф по матрице смежности

$$A(G)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение.

Для удобства построения графа по матрице смежности внесем все данные в таблицу:

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	1	0	0
v_2	0	0	1	0
v_3	0	0	0	1
v_4	1	0	1	0

Первая строка таблицы указывает на то, что первый узел является началом и концом соответствующей ей дуги (петли), далее заметим, что первая вершина является началом, а вторая концом некоторой дуги и так далее. Таким образом, получим граф изображенный на рис.3.20.

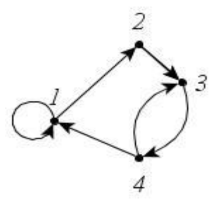


Рис. 3.20.

Матрица инцидентности.

Помимо вершин занумеруем ребра графа.

Матрицей инцидентности неориентированного графа $G(V,E)$ называется матрица $B(G)$ размера $m \times n$ (вершин m и ребер n), элементы которой b_{ij} определены следующим:

1) $b_{ij} = 1$, если вершина v_i инцидентна ребру e_j ;

2) $b_{ij} = 0$, если вершина v_i не инцидентна ребру e_j ;

3) $b_{ij} = 2$, если ребро e_j петля для вершины v_i;

Замечание:

1)Для каждого графа имеется несколько матриц инцидентности, отвечающих различным упорядочениям множества вершин и ребер графа. Очевидно, что одна такая матрица инцидентности получается из другой с помощью некоторой перестановки строк и некоторой перестановки столбцов;

2) Для неориентированных графов без петель и кратных рёбер матрица инцидентности бинарная (состоит из нулей и единиц).

3) Матрица инцидентности однозначно определяет структуру графа, что позволяет читать всю необходимую информацию о графе. Например, выявлять изолированные и висячие вершины, петли; определять сте-

пени вершин. Информация о ребрах считывается по строкам, о вершинах – по столбцам.

Пример 3.7. Для неориентированного графа, представленного на рис.3.21, найти матрицу инцидентности.

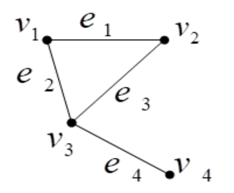


Рис.3.21.

Решение.

Матрица инцидентности, размера 4×4 так как в графе имеется четыре вершины и четыре ребра.

Первая вершина инцидентна первому и второму ребру – отмечаем единички (остальные нули) на соответствующих позициях таблицы, аналогично заполняя оставшиеся строки таблицы, получим искомую матрицу:

	e_1	e_2	e_3	e_4
v_1	1	1	0	0
v_2	1	0	1	0
v_3	0	1	1	1
v_4	0	0	0	1

$$B(G)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Пример 3.8. Построить неориентированный граф по матрице $B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Для удобства построения графа по матрице инцидентности внесем исходные данные в таблицу:

	e_1	e_2	e_3
v_1	1	0	0
v_2	0	1	0
v_3	0	0	1
v_4	1	1	1

Из таблицы видно, что в матрице 4 строки и 3 столбца, следовательно в графе четыре вершины и три ребра (смотрим по столбцам): $e_1=(v_1,v_4), e_2=(v_2,v_4), e_3=(v_3,v_4)$. Получим граф, изображенный на рисунке 3.22.

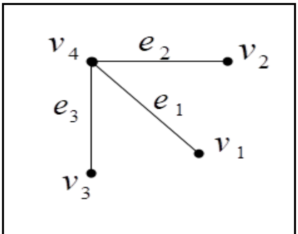


Рис. 3.22

Замечание: при описании ориентированных графов элементов 0 и 1 оказывается недостаточно, так как дуга может быть инцидентна данной вершине и направлена к ней, инцидентна и направлена от нее, или не инцидентна вершине. Поэтому для обозначения ориентированной инцидентности или ее отсутствия воспользуемся символами -1,1, 0.

Матрицей инцидентности орграфа G называется матрица $B(G)$ размера $m \times n$, элементы которой b_{ij} определены следующим образом:

1) $b_{ij} = 1$, если вершина v_i является началом дуги x_j и;

2) $b_{ij} = -1$, если вершина v_i является концом дуги x_j и j-я дуга - не петля;

3) $b_{ij} = 2$,если дуга e_j петля из вершины v_i.

4) $b_{ij} = 0$,если вершина v_i не инцидентна дуге x_j .

Таким образом, для ориентированных графов без петель и кратных рёбер матрица инцидентности состоит из 0 и ± 1.

Пример 3.9. По заданному на рисунке 3.23 ориентированному графу найти матрицу инцидентности.

Решение.

Матрица инцидентности, размера 5×8 так как имеется пять вершины и восемь ребер.

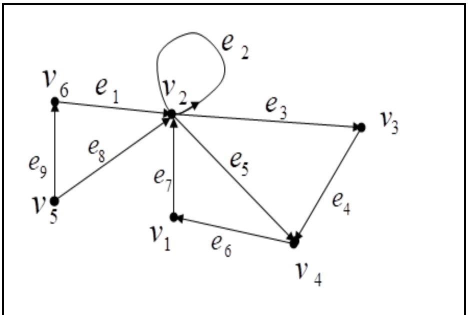


Рис.3.23.

Заполняем таблицу в соответствии с определением матрицы инцидентности.

Первая вершина является началом седьмого (1) и концом шестого ребра (-1), аналогично заполняя, оставшиеся ячейки получим:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
v_1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0
v_2	-1	2	1	0	1	0	-1	-1	0
v_3	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	-1	-1	1	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0	0	0	1	1
v_6	1	0	0	0	0	0	0	0	-1

Матрицу инцидентности по содержимому таблицы выпишите самостоятельно.

Пример 3.10. Построить граф по матрице инцидентности

$$B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Для удобства построения графа по матрице смежности внесем исходные данные в таблицу:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
v_1	1	0	0	0	0
v_2	-1	1	0	0	-1
v_3	0	0	0	1	1
v_4	0	-1	-1	0	0
v_5	0	0	1	-1	0

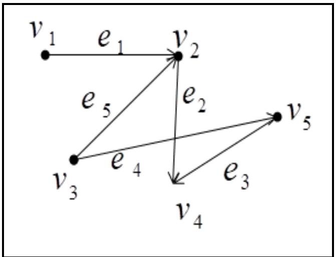
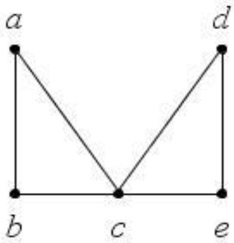


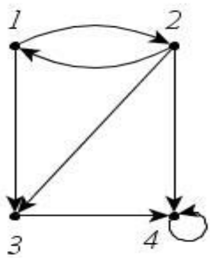
Рис. 3.24.

Из таблицы видно, что граф состоит из 5-ти вершин и 5 ребер (смотрим по столбцам): первая вершина начало, а вторая конец первого ребра, следовательно $e_1 = (v_1, v_2)$, рассматривая оставшиеся столбцы получим $e_2 = (v_2, v_4)$, $e_3 = (v_5, v_4)$, $e_4 = (v_3, v_5)$, $e_5 = (v_3, v_2)$. В итоге получим граф, изображенный на рисунке 3.24.

Задания для самостоятельного решения.

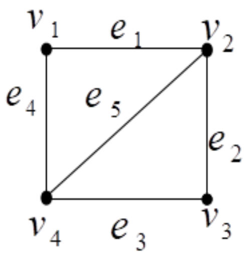
1.Задать граф, представленный на рисунке, через множество вершин и множество ребер(дуг) и показать, что сумма степеней вершин равна удвоенному количеству ребер(дуг).

Для графов : **а)** 

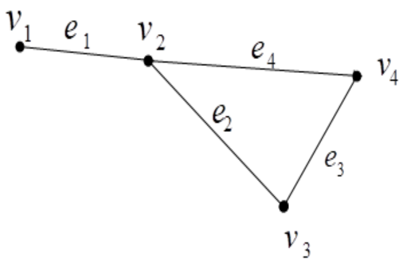
;**б)** 

.

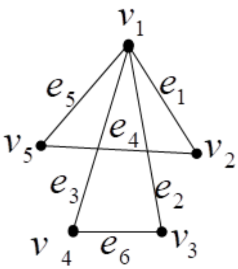
2. Найти матрицы смежности и инцидентности для графов:

а) 

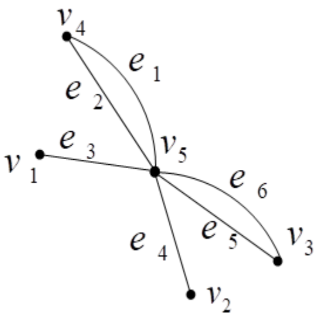
;

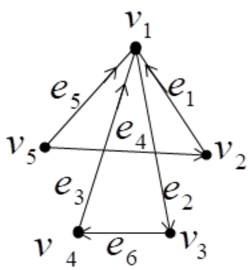
б) 

;

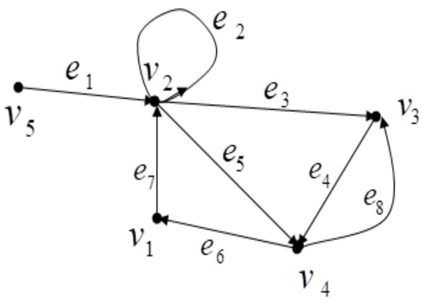

v_1
e_5
e_1
e_4
v_5
v_2
e_3
e_2
v_4
e_6
v_3

в) ;

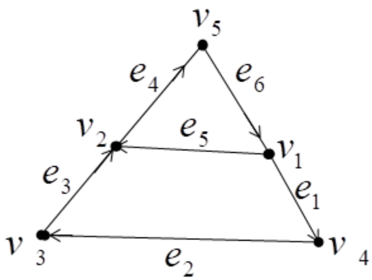

v_4
e_1
e_2
e_3
v_5
v_1
e_6
e_5
v_3
e_4
v_2


v_1
e_5
e_1
e_4
v_5
v_2
e_3
e_2
v_4
e_6
v_3

г) ;**д)** ;


e_2
e_1
v_2
e_3
v_3
v_5
e_5
e_7
e_4
e_8
v_1
e_6
v_4

е) ;

ж) 

.

3. Построить неориентированный граф по матрице смежности:

а) $A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;**б)** $B(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;**в)**

$$A(G)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Построить орграф по матрице смежности:

а) $A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;**б)** $A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Построить орграф по матрице инцидентности:

а) $B(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;**б)** $B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Построить неориентированный граф по матрице инцидентности: **а)** $B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответы:

1. а) $E=\{(a,b),(b,c),(a,c),(c,d),(c,e),(d,e)\}$;

б) $E=\{(1,2),(2,1),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4),(4,4)\}$.

2.а) $A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

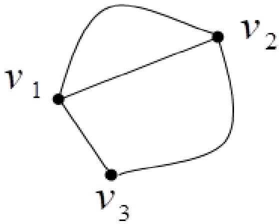
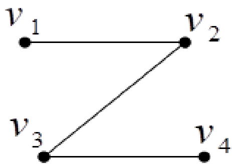
г) $A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B(G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

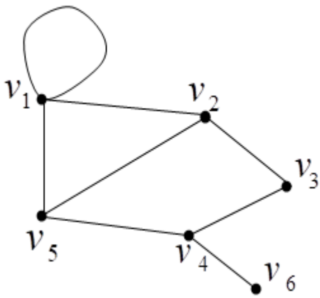
д) $A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B(G)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

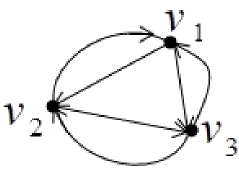
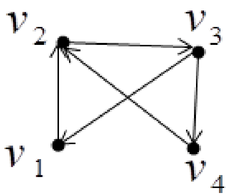
е) $A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B(G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

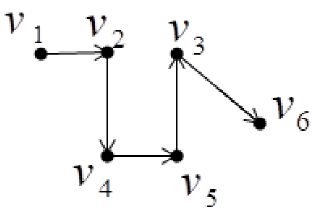
ж)

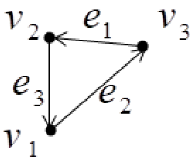
$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

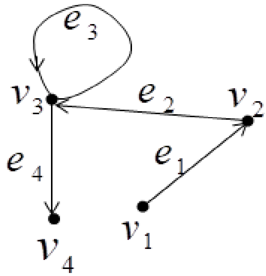
3.а) 
v_1
v_2
v_3
;б) 
v_1
v_2
v_3
v_4
;

в) 
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
.

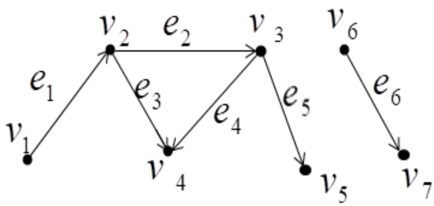
4.а) 
v_1
v_2
v_3
;б) 
v_1
v_2
v_3
v_4
;

в) 
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
.

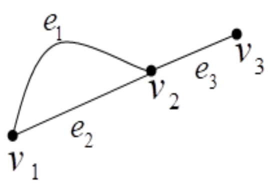

v_2 e_1 v_3
e_3 e_2
v_1

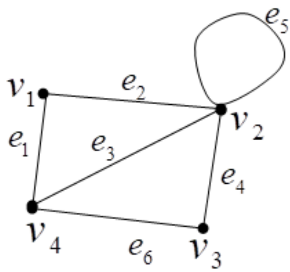

e_3
v_3 e_2 v_2
e_4 e_1
v_4 v_1

5.а) ;**б)** ;

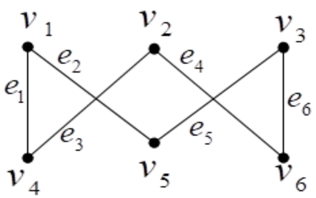

v_2 e_2 v_3 v_6
e_1 e_3 e_4 e_5 e_6
v_1 v_4 v_5 v_7

в) .


e_1
v_2 e_3 v_3
e_2
v_1


e_5
v_1 e_2 v_2
e_1 e_3 e_4
v_4 e_6 v_3

6.а) ;**б)** ;


v_1 v_2 v_3
e_1 e_2 e_4 e_6
e_3 e_5
v_4 v_5 v_6

в) .

3.3. Обходы графов: маршруты, цепи, циклы.

Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, начинающаяся и заканчивающаяся вершиной, $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ... e_k, v_k$ в которой любые два соседних элемента инцидентны.

Очевидно, что маршрут можно задать последовательностью его вершин $v_0, v_1, v_2, .., v_k$ или последовательностью ребер $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

Количество ребер e_i, входящих в маршрут, называют **длиной маршрута**.

Маршрут **замкнут** если его начальная и конечная точки совпадают $v_0 = v_k$,иначе маршрут **открыт** (не замкнут)

Маршрут, все ребра которого различны, называется **цепью**, а маршрут, для которого различны все вершины, называется **простой цепью**.

Замкнутая цепь называется **циклом**, а замкнутая простая цепь – **простым циклом**. Для орграфов цепь называется **путем**, а цикл – **контуром**.

Пример 3.11. В графе, изображенном на рис.3.25 указать примеры простой цепи, цепи, цикла, простого цикла.

Решение.

Маршрут v_1, v_2, v_3, v_4– простая цепь.

Маршрут $v_2, v_4, v_5, v_6, v_6, v_4$– цепь, не являющаяся простой (шестая вершина в маршруте повторяется дважды).

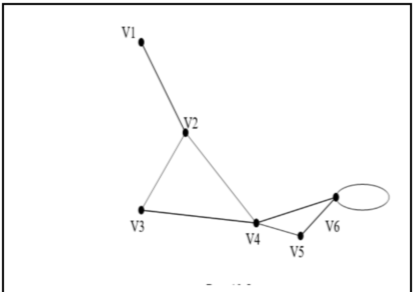


Рис. 3.25

Маршрут $v_3, v_2, v_4, v_5, v_6, v_4, v_3$– цикл, не являющийся простым, так как образован замкнутой цепью-четвёртая вершина в маршруте повторяется дважды.

Маршрут v_3, v_2, v_4, v_3,– простой цикл, так как образован

простой замкнутой цепью.

Пример 3.12. В графе, изображенном на рис.3.26 указать примеры цепи, простой цепи, цикла, простого цикла и указать их длину.

Решение.

Маршрут $v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4$ –

цепь, но не простая цепь, так как содержит одинаковые вершины (длина – 5);

v_1, v_4, v_3, v_2, v_5 –простая цепь, все ее вершины различны (длина – 4);

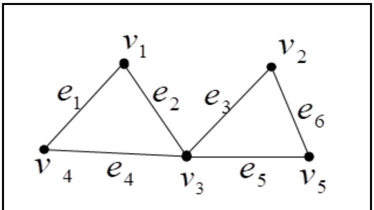


Рис. 3.26

$v_1,v_3,v_5,v_2,v_3,v_4,v_1$–цикл, но не простой цикл, так как является замкнутой цепью (длина – 6);

v_1,v_3,v_4,v_1–простой цикл – замкнутая простая цепь (длина – 3).

Пример 3.13. В орграфе изображенном на рис.3.27 указать примеры пути и контура.

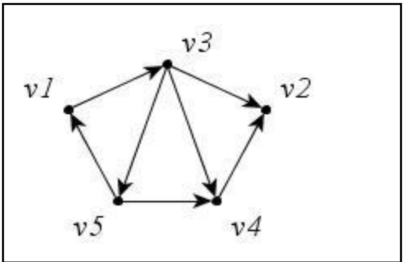


Рис. 3.27

Решение.

Примеры путей: v_1,v_3,v_2 и v_1,v_3,v_5,v_4,v_2 ...

Контур: v_1,v_3,v_5,v_1.

Достижимость и связность.

Говорят, что вершина v_i в графе (орграфе) **достижима** из вершины v_j,если либо $v_i = v_j$,либо существует маршрут (путь) из v_i в v_j.

Две вершины v_i и v_j **сильно связаны** в орграфе G, если существует маршрут из v_j в v_i и из v_i в v_j.

Две вершины v_i и v_j **односторонне связаны** в орграфе G, если существует маршрут из v_i в v_j, либо из v_j в v_i.

Две вершины v_i и v_j **слабо связны**, если они связаны в графе, который получается из G путем отмены ориентации ребер.

Орграф называют **сильно связным**, если любые две вершины в нем взаимно достижимы.

Граф называется **связным**, если для любых двух его вершин существует маршрут(путь), который их связывает. В противном случае граф называется **несвязным,** то есть для некоторой пары вершин не существует маршрута (пути), соединяющего их. Несвязный граф распадается на несколько частей, каждая из которых является связным графом. Эти части называются компонентами связности.

Пример 3.14. Какие из представленных на рисунках 3.28.1)-3) орграфов являются связными (сильно связными или слабо связными). Ответ обосновать.

Решение.

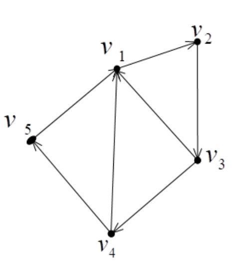


Рис.3.28.1)

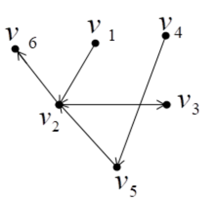


Рис.3.28.2)

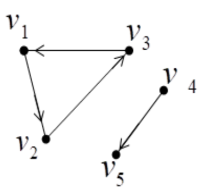


Рис.3.28.3)

Орграф приведённый на рис. 3.28.1) является сильно связным, так как любая из вершин данного графа достижима из любой другой вершины при движении в указанном направлении.

Граф на рис. 3.28.2) является связным, но не сильно связным (слабо связным), так, как например, вершина 1 недостижима из других вершин (с учетом ориентации ребер).

Орграф приведённый на рис. 3.28.3) является несвязным, так как не для всех пар вершин существует путь соединяющий их.

Эйлеров цикл, гамильтонов цикл.

Цикл, который содержит все ребра графа, называется **эйлеровым циклом**.

Эйлеровый граф – граф, содержащий эйлеровый цикл;

Например, граф изображённый на рис.3.29 является эйлеровым,поскольку имеет эйлеров цикл (1,2,3,4,5,6,7)- цикл, содержащий все ребра графа.

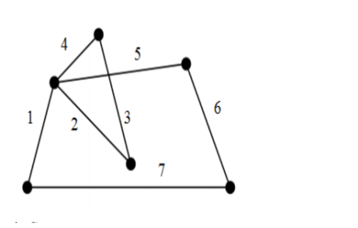


Рис. 3.29

Теорема Эйлера: неориентированный конечный граф G является эйлеровым, если он связен и все его вершины имеют четные степени.

Доказательство.

Пусть в графе G существует эйлеров цикл. В этом цикле присутствуют все ребра графа G причем каждое ровно один раз. В данном цикле проходя некоторую вершину v_i мы входим и выходим из нее по разным ребрам, что добавляет двойку к степени этой вершины. Значит степень вершины v_i графа G равна удвоенному числу проходов цикла через вершину v_i.

Простой цикл, содержащий все вершины графа, называется **гамильтоновым**.

Гамильтоновый граф – граф, содержащий гамильтоновый цикл.

В любом полном графе всегда существуют гамильтоновы циклы, следовательно, он является гамильтоновым. Напомним, граф G называется **полным**, если каждая вершина которого смежна со всеми остальными вершинами.

Например, граф изображённый на

рис.3.30 является гамильтоновым, поскольку имеет гамильтонов цикл цикл v_1, v_2, v_3, v_1,

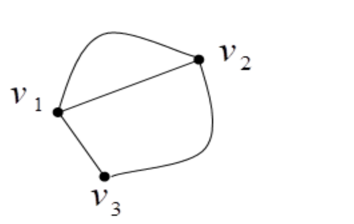


Рис. 3.30

Пример 3.15. Какой из представленных на рисунках 3.31.1)-4) графов является эйлеровым, гамильтоновым. Ответ обосновать.

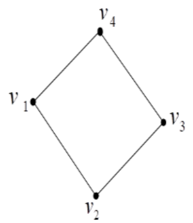
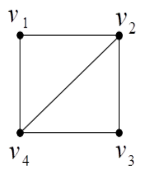
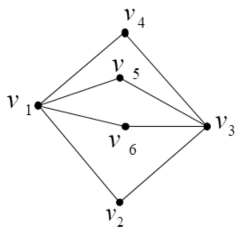
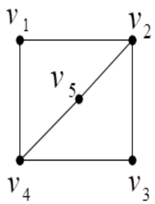
			

Рис.3.31.1)	Рис.3.31.2)	Рис.3.31.3)	Рис.3.31.4)

Решение.

1)Цикл v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 в графе, представленном на рисунке 3.31.1) является эйлеровым и гамильтоновым одновременно, так как содержит все ребра графа и при этом является простым циклом, содержащим все вершины графа. Таким образом, данный граф является гамильтоновым и эйлеровым;

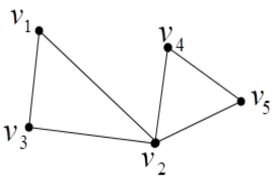
2)Граф представленный на рисунке 3.31.2) является гамильтоновым, так как содержит гамильтонов цикл v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 (простой цикл содержащий все вершины графа), но не является эйлеровым, так как не содержит эйлеров цикл (цикл содержащий все ребра графа);

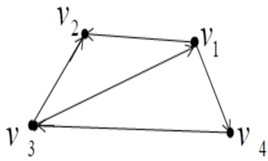
3) Граф представленный на рисунке 3.31.3) является эйлеровым, так как содержит эйлеров цикл $v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_6, v_3, v_5, v_1$ (цикл содержащий все ребра графа), но не является гамильтоновым, так как не содержит гамильтонов цикл (простой цикл, содержащий все вершины графа);

4) Граф, представленный на рисунке 3.31.4) не является гамильтоновым, так как не содержит гамильтонов цикл (простой цикл содержащий все вершины графа) и не является эйлеровым, так как не содержит эйлеров цикл (цикл содержащий все ребра графа);

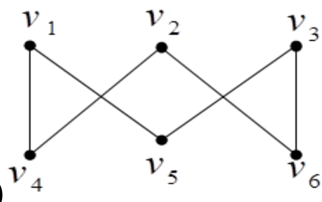
Задания для самостоятельного решения.

1.Привести примеры маршрута, цепи, простой цепи, цикла, простого цикла (пути, контура):

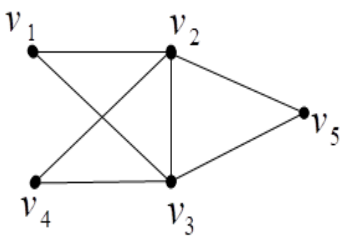
а) 

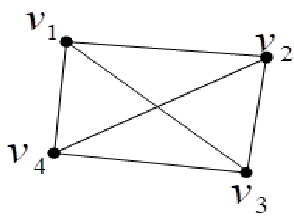
;б) 

.

2. Является ли данный граф эйлеровым, гамильтоновым: **а)** 

;

б) 

;в) 

.

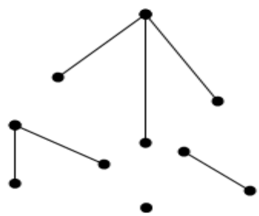
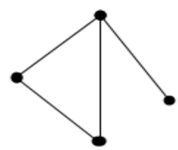
Ответы:

1. а) v_1, v_2, v_4, v_2 – маршрут, v_1, v_2, v_4, v_5, v_2 - цепь, v_1, v_2, v_4, v_5 - простая цепь, $v_1, v_3, v_2, v_5, v_4, v_2, v_1$ - цикл, v_1, v_2, v_3, v_1 - простой цикл; **б)** v_3, v_1, v_2 - путь, v_3, v_1, v_4, v_3 - контур **2.а)** Граф является эйлеровым и гамильтоновым, так как имеет $v_1, v_5, v_3, v_6, v_2, v_4, v_1$ - простой цикл, содержащий все вершины и все ребра графа; **б)** Граф является эйлеровым, так как содержит эйлеров цикл $v_1, v_2, v_5, v_3, v_2, v_4, v_3, v_1$; **в)** Граф является гамильтоновым (гамильтонов цикл v_1, v_2, v_3, v_4, v_1).

3.4. Деревья.

Рассмотрим простой и очень важный своими приложениями тип графов-деревья, наиболее широко применяемый в программировании.

Граф G называется **деревом**, если он является связным и не имеет циклов. Граф G, все компоненты связности которого являются деревьями, называет-

		
Рис.3.32. а) Дерево	Рис.3.32. б) Лес	Рис.3.32. в) Не является деревом

ся **лесом**.

У графа, который является деревом, число ребер на единицу меньше числа вершин. Если n -число вершин, $(n-1)$-число ребер. Дерево не содержит циклов, любые две его вершины можно соединить единственной простой цепью.

Если у дерева G есть, по крайней мере, одно ребро, то у него обязательно найдется висячая вершина, так как в противном случае в графе будет цикл.

Таким образом, дерево – это простой граф, не содержащий циклов;

Для графов, которые сами по себе не являются деревьями, вводится понятие остовного дерева.

Остовным деревом связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Пусть G – связный граф. Тогда остовное дерево графа G (если оно существует) должно содержать n(G)-1 ребер.

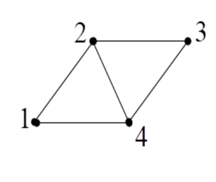
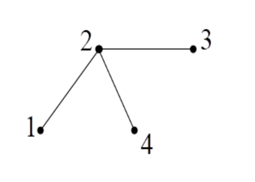
	

Рис.3.33. а) Граф	Рис.3.33. б) Остовное дерево

Таким образом, любое остовное дерево графа G есть результат удаления из графа G ровно m(G) - (n(G) - 1) = m(G) – n(G) + 1 ребер, где m(G)-число ребер графа, n(G)-число вершин графа.

Число ***ν* (G) = m(G) – n(G) + 1** называется **цикломатическим числом** связного графа G.

Например, на рис. 3.33.б) изображено остовное дерево, которое получается из графа представленного на рис.3.33. а) в результате удаления двух ребер (ν(G)= 5 – 4 +1= 2).

Построения остовного дерева минимальной длины.

Одной из самых распространенных задач является задача построения остовного дерева минимальной длины графа.Для решения данной задачи введем понятие нагруженного графа.

Граф называется **нагруженным**, если на множестве его дуг задана некоторая функция, которая называется **весовой** функцией, и определяет длину дуги. Цифра над дугой задает вес дуги (цена дуги).

Пусть G - связный нагруженный граф. Задача построения минимального остовного дерева заключается в том, чтобы из множества остовных деревьев найти дерево, у которого сумма длин ребер минимальна.

Приведем типичные случаи, когда возникает необходимость построения минимального остовного дерева графа:

а) Нужно соединить n городов железнодорожными линиями (автомобильными дорогами, линиями электропередач, сетью трубопроводов и т.д.) так, чтобы суммарная длина линий или стоимость была бы минимальной;

б) Требуется построить схему электрической сети, в которой клеммы должны быть соединены с помощью проводов наименьшей общей длины.

Алгоритм Краскала построения минимального остовного дерева:

1) Выберем в графе G ребро минимальной длины. Вместе с инцидентными ему вершинами оно образует подграф G_1.

2) Строим граф G_2, добавляя к графу G_1 новое ребро минимальной длины, выбранное среди ребер графа G, каждое из которых инцидентно какой - либо вершине графа G_1, и одновременно инцидентно какой – либо вершине графа G, не содержащейся в графе G_1.

3) Строим графы G_3, G_4, …, G_n, повторяя действия пункта 2 до тех пор, пока не переберем все вершины графа G.

Пример 3.16. Определить мин

имальное остовное дерево нагруженного графа, представленного на рис.3.34.

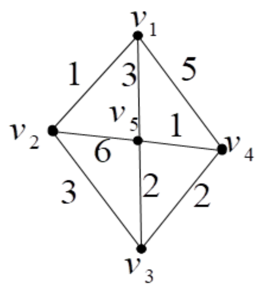
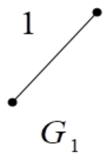


Рис. 3.34

Решение.

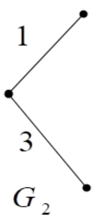
В нашем примере – весовая функция определяет длины дуг числами 1, 2, 3, 5,6.

1) Выберем в графе G ребро минимальной длины (1), например (v_1, v_2) ,получим граф G_1 :



;

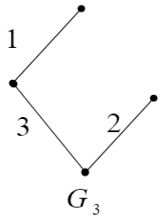
2) Строим граф G_2, добавляя к графу G_1 новое ребро (v_2, v_3) минимальной длины (3) среди ребер графа G, инцидентное вершине v_2 графа G_1, получим граф G_2 :



;

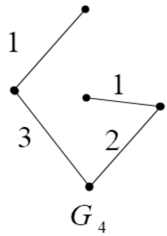
3) Строим граф G_3, добавляя к графу G_2 новое ребро (v_3, v_4) минимальной длины (2), выбранное среди ребер

графа G, инцидентное вершине v_3 графа G_2 ,получим

граф G_3 : 

;

4) Строим граф G_4, добавляя к графу G_3 новое ребро (v_4, v_5) минимальной длины (1), выбранное среди ребер графа G, инцидентное вершине v_4 графа G_3,

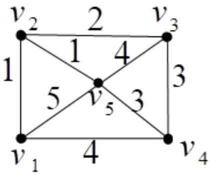
получим граф G_4 : 

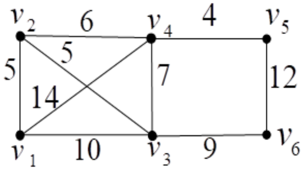
.

Таким образом, на четвертом шаге алгоритма получим дерево G_4,которое соединяет все вершины исходного графа. Следовательно, дерево G_4 будет минимальным остовным деревом графа G.

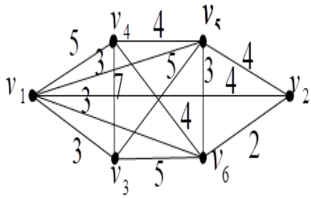
Задания для самостоятельного решения.

Определить минимальное остовное дерево нагруженного графа представленного на рис.: **а)**



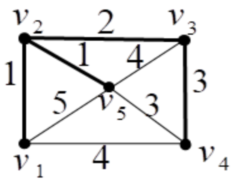
;б) 

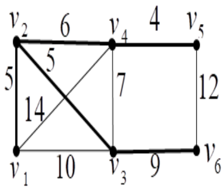
;



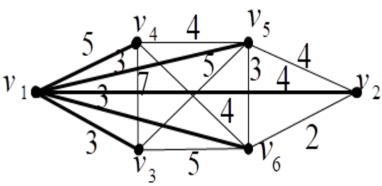
в) .

Ответы:



1.а) ;**б)** 

;



в) .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О.Б. Гладких, О.Н. Белых «Основные понятия теория графов»: Учебное пособие. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2008. –175 с.

2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2005.

3. Редькин Н. П. Дискретная математика: Курс лекций для студентов-механиков: Учебник для вузов. – СПб.: Лань, 2003.

4. Романовский И. В. Дискретный анализ: Учебное пособие для вузов. – СПб.: BHV, 2002.

5. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003.

6. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002