ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Математика»

«Дифференциальные уравнения»

Авторы

Ермилова О.В.

Ростов-на-Дону, 2023

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения всех технических направлений подготовки бакалавриата.
Составлено для проведения теоретических и практических работ по дисциплине «Математика».
Представлены задачи для самостоятельного решения, для самоконтроля все примеры приведены с ответами.
Цель пособия — помочь студентам в формировании их логического и математического мышления, в выработке практических навыков решения и исследования дифференциальных уравнений, описывающих процессы в различных областях естествознания.

Авторы

Старший преподаватель каф. «Прикладная математика» Ермилова О.В.

ГЛАВА 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

При решении задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и её производные-такие уравнения называются дифференциальными.

В качестве примера можно рассмотреть следующую задачу. Из статистических данных известно, что для рассматриваемого региона число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2 соответственно. Необходимо описать демографический процесс, то есть, найти закон изменения численности населения с течением времени t.

Пусть $y = y(t)$ -число жителей региона в момент времени t. Известно, что прирост населения Δy за время Δt равен разности между числом родившихся и умерших за это время, то есть

$\Delta y = k_1 y\Delta t - k_2 y\Delta t$,

$\Delta y = \Delta t y(k_1 - k_2)$,

$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$, где $k = k_1 - k_2$.

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} ky,$$

$y' = ky$, где $y' = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$.

Решая это уравнение, получаем математическую модель демографического процесса:

$y = Ce^{kt}$, где C – постоянная, определяемая начальными условиями (численность населения в начальный момент времени).

Отметим особенности уравнения $y' = ky$:

1. Искомая функция зависит только от одной переменнойt.
2. Уравнение $y' = ky$, наряду с искомой функцией y, содержит также производную от неизвестной функции y'.

1.1. Дифференциальные уравнения, общие понятия.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Если искомая (неизвестная) функция y зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называют **обыкновенным дифференциальным уравнением**, в противном случае, если независимых переменных две или более, дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Обыкновенным дифференциальным уравнением n–го порядка называется соотношение вида:

$$\boldsymbol{F\left(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n)}\right) = 0} \quad (\mathbf{1.1}),$$

где x – независимая переменная, $y = y(x)$ – искомая функция переменной x; $y', y'', \dots, y^{(n)}$– производные искомой функции, F – известная функция своих аргументов, определённая в некоторой области D.

Обыкновенное ДУ может иметь вид

$$\boldsymbol{y^{(n)} = f\left(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n-1)}\right)} \; (\mathbf{1.2}),$$

в этом случае оно называется **разрешенным относительно старшей производной**.

Порядком дифференциального уравнения, называется наивысший порядок производной, входящей в это уравнение.

Замечание: уравнение порядка n обязательно должно содержать производную $y^{(n)}$, при этом величины $x, y, y', y'', \dots,$ функции F могут отсутствовать.

Например,

1)$y' \cdot x = x^5$–обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, в общем виде записывается $F(x; y; y') = 0$;

2)$4y''' + 2y'' = 0$ или $4 \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + 2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0$– обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, в общем виде его можно записать так $F(x; y; y'; y''; y''') = 0$;

3) $y \cdot z'_x = x^5 \cdot z'_y$ или $y \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} = x^5 \cdot \frac{\partial Z}{\partial y}$-дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

В дальнейшем мы будем рассматривать только обыкновенное дифференциальные уравнения и для краткости писать ОДУ.

Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция, которая при подстановке её вместе с производными в это уравнение обращает его в тождество.

Нахождение всех решений дифференциального уравнения называется его **интегрированием**.

1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение (уравнение), связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и её производную y':

$$\boldsymbol{F(x; y; y') = 0} \quad (\mathbf{1.3})$$

Уравнение (1.3) ещё называют **общим видом ОДУ первого порядка.**

Уравнение (1.3) можно разрешить относительно старшей производной y',то есть записать в виде (1.4):

$$\boldsymbol{y' = f(x; y)} \quad (\mathbf{1.4})$$

Уравнение (1.4) называют **ОДУ первого порядка, разрешенным относительно старшей производной.**

Замечание: в основном мы будем работать с уравнениями, которые можно разрешить относительно старшей производной.

Здесь $f(x; y)$- некоторая заданная функция своих аргументов, определённая и непрерывная в области D на плоскости Oxy. Область D называется областью определения дифференциального уравнения.

Если в уравнении (1.4) положить $f(x; y) = \frac{P(x;y)}{Q(x;y)}$,то учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$ имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x; y)}{Q(x; y)}, |\cdot Q(x; y)dx \neq 0,$$

уравнение (1.4) можно записать в виде (1.5):

$$\boldsymbol{P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0} \ \mathbf{(1.5)}$$

Уравнение (1.5) называют **дифференциальной формой** записи ОДУ первого порядка, заметим, что переменные x и y равноправны.

Решением ДУ (1.4) называется функция $y = \varphi(x)$, определенная и дифференцируемая на некотором интервале $(a; b)$,которая при подстановке в уравнение (1.4) обращает его в тождество (равенство), то есть

$\varphi'(x) = f\big(x; \varphi(x)\big)$ при $x \epsilon (a; b)$.

График решения ДУ называется его **интегральной кривой,** а процесс нахождения решения ДУ называется его **интегрированием.**

Пример 1.1. Показать, что функция $y = x^3$ является решением дифференциального уравнения $3y - y' \cdot x = 0$.

Решение.

Найдем производную функции $y = x^3, y' = 3x^2$ и подставим y, y' в исходное ДУ: $3x^3 - 3x^2 \cdot x = 0, 0 = 0$, получили верное равенство, следовательно функция $y = x^3$является решением ДУ $3y - y' \cdot x = 0$.Заметим, что у рассматриваемого уравнения есть еще такое решение $y = \varphi(x; C) = Cx^3$, где C – произвольная постоянная. Действительно, подставляя $y = Cx^3$ и $y' = 3Cx^2$ в исходное уравнение, имеем: $3Cx^3 - 3Cx^2 \cdot x = 0, \quad 0 = 0$.

Таким образом, ДУ уравнение первого порядка имеет бесчисленное множество решений вида $y = \varphi(x; C)$, зависящих от одной произвольной постоянной C.Такое решение, то есть функцию $y = \varphi(x; C)$ называют **общим решением ДУ**.

Пример 1.2. Показать, что для уравнения $y' = y$ функции $y = Ce^x$ и $y = e^{x+C}$ являются общими решениями.

Решение.

Действительно, если подставим первое решение $y = Ce^x$ и его производную $y' = Ce^x$ в уравнение $y' = y$,получим $Ce^x = Ce^x$верное равенство;

Аналогично, подставляя второе, получим:

$y = e^{x+C}, y' = e^{x+C}, e^{x+C} = e^{x+C}$.Это означает, что функции $y = Ce^x$ и $y = e^{x+C}$ являются общими решениями уравнения $y' = y$.

Заметим, что данные решения являются разными, так как первое из них обращается в ноль ($\text{при } C = 0$), а второе – не обращается в ноль ни при каких обстоятельствах.
Замечание: общее решение дифференциального уравнения (1.4) находится в явном виде$y = \varphi(x; C)$, но так выходит не всегда, иногда оно получается в неявном виде (1.6),

$$\boldsymbol{\Phi(x; y; C) = 0 \ (1.6)}$$

Соотношение (1.6) ,связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и произвольную постоянную C, называется **общим интегралом уравнения** (1.4).
Частным решением ДУ первого порядка называется любая функция
$y = \varphi(x; C_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x; C)$ при фиксированном значении постоянной $C = C_0$.

Например, для дифференциального уравнения $y' = -\frac{y}{ctgx}$,
$y = Ccosx$ -общее решение, а $ln|y| - ln|cosx\,| = C$ -общий интеграл.
С геометрической точки зрения общее решение $y = \varphi(x; C)$ представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Oxy, а частное решение $y = \varphi(x; C_0)$ — это одна кривая из этого семейства линий, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.
Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0,то есть $y(x_0) = y_0$ называется **начальным условием**.
Начальное условие записывается в виде (1.7):

$$\boldsymbol{y(x_0) = y_0 \ (1.7)}$$

Задача отыскания решения ДУ первого порядка (1.4), удовлетворяющего начальному условию (1.7), называется **задачей Коши**.
Рассмотрим эту задачу подробнее. Общее решение $y = \varphi(x; C)$ определяет семейство интегральных кривых (см. рис.1). Для того чтобы из этого семейства выделить какое-либо частное решение (интегральную кривую),

необходимо задать еще дополнительные условия, в частности, такое решение можно выделить путем задания на плоскости точки $(x_0; y_0)$ (рис.1), через которую проходит интересующая нас интегральная кривая. В соответствии с этим, возникает задача отыскания такого решения уравнения $y' = f(x; y)$, которое при заданном x_0 принимает заданное значение y_0 ,это и есть задача Коши**.**

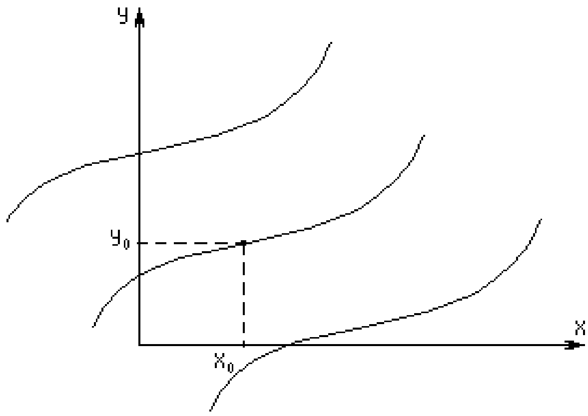

Рис.1

Например, если при решении ДУ $y \cdot y' = -x$,получился общий интеграл $x^2 + y^2 = C^2, C > 0$— это с геометрической точки зрения, семейство окружностей с центром в начале координат $(0; 0)$ и радиусом C, при различных значениях C,получим определённую окружность-частный интеграл. Положим, например, $C = 1$, получим $x^2 + y^2 = 1$– окружность с центром в начале координат $(0; 0)$ и радиусом 1 .

Пример 1.3. Среди решений $y = -\frac{1}{5}cos5x + C$ дифференциального уравнения $y' = sin5x$,найти такое решение y, которое при $x = 0$ обращается в ноль.

Решение.

Нам требуется среди решений уравнения $y' = sin5x$ найти такое, которое при $x = 0$ обращает y в ноль, то есть выполняется равенство $y(0) = 0$;

Из условия известно, что общим решением является функция $y = -\frac{1}{5}cos5x + C$.

Так как требуется, чтобы выполнялось условие $y(0) = 0$, то полагая $x = 0$, $y = 0$ в общем решении имеем:

$$0 = -\frac{1}{5}cos0 + C,$$

$$0 = -\frac{1}{5} + C,$$

$$C = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, это возможно только при $C = \frac{1}{5}$,следовательно частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$,получается из общего решения при подстановке $C = \frac{1}{5}$, то есть $y = -\frac{1}{5}cos5x + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(1 - cos5x)$- решение задачи Коши (частное решение).

Таким образом, **задачей Коши** называется нахождение любого частного решения $y = \varphi(x; C_0)$ ДУ $y' = f(x; y)$ удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема 1.1 (существования и единственности задачи Коши).Если функция $f(x; y)$непрерывна в некоторой области D в плоскости Oxy и имеет в этой области непрерывную частную производную$y' = f(x; y)$, то какова бы не была точка$(x_0; y_0)$, в области D, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения$y' = f(x; y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точкуx_0, принимающее при $x = x_0$значение $\varphi(x_0) = y_0$, то есть существует единственное решение дифференциального уравнения.

Примем без доказательства.

Замечание: геометрическая смысл теоремы Коши заключается в том, что при выполнении её условий существует единственная интегральная кривая ДУ, проходящая через точку$(x_0; y_0)$.

1.3. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка. Метод изоклин.

Уравнение $y' = f(x; y)$ устанавливает связь (зависимость) между координатами точки $(x; y)$ и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, дифференциальное уравнение $y' = f(x; y)$ дает совокупность направлений (поле направлений) на плоскости Oxy.Это и есть геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка. Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется **изоклиной**.

Изоклинами можно пользоваться для приближенного построения интегральных кривых.

Уравнение изоклины можно получить, если положить в уравнении

$y' = f(x;y), y' = C$, то есть $f(x;y) = C$ – уравнение изоклины.
Метод изоклин, особенно ценен в том случае, когда решение
(общее или частное) не выражается в элементарных функциях-интеграл не берется. Разберём как он работает на примере 1.4.

Пример 1.4. С помощью изоклин начертить вид интегральных кривых уравнения $y' = 2x$.

Решение.

Область определения уравнения, то есть функции $f(x;y) = 2x$ – вся плоскость Oxy. Для нашего ДУ уравнение изоклины $y' = C$ имеет вид $2x = C$, $x = \frac{C}{2}$,то есть изоклинами здесь будут прямые, параллельные оси Oy .

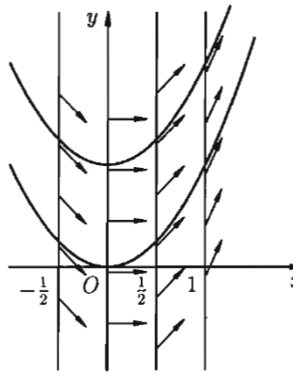

Рис. 2

Так, при $C = 0$ уравнение изоклины имеет вид $x = 0$, учитывая, что $y' = C$,а $y' = tg\alpha$ имеем:
$tg\alpha = 0$ при $\alpha = 0$;
Аналогично рассуждая, получим:
при $C = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $y' = C = tg\alpha = 1, \alpha = 45^0$;
при $C = -1$, $x = -\frac{1}{2}$, $y' = C = tg\alpha = -1, \alpha = -45^0$;
при $C = 2$, $x = 2$, $y' = C = tg\alpha = 2, \alpha = arctg2 \approx 63^0$ и так далее.
Построив четыре изоклины и отметив на каждой из них ряд стрелочек, наклонённых к оси Ox под определённым(найденным) углом, по их направлениям строим линии. Они, как видно на рис.2., представляют семейство парабол.

1.4. Основные виды дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решений.

При решении какого-либо ДУ его стараются свести к уравнению с разделёнными переменными.

Уравнения с разделёнными переменными.

Наиболее простыми дифференциальными уравнениями первого порядка являются уравнения вида

$$\boldsymbol{P(x)dx + Q(y)dy = 0} \quad \textbf{(1.8)},$$

где $P(x)$ и $Q(y)$ – заданные функции, функция $P(x)$ зависит только от x , $Q(y)$ только от y. Переменные разделены, каждая функция находится только в той части равенства, где находится её дифференциал.

Уравнение вида (1.8) называют **уравнением с разделенными переменными**, а именно дифференциальной формой записи уравнения с разделенными переменными.

Процесс нахождения решения ДУ (1.8) получается интегрированием обеих частей равенства (1.8), в итоге получим общий интеграл данного уравнения, то есть соотношение вида:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C \text{ , где } \quad C = const.$$

Уравнением с разделенными переменными (1.8), можно разрешить относительно производной, то есть записать в виде (1.9):

$$\boldsymbol{y' = f(x)} \quad \mathbf{(1.9)}$$

Уравнение (1.9) называют **ДУ с разделёнными переменными, разрешённым относительно производной.**

Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$ общее решение уравнения (1.9) ищем в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \mid \cdot dx,$$

$$dy = f(x)dx;$$

Интегрируя последнее равенство, получим общее решение уравнения $y' = f(x)$:

$$\int dy = \int f(x)\,dx \ ;$$

$y = F(x) + C$ или $y = \varphi(x; C)$.

Пример 1.5. Решить ДУ: **а)** $x^2dx + ydy = 0$;**б)**$y' = e^{-3x}$.

Решение.

а) Уравнение $x^2dx + ydy = 0$ является уравнением с разделенными переменными, заданным в дифференциальной форме $P(x)dx + Q(y)dy = 0$,где $P(x) = x^2$, $Q(y) = y$,поэтому интегрируя обе части исходного равенства получим:

$\int x^2dx + \int ydy = C$ или $\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = C$ –общий интеграл;

б) Уравнение $y' = e^{-3x}$ является уравнением с разделенными переменными, разрешённым относительно производной $y' = f(x)$,где $f(x) = e^{-3x}$ учитывая, что обратное действие дифференцированию интегрирование, находим общее решение исходного уравнения:

$y = \int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\int e^{-3x}d(-3x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$, то есть

$y = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$ – общее решение ДУ.

Пример 1.6. Найти общее решение и частное решение (решение задачи Коши) ДУ и объяснить их геометрический смысл: **а)** $xdx = -ydy, y(1) = 0$;
б) $y' = 2x, y(2) = 6$.

Решение.

а) Решить задачу Коши, значит найти решение исходного ДУ, удовлетворяющего начальному условию. Для этого необходимо найти общее решение, а затем значение постоянной, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$, подставляя полученную постоянную в общее решение получим частное решение, то есть решение задачи Коши.

Уравнение $xdx = -ydy$ является уравнением с разделенными переменными (заданным в дифференциальной форме), $xdx + ydy = 0$($P(x)dx + Q(y)dy = 0$),где $P(x) = x, Q(y) = y$,интегрируя обе части равенства, находим общее решение (интеграл):

$\int xdx = -\int ydy,$

$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1,$

$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1 | \cdot 2,$

$x^2 + y^2 = 2C_1$, для удобства, положим $2C_1 = C^2, C > 0$.

Итак, $x^2 + y^2 = C^2$ –общий интеграл, геометрически это равенство определяет семейство окружностей с центром в начале координат $(0;0)$ и радиусом C;
Находим частный интеграл (решение задачи Коши), то есть выделим из семейства окружностей, окружность, проходящую через точку$(1;0)$.

Так как по условию $y(1)=0$, то есть $x=1, y=0$,то $1^2+0^2=C^2, C=1$,подставляем полученную постоянную в общий интеграл получим частное решение (решение задачи Коши), то есть

$x^2+y^2=1^2$-окружность с центром в начале координат $(0;0)$ и радиусом $C=1$.

б) Уравнение $y'=2x$ является уравнением с разделенными переменными, разрешённым относительно производной $y'=f(x)$,где $f(x)=2x$.

Интегрируя правую часть уравнения$y'=2x$, находим y:

$y=\int 2xdx=x^2+C$-общее решение, выясним его геометрический смысл, для этого запишем уравнение $y=x^2+C$ в виде $x^2=y-C$,

$(x-0)^2=y-C-$ семейство парабол, с вершиной в точке$(0;C)$,симметричных относительно оси Oy.

Найдём частное решение, подставляя $x=2, y=6$ в общее решение

$y=x^2+C$ имеем: $6=2^2+C$, откуда $C=2$.

Таким образом, решением задачи Коши является функция $y=x^2+2$ или с геометрической точки зрения парабола $(x-0)^2=y-2$ с вершиной в точке$(0;2)$,симметричная относительно оси Oy.

Замечание: уравнения с разделёнными переменными являются частным случаем уравнений с разделяющимися переменными.

Уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнения с разделяющимися переменными, разрешённые относительно старшей производной, имеют вид (1.10):

$$\boldsymbol{y'=f_1(x)\cdot f_2(y)} \quad (\mathbf{1.10})$$

Для того, чтобы решить уравнение с разделяющимися переменными, необходимо разделить переменные, чем мы сейчас и займёмся, учитывая, что

$y'=\frac{dy}{dx}$ имеем:

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y);$$

Умножив обе части уравнения на $\frac{dx}{f_2(y)}$, $f_2(y)\neq 0$ получим:

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y) \mid \cdot\frac{dx}{f_2(y)},$$

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx;$$

Таким образом, переменные разделены-получили уравнение с разделенными переменными, то есть при дифференциале dy стоит функция зависящие от y, а при дифференциале dx – зависящая от x .

Интегрируя последнее равенство, получим общий интеграл:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx \ + C;$$

ДУ с разделяющимися переменными(1.10) может быть записано в дифференциальной форме (1.11):

$$\boldsymbol{P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0} \quad (\mathbf{1.11})$$

В этом уравнении легко разделить переменные. Для этого поделим обе части уравнения на произведение $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$:

$$P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{Q_1(y) \cdot P_2(x)},$$

$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$ –получили уравнения с разделенными переменными, интегрируя его получим общий интеграл уравнения (1.11):

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C \text{ –общий интеграл.}$$

Замечания: при делении уравнения (1.11) на $Q_{\,1}(y) \cdot P_2(x) \neq 0$,могут быть потеряны решения, обращающие знаменатель в ноль, то есть полученные из уравнения $Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$.Если эти решения не входят в найденный общий интеграл, то они являются особыми решениями ДУ.

Дадим более точное определение особого решения.

Функция $y = \varphi(x)$называется **особым решением** дифференциального уравнения $F(x; y; y') = 0$, если единственность решения (задачи Коши) нарушается в каждой точке этой функции в области определения дифференциального уравнения. Геометрически это означает, что через каждую соответствующую точку $(x_0; y_0)$ проходит более одной интегральной кривой с общей касательной. Особое решение дифференциального уравнения не описывается общим интегралом. Поэтому, оно не выводится из общего решения ни при каком значении постоянной C.

Пример 1.7. Показать графически, что решение $y = 0$,является особым для ДУ $(y')^2 - 4y = 0$,если общее решение данного уравнение описывается формулой $y = (x + C)^2$.

Решение.

Проверим, что функция $y=(x+C)^2$ является общим решение уравнения $(y')^2-4y=0$,для этого найдём $y'=2(x+C)$ и подставим $y,\ y'$ в уравнение $(y')^2-4y=0$:

$\left(2(x+C)\right)^2-4(x+C)^2=0{,}0=0$,следовательно функция $y=(x+C)^2$является общим решение уравнения$(y')^2-4y=0$.

Графически общее решение $y=(x+C)^2$ представляется семейства парабол изображённых на рис.3

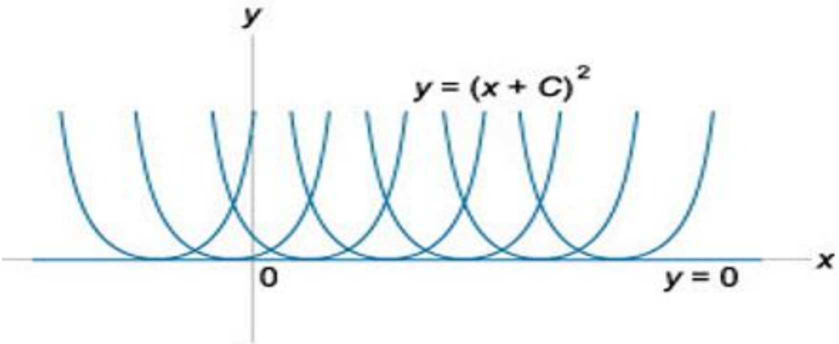

Рис.3

Кроме этого, функция $y=0$ также удовлетворяет дифференциальному уравнению$(y')^2-4y=0{,}0=0$,но функция $y=0$ не содержится в общем решении $y=(x+C)^2$, ни при каком значении C.Графически это можно объяснить так, через каждую точку прямой $y=0$ проходит более одной интегральной кривой, то есть единственность решения на этой прямой нарушается, и, следовательно, данная прямая является особым решением дифференциального уравнения.

Пример 1.8. Найти общее решение (интеграл), особые решения (если такие имеются), частные решение, для уравнений: **а)** $y'-2y=0, y(0)=0$;
б) $y'=\frac{y+2}{x}, y(-1)=1$;**в)** $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0, y(0)=1$.

Решение.

а) Данное уравнение $y'-2y=0$, $y'=2y$ является уравнением с разделяющимися переменными, так как соответствует уравнению вида $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$, где $f_1(x)=1, f_2(y)=2y$.

Разделяя переменные имеем:

$\frac{dy}{dx} = 2y \Big| \cdot \ \frac{dx}{y}, y \neq 0,$

$\frac{dy}{y} = 2dx,$

$\int \frac{dy}{y} = 2\int dx,$

$ln|y| = 2x + C_1,$

$log_e|y| = 2x + C_1$-общий интеграл;

Для того, чтобы получить общее решение необходимо выразить y

через $x,$ учитывая, что $log_a x = b <=> x = a^b$ имеем:

$y = e^{2x+C_1},$

$y = e^{2x} \cdot e^{C_1}$, полагая $e^{C_1} = C \neq 0$,получим $y = Ce^{2x}$-общее решение исходного уравнения;

Проверим, имеет ли уравнение $y' - 2y = 0$ особые решения. Так как, мы делили исходное уравнение на y, то могли потерять решение $y = 0$ обращающее знаменатель в ноль.

Подстановка $y = 0$ и $y' = 0$ в исходное уравнение $y' = 2y$, показывает, что $0 = 2 \cdot 0, 0 = 0$, то есть решение $y = 0$ является решением ДУ, однако решение $y = 0$, невозможно получить из общего решения $y = Ce^{2x}$, ошибочно считать, что это возможно при $C = 0$, так как $C = e^{C_1} \neq 0$.

Таким образом, решение $y = 0$ является особыми для уравнения $y' - 2y = 0$;

Найдем частное решение ДУ $y' = 2y$, то есть выделим определённую линию, из семейства кривых $y = Ce^{2x}$, удовлетворяющую условию $y(0) = -2$, то есть кривую, проходящую через точку$(0; -2)$,подставляем $x = 0, y = -2$,

в общее решение $y = Ce^{2x}$ и находим C:

$$-2 = Ce^0 \,, C = -2.$$

Таким образом, $y = -2e^{2x}$-частное решение исходного уравнения;

б) Данное уравнение $y' = \frac{y+2}{x}$ является уравнением с разделяющимися переменными, так как соответствует виду $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$, где $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(y) = y + 2$, область определения уравнения $x \neq 0$;

Разделяя переменные имеем:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{x} \Big| \cdot \ \frac{dx}{y+2}, y + 2 \neq 0,$

$\frac{dy}{y+2} = \frac{dx}{x}$,

$\int \frac{d(y+2)}{y+2} = \int \frac{dx}{x}$,

$ln|y+2| = ln|x| + C_1$-общий интеграл.

Для нахождения общего решения, представим константу C_1 в правой части равенства в виде lnC ,где $C > 0$, то есть в виде $C_1 = lnC$:

$ln|y+2| = ln|x| + lnC$,

$ln|y+2| = lnC|x|$,

$y + 2 = Cx$,

$y = Cx - 2$-общее решение.

Проверим, имеет ли уравнение особые решения. Так как, мы делили исходное уравнение на $f_2(y) = y + 2$, то могли потерять решение $y + 2 = 0$,обращающее знаменатель в ноль, то есть решение $y = -2$.

Подстановка $y = -2$и $y' = 0$ в исходное уравнение $y' = \frac{y+2}{x}$,

$0 = \frac{-2+2}{x}, 0 = 0$, показывает, что $y = -2$ является решением данного уравнения.Однако подставляя $y = -2$ в общее решение $y = Cx - 2$ получим $-2 = Cx - 2$, $Cx = 0$,отсюда $C = 0$, но выше мы полагали $C > 0$,следовательно решение $y = -2$ не может содержаться в общем решении (невозможно подобрать в общем решении такое $C > 0$,чтобы $y = -2$).Таким образом, решение $y = -2$ является особым.

Найдем частное решение ДУ, выделим определённую линию, из семейства прямых $y = Cx - 2$, удовлетворяющую условию $y(-1) = 1$, то есть проходящую через точку$(-1; 1)$,подставляем $x = -1, y = 1$, в общее решение$y = Cx - 2$, находим C,$1 = C(-1) - 2, C = -3$.

Таким образом, $y = -3x - 2$-частное решение исходного уравнения;

в) Данное уравнение $x \cdot \sqrt{1-y^2}dx + y \cdot \sqrt{1-x^2}dy = 0$ -является уравнением с разделяющимися переменными (в дифференциальной форме), так как соответствует виду:

$P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0$,

где $P_1(x) = x, Q_1(y) = \sqrt{1-y^2}, P_2(x) = \sqrt{1-x^2}, Q_2(y) = y$;

Разделяя переменные имеем:

$x\cdot\sqrt{1-y^2}dx+y\cdot\sqrt{1-x^2}dy=0\ \Big|\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}},\ x\neq\pm1,\ y\neq\pm1,$

$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=C_1,$

$-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\,dx-\frac{1}{2}\int(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y)\,dy=C_1,$

$$-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)-\frac{1}{2}\int(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-y^2)=C_1|\cdot(-2),$$

$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+(1-y^2)^{\frac{1}{2}}=-2C_1$, полагая $C=-2C_1\geq 0$, получим:

$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+(1-y^2)^{\frac{1}{2}}=C-$ общий интеграл.

При делении исходного уравнения на $\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}$ мы могли потерять некоторые решения, которые обращают в ноль произведение $\sqrt{1-y^2}\cdot\sqrt{1-x^2}=0$, то есть решения $y=\pm1$ ($\sqrt{1-y^2}=0$),

$x=\pm1(\sqrt{1-x^2}=0)$.

Решения $x=\pm1, y=\pm1$- не являются особыми, так как входят в общий интеграл $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+(1-y^2)^{\frac{1}{2}}=C$, при $C=0$,

действительно при $C=0$,

$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+(1-y^2)^{\frac{1}{2}}=0\Leftrightarrow\ x=\pm1, y=\pm1$;

Найдём частное решение уравнения, удовлетворяющее условию $y(0)=1$:

$x=0, y=1,$

$(1-0^2)^{\frac{1}{2}}+(1-1^2)^{\frac{1}{2}}=C,$

$C=1$, следовательно $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+(1-y^2)^{\frac{1}{2}}=1$- частный интеграл.

Пример 1.9. Найти решение дифференциального уравнения: **а)** $y'\cdot x^3=2y$;
б) $ydx+ctgxdy=0, y(0)=1$; **в)**$cos^2yctgxdx+sin^2xtgydy=0$;
г) $x\cdot y'-\frac{y}{lnx}=0, y(e)=1.$

Решение

а) Данное уравнение $y'\cdot x^3=2y$ или $y'=\frac{1}{x^3}\cdot 2y$ является уравнением с разделяющимися переменными, так как соответствует виду $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$, где $f_1(x)=\frac{1}{x^3}, f_2(y)=2y$.

Разделяя переменные, учитывая, что $y'=\frac{dy}{dx}$ имеем:

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^3}\cdot 2y\Big|\cdot\ \frac{dx}{y}, y\neq 0,$

$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x^3}dx$,

$\int \frac{dy}{y} = 2\int x^{-3}dx$,

$ln|y| = 2 \cdot \frac{x^{-2}}{(-2)} + C_1$,

$log_e|y| = -\frac{1}{x^2} + C_1$-общий интеграл;

Для того, чтобы получить общее решение необходимо выразить y через x, учитывая, что $log_a x = b <=> x = a^b$ имеем:

$y = e^{-\frac{1}{x^2}+C_1}$,

$y = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot e^{C_1}$,полагая $e^{C_1} = C \neq 0$,получим $y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}$-общее решение исходного уравнения;

б) Данное уравнение $ydx + ctgxdy = 0$ -является уравнением с разделяющимися переменными (в дифференциальной форме), так как соответствует виду:

$P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0$,

где $P_1(x) = 1, Q_1(y) = y, P_2(x) = ctgx, Q_2(y) = 1$;

Разделяя переменные имеем:

$ydx + ctgxdy = 0 \left| \cdot \frac{1}{yctgx} \right., yctgx \neq 0$;

$\frac{dx}{ctgx} + \frac{dy}{y} = 0$,

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{ctgx}$,

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{sinx}{cosx}dx$,

так как $d(cosx) = -sinxdx$ имеем:

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{d(cosx)}{cosx}$,

$ln|y| = ln|cosx| + C_1$,

Полагая $C_1 = lnC, C > 0$, имеем:

$ln|y| = lnC|cosx|$,

$y = Ccosx$-общее решение (семейство косинусов).

Найдем частное решение ДУ- выделим определённую линию, из семейства прямых $y = Ccosx$, удовлетворяющую условию $y(0) = 1$, то есть проходящую через точку$(0; 1)$,подставляем $x = 0, y = 1$, в общее решение $y = Ccosx$, находим C:

$1 = Ccos0$,

$C = 1$, следовательно, $y = cosx$- частное решение исходного ДУ.

в) $cos^2yctgxdx + sin^2xtgydy = 0$ – уравнением с разделяющимися переменными (в дифференциальной форме);

$$cos^2yctgxdx + sin^2xtgydy = 0 \Big| \cdot \frac{1}{cos^2ysin^2x}, \; cos^2ysin^2x \neq 0,$$

$$\frac{ctgx}{sin^2x}dx + \frac{tgy}{cos^2y}dy = 0,$$

$$\int \frac{ctgx}{sin^2x}dx + \int \frac{tgy}{cos^2y}dy = C_1,$$

$$-\int ctgx\, d(ctgx) + \int tgy\, d(tgy) = C_1,$$

$$\frac{tg^2y}{2} - \frac{ctg^2x}{2} = C_1 | \cdot 2,$$

полагая $2C_1 = C$,имеем:

$tg^2y - ctg^2x = C$ –это и есть общий интеграл данного уравнения.

г) $x \cdot y' - \frac{y}{lnx} = 0 \Big| \cdot \frac{1}{x}, x \neq 0;$

$$y' - \frac{y}{xlnx} = 0,$$

$y' = \frac{y}{xlnx}$ – уравнением с разделяющимися переменными разрешённое относительно y',

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{xlnx},$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{xlnx},$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{d(lnx)}{lnx},$$

$ln|y| = ln|lnx| + C_1$,

полагая $C_1 = lnC, C > 0$, имеем:

$ln|y| = ln|lnx| + lnC$,

$ln|y| = lnC|lnx|$,

$y = Clnx$ –общее решение.

Найдём частное решение, удовлетворяющее условию $y(e) = 1$:

$1 = Clne, C = 1$,следовательно, $y = lnx$ –частное решение исходного уравнения.

Пример 1.10. Найти общее решение дифференциального уравнения $\left(\sqrt{xy} + \sqrt{x}\right) y' = y$ и проверить результат дифференцированием.

Решение.

Чтобы разобраться с видом данного уравнения, разрешим его относительно старшей производной:

$\left(\sqrt{xy} + \sqrt{x}\right) y' = y,$

$\sqrt{x}\left(\sqrt{y} + 1\right) y' = y,$

$y' = \frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{y}+1)}$ -уравнением с разделяющимися переменными, так как соответствует виду $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$, где $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$f_2(y) = \frac{y}{\sqrt{y}+1}$, область определения уравнения $x \neq 0$;

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{y}+1)}\Big| \cdot \frac{(\sqrt{y}+1)dx}{y}, y \neq 0,$

$\frac{(\sqrt{y}+1)dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x}},$

$\int \left(y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{y}\right) dy = \int x^{-\frac{1}{2}} dx,$

$2\sqrt{y} + ln|y| = 2\sqrt{x} + C$— это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, так как искомая функция y не выражена через независимую переменную x. В этом и заключается отличие общего (частного) интеграла от общего (частного) решения. Чтобы проверить правильность полученного ответа продифференцируем обе части последнего равенства:

$\left(2y^{\frac{1}{2}} + ln|y|\right)' = \left(2x^{\frac{1}{2}} + C\right)',$

$2 \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' + \frac{1}{y} \cdot y' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}},$

$\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{y}\right) \cdot y' = \frac{1}{\sqrt{x}},$

$\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{y}+1}{y}\right) \cdot y' = 1,$

$\sqrt{x}\left(\sqrt{y} + 1\right) \cdot y' = y,$

$\left(\sqrt{xy} + \sqrt{x}\right) y' = y.$

Вернулись к исходному уравнение, следовательно общее решение найдено верно!

Однородные уравнения.

Функция $f(x;y)$называется **однородной функцией степени** $\boldsymbol{n}(n\epsilon Z)$, если для любого значения параметра $t>0(t\epsilon R)$ выполняется равенство

$$\boldsymbol{f(tx;ty)=t^n f(x;y)}\ \textbf{(1.12)}$$

Например, функция $f(x;y)=x^2-2xy$ -является однородной второй степени, так как$f(tx;ty)=(tx)^2-2txty=t^2(x^2-2xy)=t^2\cdot f(x,y)$

Уравнение вида

$$\boldsymbol{P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0}\ \textbf{(1.13)}$$

называется **однородным**, если $P(x;y)$и $Q(x;y)$ однородные функции одной и той же степени, то есть $P(tx;ty)=t^nP(x;y), Q(tx;ty)=t^nQ(x;y)$.

Уравнение вида (1.13) называют дифференциальной формой однородного уравнения первого порядка.

Уравнение (1.13) может быть приведено к виду

$$\boldsymbol{y'=f\left(\frac{y}{x}\right)}\ \textbf{(1.14)}$$

Уравнение (1.14) называется **однородным ДУ первого порядка, разрешённое относительно старшей производной.**

Таким образом, уравнение $y'=f(x;y)$ называется однородным, если функция $f(x;y)$ может быть представлена как функция отношения своих аргументов, то есть записана в виде $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Алгоритм решения однородных уравнений

1)Однородное уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ приводится к уравнению вида $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$;

2) При помощи замены $z=\frac{y}{x}, y=zx, y'=z'\cdot x+z,$ где $z=z(x)$- новая неизвестная функция, сводим уравнение $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ к уравнению с разделяющимися переменными, относительно неизвестной функции z: $z'\cdot x+z=f(z)$ и решаем его

(разделяя переменные и интегрируя, получаем общее решение или общий интеграл):

$z' \cdot x = f(z) - z,$

$\frac{dz}{dx} \cdot x = f(z) - z \Big| \cdot \frac{dx}{x(f(z)-z)}, x(f(z) - z) \neq 0;$

$\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x},$

$\int \frac{dt}{f(z)-z} = \int \frac{dx}{x}$- общий интеграл, относительно функции z;

Заменяя в общем интеграле z на $\frac{y}{x}$, получим общий интеграл исходного ДУ, разрешив уравнение (если это возможно) относительно y получим общее решение ДУ.

Пример 1.11. Найти общее решение (интеграл) ДУ: **а)**$xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$;

б) $xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$;**в)** $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}, y(1) = 1$; **г)**$y' = \frac{3y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + 1.$

Решение.

а) Покажем, что данное уравнение однородное, то есть приведём к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, для этого разделим обе части исходного уравнения на $x \neq 0$:

$xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}|:x,$

$y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}};$

Заметим, что правая часть равенства$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$, представлена как функция отношения своих аргументов, то есть уравнение является однородным. В соответствии с алгоритмом решения однородных уравнений, приводим его к уравнению с разделяющимися переменными относительно функции t при помощи подстановки $z = \frac{y}{x}$ $, y = zx, y' = z' \cdot x + z$:

$z' \cdot x + z = z + e^z,$

$z' \cdot x = e^z,$

$z' = \frac{e^z}{x}$- уравнение с разделяющимися переменными относительно z,

$z' = f_1(x) \cdot f_2(z)$,где $f_1(x) = \frac{1}{x}, f_2(z) = e^z$;

Решаем его (разделяем переменные):

$\frac{dz}{dx} = \frac{e^z}{x} \Big| \cdot \frac{dx}{e^z},$

$\int \frac{dz}{e^z} = \int \frac{dx}{x}$,

$-\int e^{-z} d(-z) = \int \frac{dx}{x}$,

$-e^{-z} = ln|x| + C_1$, пусть $C_1 = lnC, C > 0$,

$-e^{-z} = ln|x| + lnC$,

$-e^{-z} = lnC|x|$,

$e^{-z} = -lnC|x|$,

$e^{-z} = ln(C|x|)^{-1}$,

$e^{-z} = ln\frac{1}{C|x|}$, логарифмируя уравнение по основанию e ,учитывая , что $lne = log_e e = 1$ имеем:

$log_e e^{-z} = log_e \left(ln\frac{1}{C|x|}\right)$,

$-zlog_e e = log_e \left(ln\frac{1}{C|x|}\right)$,

$-z = ln \left(ln\frac{1}{C|x|}\right)$,

$z = -ln \left(ln\frac{1}{C|x|}\right)$,

$\frac{y}{x} = -ln \left(ln\frac{1}{C|x|}\right)$-общий интеграл,

$y = -xln\left(ln\frac{1}{C|x|}\right)$-общее решение;

б) $xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$- дифференциальная форма однородного уравнения $P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$,где $P(x;y) = xy$ и $Q(x;y) = -(x^2 - y^2) = y^2 - x^2$ –однородные функции второй степени, действительно,

$Q(tx;ty) = (ty)^2 - (tx)^2 = t^2(y^2 - x^2) = t^2 \cdot Q(x,y)$,

$P(tx;ty) = 2txty = t^2(2xy) = t^2\, P(x;y), n = 2$, следовательно, рассматриваемое уравнение приводится к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, этим и займёмся, после чего сделаем подстановку $z = \frac{y}{x}$:

$xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$,

$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$,

$y' = \frac{xy}{x^2\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}$,

$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} = f\left(\frac{y}{x}\right)$,

$\frac{y}{x} = z \ , y = zx, y' = z' \cdot x + z,$

$z'x + z = \frac{z}{1-z^2},$

$z'x = \frac{z}{1-z^2} - z,$

$z'x = \frac{z-z+z^3}{1-z^2} \Big| \cdot \frac{1}{x}, x \neq 0,$

$z' = \frac{z^3}{(1-z^2)x}$ - уравнение с разделяющимися переменными относительно z, решаем его:

$\frac{dz}{dx} = \frac{z^3}{(1-z^2)x} | \cdot \frac{(1-z^2)dx}{z^3},$

$\frac{(1-z^2)dz}{z^3} = \frac{dx}{x},$

$\int \frac{(1-z^2)dz}{z^3} = \int \frac{dx}{x}.$

Рассмотрим интеграл от левой части равенства $\int \frac{(1-z^2)dt}{z^3}$:

$$\int \frac{(1-z^2)dz}{z^3} = \int \left(\frac{1}{z^3} - \frac{z^2}{z^3}\right) dz = \int \left(z^{-3} - \frac{1}{\mathrm{z}}\right) dz =$$

$= \frac{z^{-2}}{-2} - ln|z| + C = -\frac{1}{2z^2} - ln|z| + C,$

итак, $-\frac{1}{2z^2} - ln|z| = ln|x| + C, C = ln|C|,$

$-\frac{1}{2z^2} = ln|Cxz|,$

Вернемся к "старым" переменным:

$$-\frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2} = ln\left|Cx\frac{y}{x}\right|,$$

$-\frac{x^2}{2y^2} = ln|Cy|$ –общий интеграл.

в) $2xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$- дифференциальная форма однородного уравнения, так как $P(x;y) = 2xy$ и $Q(x;y) = -(x^2 - y^2) = y^2 - x^2$ –однородные функции второй степени, действительно,

$Q(tx;ty) = (ty)^2 - (tx)^2 = t^2(y^2 - x^2) = t^2 \cdot Q(x,y),$

$P(tx;ty) = 2txty = t^2(2xy) = t^2\, P(x;y), n = 2,$ следовательно, рассматриваемое уравнение приводится к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, этим и займёмся, после чего сделаем подстановку $z = \frac{y}{x}$:

$2xydx-(x^2-y^2)dy=0,$

$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2},$

$y'=\frac{2xy}{x^2\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)},$

$y'=\frac{2\cdot\left(\frac{y}{x}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}=f\left(\frac{y}{x}\right),$

$\frac{y}{x}=z\ ,y=zx,y'=z'\cdot x+z,$

$z'x+z=\frac{2z}{1-z^2},$

$z'x=\frac{2z}{1-z^2}-z,$

$z'x=\frac{2z-z+z^3}{1-z^2}\Big|\cdot\frac{1}{x},x\neq 0,$

$z'=\frac{z^3+z}{(1-z^2)x}$ - уравнение с разделяющимися переменными относительно z,

решаем его относительно z,

$\frac{dz}{dx}=\frac{z^3+z}{(1-z^2)x}\Big|\cdot\frac{(1-z^2)dx}{(z^3+z)},$

$\frac{(1-z^2)dt}{z^3+z}=\frac{dx}{x},$

$\int\frac{(1-z^2)dt}{z^3+z}=\int\frac{dx}{x}.$

Рассмотрим интеграл от левой части равенства $\int\frac{(1-z^2)dt}{z^3+z}$;

$\frac{1-z^2}{z^3+z}=\frac{1-z^2}{z(z^2+1)}=\frac{A}{z}+\frac{Bz+C}{z^2+1},$

$1-z^2=A(z^2+1)+Bz^2+Cz,$

$\begin{matrix} z^2: \\ z^1: \\ z^0: \end{matrix}\begin{cases} A+B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$, отсюда $B=-1-A=-2.$

$$\int\frac{1-z^2}{z^3+z}dz=\int\left(\frac{1}{z}-\frac{2z}{z^2+1}\right)dz=\int\frac{dz}{z}-\int\frac{2z}{z^2+1}dz=$$

$=ln|z|-\int\frac{d(z^2+1)}{z^2+1}=ln|z|-ln(z^2+1)+C_1.$

Итак,$ln|z|-ln(z^2+1)=ln|x|+C_1$,для того, чтобы упростить решение, положим $C_1=lnC,C>0$, в итоге получим:

$ln|z|-ln(z^2+1)=ln|x|+lnC,$

$ln\left|\frac{z}{z^2+1}\right|=lnC|x|,$

$\frac{z}{z^2+1} = Cx,$

$\frac{y}{x(\frac{y^2}{x^2}+1)} = Cx,$

$\frac{y}{x \cdot \frac{y^2+x^2}{x^2}} = Cx,$

$\frac{xy}{y^2+x^2} = Cx$ –общий интеграл;

Найдём частное решение ДУ, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$:

$x = 1, y = 1$, тогда $\frac{1 \cdot 1}{1^2+1^2} = C \cdot 1, C = \frac{1}{2}$,следовательно$\frac{xy}{y^2+x^2} = \frac{x}{2}$ –частный интеграл;

г) Правая часть уравнения $y' = \frac{3y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + 1$ может быть представлена как функция отношения своих аргументов $y' = f\left(\frac{y}{x}\right) = 3\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1$,поэтому является однородным, применяя подстановку $z = \frac{y}{x}$, $y = zx$,$y' = z'x + z$ имеем:

$z'x + z = 3z + z^2 + 1,$

$z'x = z^2 + 2z + 1,$

$z' = \frac{z^2+2z+1}{x},$

$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2+2z+1}{x} \Big| \cdot \frac{dx}{z^2+2z+1},$

$\frac{dz}{z^2+2z+1} = \frac{dx}{x},$

$\int \frac{dz}{(z+1)^2} = \int \frac{dx}{x},$

$\int (z+1)^{-2}\, d(z+1) = \int \frac{dx}{x},$

$\frac{(z+1)^{-1}}{-1} = ln|x| + C,$

$-\frac{1}{z+1} = ln|x| + C,$

$z + 1 = -\frac{1}{ln|x|+C},$

$z = -\frac{1}{ln|x|+C} - 1,$

$z = -\left(\frac{1}{ln|x|+C} + 1\right),$

Учитывая, что $z = \frac{y}{x}$ имеем:

$\frac{y}{x} = -\left(\frac{1}{ln|x|+C} + 1\right),$

$y = -x\left(\frac{1}{ln|x|+C} + 1\right)$ –общее решение.

Уравнения, приводящиеся к однородным.

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут приведены к однородным.

Это уравнения вида

$$\boldsymbol{y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)} \ \mathbf{(1.15)},$$

где a, b, c, a_1, b_1, c_1-числа.

Если определитель$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$,то переменные могут быть разделены подстановкой $x = u + \alpha, y = v + \beta$, где α, β- некоторые числа, которые являются решениями системы уравнений $\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases}$.

Пример 1.12. Привести дифференциальное уравнение $(y + 2)dx - (2x + y + 6)dy = 0$ к однородному.

Решение.

Приводим уравнение к виду $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$:

$(2x + y + 6)dy = (y + 2)dx,$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{2x+y+6},$

Составляем определитель$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$

следовательно переменные могут быть разделены подстановкой $x = U + \alpha$, $y = V + \beta$, где α, β- некоторые числа, которые являются решениями системы уравнений $\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases}$ в нашем случае система принимает вид$\begin{cases} \beta + 2 = 0 \\ 2\alpha + \beta + 6 = 0 \end{cases}$,решаем систему, для определения α, β:

$\begin{cases} \beta = -2 \\ \beta = -6 - 2\alpha \end{cases}, \ -6 - 2\alpha \ = -2, \alpha = -2.$

Итак,$\begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = -2 \end{cases}$, следовательно, $x = U - 2, y = V - 2.$

Делая подстановку $x = U - 2, y = V - 2,\ dx = dU,\ dy = dV$,приводим исходное уравнение к однородному ДУ:

$(y + 2)dx - (2x + y + 6)dy = 0,$

$(V - 2 + 2)dU - (2(U - 2) + V - 2 + 6)dv = 0,$

$VdU-(2U+V)dV=0.$

Пример 1.13. Решить уравнение сведя его к однородному:

а) $(2x-2)dy=(x+2y-3)dx$;**б)** $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0.$

Решение.

а) Приводим уравнение к виду $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$:

$(2x-2)dy=(x+2y-3)dx,$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y-3}{2x-2};$

Составляем определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4\neq 0,$

следовательно переменные могут быть разделены подстановкой $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$, где α,β- некоторые числа, которые являются решениями системы уравнений $\begin{cases} a\alpha+b\beta+c=0 \\ a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0 \end{cases}$ в нашем случае система принимает вид $\begin{cases} \alpha+2\beta-3=0 \\ 2\alpha-2=0 \end{cases}$,решаем систему, для определения α,β:

$\begin{cases} \alpha+2\beta-3=0 \\ \alpha=1 \end{cases}$, $\begin{cases} \beta=1 \\ \alpha=1 \end{cases}$, следовательно, $x=u+1$, $y=v+1$,отсюда

$u=x-1, v=y-1$;

Делая подстановку $x=u+1$, $y=v+1$, $dx=du$, $dy=dv$,приводим исходное уравнение к однородному ДУ:

$(2x-2)dy=(x+2y-3)dx,$

$(2(u+1)-2)dv=(u+1+2(v+1)-3)du,$

$2udv=(u+2v)du,$

$\frac{dv}{du}=\frac{u+2v}{2u},$

$v'=\frac{u(1+2\frac{v}{u})}{2u},$

$v'=\frac{1}{2}+\frac{v}{u}$ – однородное уравнение относительно функции v, $v'=f\left(\frac{v}{u}\right)$,

замена $\frac{v}{u}=z, v=zu, v'=z'u+z$:

$z'u+z=\frac{1}{2}+z,$

$z'u=\frac{1}{2}\Big|\cdot\frac{1}{u}, u\neq 0$,

$z'=-\frac{1}{2u}$-уравнение с разделяющимися относительно z, $z'=f_1(z)\cdot f_2(u)$;

$\frac{dz}{du}=-\frac{1}{2u}|\cdot du,$

$\int dz = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$,

$z = -\frac{1}{2} ln|u| + C$,

Учитывая, что $\frac{v}{u} = z$,получим:

$\frac{v}{u} = -\frac{1}{2} ln|u| + C$,

Подставляя в уравнение $u = x - 1, v = y - 1$ переходим к первоначальной функции y от переменной x :

$\frac{y-1}{x-1} = -\frac{1}{2} ln|x - 1| + C$,

$y - 1 = (x - 1)\left(C - \frac{1}{2} ln|x - 1|\right)$,

$y = (x - 1)\left(-\frac{1}{2} ln|x - 1| + C\right) + 1$-общее решение.

б) Решение найдите самостоятельно.

Замечание: в случае если в исходном уравнении вида $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, то переменные могут быть разделены подстановкой $ax + by = z$.

Пример 1.14. Решить уравнение: **а)** $2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0$;
б) $(3x - 4y - 2)dx - (3x - 4y - 3)dy = 0$.

Решение.

Приводим уравнение к виду $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$:

$2(x + y)dy = -(3x + 3y - 1)dx$,

$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x+3y-1}{2x+2y}$,

$y' = \frac{-3x-3y+1}{2x+2y}$.

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$, переменные могут быть разделены при помощи подстановки $ax + by = z$, то есть при помощи подстановки $-3x - 3y = z, -3(x + y) = z$, отсюда

$z' = -3(1 + y'), 1 + y' = -\frac{z'}{3}, y' = -\frac{z'}{3} - 1$,подставляя y' и $x + y = -\frac{z}{3}$, в уравнение $y' = \frac{-3(x+y)+1}{2(x+y)}$ имеем:

$$-\frac{z'}{3}-1=\frac{z+1}{-\frac{2}{3}z},$$

$$\frac{z'}{3}+1=\frac{3(z+1)}{2z},$$

$$\frac{z'+3}{3}=\frac{3(z+1)}{2z},$$

$$z'+3=\frac{9(z+1)}{2z},$$

$$z'=\frac{9(z+1)}{2z}-3,$$

$$z'=\frac{9z+9-6z}{2z},$$

$z'=\frac{3z+9}{2z}$ –уравнение с разделяющимися переменными $z'=f_1(x)\cdot f_2(z)$,

где $f_1(x)=1, f_2(t)=\frac{3z+9}{2z}$;

Разделяем переменные:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{3(z+3)}{2z}\Big|\cdot\frac{zdx}{z+3}, z+3\neq 0$$

$$\frac{zdz}{z+3}=\frac{3}{2}dx,$$

$$\int\frac{(z+3)-3}{z+3}dz=\frac{3}{2}\int dx,$$

$$\int\left(1-\frac{3}{z+3}\right)dz=\frac{3}{2}\int dx,$$

$$\int dz-3\int\frac{d(z+3)}{z+3}=\frac{3}{2}\int dx,$$

$$z-3ln|z+3|=\frac{3}{2}x+C.$$

Подставляя в уравнение $z=-3(x+y)$ переходим к первоначальной функции y от переменной x :

$$-3(x+y)-3ln|-3(x+y)+3|=\frac{3}{2}x+C,$$

$-3(x+y)-3ln|-3(x+y-1)|=\frac{3}{2}x+C$ - общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

б) Решение найдите самостоятельно и сравните с ответом, ответ:

$ln|3x-4y+1|=x-y+C$- общий интеграл.

Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли.

Дифференциальное уравнение называется линейным относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)} \quad \mathbf{(1.16)},$$

где $p(x)$ и $q(x)$— известные функции, непрерывные на некотором интервале.

Если $q(x) = 0$,то уравнение (1.16) принимает вид $y' + p(x)y = 0$

и называется **линейным однородным** первого порядка, оно является уравнением с разделяющимися переменными и решается соответственно;

Если $q(x) \neq 0$,уравнение (1.16) называется **линейным неоднородным** первого порядка решается методом Бернулли и методом Лагранжа.

Решение линейных неоднородных уравнений методом Бернулли.

Метод Бернулли – это когда решение линейного неоднородного уравнения (1.16), то есть функция y , ищется в виде произведения двух функций, то есть с помощью подстановки $\boldsymbol{y = U \cdot V}$, где $U = U(x), V = V(x)$-неизвестные функции, зависящие от x,причём одна из них произвольная отличная от нуля функция, например $V(x) \neq 0$,то есть

$$y(x) = \frac{y(x)}{V(x)} \cdot V(x) = U(x) \cdot V(x), \text{где } U(x) = \frac{y(x)}{V(x)};$$

Подставляя $y = U \cdot V$ и $y' = U'V + V'U$ в уравнение (1.16), имеем:

$$U'V + V'U + p(x)UV = q(x)$$

Сгруппировав второе и третье слагаемые в левой части данного уравнения и вынося U за скобки, получим:

$$U'V + U(V' + p(x)V) = q(x)$$

Поскольку первоначальная функция y была представлена нами в виде произведения двух функций U и V $(y = U \cdot V)$, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным (выбранным по нашему усмотрению). Например, функция $y = 5x^3$ может быть представлена как $y = 5 \cdot x^3, y = 5x \cdot x^2, y = 5x^2 \cdot x$ и так далее. Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций $U \text{ или } V$ выбрать так, что выражение в скобках равнялось нулю, то есть

$$V' + p(x)V = 0 \, (1.17),$$

тогда вторая функция $U(x)$,должна удовлетворять уравнению

$$U'V = q(x) \ (1.18),$$

таким образом, получим СУ: $\begin{cases} V' + p(x)V = 0 \\ U'V = q(x) \end{cases}$.

Решив уравнение (1.17)-первое уравнение СУ, как уравнение с разделяющимися переменными относительно V, найдём V:

$V' = -p(x)V$,

$\frac{dV}{dx} = -p(x)V \Big| \cdot \frac{dx}{V}, V \neq 0$,

$\frac{dV}{V} = -p(x)dx$,

$\int \frac{dV}{V} = -\int p(x)dx$,

$ln|V| = -\int p(x)dx$,

$log_e|V| = -\int p(x)dx$,

учитывая, что $log_a x = b <=> x = a^b$ имеем:

$V = e^{-\int p(x)dx}$.

Подставляя найденную функцию V в уравнение (1.18) -во второе уравнение СУ, получим уравнение с разделяющимися переменными относительно U , решая его находим U:

$U'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$,

$U' = \frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}}$,

$\frac{dU}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$,

$dU = q(x)e^{\int p(x)dx}dx$,

$U = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$.

Общее решение представляет собой произведение найденных функций U и V:

$y = U \cdot V = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) \cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Решение линейных неоднородных уравнений методом Лагранжа (методом вариаций постоянной).

Ищем решение соответствующего однородного уравнения:

$y' + p(x)y = 0$,

$y' = -p(x)y$- уравнение с разделяющимися переменными;

Разделяем переменные:

$\frac{dy}{dx} = -p(x)y,$

$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$

Интегрируем: $\int \frac{dy}{y} = C - \int p(x)dx,$

$ln|y| = C - \int p(x)dx\,,$

$|y| = e^{C - \int p(x)dx},$

$|y| = e^{C} \cdot e^{-\int p(x)dx},$

заменим постоянную e^{C} на C и уберем знак модуля, что сводится к умножению на постоянную ± 1, которую включим в C:

$y = Ce^{-\int p(x)dx};$

Заменим постоянную C на функцию от x , то есть $C = C(x)$

и будем искать решение исходного уравнения (1.16), в виде:

$y = C(x)e^{-\int p(x)dx},$

Находим производную y учитывая, что $(-\int p(x)dx)' = -p(x)$ и применяя правило дифференцирования произведения и сложной функции получим:

$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + \left(e^{-\int p(x)dx}\right)' C(x);$

$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)e^{-\int p(x)dx}C(x);$

Подставляя y' и y в уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ находим $C(x)$:

$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x);$

$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x);$

$C'(x) = \frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}};$

$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx};$

$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C;$

Подставляя $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$ в $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$,получим общее решение исходного уравнения: $y = (\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C)e^{-\int p(x)dx}$.

Пример 1.15. Найти общее решение ДУ методом Бернулли и методом Лагранжа:

а) $y' + 2yx = xe^{-x^2}$;**б)** $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$;

в)$(xy + e^{x})dx - xdy = 0$.

Решение.

а) $y' + 2yx = xe^{-x^2}$-данное уравнение является линейным неоднородным уравнением $y' + p(x)y = q(x)$,где $p(x) = 2x, q(x) = xe^{-x^2}$;

1 способ:(метод Бернулли)

Сделаем подстановки $y = U \cdot V$, $y' = U'V + V'U$:

$U'V + V'U + 2UVx = xe^{-x^2}$,

$U'V + U(V' + 2Vx) = xe^{-x^2}$,

решаем СУ: $\begin{cases} V' + 2Vx = 0 \\ U'V = xe^{-x^2} \end{cases}$.

Из первого уравнения находим V:

$V' + 2Vx = 0$,

$V' = -2Vx$,

$\frac{dV}{dx} = -2Vx \Big| \cdot \frac{dx}{V}, V \neq 0$,

$\int \frac{dV}{V} = -2\int xdx$,

$ln|V| = -x^2$,

$log_e|V| = -x^2$,

$V = e^{-x^2}$, здесь $C = 0$, так как в качестве V мы искали любую функцию, которая бы обращала левую часть в ноль, а не все множество решений уравнения;

Подставляя $V = e^{-x^2}$во второе уравнение системы $U'V = xe^{-x^2}$, находим U :

$U'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$,

$U' = x$,

$U = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$.

Итак,$y = UV = (\frac{x^2}{2} + C)e^{-x^2}$-общее решение исходного ДУ.

2 способ:(метод Лагранжа)

Находим решение соответствующего однородного уравнения:

$y' + 2yx = 0$,

$y' = -2yx$- уравнение с разделяющимися переменными;

Разделяем переменные:

$\frac{dy}{dx} = -2xy$,

$\frac{dy}{y} = -2xdx$,

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int x dx\,,$$

$ln|y| = -x^2 + C,$

$|y| = e^{-x^2+C},$

$|y| = e^C \cdot e^{-x^2},$

положим $e^C = C$ и уберем знак модуля, что сводится к умножению на постоянную ± 1, которую включим в C:

$y = Ce^{-x^2};$

Заменим постоянную C на функцию от x , то есть $C = C(x)$

и будем искать решение исходного уравнения в виде:

$y = C(x)e^{-x^2},$

Находим производную y по правилу дифференцирования произведения и сложной функции:

$y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}C(x);$

Подставляя y' и y в исходное уравнение $y' + 2yx = xe^{-x^2}$, находим $C(x)$:

$C'(x)e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}C(x) + 2xe^{-x^2}C(x) = xe^{-x^2};$

$C'(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2};$

$C'(x) = x;$

$$C(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C;$$

Подставляя $C(x) = \frac{x^2}{2} + C$ в $y = C(x)e^{-x^2}$, получим общее решение исходного уравнения:

$y = (\frac{x^2}{2} + C)e^{-x^2}.$

б) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x \,|: \cos x \neq 0,$

$$\frac{y' \cos x}{\cos x} - \frac{y \sin x}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x},$$

$y' - y\, tg\, x = 2 \sin x$-линейное неоднородное уравнение

$y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x) = -tg\,x\,, q(x) = 2\sin x.$

1 способ:(метод Бернулли)

$y = UV; y' = U'V + V'U,$ где $U = U(x), V = V(x),$

$U'V + V'U - UV\,tg\,x = 2 \sin x,$

$U'V + U(V' - V\,tg\,x) = 2\sin x$,

решаем СУ: $\begin{cases} V' - V\,t\,gx = 0 \\ U'V = 2\sin x \end{cases}$;

1)Найдём V:

$V' - V\,tg\,x = 0$,

$V' = V\,tg\,x$,

$\frac{dV}{dx} = V\,tg\,x \Big| \cdot \frac{dx}{V}, V \neq 0$,

$\int \frac{dV}{V} = \int tg\,xdx$,

$ln|V| = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$,

$ln|V| = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$,

$ln|V| = -ln|cosx|$,

$ln|V| = ln|\cos x|^{-1}$,

$V = (\cos x)^{-1}$,

$V = \frac{1}{\cos x}$;

2)Найдём U:

$U'V = 2\sin x$,

$U' \frac{1}{\cos x} = 2\sin x$,

$U' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$,

$U = \int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$,

$y = UV = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C\right)\frac{1}{\cos x}$-обшее решение;

2 способ:(метод Лагранжа)

Находим решение соответствующего однородного уравнения:

$y' - y\,tg\,x = 0$,

$y' = ytgx$,

$\frac{dy}{dx} = ytgx$,

$\frac{dy}{y} = tgxdx$,

Интегрируем:

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{sinx}{cosx} dx$,

$$ln|y| = -\int \frac{d(cosx)}{cosx}$$

$ln|y| = C - ln|cosx|,$

$|y| = e^{C - ln|cosx|},$

$|y| = e^{C} \cdot e^{-\,ln|cosx|},$

положим $e^{C} = C$ и уберем знак модуля, что сводится к умножению на постоянную ±1, которую включим в C:

$y = Ce^{-ln|cosx|}$ или $y = \frac{C}{cosx}$, так как $e^{-ln|cosx|} = \frac{1}{e^{ln|cosx|}} = \frac{1}{cosx}$,

Заменяя C на $C(x)$ будем искать общее решение исходного уравнения в виде:

$$y = C(x) \cdot \frac{1}{cosx},$$

$$y' = C'(x)\frac{1}{cosx} + C(x)((cosx)^{-1})';$$

$$y' = C'(x)\frac{1}{cosx} + C(x)\frac{sinx}{cos^2x};$$

Подставляя y' и y в исходное уравнение$y' - y\,tg\,x = 2\,sin\,x$,находим $C(x)$:

$$C'(x)\frac{1}{cosx} + C(x)\frac{sinx}{cos^2x} - C(x) \cdot \frac{1}{cosx}tg\,x = 2\,sin\,x\,;$$

$$C'(x)\frac{1}{cosx} + C(x)\frac{sinx}{cos^2x} - C(x)\frac{sinx}{cos^2x} = 2\,sin\,x\,;$$

$$C'(x)\frac{1}{cosx} = 2\,sin\,x;$$

$$C'(x) = 2\,sin\,xcosx\,;$$

$$C'(x) = sin2\,x\,;$$

$$C(x) = \int sin2\,x\,dx = -\frac{1}{2}cos\,2x + C\,;$$

Подставляя $C(x) = -\frac{1}{2}cos\,2x + C$ в $y = C(x) \cdot \frac{1}{cosx}$,получим общее решение исходного уравнения:

$$y = \left(-\frac{1}{2}cos\,2x + C\right)\frac{1}{cos\,x}.$$

в)$(xy + e^{x})dx - xdy = 0$,перейдём к виду$y' + p(x)y = q(x)$:

$xdy = (xy + e^{x})dx,$

$y' = \frac{xy+e^{x}}{x},$

$y' = y + \frac{e^x}{x}$,

$y' - y = \frac{e^x}{x}$ –линейное уравнение, где $p(x) = -1, q(x) = \frac{e^x}{x}$;

1 способ:(метод Бернулли)

$y = UV, y' = U'V + V'U$,

$U'V + V'U - UV = \dfrac{e^x}{x}$,

$U'V + U(V' - V) = \frac{e^x}{x}$,

решаем СУ: $\begin{cases} V' - V = 0 \\ U'V = \frac{e^x}{x} \end{cases}$;

1)Находим V:

$V' - V = 0$,

$\frac{dV}{dx} = V \,\Big|\cdot \frac{dx}{V}, V \neq 0$,

$\int \frac{dV}{V} = \int dx$,

$ln|V| = x$,

$V = e^x$;

2)Находим U:

$U'V = \frac{e^x}{x}$,

$U'e^x = \frac{e^x}{x}$,

$U' = \frac{1}{x}$,

$U = \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C$,

Итак, $y = UV = (ln|x| + C)e^x$.

2 способ:(метод Лагранжа)

Решаем соответствующее однородное уравнение:

$y' - y = 0$,

$y' = y$,

$\dfrac{dy}{dx} = y$,

$\dfrac{dy}{y} = dx$,

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx,$$

$ln|y| = x + C,$

$|y| = e^{C+x},$

$|y| = e^{C} \cdot e^{x},$

положим $e^{C} = C$ и уберем знак модуля, что сводится к умножению на постоянную ± 1, которую включим в C:

$y = Ce^{x},$

Заменяя C на $C(x)$ ищем общее решение исходного уравнения в виде:

$y = C(x)e^{x},$

$y' = C'(x)e^{x} + C(x)e^{x};$

Подставляя y' и y в исходное уравнение$y' - y = \frac{e^{x}}{x}$,находим $C(x)$:

$$C'(x)e^{x} + C(x)e^{x} - C(x)e^{x} = \frac{e^{x}}{x};$$

$$C'(x)e^{x} = \frac{e^{x}}{x};$$

$$C'(x) = \frac{1}{x};$$

$$C(x) = \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C\,;$$

Подставляя $C(x) = ln|x| + C$ в $y = C(x)e^{x}$,получим общее решение исходного уравнения:

$y = (ln|x| + C)e^{x}$.

Замечание: может случится так, что уравнение не является линейным относительно y,но является таковым относительно $x = x(y)$ и $x' = \frac{dx}{dy}$, то есть имеет вид $x' + p(y)x = q(y)$ в этом случае делаем подстановку $x = UV$ и решаем аналогично примерам выше учитывая, что $U = U(y), V = V(y)$ покажем, как это работает на примере 1.15.

Пример 1.15. Найти общее решение ДУ: **а)** $y'(x + y) = 1$;**б)** $y' = \frac{3y+3}{2x+y-1}$.

Решение

а) $y'(x + y) = 1,$

$y' = \frac{1}{x+y}$, учитывая, что $y' = \frac{1}{x'}\left(\frac{dy}{dx} = y', \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'} = y'\right)$ имеем:

$\frac{1}{x'} = \frac{1}{x+y}$,

$x' = x + y$,

$x' - x = y$-линейное относительно x, $x' + p(y)x = q(y)$,

где $p(y) = -1, q(y) = y$.

Делая замену $x = UV, x' = U'V + V'U$ имеем:

$U'V + V'U - UV = y$,

$U'V + U(V' - V) = y$;

Решаем систему: $\begin{cases} V' - V = 0 \\ U'V = y \end{cases}$;

1)Находим V:

$V' - V = 0$,

$\frac{dV}{dy} = V$,

$\int \frac{dV}{V} = \int dy$,

$ln|V| = y$,

$V = e^y$;

2)Находим U:

$U'V = y$,

$U'e^y = y$,

$U' = ye^{-y}$,

$$U = \int ye^{-y}dy = \begin{vmatrix} u = y, du = dy \\ dv = e^{-y}dy, v = -e^{-y} \end{vmatrix} =$$

$$= -ye^{-y} + \int e^{-y}dy = -ye^{-y} - e^{-y} + C.$$

Итак, $x = UV = (C - ye^{-y} - e^{-y})e^y = Ce^y - y - 1$,

$x = Ce^y - y - 1$.

б)$y' = \frac{3y+3}{2x+y-1}$, учитывая, что $y' = \frac{1}{x'}$ имеем:

$\frac{1}{y'} = \frac{2x+y-1}{3y+3}$,

$$x' = \frac{2x + y - 1}{3(y + 1)},$$

$x' - \frac{2x}{3(y+1)} = \frac{y-1}{3(y+1)}$,

$x = UV,\ x' = U'V + V'U,$,

$$U'V + UV' - \frac{2UV}{3(y+1)} = \frac{y-1}{3(y+1)},$$

$$U'V + U\left(V' - \frac{2V}{3(y+1)}\right) = \frac{y-1}{3(y+1)};$$

1) Находим V:

$$V' - \frac{2V}{3(y+1)} = 0,$$

$\frac{dV}{dy} = \frac{2V}{3(y+1)}$,

$\int \frac{dV}{V} = \frac{2}{3}\int \frac{dy}{y+1}$,

$ln|V| = \frac{2}{3} ln|y+1|$,

$ln|V| = ln|y+1|^{\frac{2}{3}}$,

$V = (y+1)^{2/3}$;

2) Находим U:

$$U' \cdot V = \frac{y-1}{3(y+1)},$$

$U' \cdot (y+1)^{2/3} = \frac{y-1}{3(y+1)}$,

$$U' = \frac{y-1}{3(y+1)^{5/3}},$$

$$U = \int \frac{y-1}{3(y+1)^{\frac{5}{3}}} dy = \frac{1}{3}\int \frac{(y+1)-2}{(y+1)^{\frac{5}{3}}} dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{(y+1)}{(y+1)^{\frac{5}{3}}} dy - \frac{2}{3}\int (y+1)^{-\frac{5}{3}} d(y+1) =$$

$$= \frac{1}{3}\int (y+1)^{-\frac{2}{3}} d(y+1) - \frac{2}{3}\frac{(y+1)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)} =$$

$= (y+1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{(y+1)^{\frac{2}{3}}} + C$,следовательно,

$$x = UV = \left((y+1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{(y+1)^{\frac{2}{3}}} + C\right)(y+1)^{\frac{2}{3}} =$$

$= y + 2 + C(y+1)^{\frac{2}{3}}$.

Таким образом, получим $y+2+C(y+1)^{\frac{2}{3}}=x$ –общий интеграл.

Уравнение Бернулли.

Уравнение Бернулли имеет вид:

$$\boldsymbol{y'+p(x)y=q(x)y^{n}\,, n\epsilon R, n\neq 0, n\neq 1}\ \mathbf{(1.19)}$$

где $p(x)$и $q(x)$— известные функции, непрерывные на некотором интервале. Заметим, что уравнение Бернулли отличается от линейного уравнения тем, что в правой части есть множитель в виде степени неизвестной функции, где $n\epsilon R, n\neq 0, n\neq 1$.

Если $n=0$,то получим $y'+p(x)y=q(x)$ –линейное уравнение

Если $n=1$,то получим $y'+p(x)y=q(x)y$ –уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнение (1.19) приводится к линейному при помощи подстановки $t=y^{-n+1}$, для этого предварительно делим уравнение (1.19) на $y^{n}\neq 0$,получим

$$\frac{y'}{y^{n}}+\frac{p(x)y}{y^{n}}=q(x),$$

$$y^{-n}y'+p(x)y^{-n+1}=q(x).$$

Далее применяя подстановку $t=y^{-n+1}, t'=\frac{dt}{dx}=(-n+1)y^{-n}\cdot y'$,

$y^{-n}\cdot y'=\frac{t'}{1-n}$, имеем:

$\frac{1}{1-n}t'+p(x)t=q(x)$-линейное уравнение относительно t,решая его методом Бернулли приходим к ответу.

Замечание: на практике решение уравнения (1.19) удобнее искать методом Бернулли, то есть при помощи подстановки $y=U\cdot V$, не сводя его к линейному.

Пример 1.16. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'-\frac{2}{x}y=x^{2}y^{2}$двумя способами:1) методом Бернулли, сводя уравнение к линейному;2) методом Бернулли, не сводя уравнение к линейному.

Решение.

Данное уравнение является уравнением Бернулли, так как имеет вид $y'+p(x)y=q(x)y^{n}$, где $p(x)=-\frac{2}{x}$, $q(x)=x^{2}, n=2\neq 0{,}1$.

Решим данное уравнение двумя способами.

1 способ:(методом Бернулли, сводя уравнение к линейному)

Разделим уравнение $y' - \frac{2}{x}y = x^2y^2$ на $y^2 \neq 0$,получим:

$\frac{y'}{y^2} - \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y} = x^2$ или $y^{-2}\cdot y' - \frac{2}{x}y^{-1} = x^2$,данное уравнение приводится к линейному при помощи подстановки $t = y^{-n+1} = y^{-2+1} = y^{-1}$,

$t' = (-1)y^{-2}\cdot y'$, откуда $y^{-2}\cdot y' = -t'$,после подстановки уравнение принимает вид:

$$-t' - \frac{2}{x}t = x^2 |\cdot(-1)$$

$t' + \frac{2}{x}t = -x^2$-линейное относительно t, $t' + p(x)t = q(x)$,поэтому решаем его соответственно, то есть при помощи подстановки $t = UV$,$t' = U'V + V'U$,

$$U'V + V'U + \frac{2UV}{x} = -x^2$$

$$U'V + U\left(V' + \frac{2V}{x}\right) = -x^2,$$

решаем систему: $\begin{cases} V' + \frac{2V}{x} = 0 \\ U'V = -x^2 \end{cases}$;

1)Находим V:

$V' + \frac{2V}{x} = 0,$

$V' = -\frac{2V}{x},$

$\frac{dV}{dx} = -\frac{2V}{x}\Big|\cdot\frac{dx}{V},$

$\int\frac{dV}{V} = -2\int\frac{dx}{x},$

$ln|V| = -2ln|x|,$

$ln|V| = ln|x|^{-2},$

$V = \frac{1}{x^2};$

2)Находим U:

$U'V = -x^2,$

$U'\frac{1}{x^2} = -x^2,$

$U' = -x^4,$

$U = -\int x^4dx = -\frac{x^5}{5} + C,$

$t = UV = \left(-\frac{x^5}{5} + C\right)\frac{1}{x^2},$

$y^{-1} = \left(-\frac{x^5}{5} + C\right)\frac{1}{x^2}$,

$\frac{1}{y} = \left(-\frac{x^5}{5} + C\right)\frac{1}{x^2}$,

$y = -\frac{x^2}{\frac{x^5}{5}+C}$ –общее решение;

2способ:(Методом Бернулли, не сводя уравнение к линейному)

$y' - \frac{2}{x}y = x^2y^2$**-**уравнение Бернулли, решаем аналогично линейному, то есть при помощи подстановки $y = UV\ , y' = U'V + V'U$:

$U'V + V'U - \frac{2UV}{x} = x^2(UV)^2$,

$U'V + U\left(V' - \frac{2V}{x}\right) = x^2U^2V^2$,

Решаем систему: $\begin{cases} V' - \frac{2V}{x} = 0 \\ U'V = x^2U^2V^2 \end{cases}$,

1)находим V:

$V' - \frac{2V}{x} = 0$,

$V' = \frac{2V}{x}$,

$\frac{dV}{dx} = \frac{2V}{x}\Big| \cdot \frac{dx}{V}$,

$\int \frac{dV}{V} = 2\int \frac{dx}{x}$,

$ln|V| = 2ln|x|$,

$ln|V| = ln|x^2|$,

$V = x^2$,

2)находим U:

$U'V = x^2U^2V^2$,

$U'x^2 = x^2U^2(x^2)^2$,

$U' = x^4U^2$,

$\frac{dU}{dx} = x^4U^2\Big| \cdot \frac{dx}{U^2}, U \neq 0$

$\frac{dU}{U^2} = x^4dx$,

$\int U^{-2}dU = \int x^4dx$,

$-\frac{1}{U} = \frac{x^5}{5} + C$,

$U = -\frac{1}{\frac{x^5}{5}+C}$,

Итак,$y = UV = \left(-\frac{1}{\frac{x^5}{5}+C}\right)x^2 = -\frac{x^2}{\frac{x^5}{5}+C}$.

Уравнения в полных дифференциалах.

Интегрирующий множитель.

Уравнение вида $P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$ называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x;y)$, то есть имеет вид

$$\boldsymbol{P(x;y)dx + Q(x;y)dy = dU} \ \textbf{(1.20)}$$

Здесь $U = U(x;y)$, ДУ (1.19) можно записать в виде:

$$dU = 0 \ (1.21),$$

следовательно,$U = \int 0dx = C$ и выражение

$\boldsymbol{U(x;y) = C}\ (\mathbf{1.22})$ -является общим интегралом.

Теорема 1.2: Для того , чтобы выражение $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = P(x;y)dx + Q(x;y)dy$,где функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$,непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, было полным дифференциалом необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\boldsymbol{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \ \textbf{(1.23)}$$

Доказательство

Необходимость.

Пусть Δ есть полный дифференциал функции U, то есть

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = dU = \Delta\,;$$

Учитывая, что $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$, имеем:

$$P(x;y) = \frac{\partial U}{\partial x}, Q(x;y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Дифференцируя эти равенства по y и по x соответственно, получим:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

А так как смешанные частные производные $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ равны между собой (см. раздел математики ФНП), то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.Необходимость доказана.

Докажем достаточность.

Пусть выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Покажем, что существует функция $U(x;y)$в области D такая, что $dU(x;y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$,

найдем эту функцию. Искомая функция должна удовлетворять следующим требованиям:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x;y), \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y)$$

Если в уравнении $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x;y)$ зафиксировать y и проинтегрировать-его по x, то получим:

$$U = \int P(x;y)dx + C(y),$$

здесь произвольная постоянная $C = C(y)$ зависит от y (либо является числом). В решении $U = \int P(x;y)dx + C(y)$,не известна лишь $C(y)$. Для ее нахождения продифференцируем функцию U по y:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx + C'(y),$$

Используя равенство $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y)$ имеем:

$Q(x;y) = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx + C'(y)$,откуда

$$C'(y) = Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx;$$

В последнем равенстве левая часть зависит только от y. Покажем, что и правая часть равенства зависит только от y.

Для этого продифференцируем правую часть по x и убедимся, что производная равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx\right) =$$

$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int P(x;y)dx\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, действительно, правая часть зависит только от y,то есть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Из равенства $C'(y) = Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx$,находим $C(y)$:

$C(y) = \int \left(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx\right)dy + C;$

Подставляя найденное значение $C(y)$ в равенство $U = \int P(x;y)dx + C(y)$, находим функцию $U(x;y)$такую, что $dU(x;y) = P(x;y)dx + Q(x;y)dy$.

Пример 1.17. Является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах: **а)** $(x^2 - y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$;
б) $(x^2 - y^2 + 1)dx + 2xydy = 0$.

Решение.

а)$P(x;y) = x^2 - y^2 + 1,\ Q(x;y) = -2xy,$
$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах;
б) $P = x^2 - y^2 + 1, Q = 2xy,\ \frac{\partial P}{\partial y} = -2y, \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y, \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Алгоритм нахождения решения ДУ в полных дифференциалах.

1)Проверяем является ли исходное уравнение уравнением в полных дифференциалах, то есть проверяем справедливость условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,
Если условие выполняется, говорим, что исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и переходим к пункту 2);
2)Находим функцию $U = U(x;y)$ учитывая, что
$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$, то есть $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P(x;y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y) \end{cases}$;

Интегрируя первое равенство в системе $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x;y)$ по x,учитывая,что $y = const$ имеем:

$$U = \int P(x;y)dx + C(y),$$

где $C(y)$ –неизвестная функция, которую предстоит найти.

Находим функцию $C(y)$,дифференцируя полученную функцию U по y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx + C'(y),$$

Подставляя в полученное равенство$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y)$ –второе равенство в СУ ,получим уравнение:

$Q(x;y) = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx + C'(y)$, отсюда

$C'(y) = Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx$,

Находим $C(y) = \int\left(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx\right)dy + C_1$,а затем $U(x;y)$,учитывая, что $U = \int P(x;y)dx + C(y)$, то есть

$$U = \int P(x;y)dx + \int\left(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx\right)dy + C_1,$$

Полагая$U(x;y) = C_2$,общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$\int P(x;y)dx + \int\left(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx\right)dy + C_1 \ = C_2$ или

$\int P(x;y)dx + \int\left(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx\right)dy = C$, где $C = C_2 - C_1$.

Замечание: в пункте два функцию U можно найти из равенства $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y)$,то есть интегрируя данное выражение по y,алгоритм аналогичный, принципиальной разницы нет, выбор делайте в пользу той функции, которая проще интегрируется.

Пример 1.18. Решить уравнение:

а)$(2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0, y(0) = 1$;

б)$(x^2 + y^2 + 1)dx + 2xydy = 0$;

в)$e^x + y + \sin y + y'\,(e^y + x + x\cos y) = 0, y(\ln 2) = 0$;

г)$\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2} = 0$.

Решение.

а)$(2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0, y(0) = 1$.

1)Здесь $P(x;y) = 2x + ye^{xy}$, $Q(x;y) = 1 + xe^{xy}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = (2x + ye^{xy})_y{}' = e^{xy} + yxe^{xy}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = (1 + xe^{xy})_x{}' = e^{xy} + yxe^{xy}$,так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Значит $Pdx + Qdy = dU$, в тоже время, $Pdx + Qdy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$,то есть $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x;y), \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y)$.

2) Находим функцию U, решая систему: $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 2x + ye^{xy} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 1 + xe^{xy} \end{cases}$.

Для этого проинтегрируем первое уравнение по x , считая y постоянной:

$U = \int(2x + ye^{xy})dx = 2\int xdx + \int e^{xy}d(xy) = x^2 + e^{xy} + C(y)$, где $C(y)$— произвольная дифференцируемая по y функция, то есть

$U = x^2 + e^{xy} + C(y)$.

Найдём $C(y)$,дифференцируя последнее равенство по y,учитывая, что $x = const$ имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + e^{xy} + C(y)\right),$$

$\frac{\partial U}{\partial y} = xe^{xy} + C'(y)$, подставляя второе уравнение системы $\frac{\partial U}{\partial y} = 1 + xe^{xy}$ в левую часть данного равенства, имеем:

$1 + xe^{xy} = xe^{xy} + C'(y)$,

$C'(y) = 1$,отсюда $C(y) = \int dy = y + C_1$, следовательно

$U = x^2 + e^{xy} + y + C_1$.

Учитывая, что $U(x;y) = C_2$, находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$x^2 + e^{xy} + y + C_1 = C_2$ или $x^2 + e^{xy} + y = C$, где $C = C_2 - C_1$.

Найдём частый интеграл, то есть найдём значение C,при

$x = 0, y = 1$,тогда $C = e^0 + 1 = 2$.

Итак, $x^2 + e^{xy} + y = 2$ –частный интеграл;

б)$(x^2 + y^2 + 1)dx + 2xydy = 0$,

1)$\frac{\partial P}{\partial y} = (x^2 + y^2 + 1)_y{}' = 2y, \frac{\partial Q}{\partial x} = (2xy)_x{}' = 2y, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах;

2)Находим функцию U решая систему: $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = x^2 + y^2 + 1 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 2xy \end{cases}$;

Интегрируя второе уравнение $\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy$ (оно несколько проще, чем первое) по y,имеем:

$$U = \int 2xydy = 2x\int ydy = x\,y^2 + C(x);$$

Находим $C(x)$, дифференцируя полученное равенство

$U = xy^2 + C(x)$ по x:

$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(xy^2 + C(x)\right)_x'$, учитывая, что $\frac{\partial U}{\partial x} = x^2 + y^2 + 1$ имеем:

$x^2 + y^2 + 1 = y^2 + C'(x)$,

$C'(x) = x^2 + 1$,

$$C(x) = \int (x^2 + 1)dx = \frac{x^3}{3} + x + C_1,$$

$U = xy^2 + \frac{x^3}{3} + x + C_1$, $U = C_2$,

$\frac{x^3}{3} + y^2x + x + C_1 = C_2$, $C = C_2 - C_1$, следовательно,

$\frac{x^3}{3} + y^2x + x = C$-общий интеграл ДУ;

в) Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$ запишем уравнение

$e^x + y + \sin y + y'(e^y + x + x\cos y) = 0$

в дифференциальной форме:

$(e^x + y + \sin y) + \frac{dy}{dx}(e^y + x + x\cos y) = 0 |\cdot dx$,

$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$,

1)$P(x;y) = e^x + y + \sin y$, $Q(x;y) = e^y + x + x\cos y$,

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y$,то есть

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ –ДУ в полных дифференциалах;

2)Находим U:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = e^x + y + \sin y \\ \frac{\partial U}{\partial y} = e^y + x + x\cos y \end{cases};$$

$U(x;y) = \int (e^x + y + \sin y)dx = e^x + yx + x\sin y + C(y)$;

Находим $C(y)$:

$\frac{\partial U}{\partial y} = (e^x + yx + x\sin y + C(y))_y'$,

$e^y + x + x\cos y = x + x\cos y + C'(y)$,

$C'(y) = e^y$,отсюда $C(y) = \int e^y\,dy = e^y + C_1$,

$U = e^x + yx + x\sin y + e^y + C_1, U = C_2$,

$C_2 = e^x + yx + x\sin y + e^y + C_1$,

$e^x + yx + x\sin y + e^y = C, C = C_2 - C_1$,

$e^x + yx + x\sin y + e^y = C$-общий интеграл.

Найдём частное интеграл:

$y = 0, x = \ln 2, e^{\ln 2} + 0 \cdot \ln 2 + \ln 2 \cdot \sin 0 + e^0 = C, \ C = 3$,

$e^x + yx + x\sin y + e^y = 3$-частный интеграл;

г) $\frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy = 0$,

1)$P(x;y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}, Q(x;y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x-y)'(x^2+y^2) - (x^2+y^2)'(x-y)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-2x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x+y)'(x^2+y^2) - (x^2+y^2)'(x+y)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$= \frac{x^2+y^2-2x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$,

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ –ДУ в полных дифференциалах;

2)Находим функцию U решая систему: $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x-y}{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x+y}{x^2+y^2}; \end{cases}$

Проинтегрируем первое уравнение по x , считая y постоянной имеем:

$$U(x;y) = \int \frac{x-y}{x^2+y^2}dx = \int \frac{x}{x^2+y^2}dx - \int \frac{y}{x^2+y^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} - y\int \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) -$$

$$-y \cdot \frac{1}{y} arctg\frac{x}{y} + C(y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - arctg\frac{x}{y} + C(y),$$

$$U = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - arctg\frac{x}{y} + C(y);$$

Дифференцируем U по y,находим $C(y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{y^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} + C'(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{y^2} \cdot \frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y^2}} + C'(y),$$

$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} + C'(y),$

$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x+y}{x^2+y^2} + C'(y)$,учитывая, что$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$,имеем:

$\frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2} + C'(y),$

$C'(y) = 0, \qquad C(y) = \int 0dy = C_1,$

$U(x:y) = \frac{1}{2}ln(x^2+y^2) - arctg\frac{x}{y} + C_1$,пусть $U(x:y) = C_2$,

$\frac{1}{2}ln(x^2+y^2) - arctg\frac{x}{y} + C_1 = C_2$, полагая $C = C_2 - C_1$,получим общий интеграл

$\frac{1}{2}ln(x^2+y^2) - arctg\frac{x}{y} = C.$

Замечание: если условие $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ не выполняется, то в ряде случаев уравнение $P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$ можно свести к уравнению в полных дифференциалах умножением на некоторую функцию $t = t(x;y)$ называемую “интегрирующим множителем”. Интегрирующей множитель легко находится в следующих случаях:

1) Если $t(x) = t$, $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \varphi(x)$, тогда $lnt = \int \varphi(x)dx$,

отсюда $t = e^{\int \varphi(x)dx}$;

2) Если $t(y) = t$,$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \psi(y)$,тогда $ln\, t = \int \psi\,(y)dy$,

отсюда $t = e^{\int \psi(y)dy}$.

Пример 1.19. Найти интегрирующий множитель и решить ДУ:

а)$(sinx + e^y)dx + cosxdy = 0$;**б)** $(sin^2y + x^2)dx + xsin2ydy = 0.$

Решение.

$P(x;y) = sinx + e^y, Q(x;y) = cosx,$

$\frac{\partial P}{\partial y} = e^y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin x => \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ – ДУ не является уравнением в полных дифференциалах;

Найдём $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x;y)} = \frac{e^y + \sin x}{\cos x + 1} \neq \varphi(x)$,так как выражение $\varphi(x)$ должно зависеть только от x,поэтому для нахождения интегрирующего множества воспользуемся вторым равенством $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P(x;y)}=\frac{-\sin x-e^{y}}{\sin x+e^{y}}=-1, \psi(y)=-1$не зависит от x,следовательно интегрирующий множитель может быть найден по формуле $t=e^{\int \psi(y)dy}$:

$$lnt=lne^{\int \psi(y)dy},$$

$$lnt=\int \psi(y)dy \cdot lne \quad ,$$

$$lnt=\int \psi(y)dy=-\int dy=-y,$$

$$log_e t=-y,$$

отсюда $t=e^{-y}$.

Умножая исходное уравнение на интегрирующий множитель $t=t(y)=e^{-y}$, получаем уравнение в полных дифференциалах:

$(sinx+e^{y})dx+cosxdy=0|\cdot e^{-y}$,

$(e^{-y}\sin x+1)dx+e^{-y}\cos x\, dy=0,$

$P_t(x;y)=e^{-y}\sin x+1, Q_t(x;y)=e^{-y}cosx,$

проверяем условие$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$:

$\frac{\partial P}{\partial y}=-e^{-y}\sin x\,, \frac{\partial Q}{\partial x}=-e^{-y}sinx, \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ -выполняется, получили уравнение в полных дифференциалах;

Находим U интегрируя первое равенство системы

$$\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial x}=e^{-y}\sin x+1\\ \frac{\partial U}{\partial y}=e^{-y}\cos x\end{cases}:$$

$$U=\int (e^{-y}\sin x+1)dx=e^{-y}\int \sin x\,dx+\int dx=$$

$$=-e^{-y}\cos x+x+C(y),$$

$\frac{\partial U}{\partial y}=(-e^{-y}\cos x+x+C(y))'_y=e^{-y}\cos x+C'(y)$,учитывая, что $\frac{\partial U}{\partial y}=e^{-y}\cos x$ имеем:

$e^{-y}\cos x=e^{-y}\cos x+C'(y),$

$C'(y)=0, C(y)=\int 0dy=C_1$,следовательно

$U(x;y)=x-e^{-y}\cos x+C_1, U(x;y)=C_2,$

$x-e^{-y}\cos x+C_1=C_2$,где $C=C_2-C_1,$

$x-e^{-y}\cos x=C$-общий интеграл.

б) Данное задание решите самостоятельно, напишем лишь ответ для проверки правильности решения:

$t(x) = \frac{1}{x^2}$ -интегрирующий множитель,

$x^2 - sin^2 y = Cx$- общий интеграл.

Задания для самостоятельного решения.

1. Найти общее решение ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными:

1	$4 - y^2 + xy' = 0$	**11**	$y' = y^2 cosx, y(\pi) = 2$
2	$y' = \frac{y+1}{\sqrt[4]{x}}$	**12**	$y' tgx - y = 1$
3	$(x^2+4)dy = 3xydx$, $y(0) = 8$	**13**	$y' = \frac{y}{1+x}, y(0) = 2$
4	$xy' + y = y^2, y(1) = 2$	**14**	$2x^2 ydy - 3xy^2 dx = 6xdx - 6ydy$
5	$y' = 10^{x+y}$	**15**	$2xy^2 + (x^2-1)y' = 0, y(0) = 1$
6	$y'y = \frac{1-2x}{y}, y(0) = 0$	**16**	$y' sin^2 x lny + y = 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$
7	$xy' + y = 0, y(1) = 2$	**17**	$(x - xy)dy + (x + xy)dx = 0;$
8	$y' = \frac{xy}{1+x^2}, y(1) = \sqrt{2}$	**18**	$(1+e^x)y'y = e^x, y(0) = 1$
9	$y' = 3^{x-y}$	**19**	$(y - x^2 y)dy + (x + xy^2)dx = 0$
10	$(x^2+1)dy + ydx = 0$, $y(1) = 1$	**20**	$(x^2+5x+7)\left(1+\sqrt{y^2+1}\right)dy -$ $-\sqrt{y^2+1}(2x+5)dx = 0$

Ответы: **1.1.** $\sqrt[4]{\frac{y-2}{y+2}} = xC$; **1.2.** $y = Ce^{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}} - 1$;**1.3.** $y = (x^2+4)\sqrt{x^2+4}$; **1.4.** $y = \frac{2}{2-x}$;**1.5.** $y = lg\left(\frac{1}{C-10^x}\right)$; **1.6.** $y = \sqrt[3]{3(x-x^2)}$; **1.7.** $y = \frac{2}{x}$;

; **1.8.** $y = \sqrt{1+x^2}$;**1.9.** $y = log_3(3^x + C)$; **1.10.** $y = e^{-arctgx + \frac{\pi}{4}}$; **1.11.** $y = \frac{2}{1-2sinx}$;

1.12. $y = Csinx - 1$; **1.13.** $y = 2(x+1)$; **1.14.** $\frac{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}{2+y^2} = C$; **1.15.** $y = \frac{1}{ln|x^2-1|+1}$;

1.16. $\frac{ln^2 y}{2} = ctgx - 1$; **1.17.**$2ln|y+1| + x - y = C$; **1.18.**$y = \pm\sqrt{1 + 2ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}$;

1.19. $y = \pm\sqrt{2x^2 - 3}$; **1.20.** $ln\left|y + \sqrt{y^2+1}\right| + y = ln(x^2+5x+7) + C$.

2. Найти общее решение однородного ДУ 1-го порядка:

1	$y' = \frac{y}{x} + sin\frac{y}{x}$	**11**	$xy' - y = \frac{x}{arctg\frac{y}{x}}$
2	$y' = \frac{xy^2 - yx^2}{3}$	**12**	$xydy + (x^2 + 2xy)dx = 0$
3	$xy' = y(1 + lny - lnx)$	**13**	$(4y^2 + x^2)y' = xy$
4	$y' = -\frac{x - y}{x + y}$	**14**	$y' = \frac{y}{x + y}$
5	$x^3dy = (x^2 + y^2)ydx$	**15**	$ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$
6	$xcos\frac{y}{x}dy + \left(x - ycos\frac{y}{x}\right)dx = 0$	**16**	$x^2y' = y^2 + xy$
7	$y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$	**17**	$xdy = (2x + y)dx, y(1) = 0$
8	$x^2y' = xy + y^2e^{-\frac{x}{y}}$	**18**	$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$
9	$xy'sin\frac{y}{x} + x = ysin\frac{y}{x}$	**19**	$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$
10	$xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$	**20**	$y' = \frac{xy^2 - yx^2}{x^3}$

Ответы: 2.1. $= 2xarctg(Cx)$;**2.2.**$y^2 - 2y = (Cx^2)^2$;**2.3**. $y = xe^{Cx}$;

2.4.$arctg\left(\frac{y}{x}\right) = ln\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2}}$;**2.5.**$y = \pm\frac{x}{\sqrt{-2lnC|x|}}$;**2.6.**$sin\left(\frac{y}{x}\right) + ln|x| = C$;

2.7.$2arctg\left(\frac{y}{x}\right) = ln\frac{C\left(x^2+y^2\right)^3}{|x|^5}$;**2.8.**$e^{\frac{x}{y}} + ln|x| = C$;**2.9.**$Cx = e^{cos\frac{y}{x}}$;

2.10. $y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}$;**2.11.**$\frac{y}{x}\ arctg\frac{y}{x} = lnCx\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$;**2.12.** $ln|x + y| + \frac{x}{x+y} = C$;

2.13. $ln|y| = \frac{x^2}{8y^2} + C$;**2.14.** $e^{\frac{x}{y}+C} = y$;**2.15.** $\sqrt{\frac{x}{y}} + ln|y| = C$;**2.16.**$y = -\frac{x}{ln|x|+C}$;

2.17.$y = 2xln|x|$;**2.18.**$\sqrt[3]{\left|\frac{y-2x}{y+x}\right|} = \pm Cx$;**2.19.** $y = \pm x\sqrt{ln\left|\frac{C}{x}\right|}$;**2.20.**$y^2 - 2y = C^2x^4$**.**

Задания для самостоятельного решения

3. Найти общее решение линейных ДУ методом Бернулли:

1	$y' - \frac{3}{x}y = 3x, y(1) = -3$	**11**	$y' - ytgx = y^3cos^2x$

2	$x^2y' + xy + 1 = 0, y(1) = 0$	12	$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, y(0) = 1$
3	$y' - \frac{3}{x}y = x^4$	13	$y'(2x+1) = 4x + 2y$
4	$y' + ytgx = cos^2x$	14	$y' - \frac{2}{x}y = x^5, \quad y(1) = 1$
5	$y' - ytgx = cosx, y(0) = 0$	15	$y' + 2yx = y^2e^{x^2}$;
6	$y' + 3y = e^{2x}$	16	$y' - 3yx^2 = xe^{x^3}$
7	$y' = \frac{y}{x + y^2}$	17	$y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1), y(0) = 1$
8	$ysinx - y'cosx = 1$	18	$xy' - 2y = 2x^4\,, y(-1) = 1$
9	$xy' - 2y = 2x^4\,, y(1) = 0$	19	$y' - \frac{y}{x+1} = (x+1)(x+2), y(0) = 1$
10	$xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$	20	$y = x(y' - xcosx), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Ответы:3.1.$y = -3x^2$;**3.2.** $y = -\frac{ln|x|}{x}$;**3.3.** $y = \frac{x^5}{2} + Cx^3$;**3.4.**$y = cosx(sinx + C)$;
3.5. $y = \left(\frac{x}{2} + \frac{sin2x}{4}\right)\frac{1}{cosx}$;**3.6.**$y = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right)e^{-3x}$;**3.7.** $x = y^2 + Cx$; **3.8.**$y = \frac{1}{cosx}(-x + C)$;**3.9.** $y = (x^2 - 1)x^2$; **3.10.**$y = \frac{C}{|x|e^x}$; **3.11.** $y = \pm\frac{1}{cosx\sqrt{C-2x}}$; **3.12.** $y = (x+1)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)$;**3.13.** $y = \left(ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C\right)(2x+1)$;**3.14.**$y = x^2 \cdot \left(\frac{x^4+3}{4}\right)$;
3.15.$y = -\frac{e^{-x^2}}{x+C}$;**3.16.** $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{x^3}$;**3.17.**$y = e^x(x+1)$;**3.18.** $y = x^4$;
3.19.$y = (x+1)\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1\right)$;**3.20.**$y = (sinx - 1)x$.

4. Решить ДУ в полных дифференциалах:

1	$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$;	11	$e^ydx + (xe^y - 2y)dy = 0$
2	$2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$	12	$e^ydx + (xe^y - 2y)dy = 0$
3	$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$	13	$(2xy + 3y^2)dx +$ $+(x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$
4	$\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$	14	(24) $(3x^2 + y^2 + y)dx +$ $+(2xy + x + e^y)dy = 0, y(0) = 0$

5	$\frac{y}{x}dx + (3y^2 + lnx)dy = 0$	**15**	$(3y^2 + 2xy + 2x)dx +$ $+(6xy + x^2 + 3)dy = 0$
6	$(y^3 + cosx)dx + (e^y + 3xy^2)dy = 0$	**16**	$(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0$
7	$(1 + y^2sin2x)dx - 2ycos^2xdy = 0$	**17**	$(2xy - 5)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0$
8	$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$	**18**	$\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$
9	$yx^{y-1}dx + x^ylnxdy = 0$	**19**	$\left(sin2x - 2cos(x + y)\right)dx -$ $-2cos(x + y)dy = 0, y(0) = 0$
10	$(x^2y - 1)y' + xy^2 - 1 = 0$	**20**	$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

Ответы: 4.1.$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$;**4.2.** $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2 - y)^3} + x^2 + C = 0$;**4.3**. $x^3 + 3x^2y - y^3 = C$;**4.4.**$ln\left|\frac{x}{y}\right| + \frac{xy}{x-y} = C$;**4.5**. $ylnx + y^3 = C$;**4.6**. $xy^3 + e^y + sinx = C$;**4.7.**$x - y^2cos^2x = C$;**4.8.**$\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C$; **4.9.**$x^y = C$; **4.10**. $x^2\,y^2 - 2(x + y) = C$; **4.11.**$xe^y - y^2 = C$;**4.12.**$x^2 + 5xy + y^3 = C$;**4.13.**$x^2\,y + 3xy^2 - y^3 = C$; **4.14.**$x^3 + xy^2 + xy + e^y = 1$;**4.15.**$3xy^2 + x^2\,y + 3y + x^2 = C$;**4.16.** $\frac{5}{2}x^2y^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{2} = C$;**4.17.** $x^2\,y - 5x + y^3 = C$;**4.18.** $x^2 - x + \frac{y}{x} - y^2 = C$;**4.19.**$-\frac{1}{2}cos2x - 2sin(x + y) = C$; **4.20.** $x^2 - y^2 = Cy^3$.

ГЛАВА 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1. Дифференциальные уравнения высших порядков, основные понятия.

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются ДУ **высших порядков**. **ДУ уравнения n-го порядка в общем случае** имеют вид (2.1):

$$\boldsymbol{F\left(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n)}\right) = 0\ (2.1)}$$

От уравнения (2.1) всегда можно перейти к уравнению (2.2):

$$\boldsymbol{y^{(n)} = f\left(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n-1)}\right)\ (2.2)}$$

Уравнение (2.2) называется уравнением n –го **порядка, разрешённым относительно старшей производной.**

При $n = 2$ получим:

$\boldsymbol{F(x; y; y'; y'') = 0}$ $(\boldsymbol{2.3})$-**общий вид ДУ второго порядка**;

$\boldsymbol{y'' = f(x; y; y')}$ $(\boldsymbol{2.4})$**- ДУ второго порядка, разрешённое относительно старшей производной**;

Решением ДУ (2.4) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в исходное уравнение обращает его в тождество.

Общим решением ДУ (2.4) называется функция $y = \varphi(x; C_1; C_2)$, где C_1, C_2- не зависящие от x произвольные постоянные;

Всякое решение $y = \varphi\left(x; {C_1}^0; {C_2}^0\right)$ уравнения (2.4), полученное из общего решения $y = \varphi(x; C_1; C_2)$,при конкретных значениях постоянных $C_1 = {C_1}^0, C_2 = {C_2}^0$, называется **частным решением** ДУ (2.4).

Решения ДУ (2.4), записанные в виде

$$\Phi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{C_1}; \boldsymbol{C_2}) = \boldsymbol{0}\ , \Phi\left(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{C_1}^{\boldsymbol{0}}; \boldsymbol{C_2}^{\boldsymbol{0}}\right) = \boldsymbol{0}\ (\boldsymbol{2.5})$$

называются **общим** и **частным интегралом** соответственно.

График всякого решения ДУ второго порядка называется интегральной кривой.

Как и в случае уравнения первого порядка, задача нахождения решения ДУ (2.4), удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$\boldsymbol{y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y'_0}\ (\boldsymbol{2.6})$$

называется **задачей Коши**.

2.2. Геометрический смысл начальных условий дифференциального уравнения второго порядка. Задача Коши.

Общее решение $y = \varphi(x; C_1; C_2)$ДУ (2.4) представляет собой бесчисленное множество интегральных кривых;

Первое из начальных условий $y(x_0) = y_0$ (2.6) задает точку $M_0(x_0; y_0)$на плоскости Oxyи с его помощью определяется одна из произвольных постоянных, например C_2.

Второе из начальных условий $y'(x_0) = y'_0$ (2.6) задает угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в точке $M_0(x_0; y_0)$, $(y'(x_0) = k_{\text{кас}}$ -угловой коэффициент касательной), то есть выделяет единственную интегральную кривую, которая является графиком частного решения дифференциального уравнения (2.4), удовлетворяющего начальным условиям (2.6) см. рис.4.

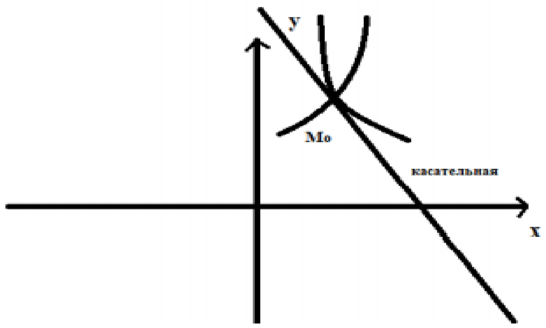

Рис.4

Теорема 2.1. (существования и единственности задачи Коши). Если в уравнении (2.4) функция $f(x; y; y')$ непрерывна при значениях x_0, y_0, y'_0 ,то существует решение $y = \varphi(x)$,такое что $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$. Если, кроме того, непрерывны так же и частные производные $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$ и $\frac{\partial f}{\partial y'} = f'_{y'}$,то такое решение единственно.

Примем теорему без доказательства.

Замечание: аналогичные понятия и определения имеют место для ДУ n-го порядка.

2.3. Основные виды дифференциальных уравнений высших порядков и методы их решений.

Одним из методов интегрирования ДУ высших порядков $F\left(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n)}\right) = 0$ или $y^{(n)} = f\left(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n-1)}\right)$ является **метод понижения порядка**. Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное ДУ сводится к уравнению, на порядок ниже.

Уравнения, допускающие понижения порядка.

Рассмотрим три типа уравнений, допускающих понижение порядка:

I) $\boldsymbol{y^{(n)} = f(x)}$ $(\mathbf{2.7})$ –правая часть является функцией одной переменной x, порядок понижается путем последовательного интегрирования n раз;

II) $\boldsymbol{F\left(x; y^{(k)}; y^{(k+1)} \dots ; y^{(n)}\right) = 0}, k \geq 1$ или

$\boldsymbol{y^{(n)} = f\left(x; y'; y''; \dots ; y^{(n-1)}\right)}$ $(\mathbf{2.8})$–не содержит явно искомой функции y.

Это уравнение допускает понижение порядка на k единиц с помощью постановки $y^{(k)} = p, y^{(k+1)} = p', \dots, y^{(n)} = p^{(n-k)}$,где $p = p(x)$,тогда уравнение примет вид

$$F\left(x; p; p'; \dots ; p^{(n-k)}\right) = 0\,,$$

Если его удастся проинтегрировать, то мы найдём функцию

$p = \Phi(x; C_1; C_2; \dots ; C_{n-\boldsymbol{k}})$, то есть получим уравнение вида(I) –

$$y^{(k)} = \Phi(x; C_1; C_2; \dots ; C_{n-\boldsymbol{k}})$$

решая его находим общее решение y.

III) $\boldsymbol{F\left(y; y'; \dots ; y^{(n)}\right) = 0}$, или

$\boldsymbol{y^{(n)} = f\left(y; y'; y''; \dots ; y^{(n-1)}\right)}$ $(\mathbf{2.9})$**-** не содержит явно независимой переменной x.

ДУ такого вида допускают понижение порядка на одну единицу, с помощью замены $y' = p$, где y – новая независимая переменная, а $p = p(y)$ – искомая функция, где $y = y(x)$, тогда

$$y'' = (p)' = \left(p\big(y(x)\big)\right)' = p'\big(y(x)\big) \cdot y'(x) = p' \cdot p.$$

Очевидно, что $y^{(n)}$будет выражаться через $p, p', p^{(n-1)}$.

Таким образом, исходное уравнение примет вид

$F\left(y; p; \dots ; p^{(n-1)}\right) = 0$, если удастся это уравнение проинтегрировать, то получим уравнение $p = \Phi(y; C_1; C_2; \dots ; C_{n-1})$ или $y' = \Phi(y; C_1; C_2; \dots ; C_{n-1})$ – это ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, решая его получим общее решение исходного уравнения .

Разберём по отдельности решение каждого типа уравнений, на примере ДУ второго порядка, то есть при $n = 2$(для лучшего восприятия материала), аналогично решаются ДУ более высокого порядка:

I)ДУ вида $y'' = f(x)$ – не содержащее y, y'в явном виде.

Порядок уравнения $y'' = f(x)$ понижают, вводя новую функцию

$p = p(x)$, то есть положив $y' = p$,тогда $y'' = p'$, подставляя $y'' = p'$ в исходное уравнение получим ДУ первого порядка, с разделёнными переменными относительно p, $p' = f(x)$,которое решается интегрированием правой части:

$p = \int f(x)\ dx$,

$p = \varphi_1(x) + C_1$, учитывая, что $y' = p$,

находим y:

$y' = \varphi_1(x) + C_1$;

$y = \int(\varphi_1(x) + C_1)dx = \int \varphi_1(x)dx + C_1 \int dx = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2$ –-общее решение исходного уравнения;

Замечание: на практике поступают немного проще, порядок понижается непосредственно путем последовательного интегрирования уравнения $n = 2$ раз. Покажем, как это работает в общем виде:

$y'' = f(x)$,

$y' = \int f(x)dx = \varphi_1(x) + C_1$,

$y = \int(\varphi_1(x) + C_1)\,dx = \int \varphi_1(x)dx + C_1 \int dx = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2$-общее решение уравнения $y'' = f(x)$,данное решение содержит $n = 2$ произвольных постоянных C_1, C_2. Фиксируя произвольные постоянные $C_1 = C_1{}^0, C_2 = C_2{}^0$, будем получать решения, называемые частными.

Пример 2.1. Решить ДУ: **а)** $y'' = 6x - \frac{5}{2}x\sqrt{x} + 2$;

б)$y'' = xe^{-x}, y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;**в)** $y^{IV} = sin2x$.

Решение.

а) $y'' = 6x - \frac{5}{2}x\sqrt{x} + 2$ -уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$, $n = 2$,последовательно интегрируя, имеем:

$$y' = \int \left(6x - \frac{5}{2}x\sqrt{x} + 2\right) dx = 6\int xdx - \frac{5}{2}\int x^{\frac{3}{2}} dx + 2\int dx =$$

$$= 3x^2 - x^{\frac{5}{2}} + 2x + C_1;$$

$$y = \int (3x^2 - x^{\frac{5}{2}} + 2x + C_1)dx = x^3 - \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + x^2 + C_1 x + C_2.$$

б)$y'' = xe^{-x}$ -уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$, $n = 2$,последовательно интегрируя имеем:

$$y' = \int x\,e^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = e^{-x}dx, v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x}x + \int e^{-x}dx =$$

$$= -e^{-x}x - \int e^{-x}d(-x) = -e^{-x}x - e^{-x} + C_1 = -e^{-x}(x+1) + C_1;$$

$$y = -\int e^{-x}(x+1)\,dx + C_1\int dx = \begin{vmatrix} u = x + 1, du = dx \\ dv = e^{-x}dx, v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$$

$= -\left(-e^{-x}(x+1) + \int e^{-x}dx\right) + C_1x = e^{-x}(x+1) + \int e^{-x}d(-x) + C_1x =$

$= e^{-x}(x+1) + e^{-x} + C_1x + C_2 = e^{-x}(x+2) + C_1x + C_2.$

Таким образом, $y = e^{-x}(x+2) + C_1x + C_2$ – общее решение исходного ДУ;

Для того, чтобы найти частное решение найдём y':

$$y' = -e^{-x}(x+2) + e^{-x} + C_1 = -e^{-x}(x+1) + C_1;$$

Найдём частное решение, то есть решение, удовлетворяющее условиям

$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$, подставляя $x = 0, y = 1,\ y' = 0$ в систему

$\begin{cases} y = e^{-x}(x+2) + C_1x + C_2 \\ y' = -e^{-x}(x+1) + C_1 \end{cases}$, имеем: $\begin{cases} 1 = 2e^0 + C_2 \\ 0 = -e^0 + C_1 \end{cases}$; $\begin{cases} C_2 = -1 \\ C_1 = 1 \end{cases}$;

Итак, $y = e^{-x}(x+2) + x - 1$-частное решение;

в) $y^{IV} = \sin 2x$ -уравнение вида $y^{(n)} = f(x), n = 4$, последовательно интегрируя четыре раза, получим:

$$y''' = \int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1,$$

$$y'' = \int (-\frac{1}{2}\cos 2x + C_1)dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2,$$

$$y' = \int (-\frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2)dx = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3,$$

$$y = \int (\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3)dx = \frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{6}C_1x^3 +$$

$+\frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$-общее решение;

II) $y'' = f(x; y')$–не содержит явно искомой функции y.

Понижаем порядок подстановкой $y' = p$, тогда $y'' = p'$, где $p = p(x)$ –новая неизвестная функция, уравнение принимает вид $p' = f(x; p)$.

Пусть $p = \varphi(x; C_1)$-общее решение полученного ДУ первого порядка. Заменяя $y' = p$, получаем ДУ вида I -$y' = \varphi(x; C_1)$. Для нахождения y достаточно проинтегрировать последнее уравнение

$y = \int \varphi(x; C_1)\, dx + C_2$ –общее решение уравнения $y'' = f(x; y')$.

Замечание: частным случаем уравнения $y'' = f(x; y')$ является уравнение $y'' = f(y')$, которое решается аналогично, то есть при помощи подстановки подстановкой $y' = p = p(x)$, тогда $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$;

Пример 2.2. Решить ДУ: **а)**$x\cdot\ y''=y'$;**б)**$y''\cdot sinx=(1+y')\cdot cos\,x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$; **в)** $y''-\frac{2}{x}y'=2x^3$;**г)** $y''+y'^2=0$;
д) $x\ \cdot y'''-y''+x^2-2=0, y(1)=2, y'(1)=-\frac{1}{3}, y''(1)=-3$.

Решение.

а) $x\cdot\ y''=y'$ –не содержит явно искомой функции y,поэтому понижаем его порядок при помощи подстановки $y'=p, y''=p'$,где $p=p(x)$, $p'=\frac{dp}{dx}$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$x\ \cdot p'=p\left|\cdot\frac{1}{x}, x\neq 0\right.$,

$p'=\frac{p}{x}$-уравнение с разделяющимися переменными относительно p,

$p'=f_1(x)\cdot f_2(p)$,где $f_1(x)=\frac{1}{x}, f_2(p)=p$;

$\frac{dp}{dx}=\frac{p}{x}\left|\cdot\frac{dx}{p}\right.$,

$\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dx}{x}$,

$ln|p|=ln|x|+lnC_1$, $C_1>0$,

$ln|p|=lnC_1|x|$,

$p=C_1x$,

$y'=C_1x$,

$y=\int C_1xdx=C_1\int xdx=C_1\frac{x^2}{2}+C_2$ –общее решение ДУ;

б)$y''sinx=(1+y')\,cos\,x$ – не содержит y,поэтому делаем подстановку $y'=p, y''=p', p=p(x)$получим:

$p'\sin x=(1+p)\cos x$,

$\frac{dp}{dx}\sin x=(1+p)\cos x\left|\cdot\frac{dx}{\sin x(1+p)}\right.$,

$\int\frac{dp}{1+p}=\int\frac{cos\,x}{sin\,x}dx$,

$\int\frac{dp}{1+p}=\int\frac{d(sin\,x)}{sin\,x}$,

$ln|1+p|=ln|sinx|+C$, положим $C=lnC_1, C_1>0$

$ln|1+p|=ln|sinx|+lnC_1$,

$ln|1+p|=lnC_1|sinx|$,

$1+p=C_1\sin x$,

$p=C_1\sin x-1$,

$y' = C_1 \sin x - 1,$

$y = \int (C_1 \sin x - 1)dx = C_1 \int \sin x\, dx - \int dx =$

$= -C_1 \cos x - x + C_2;$

Получили $y = -C_1 \cos x - x + C_2$ –общее решение ДУ, найдём частное решение,

подставляя в систему $\begin{cases} y = -C_1 \cos x - x + C_2 \\ y' = C_1 \sin x - 1 \end{cases}$,

$y = 0, y' = 1, x = \frac{\pi}{2}$ имеем:

$\begin{cases} 0 = -C_1 \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + C_2 \\ 1 = C_1 \sin\frac{\pi}{2} - 1 \end{cases}; \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$

Итак, $y = -2\cos x - x + \frac{\pi}{2}$ -частное решение исходного ДУ;

в) $y'' - \frac{2}{x} y' = 2x^3$ -уравнение не содержит y, поэтому делаем подстановку $y' = p, y'' = p'$, получим:

$p' - \frac{2}{x} p = 2x^3$-линейное уравнение относительно p,

$p' + f_1(x)p = f_2(x)$, где $f_1(x) = -\frac{2}{x}, f_2(x) = 2x^3$, решаем его при помощи подстановки

$p = UV, p' = U'V + V'U,$

$U'V + V'U - \frac{2}{x} UV = 2x^3,$

$U'V + U\left(V' - \frac{2}{x} V\right) = 2x^3,$

решаем систему $\begin{cases} V' - \frac{2}{x} V = 0 \\ U'V = 2x^3 \end{cases}$,

1)находим V:

$V' - \frac{2}{x} V = 0,$

$\frac{dV}{dx} = \frac{2}{x} V,$

$\int \frac{dV}{V} = 2 \int \frac{dx}{x},$

$ln|V| = 2\, ln|x|,$

$V = x^2;$

2)находим U:

$U'V = 2x^3,$

$U'x^2 = 2x^3,$

$U' = 2x,$

$U = \int 2xdx = x^2 + C_1,$

$p = UV = (x^2 + C_1)x^2,$

$y' = x^4 + C_1x^2,$

$y = \int (x^4 + C_1x^2)dx = \frac{x^5}{5} + C_1\frac{x^3}{3} + C_2$ –общее решение;

г) $y'' + {y'}^2 = 0$ –уравнение вида $y'' = f(y')$,является частным случаем уравнения$y'' = f(x, y')$.

Понижаем его порядок при помощи замены

$y' = p, y'' = p'$,где $p = p(x)$, тогда уравнение $y'' + {y'}^2 = 0$ принимает вид:

$p' + p^2 = 0,$

$p' = -p^2$- уравнение с разделяющимися переменными относительно p,

$p' = f_1(x) \cdot f_2(p)$, где $f_1(x) = 1, f_2(p) = -p^2$;

$\frac{dp}{dx} = -p^2 \Big| \cdot \frac{dx}{p^2}, p \neq 0,$

$-\int \frac{dp}{p^2} = \int dx,$

$-\int p^{-2}dp = \int dx,$

$\frac{1}{p} = x + C_1,$

$p = \frac{1}{x + C_1},$

$y' = \frac{1}{x+C_1}$ –уравнение с разделёнными переменными $y' = f(x)$, где

$f(x) = \frac{1}{x+C_1},$

$y = \int \frac{dx}{x+C_1} = \int \frac{d(x+C_1)}{x+C_1} = ln|x + C_1| + C_2$-общее решение ДУ;

д)$xy''' - y'' + x^2 - 2 = 0$ –уравнение не содержит явно искомой функции y,поэтому понижаем его порядок при помощи подстановки

$y'' = p = p(x),\ y''' = p' = p'(x)$, тогда исходное уравнение принимает вид

$xp' - p + x^2 - 2 = 0 \Big| \cdot \frac{1}{x}, x \neq 0,$

$p' - \frac{P}{x} = \frac{2}{x} - x$- линейное относительно p,подстановка

$p = UV, p' = U'V + V'U,$

$U'V + V'U - \frac{UV}{x} = \frac{2}{x} - x,$

$U'V + U\left(V' - \frac{V}{x}\right) = \frac{2}{x} - x$,

решаем систему $\begin{cases} V' - \frac{V}{x} = 0 \\ U'V = \frac{2}{x} - x \end{cases}$,

1)находим V:

$V' - \frac{V}{x} = 0,$

$\frac{dV}{dx} = \frac{V}{x},$

$\int \frac{dV}{V} = \int \frac{dx}{x},$

$ln|V| = ln|x|,$

$V = x,$

2)находим U:

$U'x = \frac{2}{x} - x| : x,$

$U' = \frac{2}{x^2} - 1,$

$U = \int (2x^{-2} - 1)dx = -\frac{2}{x} - x + C_1,$

$p = \left(-\frac{2}{x} - x + C_1\right)x,$

$y'' = C_1 x - x^2 - 2,$

$y' = \int (C_1 x - x^2 - 2)\, dx = C_1\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2x + C_2,$

$y = \int \left(C_1\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2x + C_2\right) = C_1\frac{x^3}{6} - \frac{1}{12}x^4 - x^2 + C_2 x + C_3$ – общее решение.

Найдём частное решение, подставляем $y = 2, y' = -\frac{1}{3}, y'' = -3, x = 1$ в

систему $\begin{cases} y = C_1\frac{x^3}{6} - \frac{1}{12}x^4 - x^2 + C_2 x + C_3 \\ y' = C_1\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2x + C_2 \\ y'' = C_1 x - x^2 - 2 \end{cases}$,имеем: $\begin{cases} 2 = C_1\frac{1}{6} - \frac{1}{12} - 1 + C_2 + C_3 \\ -\frac{1}{3} = C_1\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2 + C_2 \\ -3 = C_1 - 1 - 2 \end{cases}$;

$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 2 \\ C_3 = -2 + 2 + \frac{1}{12} + 1 = \frac{13}{12} \end{cases}$;

Итак, $y = -\frac{1}{12}x^4 - x^2 + 2x + \frac{13}{12}$ -частное решение ДУ;

III) $y'' = f(y; y')$- не содержит явно независимой переменной x.

ДУ такого вида решают, с помощью замены $y' = p$, где $p = p(y)$ – новая искомая функция, где $y = y(x)$, тогда $y'' = p' \cdot p = \frac{dp}{dy} \cdot p$.

После подстановки $y' = p, y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$ уравнение $y'' = f(y; y')$- принимает вид

$$\frac{dp}{dy} \cdot p = f(y; p).$$

Пусть $p = \varphi(y; C_1)$-общее решение полученного ДУ. Заменяя $y' = p = p(y)$, получаем ДУ вида $y' = \varphi(y; C_1)$ –уравнение с разделяющимися переменными, решая его, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y; C_1),$$

$$\frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = dx,$$

$\int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = x + C_2$ – общий интеграл уравнения $y'' = f(y; y')$.

Замечание:

1) Частным случаем уравнения $y'' = f(y; y')$. является уравнение $y'' = f(y)$, решается аналогично, то есть при помощи подстановки $y' = p, y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$;

2) Уравнение $y'' = f(y')$ так же можно решать, применяя подстановку $y' = p, y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$;

Пример 2.3. Решить ДУ: **а)** $y\,y'' = y'^2$; **б)** $y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0$; **в)** $y''\,tg\,y = 2(y')^2,\ y(1) = \frac{\pi}{4},\ y'(1) = -2.$

Решение.

а) $y\,y'' = y'^2$ – уравнение не содержит x, в нашем случае $n = 2$, поэтому понижаем его порядок при помощи замены $y' = p, y'' = p' \cdot p$, где $p = p(y)$, $p' = \frac{dp}{dy}$, исходное уравнение принимает вид:

$$y \cdot p' \cdot p = p^2,$$

$$y \cdot p' \cdot p = p^2 \Big| \cdot \frac{1}{yp}, y \neq 0, p \neq 0,$$

$p' = \frac{p}{y}$ - уравнение с разделяющимися переменными относительно p,

$p' = f_1(y) \cdot f_2(p)$,где $f_1(y) = \frac{1}{y}, f_2(p) = p$;

$\frac{dp}{dy} = \frac{p}{y} \Big| \cdot \frac{dy}{p}$,

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y},$$

$ln|p| = ln|y| + lnC_1, C_1 > 0$

$ln|p| = lnC_1|y|$,

$p = C_1 y$,

$y' = C_1 y$-уравнение с разделяющимися переменными, разделяя переменные имеем:

$\frac{dy}{dx} = C_1 y$,

$\int \frac{dy}{y} = C_1 \int dx$,

$ln|y| = C_1 x + C_2$,

$y = e^{C_1 x + C_2} = C_2 e^{C_1 x}$-общее решение ДУ;

б)$y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$- не содержит x,понижаем порядок при помощи подстановки $y' = p,\ \ y'' = p' \cdot p$,

$pp'(2y+3) - 2p^2 = 0$,

$pp'(2y+3) = 2p^2 \ \ |\cdot \frac{1}{p(2y+3)}, p \neq 0, p \neq -\frac{3}{2}$,

$p' = \frac{2p}{2y+3}$-уравнение с разделяющимися переменными относительно p;

$$\frac{dp}{dy} = \frac{2p}{2y+3} \Big| \cdot \frac{dy}{p}$$

$\frac{dp}{p} = \frac{2dy}{2y+3}$,

$\int \frac{dp}{p} = 2 \int \frac{dy}{2y+3}$,

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{d(2y+3)}{2y+3},$$

$ln|p| = ln|2y+3| + C$,пусть $C = lnC_1, C_1 > 0$,

$ln|p| = ln|2y+3| + lnC_1$,

$ln|p| = lnC_1|2y+3|$,

$p = C_1(2y+3)$,

$y' = C_1(2y+3)$,

$\frac{dy}{dx} = C_1(2y+3) \Big| \cdot \frac{dx}{2y+3}$,

$\frac{dy}{2y+3} = C_1 dx$,

$\int \frac{dy}{2y+3} = C_1 \int dx$,

$\frac{1}{2}\int \frac{d(2y+3)}{2y+3} = C_1 \int dx$,

$\frac{1}{2} ln|2y+3| = C_1 x + C_2 \ |\cdot 2$,

$ln|2y+3| = 2(C_1 x + C_2)$,

$log_e|2y+3| = 2(C_1 x + C_2)$,

$2y + 3 = e^{2(C_1 x + C_2)}$,

$2y = e^{2(C_1 x + C_2)} - 3 \ \Big|\cdot \frac{1}{2}$,

$y = \frac{1}{2}\left(e^{2(C_1 x + C_2)} - 3\right)$-общее решение ДУ;

в)$y'' \, tg\, y = 2(y')^2$ не содержит x, делаем подстановку

$y' = p = p(y), \ \ y'' = p' \cdot p$,

$p'p \, tg\, y = 2p^2 \Big| \cdot \frac{1}{p\, tg\, y}$,

$p' = \frac{2p}{tg\, y}$,

$\frac{dp}{dy} = \frac{2p}{tg\, y}$,

$\int \frac{dp}{P} = \int \frac{2\cos y}{\sin y} dy$,

$\int \frac{dp}{P} = 2\int \frac{d(sin y)}{\sin y}$,

$ln|p| = 2ln|\sin y| + lnC_1, C_1 > 0$,

$ln|p| = ln|\sin^2 y| + lnC_1$,

$ln|p| = lnC_1|\sin^2 y|$,

$p = C_1 sin^2 y$,

$y' = C_1 sin^2 y$,

$\frac{dy}{dx} = C_1 sin^2 y$,

$\int \frac{dy}{sin^2 y} = \int C_1\, dx$,

$-ctg\, y = C_1 x + C_2$, $ctg\, y = -(C_1 x + C_2)$ –общий интеграл;

Найдём частное решение, подставим начальные условия $x = 1, \ y = \frac{\pi}{4}$,

$y' = -2$ в систему $\begin{cases} ctg\, y = -(C_1 x + C_2) \\ y' = C_1 sin^2 y \end{cases}$,имеем:

$\begin{cases} ctg\frac{\pi}{4} = -(C_1 + C_2) \\ -2 = C_1 sin^2\frac{\pi}{4} \end{cases}$,$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1 \\ C_1 = -4 \end{cases}$,$\begin{cases} C_1 = -4 \\ C_2 = 3 \end{cases}$, следовательно,

$ctg\, y = -(-4x + 3)\,, ctg\, y = 4x - 3, y = arcctg(4x - 3)$-частное решение ДУ.

Пример 2.4. Решить ДУ:**а)** $y'' - y = 0$;**б)**$y'' + y' = 0$.

Решение.

а) $y'' - y = 0$ –уравнение вида$y'' = f(y)$, частный случай уравнения$y'' = f(y, y')$, поэтому порядок ДУ понижаем при помощи замены$y' = p,\, y'' = \frac{dp}{dy}\cdot p$,исходное уравнение принимает вид:

$\frac{dp}{dy}\cdot p - y = 0,$

$\frac{dp}{dy}\cdot p = y \,|\cdot dy\,,$

$pdp = ydy,$

$\int pdp = \int ydy,$

$\frac{p^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1 \,|\cdot 2,$

$p^2 = -y^2 + 2C_1\,,$

$p = \pm\sqrt{-y^2 + 2C_1}\,, y' = p,$

$y' = \pm\sqrt{-y^2 + 2C_1}$-уравнение с разделяющимися переменными относительно y,

$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2C_1 - y^2},$

$\int\frac{dy}{\sqrt{\left(\sqrt{2C_1}\right)^2 - y^2}} = \pm\int dx,$

$arcsin\frac{y}{\sqrt{2C_1}} = \pm x + C_2$-общий интеграл;

б) $y'' + y' = 0$ –уравнение имеет вид $y'' = f(y')$,поэтому его можно решить, применяя подстановку $y' = p,\, y'' = \frac{dp}{dy}\cdot p$;

Понижаем порядок ДУ при помощи замены

$y' = p, y'' = p'\cdot p$,где $p = p(y), p' = \frac{dp}{dy}$, исходное уравнение принимает вид:

$\frac{dp}{dy}\cdot p + p = 0,$

$\frac{dp}{dy} \cdot p = -p \left| \cdot \frac{dy}{p} \right.,$

$\int dp = -\int dy,$

$p = -y + C_1,$

$y' = -y + C_1,$

$\frac{dy}{dx} = C_1 - y,$

$\int \frac{dy}{C_1 - y} = \int dx,$

$-\int \frac{d(C_1 - y)}{C_1 - y} = x$,

$-ln|C_1 - y| = x + C_2,$

$ln|C_1 - y| = -(x + C_2),$

$C_1 - y = e^{-(x+C_2)},$

$y = C_1 - e^{-(x+C_2)}$-общее решение ДУ.

Линейные дифференциальные уравнения порядка n.

Многие задачи математики, механики, электротехники и других технических наук приводят к линейным дифференциальным уравнениям вида

$$\boldsymbol{a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = g(x)} \text{(2.10)}$$

называемым **линейным ДУ порядка n**.

Уравнение (2.10) содержит искомую функцию y и все её производные $y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots$

Здесь $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ –непрерывные функции на отрезке $[a; b]$,называемые **коэффициентами** уравнения (2.10), а функция $g(x)$ называется **свободным членом уравнения** (**2.10**).

Если $g(x) = 0$, то получим линейное однородные дифференциальные уравнение (ЛОДУ);

Если $g(x) \neq 0$, то имеем линейное неоднородные дифференциальные уравнение (ЛНДУ);

Разделив уравнение (2.10) на $a_0(x) \neq 0$, получим

$y^{(n)} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y^{(n-1)} + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{a_n(x)}{a_0(x)} y = \frac{g(x)}{a_0(x)}$, обозначив

$\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = p_1(x), \frac{a_2(x)}{a_0(x)} = p_2(x), \dots, \frac{a_n(x)}{a_0(x)} = p_n(x), \frac{g(x)}{a_0(x)} = f(x)$,запишем уравнение (2.10) в приведённом виде (2.11):

$$\boldsymbol{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = f(x) (2.11)}$$

При $n = 2$,получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Рассмотрим, как определяются и решаются такие уравнения.

Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) второго порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

(ЛОДУ) второго порядка $n = 2$:

$$\boldsymbol{y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0} \ \textbf{(2.12)}$$

и установим некоторые свойства его решений.

Теорема 2.2. Если функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются частными решениями уравнения$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$,то решением этого уравнения является также функция

$\boldsymbol{y = C_1y_1(x) + C_2y_2\,(x)\ (2.13)}$**,** где C_1и C_2- произвольные постоянные.

Доказательство.

Подставим функцию $y = C_1y_1 + C_2y_2$ в левую часть уравнения (2.12):

$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p_1(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + p_2(x)(C_1y_1 + C_2y_2) =$

$= C_1y_1'' + C_2y_2'' + p_1(x)(C_1y_1{}' + C_2y_2{}') + C_1y_1p_2(x) +$

$+C_2y_2\,p_2(x) = C_1(y_1'' + p_1(x)y_1{}' + p_2(x)y_1) +$

$+C_2(y_2'' + p_1(x)y_2{}' + p_2(x)y_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0$, заметим, что

$y_1'' + p_1(x)y_1{}' + p_2(x)y_1 = 0, y_2'' + p_1(x)y_2{}' + p_2(x)y_2 = 0,$

так как функции y_1, y_2 являются решениями уравнения (2.12).

Итак, функция $y = C_1y_1 + C_2y_2$ также является решением уравнения $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$. Выясним может ли она являться общим решением данного уравнения?

Для ответа на вопрос введем понятие линейной зависимости и линейной независимости функций.

Линейная зависимость и независимость функций.

Функции y_1 и y_2 являются **линейно независимыми**
на отрезке$[a;b]$,, если из равенства линейной комбинации нулю
$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$,следует, что все коэффициенты равны нулю $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
Функции y_1, y_2 **линейно зависимы**, если из равенства линейной комбинации нулю $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$ следует, что хотя бы одно из чисел $\alpha_i \neq 0, i = 1,2$.
Очевидно, что функцииy_1и y_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, то есть для всех $x \in [a;b]$, выполняется равенство $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$,покажем это:

пусть$\alpha_1 \neq 0$, тогда$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$,

$\alpha_1 y_1 = -\alpha_2 y_2 |: \alpha_1$,

$$\frac{y_1}{y_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \lambda = const,$$

$y_1 = \lambda y_2$.

В противном случае, функцииy_1и y_2 линейно независимы.

Пример 2.5. Являются ли функции y_1, y_2 линейно зависимы, независимыми:
а) $y_1 = 2e^{-x}, y_2 = e^{-x}$;**б)** $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{3x}$.

Решение.

а) Составим отношение $\frac{y_1}{y_2} = \frac{2e^{-x}}{e^{-x}} = 2 = \lambda = const$, следовательно функции $y_1 = 2e^{-x}, y_2 = e^{-x}$ линейно зависимы,

б) Поступая, аналогично имеем:

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{2x}}{e^{3x}} = e^{-x} \neq const$, тогда функции $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{3x}$-линейно независимы.

Средством изучения линейной зависимости системы функций является так называемый **определитель Вронского**.
Для двух дифференцируемых функций $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ определитель Вронского(вронскиан) имеет вид

$$\boldsymbol{W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix} (2.14)}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.3. Если дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$линейно зависимы на отрезке $[a;b]$, то определитель Вронского на этом отрезке тождественно равен нулю.

Доказательство

Так как функции y_1,y_2линейно зависимы, то в равенстве

$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$,либо $\alpha_1 \neq 0$,либо $\alpha_2 \neq 0$,либо$\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$.

Пусть $\alpha_1 \neq 0$,тогда $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0, \alpha_1 y_1 = -\alpha_2 y_2$,

$y_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2$, поэтому для любого $x \epsilon [a; b]$имеем:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 & y_2 \\ -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2{}' & y_2{}' \end{vmatrix} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 \cdot y_2{}' - \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2{}' \cdot y_2\right) = 0.$$

Теорема 2.4. Если дифференцируемые функции y_1 и y_2линейно независимые решения уравнения$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$ на отрезке $[a; b]$, то определитель Вронского, составленный из этих функций отличен от нуля во всех точках отрезка $[a; b]$.

Примем без доказательств.

Приведём пример использования определителя Вронского для выяснения вопроса о линейной зависимости или независимости функции на промежутке.

Пример 2.6. Показать, что система функций $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$,где $k_1 \neq k_2$ линейно независима на любом промежутке.

Решение.

Найдём определитель Вронского для данной системы функций: $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x}, \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} =$

$= e^{k_1 x} \cdot k_2 e^{k_2 x} - e^{k_2 x} \cdot k_1 e^{k_1 x} = k_2 e^{(k_1 + k_2)x} - k_1 e^{(k_1 + k_2)x} \neq 0.$

Очевидно, что полученный определитель при условии $k_1 \neq k_2$ отличин от нуля при любых значениях x, следовательно, система функций $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$линейно независима на любом промежутке.

Аналогично можно показать, что линейно независимой на любом промежутке является и система n функций $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x}$,где все $k_i, i = 1,2, \dots, n$ различны.

Пример 2.7. Показать, что система функций $y_1 = e^{\alpha x} cos\beta x$ и

$y_2 = e^{\alpha x} sin\beta x$, где $\beta \neq 0$ линейно независима на любом промежутке.

Решение.

Для этого для начала найдём y_1', y_2':

$y_1' = (e^{\alpha x} cos\beta x)' = \alpha e^{\alpha x} cos\beta x - \beta e^{\alpha x} sin\beta x =$

$= e^{\alpha x}(\alpha cos\beta x - \beta sin\beta x);$

$y_2' = (e^{\alpha x} sin\beta x)' = \alpha e^{\alpha x} sin\beta x + \beta e^{\alpha x} cos\beta x =$

$= e^{\alpha x}(\alpha sin\beta x + \beta cos\beta x).$

Найдём определитель Вронского $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ для данной системы функций:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} cos\beta x & e^{\alpha x} sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha cos\beta x - \beta sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha sin\beta x + \beta cos\beta x) \end{vmatrix} =$$

$= e^{\alpha x} cos\beta x e^{\alpha x}(\alpha sin\beta x + \beta cos\beta x) - e^{\alpha x} sin\beta x e^{\alpha x}(\alpha cos\beta x - \beta sin\beta x) =$

$= e^{2\alpha x}(\alpha cos\beta x sin\beta x + \beta cos^2\beta x - \alpha cos\beta x sin\beta x + \beta sin^2\beta x) = \beta e^{2\alpha x}.$

Очевидно, что полученный определитель при условии, что $\beta \neq 0$, отличен от нуля при любых значениях x, следовательно, система функций $y_1,\ y_2$линейно независима на любом промежутке.

Совокупность двух линейно независимых на отрезке $[a; b]$ частных решений y_1и y_2ЛОДУ второго порядка называется **фундаментальной системой решений (ФСР)** этого уравнения.

Пример 2.8. Показать, что функции $y_1 = cos\beta x$ и $y_2 = sin\beta x$,где $\beta \neq 0$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + \beta^2 y = 0$.

Решение.

Убедимся, что функции $y_1 = cos\beta x$ и $y_2 = sin\beta x$ линейно независимы, для этого вычислим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\beta x & sin\beta x \\ -\beta sin\beta x & \beta cos\beta x \end{vmatrix} = \beta cos^2\beta x + \beta sin^2\beta x = \beta \neq 0,$$

следовательно функции y_1, y_2 линейно независимы всюду на множестве всех действительных чисел R. Кроме того, нетрудно проверить, что каждая из этих функций является решением уравнения$y'' + \beta^2 y = 0$ на R.

Для этого найдёмy_1'': $y_1' = -\beta sin\beta x, y_1'' = -\beta^2 cos\beta x$ и подставим y_1, y_1'' в уравнение$y'' + \beta^2 y = 0$:

$$y_1'' + \beta^2 y_1 = -\beta^2 cos\beta x + \beta^2 cos\beta x = 0;$$

Аналогично для y_2:

$$y_2{}' = \beta cos\beta x, y_2{}'' = -\beta^2 sin\beta x,$$

$$y_2{}'' + \beta^2 y_2 = -\beta^2 sin\beta x + \beta^2 sin\beta x = 0.$$

Это и означает, что указанные функции образуют фундаментальную систему решений данного уравнения.

Теорема 2.5. (о существования фундаментальной системы решений). Для любого ЛОДУ (2.12) с непрерывными коэффициентами существует фундаментальная система решений.

Доказательство.

Пусть $x_0 \epsilon [a; b]$ — произвольно фиксированная точка. Построим $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решения ДУ, удовлетворяющих следующим условиям:

$$y_1(x):\ y_1(x_0) = 1, y_1{}'(x_0) = 0;$$

$$y_2(x):\ y_2(x_0) = 0, y_2{}'(x_0) = 1.$$

Это возможно в силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши для ДУ второго порядка.

Очевидно, что в точкеx_0 определитель Вронского

$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$ следовательно

функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно независимы на$[a; b]$, и значит, образуют фундаментальную систему решений ДУ (2.12).

Теорема 2.6. (о структуре общего решения линейного однородного ДУ второго порядка). Если $y_1(x), y_2(x)$ – фундаментальная система решений ОДУ (2.12), то общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x).$$

Примем без доказательства.

Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами второго порядка. Метод Эйлера.

Рассмотрим однородные ДУ n-го порядка, в которых коэффициентами $p_i(x)$ являются постоянные числа p_i . Такие уравнения имеют вид:

$$\boldsymbol{y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0} \ \textbf{(2.15)}$$

При $n = 2$, получим линейное однородное дифференциальное уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка 2.16:

$$\boldsymbol{y'' + py' + qy = 0} \ \textbf{(2.16)}$$

Для простоты восприятия рассмотрим метод Эйлера (метод решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами) на примере ДУ второго порядка, то есть при $n = 2$. Аналогично, решаются уравнения вида (2.15) при $n > 2$.

Метод Эйлера.

По методу Эйлера решение уравнение (2.16), будем искать в виде

$y = e^{kx}$, где $k = const$ –неизвестная константа, подлежащая определению.

Тогда $y' = ke^{kx}, y'' = k^2e^{kx}$, подставляя эти значения в уравнение (2.16), получим:

$y'' + py' + qy = 0,$

$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$ или $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$;

Разделим обе части полученного равенства на $e^{kx} \neq 0$,получим:

$$\boldsymbol{k^2 + pk + q = 0} \ \textbf{(2.17)}$$

Уравнение (2.17) называется **характеристическим,** а его корни k_1, k_2называют **характеристическими числами**.

Итак, для того чтобы функция $y = e^{kx}$ была решением уравнения (2.16), необходимо и достаточно чтобы число k было корнем многочлена $k^2 + pk + q$, то есть являлось характеристическим числом.

Рассмотрим следующие три различных случая, которые могут возникнуть при решении характеристического уравнения:

1. Корни уравнения (2.17) действительны и различны, то есть $\boldsymbol{k_1, k_2 \epsilon R}$,

$\boldsymbol{k_1 \neq k_2}$, $\boldsymbol{(D = p^2 - 4q > 0|: 4, \frac{p^2}{4} - q > 0)}$.

В этом случае частными решениями уравнения (2.17) являются функции$y_1 = e^{k_1x}$ и$y_2 = e^{k_2x}$.Они образуют ФСР (линейно независимы), так как составленный из них определитель Вронского отличен от нуля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Тогда, согласно теореме о структуре общего решения линейного однородного ДУ, общее решение ДУ (2.17) запишется в виде $y = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$ или

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}};$$

2. Уравнение (2.17) имеет комплексно- сопряжённые корни вида, то есть $\boldsymbol{k_{1,2} = \alpha \pm i\beta}$, $(\boldsymbol{D = p^2 - 4q < 0, \frac{p^2}{4} - q < 0})$, которым будут соответствовать решения $y_{1,2} = e^{(\alpha \pm i\beta)x}$.

Используя формулу Эйлера $e^{i\beta} = cos\beta + isin\beta$ получим:

$y_{1,2} = e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\pm i\beta x} = e^{\alpha x}(cos\beta x \pm isin\beta x)$,то есть

$$y_1 = e^{\alpha x}cos\beta x + ie^{\alpha x}sin\beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x}cos\beta x - ie^{\alpha x}sin\beta x.$$

Найдём два действительных частных решения уравнения (2.17). Для этого составим две линейные комбинации решений $y_{1,2}$,решения $\overline{y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $\overline{y_2} = \frac{y_1 - y_2}{2i}$:

$$\overline{y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{e^{\alpha x}cos\beta x + ie^{\alpha x}sin\beta x + e^{\alpha x}cos\beta x - ie^{\alpha x}sin\beta x}{2} =$$

$$= \frac{2e^{\alpha x}cos\beta x}{2} = e^{\alpha x}cos\beta,$$

$$\overline{y_2} = \frac{y_1 - y_2}{2i} = \frac{e^{\alpha x}cos\beta x + ie^{\alpha x}sin\beta x - e^{\alpha x}cos\beta x + ie^{\alpha x}sin\beta x}{2i} =$$

$$= \frac{2ie^{\alpha x}sin\beta x}{2i} = e^{\alpha x}sin\beta x.$$

Функции $\overline{y_{1,2}}$ -являются решениями уравнения (2.17) и образуют ФСР, так как $W(x) \neq 0$(убедитесь в этом самостоятельно), поэтому общее решение уравнения (2.17) запишется в виде:

$y = C_1\overline{y_1}(x) + C_2\overline{y_2}(x) = C_1e^{\alpha x}cos\beta x + C_2e^{\alpha x}sin\beta x$ или

$$\boldsymbol{y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)};$$

3. Корни уравнения (2.17) действительные, но среди них есть кратные, то есть $\boldsymbol{k_1, k_2 \epsilon R}$, $\boldsymbol{k_1 = k_2}\left(\boldsymbol{D = p^2 - 4q = 0, \frac{p^2}{4} - q = 0}, \boldsymbol{k_1, k_2} = -\frac{p}{2}\right)$.В этом случае имеется лишь одно частное решение$y_1 = e^{k_1 x}$.

Покажем, что наряду с y_1 , решением уравнения (2.17) будет и решение $y_2 = xe^{k_1 x}$.

Действительно, подставив $y'_2 = e^{k_1 x} + k_1 xe^{k_1 x}$ и

$y''_2 = k_1e^{k_1 x} + k_1e^{k_1 x} + k_1{}^2xe^{k_1 x} = 2k_1e^{k_1 x} + k_1{}^2xe^{k_1 x}$, в уравнение (2.17) имеем:

$y''_2 + py'_2 + qy_2 = 2k_1e^{k_1 x} + k_1{}^2xe^{k_1 x} + p(e^{k_1 x} + k_1xe^{k_1 x}) +$

$+qxe^{k_1 x} = e^{k_1 x}\left(2k_1 + k_1{}^2x + p + pk_1x + qx\right) =$

$= e^{k_1x}\left(x\left({k_1}^2 + pk_1 + q\right) + (p + 2k_1)\right)$, но ${k_1}^2 + pk_1 + q = 0$,так как k_1 корень уравнения (2.17), $p + 2k_1 = 0$,так как по условию$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$. Следовательно, $y''_2 + py'_2 + qy_2 = 0$, то есть функция $y_2 = xe^{k_1x}$является решением уравнения (2.17).

Они образуют ФСР (линейно независимы), так как составленный из них определитель Вронского отличен от нуля:

$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & xe^{k_1x} \\ k_1e^{k_1x} & 2k_1e^{k_1x} + {k_1}^2xe^{k_1x} \end{vmatrix} \neq 0$. В этом случае общее решение уравнения (2.17) запишется в виде $y = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$ или

$$\boldsymbol{y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}}.$$

Алгоритм решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами методом Эйлера.

Для того, чтобы найти общее решение ЛОДУ необходимо:

1)Составить характеристическое уравнение$k^2 + pk + q = 0$ для уравнения $y'' + py' + qy = 0$, для этого достаточно заменить y'', y'и y соответственно на $k^2, k, 1$;

2)Найти корни $k_{1,2}$характеристического уравнения и выписать общее решение, учитывая следующее:

а) Если $k_{1,2} \in R, k_1 \neq k_2$,то общее решение уравнения (2.17) имеет вид

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x};$$

б) Если $k_{1,2} \in R, k_1 = k_2$,то $\quad y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_2x}$;

в) Если $k_{1,2} \in C, k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$-комплексно- сопряжённые корни, то

$$y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x).$$

Замечание: аналогично составляется решение для ЛОДУ более высокого порядка.

Пример 2.9. Найти решение ДУ:

а)$y'' - 3y' + 2y = 0$;**б)** $y'' + 4y' + 4y = 0$; **в)** $y'' - 6y' + 13y = 0$;
г) $y'' + 4y = 0,\;\; y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Решение.

а) Уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$ является линейным однородным дифференциальное уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка $y'' + py' + qy = 0$, где $p = -3, q = 2$,тогда заменяя y'', y'и y соответственно на $k^2, k, 1$ получим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 3k + 2 = 0,$$

находим его корни $k_1 = 2, k_2 = 1, k_{1,2} \in R, k_1 \neq k_2$,следовательно общее решение данного уравнения имеет вид:$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$;

б) $y'' + 4y' + 4y = 0,$

$k^2 + 4k + 4 = 0,$

$(k + 2)^2 = 0,$

$k_{1,2} = -2, k_{1,2} \in R, k_1 = k_2$, тогда

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$ –общее решение;

в) $y'' - 6y' + 13y = 0,$

$k^2 - 6k + 13 = 0,$

$k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = 3 \pm 2i, \ \ \alpha = 3, \ \ \beta = 2,$

$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i, k_{1,} k_2 \in C$, тогда

$y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x);$

г) $y'' + 4y = 0, \ \ y(0) = 1, y'(0) = 2$

$k^2 + 4 = 0,$

$k^2 = -4, k^2 = 4i^2,$

$k_{1,2} = \pm 2i \ \ (\alpha = 0, \beta = 2),$

$y = e^{ox}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$-общее решение исходного уравнения, найдём его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 2$, то есть $x = 0, y = 1, y' = 2$,для этого вычислим y',

$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$,тогда

$$\begin{cases} y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \\ y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x \end{cases},$$

подставляя в полученную систему $x = 0, y = 1, y' = 2$ имеем:

$$\begin{cases} 1 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \\ 2 = -2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 \end{cases},$$

$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 2 = 2C_2, \end{cases} \ \ \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$, таким образом, частное решение имеет вид-

$y = cos\,2x + sin\,2x$.

Пример 2.10. Найти решение ДУ: **а)**$y^{V} - 6y^{IV} + 9y^{III} = 0$; **б)**$y''' - y'' - y' + y = 0$;**в)** $y^{IV} + 2y^{II} + y = 0$;**г)** $y^{IV} - y = 0$.

Решение.

а) $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$, характеристическое уравнение имеет вид:

$k^5 - 6k^4 + 9k^3 = 0$

$k^3(k^2 - 6k + 9) = 0$

$k^3 = 0, \qquad k^2 - 6k + 9 = 0,$

$k_{1,2,3} = 0\ , \qquad (k-3)^2 = 0,$

$r = 3\ , \qquad k_{4,5} = 3, r = 2,$

Имеются действительные корни $k_{1,2,3} = 0$ (кратности $r = 3$-число совпадений корней) и корни $k_{4,5} = 3$ (кратности $r = 2$) ,что соответствует рассмотренному выше случаю 3. Следовательно, общее решение имеет вид:

$y = C_1e^{ox} + C_2xe^{ox} + C_3x^2e^{ox} + C_4e^{3x} + C_5xe^{3x}$
$= C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{3x} + C_5xe^{3x}$;

б) $y''' - y'' - y' + y = 0$,

$k^3 - k^2 - k + 1 = 0$,

$k^2(k-1) - (k-1) = 0$,

$(k^2 - 1)(k-1) = 0$,

$k_{1,2} = \pm 1$, $k_3 = 1$, так как $k_{1,3} = 1$,($r = 2$) решение имеет вид:

$y = C_1e^{x} + C_2xe^{x} + C_3e^{-x}$;

в)$y^{IV} + 2y'' + y = 0$,

$k^4 + 2k^2 + 1 = 0$,

$(k^2 + 1)^2 = 0, r = 2$

$k^2 + 1 = 0$,

$k^2 = -1$,

$k^2 = i^2$,

$k_{1,2} = \pm\sqrt{i^2} = \pm i, \alpha = 0, \beta = 1 -$

уравнение имеет комплексно - сопряжённые корни кратности 2, то есть

$k_{1,2,3,4} = \pm i$.Следовательно, общее решение имеет вид:

$y = e^{ox}(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{ox}x(C_3\cos x + C_4\sin x) =$

$= C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x.$

г) $y^{IV} - y = 0,$

$k^4 - 1 = 0,$

$(k^2)^2 - 1^2 = 0,$

$(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0,$

$k_{1,2} = \pm 1,$

$k^2 = -1, k^2 = i^2, k_{3,4} = \pm\sqrt{i^2} = \pm i, \alpha = 0, \beta = 1,$

Уравнение имеет два различных действительных корня $k_{1,2} = \pm 1$

и комплексно-сопряжённые корни $k_{3,4} = \pm i$,следовательно, общее решение ДУ имеет вид:

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{0x}(C_1 cosx + C_2 sinx) =$

$= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_1 cosx + C_2 sinx.$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ).

Линейным неоднородным дифференциальным уравнение (ЛНДУ) второго порядка называется уравнением вида

$$\boldsymbol{y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)} \ (\mathbf{2.18}),$$

где $p(x), q(x), f(x)$- заданные, непрерывные функции на отрезке $[a; b]$.

Функция $f(x)$называется правой частью уравнения (2.18).

Теорема 2.7: (о структуре общего решения ЛНДУ)

Если $y_0 = y_0(x)$ -общее решение однородного ДУ $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, а $y_{чн} = y_{чн}(x)$какое-либо, произвольное, частное решение неоднородного ДУ(2.18), то общее решение соответствующего неоднородного ДУ (2.18) запишется в виде:

$$y = y_0 + y_{чн} \ (2.19)$$

Примем без доказательства.

Следствие. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ фундаментальная система

решений ДУ (2.18), то общее решение ДУ (2.18) имеет вид:

$$y = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + y_{чн}(x) \ (2.20)$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим неоднородные ДУ (2.18), в которых коэффициентами

$p(x) = p, q(x) = q$,являются постоянные числа p, q.

Такие уравнения имеют вид:

$$\boldsymbol{y'' + py' + qy = f(x)} \ \textbf{(2.21)}$$

Из теоремы 2.7 следует, что для решения этого уравнения достаточно найти общее решение соответствующего однородного уравнения y_0 и какое-нибудь частное решение данного неоднородного уравнения $y_{чн}$.

Как находится общее решение однородного уравнения мы уже знаем (см. алгоритм решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами методом Эйлера)

Рассмотрим, как отыскать частное решение если правая часть $f(x)$ уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$имеет так называемый «специальный вид»– $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x):$$

1)Если $f(x)$ имеет вид:

$$\boldsymbol{f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}} \ \textbf{(2.22)}$$

, где $\alpha \epsilon R, P_n(x)$ – многочлен степени n с определёнными коэффициентами, то уравнение (2.21) запишется в виде

$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\alpha x}$ и его частное решение $y_{чн}$,в этом случае, ищем в виде:

$$\boldsymbol{y_{чн} = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}} \ \textbf{(2.23),}$$

где r -число, показывающее, сколько раз α является корнем уравнения $k^2 + pk + q = 0$, а $Q_n(x)$- многочлен степени n, с неопределенными коэффициентами $A_i = 1,2, \dots, n$, $Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$.

Неизвестные коэффициенты A_i многочлена $Q_n(x)$ находят методом неопределенных коэффициентов. Суть метода, называемого методом неопределенных коэффициентов, состоит в следующем: по виду правой части $f(x)$ уравнения (2.21) записывают ожидаемую форму частного решения с неопределенными коэффициентами, затем подставляют его в исходное уравнение (2.21) и из полученного тождества находят значения коэффициентов;

2) Если правая часть уравнения (2.21) имеет вид:

$$\boldsymbol{f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)} \ (\mathbf{2.24})$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$-многочлены от x степеней n и m соответственно с известными коэффициентами и $\alpha, \beta \epsilon R$,то уравнение (2.22) запишется в виде

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)$$

и его частное решение $y_{чн}$следует искать в виде:

$$\boldsymbol{y_{чн} = x^r \cdot e^{\alpha x}(K_s(x)cos\beta x + L_s(x)sin\beta x)}\ (\mathbf{2.25}),$$

где r – число, показывающее, сколько раз $\alpha + i\beta$ является корнем уравнения $k^2 + pk + q = 0$. Если же число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то будем считать $r = 0$.При этом $K_s(x)$, $L_s(x)$ многочлены от переменной x степени $S = max\{n, m\}$ с некоторыми, пока неизвестными, коэффициентами. Неизвестные коэффициенты многочленов $K_s(x)$, $L_s(x)$ находят методом неопределенных коэффициентов. Поясним суть этого метода на примерах, но перед этим составим алгоритм решения таких уравнений.

Алгоритм решения ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ будем искать в виде $y = y_0 + y_{чн}$, где $y_0 = y_0(x)$-общее решение соответствующего однородного уравнения$y'' + py' + qy = 0$, а $y_{чн}$какое-либо, произвольное, частное решение неоднородного ДУ $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$,таким образом необходимо:

1)Найти общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0;$$

$y'' + py' + qy = 0$, для этого достаточно заменить y'', y'и y соответственно на k^2, k,1, то есть составить характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$, найти его корни $k_{1,2}$ и составить общее решение однородного ДУ, учитывая следующее:

а) Если $k_{1,2} \in R, k_1 \neq k_2$,то общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x};$$

б) Если $k_{1,2} \in R, k_1 = k_2$,то $\quad y_0 = C_1e^{k_1x} + C_1xe^{k_1x}$;

в) Если $k_{1,2} \in C, k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$-комплексно-сопряжённые корни, то

$$y_0 = e^{\alpha x}(C_1cos\beta x + C_2sin\beta x);$$

2)Найти частное решение$y_{чн}$ неоднородного уравнения$y'' + py' + qy = f(x)$ решения, по виду правой части $f(x)$:

а) Если $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$,то $y_{чн} = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$,где r -число корней характеристического уравнения, совпадающих с α, а $Q_n(x)$- многочлен степени n с неопределенными коэффициентами $A_i = 1,2, \dots, n$, $Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$;

б) Если $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)$,то частное решение $y_{чн}$следует искать в виде $y_{чн} = x^r \cdot e^{\alpha x}(K_s(x)cos\beta x + L_s(x)sin\beta x)$,где r –число корней характеристического уравнения, совпадающих с $\alpha + i\beta$, а $K_s(x)$, $L_s(x)$ многочлены от переменной x степени $S = max\{n, m\}$;

3)Выписать общее решение ЛНДУ с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = f(x)$, сложив y_0 и $y_{чн}$,то есть составив сумму $y = y_0 + y_{чн}$.

Пример 2.11. Построить в общем виде частное решение ЛНДУ:

а) $y'' + 14y' + 49y = 9xe^{7x}$; **б)** $y'' + 9y = 3x^2 - x$;

в)$y'' - 8y' = (3x - 2)cos5x + (x^2 + 2x)sin5x$;

г) $y'' - 2y' + 4y = (x + 5)e^x cos3x$.

Решение.

а)$y'' + 14y' + 49y = 9xe^{7x}$.Найдём общее решение соответствующего однородного ДУ:

$y'' - 14y' + 49y = 0$,

$k^2 - 14k + 49 = 0$,

$(k - 7)^2 = 0$,

$k_1 = k_2 = 7$, $k_{1,2} \in R, k_1 = k_2$,следовательно общее решение однородного уравнения имеет вид:

$y_0 = C_1e^{7x} + C_2xe^{7x}$;

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения имеет вид: $f(x) = 9xe^{7x}$,сравнивая её с видом $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, определим параметры частного решения,

$\alpha = 7 = k_1 = k_2$, следовательно $r = 2$; $P_1(x) = 9x, n = 1$,тогда

$Q_1(x) = Ax + B$. Подставляя полученные параметры в выражение

$y_{чн} = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, получим:

$y_{чн} = x^2(Ax + B)e^{7x} = (Ax^3 + Bx^2)e^{7x}$-общий вид частного решения исходного ДУ;

б) $y'' + 9y = 3x^2 - x$.Найдём общее решение соответствующего однородного ДУ:

$y'' + 9y = 0$,

$k^2 + 9 = 0$,

$k^2 = -9$,

$k^2 = (3i)^2$,

$k_{1,2} = \pm\sqrt{(3i)^2}$,

$k_{1,2} = \pm 3i$, $k_{1,2} \in C$-комплексно-сопряжённые корни, $\alpha = 0, \beta = 3$, следовательно общее решение однородного уравнения имеет вид:

$y_0 = e^{0x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$;

Найдём частное решение неоднородного уравнения.

Правая часть уравнения имеет вид: $f(x) = 3x^2 - x = (3x^2 - x)e^{0x}$,сравнивая её с видом $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, определим параметры частного решения,

$\alpha = 0 \neq k_1, k_2$, следовательно $r = 0$; $P_2(x) = 3x^2 - x, n = 2$,тогда

$Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$. Подставляя полученные параметры в выражение

$y_{чн} = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, получим:

$y_{чн} = x^0(Ax^2 + Bx + C)e^{0x} = Ax^2 + Bx + C$-общий вид частного решения исходного ДУ;

в) Найдём общее решение соответствующего однородного ДУ:

$y'' - 8y' = 0$,

$k^2 - 8k = 0$,

$k(k - 8) = 0$,

$k_1 = 0, \; k_2 = 8$,

$y_0 = C_1 e^{0x} + C_2 e^{8x} = C_1 + C_2 e^{8x}$;

Определим параметры частного решения:

Сравнивая $f(x) = (3x - 2)cos5x + (x^2 + 2x)sin5x =$

$= e^{ox}\big((3x - 2)cos5x + (x^2 + 2x)sin5x\big)$ с

$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)$, имеем

$\alpha = 0, \beta = 5, \alpha + \beta i = 5i \neq k_{1,2} \Rightarrow r = 0$,

$n = 1, P_1(x) = 3x - 2, m = 2, Q_2(x) = x^2 + 2x$,то

$S = max\{1,2\} = 2$,значит порядок искомых многочленов K, L равен 2, то есть

$K_2(x) = Ax^2 + Bx + C, L_2(x) = Dx^2 + Fx + G$, где A, B, C, D, F, G – некоторые неизвестные коэффициенты, подставляем полученные значения в выражение $y_{чн} = x^r \cdot e^{\alpha x}(K_s(x)cos\beta x + L_s(x)sin\beta x)$ имеем:

$y_{чн} = x^0 \cdot e^{0x}((Ax^2 + Bx + C) \cos 5x + (Dx^2 + Fx + G) \sin 5x)$;

Итак,$y_{чн} = (Ax^2 + Bx + C) \cos 5x + (Dx^2 + Fx + G) \sin 5x$;

г)$y'' - 2y' + 4y = (x + 5)e^x cos3x$,

$y'' - 2y' + 4y = 0$,

$k^2 - 2k + 4 = 0$,

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2},$$

$\alpha = 1, \beta = \sqrt{2},$

$y_0 = e^x\left(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}\,x\right);$

Определим параметры частного решения:

Сравнивая $f(x) = (x+5)e^x\cos 3x = e^x\left((x+5)\cos 3x + 0\sin 3\,x\right)$ с

$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, имеем

$\alpha = 1, \beta = 3, \alpha + \beta i = 1 + 3i \neq k_{1,2} \Rightarrow r = 0, n = 1, m = 0,$

$S = max\{1,0\} = 1$ значит, порядок многочленов K, L равен 1, то есть $K_1(x) = Ax + B, L_2(x) = Cx + D$, где A, B, C, D – некоторые неизвестные пока коэффициенты, подставляем наши параметры в уравнение

$y_{чн} = x^r \cdot e^{\alpha x}(K_s(x)\cos\beta x + L_s(x)\sin\beta x)$,имеем:

$y_{чн} = x^0 e^x((Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x) =$

$= e^x((Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x).$

Пример 2.12. Найти общее решение уравнения:

а)$y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$;**б)** $y'' - 2y' + y = (6x+1)e^x$;

в)$y'' - 9y' = x^2 - x + 1$;**г)**$y'' + y = 4\sin x$.

Решение.

а) Уравнение$y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$ является линейным неоднородным дифференциальное уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка$y'' + py' + qy = f(x)$,где $p = -3, q = 2, f(x) = 10e^{-x}$.

1)Найдём общее решение соответствующего однородного ДУ:

$y'' - 3y' + 2y = 0,$

$k^2 - 3k + 2 = 0,$

$k_1 = 2, k_2 = 1, k_{1,2} \in R, k_1 \neq k_2$,следовательно общее решение ОДУ имеет вид:

$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^x;$

2)Найдём частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения имеет вид: $f(x) = 10e^{-x}$,сравнивая её с видом $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ определим параметры частного решения, $\alpha = -1 \neq k_1 \neq k_2$,следовательно $r = 0, n = 0,$

$P_0(x) = 10,$ тогда $Q_0(x) = A.$

Подставляя полученные параметры в выражение $y_{чн} = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, получаем:

$y_{чн} = x^0 \cdot Q_0(x) \cdot e^{-x} = Ae^{-x};$

Коэффициент A определим из условия, что функция $y_{чн}$,должна быть решением уравнения$y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$, поэтому должна ему удовлетворять.

Для этого найдем, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$: $y'_{чн} = -Ae^{-x}$, $y''_{чн} = Ae^{-x}$ и подставим в исходное уравнение:

$Ae^{-x} + 3Ae^{-x} + 2Ae^{-x} = 10e^{-x}$,

$6Ae^{-x} = 10e^{-x} | : e^{-x}$,

$6A = 10, A = \frac{5}{3}$, следовательно, $y_{чн} = \frac{5}{3}e^{-x}$.

3)Таким образом, общее решение исходного неоднородного ДУ имеет вид:

$y = y_0 + y_{чн} = C_1e^{2x} + C_2e^{x} + \frac{5}{3}e^{-x}$;

б) $y'' - 2y' + y = (6x+1)e^{x}$-ЛНДУ уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка.

1)Находимy_0:

$y'' - 2y' + y = 0$,

$k^2 - 2k + 1 = 0$,

$(k-1)^2 = 0$

$k_{1,2} = 1$, следовательно $y_0 = C_1e^{x} + C_2xe^{x}$;

2)Находим $y_{чн}$:

$f(x) = (6x+1)e^{x} = P_1(x) \cdot e^{1 \cdot x}, \alpha = 1 = k_1 = k_2$,следовательно

$r = 2,\ n = 1,\ P_1(x) = 6x + 1$,тогда $Q_1(x) = Ax + B$,

$y_{чн} = x^2(Ax + B)e^{x} = (Ax^3 + Bx^2)e^{x}$,

$y'_{чн} = (3Ax^2 + 2Bx)e^{x} + (Ax^3 + Bx^2)e^{x} =$

$= (Ax^3 + 3Ax^2 + Bx^2 + 2Bx)e^{x}$;

$y''_{чн} = (3Ax^2 + 6Ax + 2Bx + 2B)e^{x} + (Ax^3 + 3Ax^2 + Bx^2 + 2Bx)e^{x} =$

$= (Ax^3 + 6Ax^2 + Bx^2 + 6Ax + 4Bx + 2B)e^{x}$;

Подставим в исходное уравнение $y_{чн}, y'_{чн}, y''_{чн}$:

$(Ax^3 + 6Ax^2 + Bx^2 + 6Ax + 4Bx + 2B)e^{x} - 2(Ax^3 + 3Ax^2 + Bx^2 + 2Bx)e^{x} +$

$+(Ax^3 + Bx^2)e^{x} = (6x+1)e^{x}$;

Поделив обе части уравнения на e^{x} и упрощая выражение, получим:

$Ax^3 + 6Ax^2 + Bx^2 + 6Ax + 4Bx + 2B - 2Ax^3 -$

$-6Ax^2 - 2Bx^2 - 4Bx + Ax^3 + Bx^2 = 6x + 1$,

$6Ax + 2B = 6x + 1$,

$\begin{matrix} x^1: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} 6A = 6 \\ 2B = 1 \end{cases}; \begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$, следовательно $y_{чн} = \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{x}$.

3)Таким образом, $y = C_1e^x + C_2e^x x + \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^x$;

в)$y'' - 9y' = x^2 - x + 1$ –ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами;

1)Находим y_0:

$y'' - 9y' = 0,$

$k^2 - 9k = 0,$

$k(k-9) = 0,$

$k_1 = 0, k_2 = 9, k_{1,2} \in R, k_1 \neq k_2,$

$y_0 = C_1e^{0x} + C_2e^{9x} = C_1 + C_2e^{9x};$

2)Находим $y_{чн}$:

$f(x) = x^2 - x + 1 = (x^2 - x + 1)e^{ox},$

$\alpha = 0 = k_1 \neq k_2 \Rightarrow r = 1,$

$P_2(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, тогда

$y_{чн} = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$имеет вид:

$y_{чн} = x^1 \cdot (Ax^2 + Bx + C)e^{ox} = Ax^3 + Bx^2 + Cx,$

$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx + C, y''_{чн} = 6Ax + 2B.$

Находим коэффициентыA, B, C,подставляя $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ в исходное уравнение :

$6Ax + 2B - 9(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 - x + 1,$

$-27Ax^2 + 6Ax - 18Bx + 2B - 9C = x^2 - x + 1,$

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} -27A = 1 \\ 6A - 18B = -1 \\ 2B - 9C = 1 \end{cases}; \begin{cases} A = -\frac{1}{27} \\ 6\left(-\frac{1}{27}\right) - 18B = -1 \\ 2B - 9C = 1 \end{cases}; \begin{cases} A = -\frac{1}{27} \\ B = \frac{7}{162} \\ 2 \cdot \frac{7}{162} - 9C = 1 \end{cases};$$

$\begin{cases} A = -\frac{1}{27} \\ B = \frac{7}{162} \\ C = -\frac{74}{729} \end{cases}$, следовательно $y_{чн} = -\frac{1}{27}x^3 + \frac{7}{162}x^2 - \frac{74}{729}x;$

3) Таким образом,$y = C_1 + C_2e^{9x} - \frac{1}{27}x^3 + \frac{7}{162}x^2 - \frac{74}{729}x.$

г)$y'' + y = 4\sin x$ –ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами;

1)Находим y_0:

$y'' + y = 0,$

$k^2 + 1 = 0,$

$k^2 = -1,$

$k^2 = i^2$,

$k_{1,2} = \pm i, \alpha = 0, \beta = 1$,

$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$;

2)Находим $y_{чн}$:

Сравнивая $f(x) = 4 \sin x = e^{ox}(0cosx + 4 \sin x)$ с

$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)$, имеем

$\alpha = 0, \beta = 1, \alpha + \beta i = i = k_1 \Rightarrow r = 1, n, m = 0$,

$S = max\{0{,}0\} = 0$ значит, степень многочленов K, L равна 0, то есть $K_0 = A, L_0 = B$, подставляем наши параметры в равенство

$y_{чн} = x^r \cdot e^{\alpha x}(K_s(x)cos\beta x + L_s(x)sin\beta x)$ имеем:

$y_{чн} = xe^{0x}(A \cos x + B \sin x) = x(A \cos x + B \sin x)$,

$y'_{чн} = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x)$,

$y''_{чн} = -A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x +$

$+x(-A \cos x - B \sin x) = -\,2Asinx + 2Bcosx -$

$-Axcosx - Bxsinx$;

Подставляя в исходное уравнение $y_{чн}$, $y''_{чн}$ находимA, B, C:

$-2A \sin x + 2B \cos x - Axcosx - Bxsinx + x(A \cos x + B \sin x) = 4 \sin x$,

$2B \cos x - 2A \sin x = 4 \sin x$,

$\cos x: 2B = 0, B = 0$,
$sinx: -2A = 4, A = -2$;

Следовательно,$y_{чн} = -2x \cos x$;

3)$y = y_0 + y_{чн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x \cos x$.

Теорема 2.8. (о наложении решении). Если правая часть уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ представляет собой сумму двух функций, то есть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а $y_{чн1}$,$y_{чн2}$- частные решения уравнений $y'' + p_1(x)y' + q_1(x)y = f_1(x)$ и $y'' + p_2(x)y' + q_2(x)y = f_2(x)$ соответственно, то функция $y_{чн} = y_{чн1} + y_{чн2}$ является решением данного уравнения.

Примем без доказательства.

Пример 2.13. Найти общее решение линейного неоднородного ДУ:

а) $y'' - 2y' + y = sinx + e^{-x}$;**б)**$y'' - y' = 3x^2 - 1 + 5e^{-4x}$.

Решение.

а) 1) Найдём общее решение соответствующего однородного ДУ, то есть y_0:

$y'' - 2y' + y = 0,$

$k^2 - 2k + 1 = 0,$

$(k-1)^2 = 0,$

характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0, (k-1)^2 = 0$,имеет один двухкратный корень $k = 1$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x$;

2)Найдём $y_{чн}$:

Так как правая часть исходного уравнения представляет собой сумму двух функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$специального вида, $f_1(x) = sinx$,

$f_2(x) = e^{-x}$, частное решение ищем в виде$y_{чн} = y_{чн1} + y_{чн2}$,

где $y_{чн1}$— частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = sinx$,

$y_{чн2}$— частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = e^{-x}$.

Найдем$y_{чн1}$:

так как $f_1(x) = sinx = e^{0x}(0 \cdot cosx + 1 \cdot sinx)$,

$\alpha = 0, \beta = 1, \alpha + \beta i = i \neq k_{1,2}$, следовательно,

$r = 0$,поэтому$y_{чн1} = Acosx + Bsinx$,

Подставляя $y_{чн1} = Acosx + Bsinx, y_{чн1}{}' = -Asinx + Bcosx$,

$y_{чн1}{}'' = -Acosx - Bsinx$ в уравнение $y'' - 2y' + y = sinx$ и сравнивая коэффициенты при $cosx$ и$sinx$ в правой и левой частях тождества, находим A, B:

$-Acosx - Bsinx + 2Asinx - 2Bcosx + Acosx + Bsinx = sinx,$

$$2Asinx - 2Bcosx = sinx$$

$cos\,x: -2B = 0, B = 0;$

$sinx: 2A = 1, A = \frac{1}{2}.$

Итак,$B = 0, A = \frac{1}{2}$,следовательно$y_{чн1} = \frac{1}{2}cosx$.

Размышляя аналогично, находим частное решение $y_{чн2}$ для уравнения $y'' - 2y' + y = e^{-x}$, а именно,$f_2(x) = e^{-x}$,

$\alpha = -1 \neq k_1, k_2 \Rightarrow r = 0,$ тогда $y_{чн2} = Ce^{-x}$, $y'_{чн2} = -Ce^{-x}$, $y''_{чн2} = Ce^{-x}$,подставляя эти значения в уравнение $y'' - 2y' + y = e^{-x}$имеем:

$Ce^{-x} + 2Ce^{-x} + Ce^{-x} = e^{-x}, 4Ce^{-x} = e^{-x}, 4C = 1, C = \frac{1}{4},$

следовательно, $y_{чн2} = \frac{1}{4}e^{-x}$.Итак, $y_{чн} = y_{чн1} + y_{чн2} = \frac{1}{2}cosx + \frac{1}{4}e^{-x}$.

3)Таким образом,

$y = y_0 + y_{чн} = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{2}cosx + \frac{1}{4}e^{-x}$-общее решение исходного уравнения;

б)$y'' - y' = 3x^2 - 1 + 5e^{-4x}$.

1)Найдём общее решение соответствующего однородного ДУ:

$y'' - y' = 0$,

$k^2 - k = 0$,

$k(k-1) = 0$,

$k_1 = 0, k_2 = 1, k_{1,2} \in R, k_1 \neq k_2$,

$y_0 = C_1e^{0x} + C_2e^{1x} = C_1 + C_2e^x$;

2)Правая часть исходного уравнения представляет собой сумму двух функций, то есть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$,где $f_1(x) = 3x^2 - 1 = e^{ox}(3x^2-1), f_2(x) = 5e^{-4x}$, таким образом, частное решение имеет вид $y_{чн} = y_{чн1} + y_{чн2}$;

Найдем$y_{чн1}$:

$f_1(x) = 3x^2 - 1 = e^{ox}(3x^2-1), \alpha = 0 = k_1 \neq k_2 \Rightarrow r = 1, \quad P_2(x) = 3x^2 - 1$,

$Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$,следовательно,

$y_{чн1} = x^1 \cdot (Ax^2 + Bx + C)e^{ox} = Ax^3 + Bx^2 + Cx$,

$y'_{чн1} = 3Ax^2 + 2Bx + C$,

$y''_{чн1} = 6Ax + 2B$, подставляя $y''_{чн1}$, $y'_{чн1}$в уравнение

$y'' - y' = 3x^2 - 1$ имеем:

$6Ax + 2B - 3Ax^2 - 2Bx - C = 3x^2 - 1$,

$$\begin{matrix} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} -3A = 3 \\ 6A - 2B = 0 \\ 2B - C = -1 \end{cases}, \begin{cases} A = -1 \\ 6(-1) - 2B = 0 \\ 2B - C = -1 \end{cases}, \begin{cases} A = -1 \\ B = -3 \\ C = -5 \end{cases},$$

следовательно, $y_{чн1} = -x^3 - 3x^2 - 5x$,

Найдём частное решение неоднородного уравнения $y'' - y' = 5e^{-4x}$,то есть $y_{чн2}$,правая часть уравнения имеет вид: $f_2(x) = 5e^{-4x}$,сравнивая её с видом $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$имеем:

$\alpha = -4 \neq k_1 \neq k_2$, следовательно $r = 0, P_0(x) = 5,\ Q_0(x) = D$.

Подставляя полученные параметры в выражение$y_{чн} = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, получаем:

$y_{чн2} = x^0De^{-4x} = De^{-4x}$;

Коэффициент D определим из условия, что функция $y_{чн2}$,должна быть решением уравнения $y'' - y' = 5e^{-4x}$и поэтому должна ему удовлетворять.

Найдем, $y'_{чн2}$, $y''_{чн2}$:

$y'_{чн2} = -4De^{-4x}$, $y''_{чн2} = 16De^{-4x}$.

Подставляя $y'_{чн2}$, $y''_{чн2}$в уравнение$y'' - y' = 5e^{-4x}$, имеем:

$16De^{-4x} + 4De^{-4x} = 5e^{-4x}$,

$20De^{-4x} = 5e^{-4x}|: 20e^{-4x}$,

$D = \frac{1}{4}$, следовательно, $y_{чн2} = \frac{1}{4}e^{-4x}$.

3)Таким образом,

$y = C_1 + C_2e^x - x^3 - 3x^2 - 5x + \frac{1}{4}e^{-4x}$ –общее решение исходного ДУ.

Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа) для решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами.

Метод Лагранжа— метод для получения общего решения неоднородного уравнения, зная общее решение однородного уравнения, без нахождения частного решения.

Рассмотрим ЛНДУ $y'' + py' + qy = f(x)$ как известно общим решением такого уравнения является функция $y = y_0 + y_{чн}$,зададимся вопросом, как иначе найти общее решение данного уравнения, если правая часть $f(x)$ уравнения не имеет так называемый «специальный вид», например, если $f(x) = \frac{1}{cosx}$,такие уравнения можно решить методом вариации произвольной постоянной(метод Лагранжа), который заключается в следующем:

1)Находимy_0:

общее решениеy_0 соответствующего однородного уравнения

$y'' + py' + qy = 0$, как было показано ранее, можно представить в виде линейной комбинации двух линейно независимых решений, то есть $y_0 = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$;

2) Находим$y_{чн}$:

заменяя в решении $y_0 = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$постоянные C_1 и C_2неизвестными функциями $C_1(x), C_2(x)$будем искать частное решение неоднородного уравнения$y'' + py' + qy = f(x)$ в виде:

$$y_{чн} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

где коэффициенты $C_1(x), C_2(x)$ при частных решениях $y_1(x), y_2(x)$, есть некоторые неизвестные функции, то есть вместо постоянных величин будем рассматривать переменные.

Определим их, подставляя функцию $y_{чн}$, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$

в исходное уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$.

Для этого вычислим $y'_{чн}$, $y''_{чн}$:

$$y_{чн} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

$$y'_{чн} = C_1{}'(x) \cdot y_1(x) + C_1(x) \cdot y_1{}'(x) + C_2{}'(x) \cdot y_2(x) + C_2(x) \cdot y_2{}'(x).$$

Подберём функции $C_1(x), C_2(x)$ так, чтобы $C_1{}'(x)y_1(x) + C_2{}'(x)y_2(x) = 0$,

тогда $y'_{чн} = C_1(x) \cdot y_1{}'(x) + C_2(x) \cdot y_2{}'(x)$.

Вычислим вторую производную:

$$y''_{чн} = C_1{}'(x) \cdot y_1{}'(x) + C_1(x) \cdot y_1''(x) + C_2{}'(x) \cdot y_2{}'(x) + C_2(x) \cdot y_2''(x).$$

Подставляя выражения для $y_{чн}, y'_{чн}, y''_{чн}$ в уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$ имеем:

$$C_1{}'(x) \cdot y_1{}'(x) + C_1(x) \cdot y_1''(x) + C_2{}'(x) \cdot y_2{}'(x) + C_2(x) \cdot y_2''(x) +$$

$$+p\big(C_1(x) \cdot y_1{}'(x) + C_2(x) \cdot y_2{}'(x)\big) + q(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)) = f(x)$$

или $C_1(x)[\, y_1''(x) + py_1{}'(x) + qy_1(x)] + C_2(x)[\, y_2''(x) + py_2{}'(x) + qy_2(x)] +$

$$+C_1{}'(x) \cdot y_1{}'(x) + C_2{}'(x) \cdot y_2{}'(x) = f(x).$$

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$- решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$, то выражения в квадратных скобках равны нулю, отсюда

$$C_1{}'(x) \cdot y_1{}'(x) + C_2{}'(x) \cdot y_2{}'(x) = f(x)$$

Таким образом, функция $y_{чн} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ будет частным решением уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$, если функции $C_1(x), C_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{C_1{}'(x)y_1(x) + C_2{}'(x)y_2(x) = 0} \\ \boldsymbol{C_1{}'(x) \cdot y_1{}'(x) + C_2{}'(x) \cdot y_2{}'(x) = f(x)} \end{cases} \quad \boldsymbol{(2.26)}$$

Определитель основной матрицы системы $W = W(y_1;\, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1{}'(x) & y_2{}'(x) \end{vmatrix}$

является определителем Вронского для функций y_1, y_2.

Так как функции y_1, y_2, линейно независимы, определитель Вронского не равен нулю $W \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение $C_1(x), C_2(x)$, которое можно получить, например, методом Крамера, затем по формуле $y_{чн} =$

$C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ составляем частное решение уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$.

3) Находим y :отметим, что общее решение неоднородного уравнения, то есть y представляется (как должно и быть) в виде суммы общего решения однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного: $y = y_0 + y_{чн}$.

Запишем краткий алгоритм метода Лагранжа.

Алгоритм метод вариации произвольных постоянных:

1.Находим общее решение соответствующего однородного уравнения y_0:

$y_0 = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$;

2.Находим частное решениесоответствующего неоднородного уравнения $y_{чн}$:

ищем частное решение $y_{чн}$ в виде

$y_{чн} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$,где функции $C_1(x), C_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} C_1{}'(x)y_1(x) + C_2{}'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1{}'(x) \cdot y_1{}'(x) + C_2{}'(x) \cdot y_2{}'(x) = f(x) \end{cases}$;

3.Записываем общее решение соответствующего неоднородного уравнения y:

$y = y_0 + y_{чн}$.

Пример 2.14. Решить ДУ методом вариаций произвольной постоянной:

а) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 1, y'(0) = 0$; **б)** $y'' - 2y' = 4xe^{-2x}$; **в)** $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$.

Решение.

а) 1) Находим общее решение соответствующего однородного уравнения,то есть y_0:

$y'' + y = 0,$

$k^2 + 1 = 0,$

$k^2 = -1,$

$k^2 = i^2,$

$k_{1,2} = \pm i, \alpha = 0, \beta = 1$,следовательно,

$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где $y_1(x) = \cos x,\ \ y_2(x) = \sin x$;

2) Находим частное решение соответствующего неоднородного уравнения $y_{чн}$:

$y_{чн} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$

составляем систему уравнений $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases}$ для определения функций $C_1(x), C_2(x)$, в нашем случае система имеет вид:

$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$, решаем полученную систему относительно $C_1'(x)$,$C_2'(x)$ методом Крамера, то есть по формулам

$C_i'(x) = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1{,}2$:

$\Delta = \begin{vmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{vmatrix} = cos^2x + sin^2x = 1 \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & sinx \\ \frac{1}{\cos x} & cosx \end{vmatrix} = -\frac{sinx}{cosx} = -tgx,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} cosx & 0 \\ -sinx & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = \frac{cosx}{cosx} = 1,$$ следовательно,

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-tgx}{1} = -tgx, C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1;$$

Находим $C_1(x), C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\int tgxdx = -\int \frac{sinx}{cosx}dx = \int \frac{d(cosx)}{cosx} = ln\,|\cos x|,$$

$$C_2(x) = \int dx = x.$$

Записываем частное решение $y_{чн}$,подставляя найденные функции $C_1(x) = ln\,|\cos x|$, $C_2(x) = x$ в равенство $y_{чн} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$.

Итак, $y_{чн} = \cos x\, ln\,|\cos x| + x\sin x$

3)Записываем общее решение ЛНДУ:

$$y = y_0 + y_{чн} = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\, ln\,|\cos x| + x\sin x.$$

Найдём частное решение, для этого вычислим

$$y' = -C_1\sin x + C_2\cos x - \sin x\, ln\,|\cos x| +$$

$$+\cos x\frac{(-sinx)}{cosx} + \sin x + xcosx$$ или

$$y' = -C_1\sin x + C_2\cos x - \sin x\, ln|\cos x| + xcosx.$$

Получим систему:

$$\begin{cases} y' = -C_1\sin x + C_2\cos x - \sin x\, ln|\cos x| + xcosx \\ y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\, ln\,|\cos x| + x\sin x \end{cases};$$

При $y = 1, y' = 0, x = 0$ имеем:

$\begin{cases} -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 - \sin 0 \ln|\cos 0| + 0\cos 0 = 0 \\ C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \cos 0 \ln|\cos 0| + 0 \sin 0 = 1 \end{cases}$,

$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 1 \end{cases}$,следовательно, частное решение имеет вид

$y = \cos x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$;

б) 1) Находим y_0:

$y'' + 2y' = 4xe^{-2x}$,

$y'' + 2y' = 0$,

$k^2 + 2k = 0$,

$k_1 = 0, k_2 = -2$,

$y_0 = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-2x} = C_1 + C_2 e^{-2x}$, где $y_1(x) = 1, y_2(x) = e^{-2x}$;

2)Находим $y_{чн}$:

$y_{чн} = C_1(x) + C_2(x)e^{-2x}$, составляем систему уравнений для определения функций $C_1(x), C_2(x)$:

$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases}$, так как $y_1'(x) = 0$,

$y_2'(x) = -2e^{-2x}$,$f(x) = 4xe^{-2x}$, получим:

$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ C_1'(x) \cdot 0 - 2C_2'(x)e^{-2x} = 4xe^{-2x} \end{cases}$; $\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)e^{-2x} \\ C_2'(x) = -2x \end{cases}$.

Решаем эту систему относительно $C_1'(x)$,$C_2'(x)$ методом подстановки, подставляя $C_2'(x) = -2x$ в первое уравнение системы, вычислим $C_1'(x) = 2xe^{-2x}$.

Находим $C_1(x), C_2(x)$:

$$C_1(x) = 2\int xe^{-2x}dx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dV = e^{-2x}dx, V = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right) = -xe^{-2x} + \int e^{-2x}dx = -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x};$$

$C_2(x) = -2\int x dx = -x^2$.Записываем

частное решение $y_{чн}$:

$$y_{чн} = C_1(x) + C_2(x)e^{-2x} = -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - x^2e^{-2x} =$$

$$= -e^{-2x}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right);$$

3)Записываем общее решение исходного уравнения y:

$y = y_0 + y_{чн} = C_1 + C_2e^{-2x} - xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - x^2e^{-2x}$или

$y = C_1 + C_2 e^{-2x} - e^{-2\,x}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right);$

в)$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$.

1)Находимy_0:

$y'' + 3y' + 2y = 0,$

$k^2 + 3k + 2 = 0,$

$k_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2},$

$k_1 = -1, k_2 = -2,$

$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}, y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = e^{-2x},$

2)Находим$y_{чн}$:

$y_{чн} = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x}$, получим следующую систему для определения$C_1(x), C_2(x)$:

$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ -C_1'(x)e^{-x} - 2C_2'(x)e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1} \end{cases}$, решаем эту систему

относительно $C_1{}'(x)$,$C_2{}'(x)$подстановкой, выразим из первого уравнения $C_1'(x)$,имеем $C_1'(x)e^{-x} = -C_2'(x)e^{-2x}, C_1'(x) = -C_2'(x)e^{-x}$.подставляя полученное значение для$C_1'(x)$ во второе уравнение системы имеем:

$C_2'(x)e^{-2x} - 2C_2'(x)e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1},$

$-C_2'(x)e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1},$

$C_2'(x) = \frac{-1}{(e^x+1)e^{-2x}} = -\frac{e^{2x}}{e^x+1}$. Тогда,

$C_2(x) = -\int \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}dx = -\int \dfrac{((e^x+1)-1)e^x}{e^x+1}dx =$

$-\int(e^x - \frac{e^x}{e^x+1})dx = -e^x + \int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = -e^x + ln(e^x+1);$

Учитывая, что $C_1'(x) = -C_2'(x)e^{-x}$,найдём

$C_1'(x) = -\left(-\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}\right)e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x+1};$

$C_1(x) = \int \dfrac{e^x}{e^x+1}dx = \int \dfrac{d(e^x+1)}{e^x+1} = ln(e^x+1)\,;$

Записываем$y_{чн}$:

$y_{чн} = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x} = e^{-x}ln(e^x+1) + \left(-e^x + ln(e^x+1)\right)e^{-2x};$

3)Записываем общее решение y:

$$y = y_0 + y_{чн} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + e^{-x}ln(e^x+1) +$$
$$+\left(-e^x + ln(e^x+1)\right)e^{-2x}.$$

Задания для самостоятельного решения

5. Решить дифференциальные уравнения допускающие понижения порядка:

1	$y^{IV} = cos^2x$	**11**	$y''(x^2+1) = 2xy'$
2	$y'' + y'tgx = sin2x$	**12**	$3y' \cdot y'' = 2y, y(0) = 1,$ $y'(0) = 1$
3	$y'' = xlnx, y(1) = 1,$ $y'(1) = 0$	**13**	$y'' - y'ctgx = 2xsinx$
4	$4y''\sqrt{y} = 1, y(0) = 1,$ $y'(0) = -1$	**14**	$xy'' = y'ln\frac{y'}{x}$
5	$y'' \cdot y + 1 = (y')^2$	**15**	$y'' = y' + x$
6	$y''' = x^2 + sin2x$	**16**	$xy'' + y' + x = 0$
7	$y'' = 2x + cos\frac{x}{2} - 1,$ $y(0) = 1, y'(0) = 1$	**17**	$y''tgx - y' - 1 = 0$
8	$y'' + \frac{y'}{x} = 0$	**18**	$y''y^3 = -1, y(1) = -1,$ $y'(1) = -1$
9	$y'' = \frac{1}{1+x^2} + x - sinx,$ $y(0) = 1, y'(0) = 1$	**19**	$2xy'y'' = (y')^2 + 1$
10	$y'' = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 2cosx$	**20**	$(x+1)y'' = y' - 1, y(1) = 0,$ $y'(1) = 1$

Ответы:5.1.$y = \frac{x^4}{48} + \frac{1}{32}cos2x + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4;$

5.2.$y = -x - \frac{1}{2}sin2x + C_1sinx + C_2;$**5.3.**$y = \frac{x^3}{6}lnx - \frac{5x^3}{36} + \frac{x}{4} + \frac{8}{9};$**5.4.** $y = \left(1 - \frac{3}{4}x\right)^{\frac{4}{3}};$

5.5.$ln\left|C_1y + \sqrt{(C_1y)^2+1}\right| = \pm x + C_2;$**5.6.** $y = \frac{x^5}{60} + \frac{1}{8}cos2x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3;$

5.7. $y = \frac{x^3}{3} - 4cos\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + x + 5;$**5.8.**$y = C_1\frac{x^2}{2} + C_2;$**5.9.**$y = xarctgx + \frac{1}{2}ln(x^2+1) +$
$\frac{x^3}{6} + sinx + 1;$**5.10.** $y = xlnx - x + 3lnx + 2cosx + C_1x + C_2;$ **5.11.**$y = C_1\left(\frac{x^3}{3} + x\right) + C_2;$

5.12. $y = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^3;$**5.13.** $y = 2xsinx - x^2cosx + 2cosx - C_1cosx + C_2;$

5.14. $\frac{1}{C_1}x\,e^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1{}^2}e^{C_1x+1}+C_2$; **5.15.** $y=-\frac{x^2}{2}-x+C_1x+C_2$;

5.16. $y=-\frac{x^2}{4}+C_1 lnx+C_2$; **5.17.** $y=-C_1 cosx-x+C_2$; **5.18.** $y=-\sqrt{2x-1}$;

5.19. $y=\pm\frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3}+C_2$; **5.20.** $y=x-1$.

6. Найти решение ЛНДУ с постоянными коэффициентами методом Эйлера:

1	$y''+10y'+25y=0$	**11**	$y''+4y'+3y=0$
2	$y'''-100y'=0$	**12**	$y''+2y'+10y=0$
3	$y''-7y'+12y=0$	**13**	$y'''-27y=0$
4	$y'''+64y'=0$	**14**	$y''-8y'+20y=0$
5	$y''-2y'+2y=0$	**15**	$y''-6y'+9y=0,$ $y(0)=1, y'(0)=7$
6	$y^{IV}+2y'''-2y''-y=0$	**16**	$4y''-4y'+y=0$
7	$3y''-2y'-8y=0$	**17**	$y''+2y'+5y=0$
8	$4y''-20y'+25y=0$	**18**	$y'''-y''-y'+y=0$
9	$y''+y'-2y=0$	**19**	$y''+\pi^2y=0,$ $y(0)=0, y'(1)=-\pi^2$
10	$y''-4y'+5y=0$	**20**	$y''-3y'+2y=0,$ $y(0)=1, y'(0)=-1$

Ответы: 6.1. $y=C_1e^{-5x}+C_2xe^{-5x}$; **6.2.** $y=C_1+C_2e^{10x}+C_3e^{-10x}$;

6.3. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$; **6.4.** $y=C_1e^{-5x}+C_2cos8x+C_3sin8x$;

6.5. $y=e^x(C_1cosx+C_2sinx)$; **6.6.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}+C_4x^2e^{-x}$;

6.7. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$; **6.8.** $y=(C_1+C_2x)e^{\frac{5x}{2}}$; **6.9.** $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$;

6.10. $y=e^{2x}(C_1cosx+C_2sinx)$; **6.11.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$;

6.12. $y=e^{-x}(C_1cos3x+C_2sin3x)$; **6.13.** $y=C_1e^{3x}+e^{-\frac{3x}{2}}\left(C_2cos\frac{3\sqrt{3}}{2}x+C_3sin\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)$;

6.14. $y=e^{-5x}(C_1cos2x+C_2sin2x)$; **6.15.** $y=e^{3x}+4xe^{3x}$;

6.16. $y=C_1e^{-\frac{1}{2}x}+C_2xe^{-\frac{1}{2}x}$; **6.17.** $y=e^{-x}(C_1cos2x+C_2sin2x)$;

6.18. $y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{-x}$; **6.19.** $y=\pi sin\pi x$; **6.20.** $y=3e^x-2e^{2x}$.

7. Найти общие решения линейных неоднородных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами**,** с правой частью специального вида:

1	$y'' - 2y' + 5y = e^x cos2x$	**11**	$y'' + 4y = 4sin2x$
2	$y'' - 6y' + 25y = 2sinx + 3cosx$	**12**	$y'' - 2y' - 3y = 4xe^x$, $y(0) = 2, y'(0) = -1$
3	$y'' - 4y = e^{2x} sin2x$	**13**	$y'' - 2y' + y = 8e^{3x}$, $y(0) = 3, y'(0) = 6$
4	$y'' - y = 2sinx - 4cosx$	**14**	$y'' - 5y' = sin5x$
5	$y'' - 2y' + y = 6e^x$	**15**	$y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$
6	$y'' - y = x^2 - x + 1$	**16**	$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$
7	$y'' + 6y' + 9y = (x-2)e^{-3x}$	**17**	$y'' - 4y = 8x^2$
8	$y'' - 9y = e^{3x} cosx$	**18**	$y'' + y = -8cosx$
9	$y'' - 5y' + 6y = 12sin3x$	**19**	$y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^x$;
10	$y'' - 7y' + 6y = sinx$	**20**	$y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$

Ответы: 7.1. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}(3sin2x + cos2x)$;**7.2.** $y = (C_1 cos4x + C_2 sin4x)e^{3x} + \frac{1}{102}(5sinx + 14cosx)$;**7.3.** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20}(sin2x + 2cos2x)$;**7.4.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - sinx + 2cosx$; **7.5.** $y = C_1 e^x + C_2 xe^x + 3x^2 e^x$;
7.6. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 + x - 3$; **7.7.** $y = C_1 e^{-3x} + C_2 xe^{-3x} + \left(\frac{1}{6}x^3 - x^2\right)e^{-3x}$;
7.8. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} + e^{3x}\left(\frac{6}{37}sin2x - \frac{1}{37}cosx\right)$;**7.9.** $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{13}sinx + \frac{10}{13}cosx$; **7.10** $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + \frac{7}{74}cosx + \frac{5}{74}sinx$; **7.11.** $y = C_1 cos2x + C_2 sin2x - xcos2x$; **7.12.** $y = \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{3x} - xe^x$; **7.13.** $y = e^x - xe^x + 2e^{3x}$;
7.14. $y = C_1 + C_2 e^{5x} + \frac{1}{50}cos5x - \frac{1}{50}sin5x$; **7.15.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{3}e^{-x}$;
7.16. $y = C_1 e^{2x} + C_2 xe^{2x} + x^2 e^{2x}$; **7.17.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x^2 - 1$;
7.18. $y = C_1 \cos x + C_2 sinx + cos3x$;**7.19.** $y = C_1 e^x + C_2 xe^x + \frac{x^2}{2}e^x + \frac{x^4}{12}e^x$;
7.20. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 + x - 3$.

8. Методом вариации произвольных постоянных решить уравнение:

1	$y'' + 4y = \frac{1}{cos\,2x}$	**11**	$y'' + y + ctg^2 x = 0$

2	$y'' - y = \frac{4x^2+1}{x\sqrt{x}}$	12	$y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$
3	$y'' - 2y' + y = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$	13	$y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$
4	$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$	14	$4y'' + y = \frac{4}{\cos\frac{x}{2}}$
5	$y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$	15	$2y'' + y' - y = 2e^x$
6	$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$;	16	$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}$
7	$y'' + 4y = 2tgx$	17	$y'' - 6y + 9y = 2x^2 - x + 3$
8	$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$	18	$y'' - 3y + 2y = 2e^x - e^{-2x}$
9	$y'' - y' = \frac{1}{e^x+1}$	19	$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$
10	$y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{e^{2x}+1}$	20	$y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x)$

Ответы:8.1. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\, ln|\cos 2x| + \frac{1}{2}x\sin 2x$;

8.2. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 4\sqrt{x}$;**8.3.** $y = e^x(C_1 + C_2x) + \frac{1}{x}$;**8.4.** $y = e^x(xln|x| + C_1x + C_2)$;**8.5.** $y = C_1 + C_2x + \sqrt{1-e^{2x}} + e^x arcsinx$;**8.6.** $y = (C_1 + ln|\sin x|)\sin x + (C_2 - x)\cos x$;**8.7.** $y = \sin 2x\, ln|\cos x| - x\cos 2x + C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$;

8.8. $y = e^{-x}\left(\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C_1 + C_2x\right)$;**8.9.** $y = C_1e^x + C_2 + (e^x+1)ln(1 + e^{-x})$;**8.10.** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-2x}(ln(1+e^{2x}) - e^{-2x} + e^{-3x}arctge^x)$;

8.11. $y = C_1\sin x + C_2\cos x + ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\cos x + 2$;**8.12.** $y = \frac{1}{3}(1-e^{2x})^{\frac{3}{2}} + C_1 + e^x(\frac{e^x}{2}\sqrt{1-e^{2x}} + \frac{1}{2}\arcsin e^x + C_2)$;**8.13.** $y = C_1e^x + C_2 - \cos e^x$;**8.14.** $y = C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2} + 4\cos 2x ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$;**8.15.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{x}{2}} + e^x$;

8.16. $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \sin 3x ln|\sin 3x| - 3x\cos 3x$;

8.17. $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$; **8.18.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x-\frac{1}{12}e^{-2x}$;**8.19.** $y=(C_1+C_2x)e^x+e^x\left(xarctgx-ln\sqrt{1+x^2}\right)$;**8.20.**$y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{4}cos\,2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

ГЛАВА 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Системы дифференциальные уравнений, основные понятия.

Для решения многих задач математики, физики, техники нередко требуется несколько функций. Нахождение этих функций может привести к нескольким ДУ, образующим систему.

Системой ДУ называется совокупность ДУ, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные. Система ДУ n-го порядка, содержащая независимую переменную x, n искомых функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ и их производные $y_1'; y_2'; \dots; y_n'$в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} F_1(x; y_1; y_2; \dots; y_n; y_1'; y_2'; \dots; y_n') = 0 \\ F_2(x; y_1; y_2; \dots; y_n; y_1'; y_2'; \dots; y_n') = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ F_n(x; y_1; y_2; \dots; y_n; y_1'; y_2'; \dots; y_n') = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Система ДУ первого порядка может быть разрешена относительно старших производных, то есть записана в виде:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x; y_1; y_2; \dots; y_n) \\ y_2' = f_2(x; y_1; y_2; \dots; y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x; y_1; y_2; \dots; y_n) \end{cases} \quad \mathbf{(3.2)}$$

Система вида (3.2) называется **нормальной системой дифференциальных уравнений.**

Решить эту систему означает найти функции $y_1, y_2, \dots, y_n$,удовлетворяющие системе (3.2) и данным начальным условиям (если такие имеются):

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0 \quad \mathbf{(3.3)}$$

В основном мы будем рассматривать нормальные система линейных уравнений с постоянными коэффициентами, которые делятся на однородные и неоднородные.

Неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами n- го порядка, записываются в виде:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + f_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn} + f_n(x) \end{cases} \quad \mathbf{(3.4)}$$

или кратко

$$\frac{dy_i}{dx} = y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j(x) + f_i(x) \quad \mathbf{(3.5),}$$

где $i = 1,2, \dots, n$, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$-неизвестные функции, a_{ij} –заданные постоянные коэффициенты, которые могут быть как действительными, так и комплексными, $f_i(x)$ –заданные функции переменной x.

Будем считать, что вышеуказанные функции непрерывны на интервале $(a; b)$ действительной числовой оси Ox.

Если в системе (3.4)$f_i(x) = 0$,то система называется однородной (3.6)

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn} \end{cases} \quad \mathbf{(3.6)}$$

Полагая $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, $Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1{}'(x) \\ y_2{}'(x) \\ \dots \\ y_n{}'(x) \end{pmatrix}$, $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32}\dots & a_{3n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{3n} \end{pmatrix}.$$

Система (3.4) может быть записана в матричном виде (3.7):

$$\boldsymbol{Y'(x) = AY(x) + F(x)(3.7)}$$

Замечание: по сравнению с однородной системой в неоднородной в каждом уравнении дополнительно добавляется некоторая функция, зависящей в основном от переменной x или от какой-либо другой переменной, например t.

Функции $f_1(t), f_2(t)$ могут быть константами (причем, по крайне мере одна из них не равна нулю), экспонентами, синусами, косинусами и так далее. Например, система уравнений $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$ -однородная, а система $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + e^{-2t} \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$ - неоднородная, так как в первом уравнении системы $f(t) = e^{-2t} \neq 0$.

3.2. Методы решения систем линейных дифференциальные уравнений, с постоянными коэффициентами.

Существует два основных способа решения систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

1) Метод исключения. Суть метода состоит в том, что в ходе решения система ДУ сводится к одному дифференциальному уравнению.

2)Метод Эйлера (с помощью характеристического уравнения) так называемый матричный способ решения системы ДУ.

Чаще всего для интегрирования нормальной системы ДУ применяется метод исключения неизвестных, вторым методом системы ДУ решаются значительно реже, поэтому этот метод мы рассматривать не будем.

Метод исключения.

Суть метода исключений заключается в приведение системы n ДУ порядка n к одному ДУ n -го порядка.

Для простоты восприятия данного метода, ограничимся рассмотрением однородной системой двух уравнений с постоянными коэффициентами,

то есть, при $n = 2$, $\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$.

Аналогично решаются системы ДУ при $n > 2$.

Пусть дана нормальная система $\begin{cases} y_1{}' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2{}' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$ продифференцируем по переменной x любое, например, первое уравнение в системе:

$y_1{}'' = a_{11}y_1{}' + a_{12}y_2{}'$;

Подставим в полученное равенство значения производной $y_2{}'$ из второго уравнения системы:

$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}(a_{21}y_1 + a_{22}y_2)$,

$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}a_{21}y_1 + a_{12}a_{22}y_2$;

В полученное уравнение, подставляем $a_{12}y_2 = y_1' - a_{11}y_1$,выраженное из первого уравнения исходной системы:

$$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}a_{21}y_1 + a_{22}(y_1' - a_{11}y_1),$$

$$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}a_{21}y_1 + a_{22}y_1' - a_{11}a_{22}y_1,$$

$$y_1'' - a_{11}y_1' - a_{12}a_{21}y_1 - a_{22}y_1' + a_{11}a_{22}y_1 = 0,\text{ получим}$$

$$y_1'' + (-a_{11} - a_{22})y_1' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y_1 = 0\text{-}$$

–линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, решаем его (как мы это делали ранее) и находим искомую функциюy_1.Зная y_1 находимy_2.

Пример 3.1. Решить систему ДУ: **а)**$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$;**б)**$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4y - 3z \\ \frac{dz}{dx} = 2y - 3z \end{cases}$;

в) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x - y = 0 \\ \frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 4x + 5y = 0 \end{cases}$, $x(0) = 1, y(0) = 1.$

Решение

а) Для удобства дальнейших вычислений, перепишем систему в виде$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$. В данной системе$y_1, y_2$ –неизвестные функции, а x –независимая переменная(аргумент).

Продифференцируем первое уравнение:

$y_1'' = 2y_1' + y_2'$;

Подставляем $y_2' = 3y_1 + 4y_2$ в полученное равенство:

$y_1'' = 2y_1' + 3y_1 + 4y_2$или $y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 4y_2$;

Составляем СУ:

$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 4y_2 \end{cases}$,из первого уравнения выражаемy_2 черезy_1', y_1: $y_2 = y_1' - 2y_1$;

$\begin{cases} y_2 = y_1' - 2y_1 \\ y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 4y_2 \end{cases}$, подставляя значение y_2 во второе уравнение последней системы, имеем:

$y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 4(y_1' - 2y_1)$,

$y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 4y_1' - 8y_1$,

$y_1'' - 6y_1' + 5y_1 = 0$.

Получили ЛОДУ второго порядка, с постоянными коэффициентами решаем его: составляем характеристическое уравнение

$k^2 - 6k + 5 = 0$,

$k_1 = 5, \;\; k_2 = 1$,

$y_1 = C_1e^{5x} + C_2e^x$-общее решение уравнения $y_1'' - 6y_1' + 5y_1 = 0$.

Находим функцию y_2, для этого вычислим $y_1' = 5C_1e^{5x} + C_2e^x$, и подставим значения для y_1, y_1' в выражение $y_2 = y_1' - 2y_1$;

$y_2 = 5C_1e^{5x} + C_2e^x - 2C_1e^{5x} - 2C_2e^x = 3C_1e^{5x} - C_2e^x$,

Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид: $\begin{cases} y_1 = C_1e^{5x} + C_2e^x \\ y_2 = 3C_1e^{5x} - C_2e^x \end{cases}$.

б) В данной системе $\begin{cases} y' = 4y - 3z \\ z' = 2y - 3z \end{cases}$, y, z –неизвестные функции, а x –независимая переменная.

Продифференцируем первое уравнение системы, тогда

$y'' = 4y' - 3z'$;

Подставляя $z' = 2y - 3z$ в полученное равенство, имеем:

$y'' = 4y' - 3(2y - 3z)$,

$y'' - 4y' + 6y = 9z$;

Составляем систему уравнений $\begin{cases} y' = 4y - 3z \\ y'' - 4y' + 6y = 9z \end{cases}$;

Из второго уравнения исключаем z, для этого выражаем z через y и y' из первого уравнения полученной системы $z = \frac{4y - y'}{3}$, $\begin{cases} z = \frac{4y - y'}{3} \\ y'' - 4y' + 6y = 9z \end{cases}$ и подставляем во второе :

$y'' - 4y' + 6y = \frac{9(4y - y')}{3}$;

$y'' - 4y' + 6y = 12y - 3y'$;

$y'' - y' - 6y = 0$- ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, решаем его:

$k^2 - k - 6 = 0,$

$k_1 = -2, k_2 = 3,$

$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x},$

$y' = -2C_1e^{-2x} + 3C_2e^{3x},$

находим $z = \frac{4y-y'}{3}$,подставляя y, y'имеем:

$$z = \frac{4C_1e^{-2x} + 4C_2e^{3x} + 2C_1e^{-2x} - 3C_2e^{3x}}{3} =$$

$= \frac{6C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}}{3} = 2C_1e^{-2x} + \frac{1}{3}C_2e^{3x};$

Таким образом, общее решение данной системы имеет вид: $\begin{cases} y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x} \\ z = 2C_1e^{-2x} + \frac{1}{3}C_2e^{3x} \end{cases};$

в)$\begin{cases} x' + y' - 2x - y = 0 \ (1) \\ x' - 2y' + 4x + 5y = 0(2) \end{cases}$,

приведём систему к нормальной форме исключив x'и y':

для начала исключим x', $(1) - (2)$, тогда

$3y' - 6x - 6y = 0|:3,$

$\underline{y' - 2x - 2y = 0;}$

исключим $y', 2 \cdot (1) + (2)$, тогда $3x' + 3y = 0|:3,$

$\underline{x' + y = 0;}$

В совокупности получим нормальную СУ

$\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$, где x, y –неизвестные функции, а t –независимая переменная.

Решаем её:

$y = -x',$

$y' = -x''.$

Подставим y, y' в уравнение$y' = 2x + 2y$:

$-x'' = 2x + 2(-x'),$

$x'' - 2x' + 2x = 0,$

$k^2 - 2k + 2 = 0,$

$k_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 2}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{2\pm 2i}{2} = 1 \pm i$,следовательно

$x = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$,

$x' = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^t(-C_1 \sin t + C_2 \cos t)$,

$x' = e^t((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t)$.

Для того, чтобы найти y подставим x' в $y = -x'$,то есть

$y = -e^t((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t)$.

Таким образом,

$\begin{cases} x = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = -e^t((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t) \end{cases}$-общее решение исходной ДУ.

Найдём частное решение $x = 1, y = 1, t = 0$,

$\begin{cases} 1 = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) \\ 1 = -e^0((C_1 + C_2) \cos 0 + (C_2 - C_1) \sin 0) \end{cases}$;

$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 1 = -(C_1 + C_2) \end{cases}$, $\begin{cases} C_2 = -2 \\ C_1 = 1 \end{cases}$,

$\begin{cases} x = e^t \cos t - 2e^t \sin t \\ y = e^t(\cos t + 3 \sin t) \end{cases}$-частное решение систем.

Замечание: метод исключения можно применять не только к однородным линейным системам. Его можно использовать для решения неоднородных систем ДУ или систем уравнений с переменными коэффициентами.

Пример 3.2. Решить систему ДУ: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + e^{-2t} \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$.

Решение.

Для удобства дальнейшего вычислений, учитывая, что $\frac{dx}{dt} = x'(t) = x'$,

$\frac{dy}{dt} = y'(t) = y'$перепишем систему в виде:

$\begin{cases} x' = x + 2y + e^{-2t} \\ y' = 4x - y \end{cases}$ – неоднородная СУ, так как$f_1(t) = e^{-2t} \neq 0$,решаем её методом исключения, аналогично тому, как мы решали однородные системы.

Продифференцируем первое уравнение по переменной t:

$$x'' = x' + 2y' - 2e^{-2t},$$

Подставляем второе уравнение$y' = 4x - y$ в полученное равенство имеем:

$$x'' = x' + 2(4x - y) - 2e^{-2t},$$

$$x'' = x' + 8x - 2y - 2e^{-2t},$$

учитывая, что $2y = x' - x - e^{-2t}$(из первого уравнения) имеем:

$$\begin{cases} 2y = x' - x - e^{-2t} \\ x'' = x' + 8x - 2y - 2e^{-2t} \end{cases},$$

$x'' = x' + 8x - x' + x + e^{-2t} - 2e^{-2t}$ или

$x'' - 9x = -e^{-2t}$ - линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами, решаем его и находим искомую функцию $x = x(t)$,которую определяем как сумму общего решения однородного уравнения$x'' - 9x = 0$ и частного решения неоднородного уравнения$x'' - 9x = -e^{-2t}$, то есть

$$x(t) = x_0(t) + x_{чн}(t).$$

Для начала найдём общее решение соответствующего однородного уравнения$x_0(t)$:

$$x'' - 9x = 0,$$

$$k^2 - 9 = 0,$$

$$k_{1,2} = \pm 3,$$

$$x_0(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t};$$

Подберём частное решение$x_{чн}(t)$,учитывая вид неоднородной части

$$f(t) = -e^{-2t}, \alpha = -2 \neq k_{1,2}, r = 0 \text{ имеем:}$$

$$x_{чн}(t) = Ae^{-2t},\ x'_{чн}(t) = -2Ae^{-2t}, x''_{чн}(t) = 4Ae^{-2t},$$

подставляя значения $x_{чн}(t) = Ae^{-2t}$,$x''_{чн}(t) = 4Ae^{-2t}$ в неоднородное уравнение

$x'' - 9x = -e^{-2t}$, определяем коэффициент A:

$$4Ae^{-2t} - 9Ae^{-2t} = -e^{-2t},$$

$$-5Ae^{-2t} = -e^{-2t} | : (-e^{-2t}),$$

$$5A = 1,$$

$$A = \frac{1}{5},$$

следовательно, частное решение $x_{чн}(t)$ выражается формулой:

$$x_{чн}(t) = \frac{1}{5} e^{-2t};$$

Соответственно, общее решение уравнения$x'' - 9x = -e^{-2t}$ записывается так

$x(t) = x_0(t) + x_{чн}(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{5} e^{-2t}$, то есть $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{5} e^{-2t}$.

Остается найти функцию $y = y(t)$,для этого вычислим производную

$$x' = 3C_1 e^{3t} - 3C_2 e^{-3t} - \frac{2}{5} e^{-2t},$$

и подставим её в уравнение $x' = x + 2y + e^{-2t}$:

$$3C_1e^{3t}-3C_2e^{-3t}-\frac{2}{5}e^{-2t}=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}+\frac{1}{5}e^{-2t}+2y+e^{-2t},$$

$$2C_1e^{3t}-4C_2e^{-3t}-\frac{8}{5}e^{-2t}=2y|:2,$$

$$y=C_1e^{3t}-2C_2e^{-3t}-\tfrac{4}{5}e^{-2t}.$$

Итак, общее решение системы имеет вид: $\begin{cases} x=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}+\frac{1}{5}e^{-2t} \\ y=C_1e^{3t}-2C_2e^{-3t}-\frac{4}{5}e^{-2t} \end{cases}.$

Задания для самостоятельного решения

9.Решить систему ДУ:

1	$\begin{cases} y_1'=2y_1+y_2 \\ y_2'=3y_1+4y_2 \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x-y \\ \frac{dy}{dt}=x+y \end{cases}$
2	$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=-2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt}=x_1-3x_2 \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} x'=4x-3y \\ y'=3x+4y \end{cases}$
3	$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y+1 \\ \frac{dy}{dt}=x+1 \end{cases}$	**13**	$\begin{cases} \frac{dy}{dt}=-y+8z \\ \frac{dz}{dt}=y+z \end{cases}$
4	$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-2x+4y \\ \frac{dy}{dt}=-x+3y \end{cases}$, $x(0)=3, y(0)=0$	**14**	$\begin{cases} x'=-2x+4y \\ y'=3y-x \end{cases}$
5	$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2x-5y+3 \\ \frac{dy}{dt}=5x-6y+1 \end{cases}$, $x(0)=6, y(0)=5$	**15**	$\begin{cases} x'=-3x-y \\ y'=x-y \end{cases}$, $x(0)=1, y(0)=-1$
6	$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-x-5y \\ \frac{dy}{dt}=-7x-3y \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x-1 \\ \frac{dy}{dt}=x+2y-3 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x'=3x-y \\ y'=4x-y \end{cases}$, $x(0)=5, y(0)=8$	**17**	$\begin{cases} y_1'=-7y_1+y_2 \\ y_2'=-2y_1-5y_2 \end{cases}$
8	$\begin{cases} y'=5y+4z \\ z'=4y+5z \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} x'=6x+2y \\ y'=2x+9y \end{cases}$

9	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+4y\end{cases}$	19	$\begin{cases}y_1'=y_1+5y_2\\ y_2'=-y_1-3y_2\end{cases}$
10	$\begin{cases}y'=-7y+z\\ z'=-2y-5z\end{cases}$	20	$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=2y_1+3y_2\\ \dfrac{dy_2}{dx}=6y_1-y_2\end{cases}$

Ответы: 9.1. $\begin{cases}y_2=3C_1e^{5x}-C_2e^{x}\\ y_1=C_1e^{5x}+C_2e^{x}\end{cases}$;**9.2.** $\begin{cases}x_1=2C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}\\ x_2=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}\end{cases}$;

9.3. $\begin{cases}x=\frac{1}{2}C_1e^{t}+\frac{1}{2}C_2e^{-t}-1\\ y=\frac{1}{2}C_1e^{t}-\frac{1}{2}C_2e^{-t}-1\end{cases}$;**9.4.** $\begin{cases}x=4e^{-t}-e^{2t}\\ y=e^{-t}-e^{2t}\end{cases}$;

9.5. $\begin{cases}x=5e^{-2t}\cos 3t+1\\ y=e^{-2t}(4\cos 3t+3\sin 3t)+1\end{cases}$;**9.6.** $\begin{cases}x=5C_1e^{-8t}+C_2e^{4t}\\ y=7C_1e^{-8t}-\frac{1}{2}C_2e^{4t}\end{cases}$;

9.7. $\begin{cases}x=(5+2t)e^{t}\\ y=(8+4t)e^{t}\end{cases}$;**9.8.** $\begin{cases}y=C_1e^{x}+C_2e^{9x}\\ z=-C_1e^{x}+C_2e^{9x}\end{cases}$;

9.9. $\begin{cases}x=C_1e^{t}+C_2e^{5t}\\ y=-C_1e^{t}+3C_2e^{5t}\end{cases}$;**9.10.** $\begin{cases}y=e^{-6x}(C_1\cos x+C_2\sin x)\\ y=\big((C_1+C_2)\cos x+(C_2-C_1)\sin x\big)e^{-6x}\end{cases}$;

9.11.. $\begin{cases}x=C_1e^{t}\cos t+C_2e^{t}\sin t\\ y=C_1e^{t}\sin t-C_2e^{t}\cos t\end{cases}$;**9.12.** $\begin{cases}x=e^{4t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)\\ y=e^{4t}(-C_1\sin 3t+C_2\cos 3t)\end{cases}$;

9.13. $\begin{cases}y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}\\ z=\frac{1}{2}C_1e^{3t}-\frac{1}{4}C_2e^{-3t}\end{cases}$;**9.14.** $\begin{cases}x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}\\ y=\frac{1}{4}C_1e^{-t}+C_2e^{2t}\end{cases}$;

9.15. $\begin{cases}x=e^{-2t}\\ y=-e^{-2t}\end{cases}$;**9.16.** $\begin{cases}x=-C_1e^{t}+1\\ y=C_1e^{t}+C_2e^{2t}+1\end{cases}$;

9.17. $\begin{cases}y_1=\frac{1}{2}C_1e^{-6x}(\cos x+\sin x)+\frac{1}{2}C_2e^{-6x}(-\cos x+\sin x)\\ y_2=C_1e^{-6x}\cos x+C_2e^{-6x}\sin x\end{cases}$;

9.18. $\begin{cases}x=C_1e^{10t}-2C_2e^{5t}\\ y=2C_1e^{10t}+C_2e^{5t}\end{cases}$;**9.19.** $\begin{cases}y_1=e^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)\\ y_2=\frac{1}{5}e^{-t}\big((C_2-2C_1)\cos t-(2C_2+C_1)\sin t\big)\end{cases}$;

9.20. $\begin{cases}y_1=C_1e^{5x}+C_2e^{-4x}\\ y_2=C_1e^{5x}-2C_2e^{-4x}\end{cases}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. В. Соболь, Н. Т. Мишняков, В. М. Поркшеян. Практикум по высшей математике. 3-е изд. Ростов н \ Д :Феникс, 2010.

2. Д. Т. Письменный. Конспект лекций по высшей математике (полный курс). 2-е изд. Москва: «Айрис-пресс», 2014.

3. Данко П. Е., Попов, А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах (1,2 том). — М. : Высш. шк., 2002.

4. Зимина О.В.,Кириллов А.И.,Сальников Т.А. Высшая математика. 3-е изд.,испр.Москва: ФИЗМАТЛИТ,2005.

5. С. Н. Кубышкина, Е.Ю. Арланов, Дифференциальные уравнения для технических направлений. Практикум,2017.