ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

«Производные и правило Лопиталя»
по дисциплине

«Математика»

Авторы
Рябых Г. Ю.,
Ворович Е. И.,
Тукодова О. М.,
Фролова Н. В.,
Пристинская О. В.

Ростов-на-Дону, 2021

Аннотация

Учебное пособие предназначено для аудиторной и самостоятельной работы при различных видах обучения: очном, заочном и дистанционном. Для студентов всех направлений и специальностей.

Авторы

канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Рябых Г.Ю.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ворович Е.И.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Тукодова О.М.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пристинская О.В.

Оглавление

1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

При решении различных задач геометрии, механики, физики и других отраслей знания возникла необходимость с помощью одного и того же аналитического процесса из данной функции $y = f(x)$ получать новую функцию, которую называют **производной функцией** (или просто производной) данной функции $f(x)$ и обозначают символом

$$y' = f'(x) \qquad \text{или} \qquad \frac{dy}{dx}.$$

Тот процесс, с помощью которого из данной функции $f(x)$ получают новую функцию $f'(x)$, называют **дифференцированием** и состоит он из следующих трех шагов:

1) даем аргументу x приращение Δx и определяем соответствующее приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

2) составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

3) считая x постоянным, а Δx, стремящимся к нулю, находим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

который обозначаем $f'(x)$, как бы подчеркивая тем самым, что полученная функция зависит лишь от того значения x, при котором мы переходим к пределу.

<u>Определение.</u> **Производной** $y' = f'(x)$ данной функции $y = f(x)$ при данном x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если, конечно, этот предел существует, т.е. конечен.

Таким образом,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Если функция в точке x имеет конечную производную, то функция называется дифференцируемой в этой точке.

<u>Пример.</u>

1) Пользуясь определением производной, найти производную функции

$y = x^2$.

Дадим аргументу приращение Δx. Тогда функция получит приращение Δy

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

2) Найдем производную постоянной функции $y=C$.

Здесь $\Delta y = C - C = 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \quad \to \quad C' = 0.$$

3) Найдем производную аргумента $y=x$.

Дадим x приращение Δx.

$$\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x$$

Тогда $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$

Итак, $x' = 1$.

1.1. Задачи, приводящие к понятию производной.

Физический, геометрический и экономический смысл производной

1. Задача о скорости движения. Механический смысл производной.

Пусть вдоль некоторой прямой движется точка позакону $s = s(t)$, где s – пройденный путь, t – время. Найдем скорость точки в момент времени $t = t_0$.

Пусть за время Δt был пройден путь Δs, тогда средняя скорость

$$V_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \text{ где } \quad \Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0).$$

Чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент времени t_0. В связи с этим под скоростью в момент времени t_0 естественно понимать предел средней скорости при $\Delta t \to 0$.

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$$

Механический смысл производной: производная пути по времени $s'(t_0)$ есть скорость точки в момент времени t_0

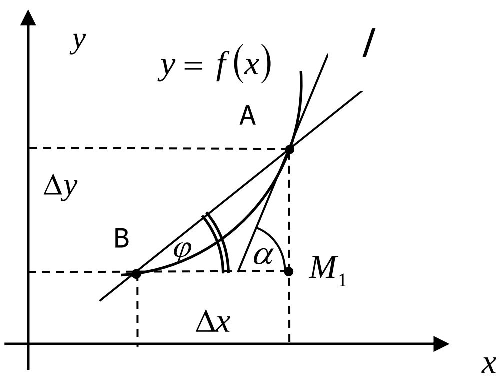
$$V(t_0) = s'(t_0)$$

Замечание. Понятие производной, заимствованное из физики удобно при исследовании поведения произвольной функции. Какую бы зависимость не изображала функция $y = f(x)$, отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ есть средняя скорость изменения y относительно изменения *x*, $y'(x_0)$ – мгновенная скорость изменения y при $x=x_0$.

Значение производной состоит в том, что при изучении любых процессов с ее помощью можно оценить скорость изменения связанных между собой величин.

2. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к кривой

Рассмотрим график $y = f(x)$, точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ на графике, *AB* – секущая, *l* – касательная, проходящая через точку А.



Обозначим φ и α – углы наклона секущей *AB* и касательной *l* к оси *ox* соответственно, k_{AB} и k_l – их угловые коэффициенты

$$k_{AB} = tg\phi = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Под касательной к кривой $y = f(x)$ в точке А будем понимать предельное положение секущей АВ при приближении точки В к точке А, т.е. при $\Delta x \to 0$. В этом случае $\varphi \to a$, $k_{AB} \to k_l$

$$k_l = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x).$$

Геометрический смысл производной: $y'(x_0)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику $y = f(x)$ в этой точке.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $A(x_0, y_0)$ имет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Это уравнение получается, если в уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ с данным угловым коэффициентом k

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

подставляем $k_{кас} = f'(x_0)$.

3. Экономический смысл производной. Задача о производительности труда

Пусть функция $u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t.

Найдем z – производительность труда в момент t_0.

Обозначим Δu – количество продукции, произведенной за время Δt, $z_{ср}$ – среднюю производительность труда за это время

$$z_{cp} = \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Очевидно, что z можно определить как предельное значение $z_{ср}$ при $\Delta t \to 0$

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t).$$

Предельные издержки производства.

Издержки производства y будем рассматривать как функцию количества выпускаемой продукции x.

Пусть Δx – прирост продукции, тогда Δy – приращение издержек производства и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – среднее приращение издержек на единицу продукции.

Производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает предельные издержки производства и приближенно характеризует дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.

Предельные издержки зависят от x и определяются не постоянными производственными затртатами, а лишь переменными (на сырье, топливо и т.п.). Аналогично могут быть определены предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная производительность и т.д.

Применение дифференциального исчисления для исследования экономических объектов и процессов на основании анализа предельных величин получило название предельного анализа.

Предельные величины характеризуют не состояние (как суммарная или средняя величина), а процесс, т.е. изменение экономического объекта.

Таким образом, производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.

4. Задача о линейной плотности стержня

Рассматтривается тонкий неоднородный стержень, функция *m(l)* выражает зависимость его массы от длины. δ – линейная плотность стержня (масса, приходящаяся на единицу длины).

Обозначим Δm – массу стержня длины Δl

$$\delta_{cp} = \frac{\Delta m}{\Delta l}, \qquad \delta = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = m'(l)$$

Ускорение *a* есть скорость изменения скорости $a_{cp} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$, где ΔV – изменение скорости за время Δt

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = V'(t)$$

1.2. Основные правила и формулы дифференцирования

Выведены правила дифференцирования и формулы для вычисления производных основных элементарных функций.

Они сведены в таблицу, которой пользуются для практического дифференцирования.

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$- функции, дифференцируемые в точке x.

1. $c' = 0, \ c = const$
2. $x' = 1$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4. $(uv)' = u'v + uv'$ 4а. $(cu)' = cu'$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.
6. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
7. $(a^u)' = a^u \ln a u'$ 7а. $(e^u)' = e^u u'$
8. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} u'$ 8а. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} u'$
9. $(\sin u)' = \cos u \, u'$
10. $(\cos u)' = -\sin u \, u'$
11. $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} u'$
12. $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} u'$
13. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$

14. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$

15. $\left(arctgu\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}u'$

16. $\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}u'$

Правила дифференцирования доказываются на основании теорем о пределах.

1.3. Производные высших порядков

Пусть функция *f(x)* – дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции *f′(x)*, получим вторую производную функции *f(x)*.

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Для производных высших порядков используются обозначения

$$y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \ldots, y^{(n)}$$

Пример.

1) $y=5x^4-6x^3+2x^2-4x+1$

$y'=20x^3-18x^2+4x-4$

$y''=60x^2-36x+4$

$y'''=120x-36$

$y^{(4)}=120$

$y^{(5)}=0$

$y^{(6)}=0$ и т.д.

2) $y=3^x$

$y'=3^x \ln x$;

$y''=3^x \ln^2 3$;

$y'''=3^x \ln^3 3$; ...

$y^{(n)}=3^x \ln^n 3$

Замечание: Механический смысл второй производной. Выше было установлено, что если точка движется прямолинейно по закону *s=s(t)*, (где *s* – путь, *t* – время), то $s'(t_0)$ – скорость изменения пути в момент времени t_0.

Следовательно, $s''(t)=\left[s'(t_0)\right]'=v'(t_0)$ – скорость изменения скорости или ускорение точки в момент времени t_0.

1.4. Производная показательно-степенной функции

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной и иметь вид $y=f(x)^{g(x)}$. В таблице нет формулы для вычисления производных таких функций. Для их дифференцирования используется прием предварительного логарифмирования.

Пусть *u = f(x)* и *v = g(x)* – функции, имеющие производные в точке *x*, *f(x)*>0.

Найдем производную функции *y = u* ^{v}. Логарифмируя, получим:

$$\ln y = v\ln u;\quad \frac{y'}{y}=v'\ln u+v\frac{u'}{u};\qquad y'=u^{v}\left(v\frac{u'}{u}+v'\ln u\right)$$

<u>Пример.</u>

1) $y=x^{x}\quad \ln y=\ln x^{x}=x\ln x;$

$$\frac{y'}{y}=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1\qquad y'=x^{x}(\ln x+1)$$

1.5. Дифференцирование функции, заданной неявно

Функция называется явной, если она задана уравнением $y = f(x)$, например, $y = x^2 + 5x + 1$.

Функция *y* аргумента *x* называется неявной, если она задана уравнением *F (x , y)* = 0 , не разрешенным относительно зависимой переменной, например, $x^3 + y^3 - x = 0$.

Для нахождения производной функции у, заданной неявно, нужно: продифференцировать обе части уравнения, рассматривая *y* как функцию от *x;* из полученной уравнения найти y'.

Пример.

1) $x^3 + y^3 - x = 0$.

Найти y'.

$$3x^2 + 3y^2 y' - 1 = 0$$

$$y' = \frac{1 - 3x^2}{3y^2}$$

1.6. Дифференцирование функции, заданной параметрически

Функция $y = f(x)$ может быть задана параметрически посредством переменной *t*, называемой параметром

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ где } t \in X$$

Например, параметрическое уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат имеет вид

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Параметрическое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ имеет вид

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \text{ где } \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Пусть *x(t)* и *y(t)* дифференцируемы и $x'(t) \neq 0$. Тогда y'_x можно вычислить по формуле

$$y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Здесь введены обозначении $\dot{x} = x'_t$, $\dot{y} = y'_t$.

Если *x(t)* и *y(t)* имеют производную второго порядка и $x'(t) \neq 0$, то существует производная второго порядка функции, заданной параметрически

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{\dot{x}}.$$

<u>Пример.</u>

1) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -a\sin t \\ \dot{y} = a\cos t \end{cases}$

$$y'_x = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -ctgt;$$

$$\left(y'_x\right)'_t = \frac{1}{\sin^2 t}; \qquad y''_{xx} = \frac{1}{\sin^2 t(-a\sin t)} = -\frac{1}{a\sin^3 t}.$$

2. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

(Лопиталь (1661-1704) – французский математик)

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ \infty\cdot 0;\ \infty^0;\ 1^\infty;\ \infty-\infty$$

Теорема (правило Лопиталя). *Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, g′(x) отлична от нуля вблизи a и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при x→a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство. Применив формулу Коши, получим:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

где ε - точка, находящаяся между a и x. Учитывая, что f(a) = g(a) = 0:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Пусть при x→a отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ стремится к некоторому пределу. Т.к. точка ε лежит между точками a и x, то при x→a получим ε→a, а следовательно и отношение $\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ стремится к тому же пределу. Таким образом, можно записать:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доказана.

Пример: Найти предел $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x};\qquad g'(x) = e^x;$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e};$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^{x}}$.

$$f'(x)=e^{\frac{x}{2}}(1+\frac{1}{2}x); \qquad g'(x)=1+e^{x};$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x);$$

$$g''(x)=e^{x};$$

$$\lim_{x\to\infty}=\frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}(4+x)}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$f'''(x)=\frac{1}{4}; \qquad g'''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}=0;$$

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой – либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Неопределенности вида 0^0; 1^∞; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y=[f(x)]^{g(x)}$, f(x)>0 вблизи точки а при x→a. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции lny = g(x)lnf(x).

Пример: Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$.

Здесь y = x^x, lny = xlnx.

Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \begin{Bmatrix} \textit{правило} \\ \textit{Лопиталя} \end{Bmatrix} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0;$$

Следовательно

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = \ln \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = 0; \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = 1$$

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$.

$f'(x) = 2x; \qquad g'(x) = 2e^{2x}; \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty}$;- получили неопределенность. Применяем правило Лопиталя еще раз.

$$f''(x) = 2; \qquad g'(x) = 4e^{2x}; \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Табличное дифференцирование

Рассмотрим примеры вычисления производных с использованием таблицы производных.

В примерах 1) -6) требуется вычислить производную степенной функции (формула 6).

1) $\left(x^5\right)' = 5x^4$

2) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = \left(x^{-3}\right)' = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$

3) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

4) $\left(\ln^6 x\right)' = 6\ln^5 x(\ln x)' = \dfrac{6\ln^5 x}{x}$

5) $\left(\left(1-x^2\right)^{10}\right)' = 10\left(1-x^2\right)^9\left(1-x^2\right)' = -20x\left(1-x^2\right)^9$

6) $\left(\dfrac{1}{\cos^5 x}\right)' = \left(\cos^{-5} x\right)' = -5\cos^{-6} x(\cos x)' = -5\cos^{-6} x(-\sin x) = \dfrac{5\sin x}{\cos x}$

7) $(\sin 5x)' = 5\cos 5x$

8) $(\cos(1-5x))' = -\sin(1-5x)(1-5x)' = 5\sin(1-5x)$

9) $(\sin \ln x)' = \cos\ln x(\ln x)' = \dfrac{\cos\ln x}{x}$

10) $\left(\ln(1-3x-7x^2)\right)' = \dfrac{\left(1-3x-7x^2\right)'}{1-3x-7x^2} = \dfrac{-3-14x}{1-3x-7x^2}$

11) $(\ln\cos(5x+8))' = \dfrac{(\cos(5x+8))'}{\cos(5x+8)} = -\dfrac{5\sin(5x+8)}{\cos(5x+8)} = -5tg(5x+8)$

12) $(\arcsin 4x)' = \dfrac{(4x)'}{\sqrt{1-(4x)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$

Следующие примеры демонстрируют использование правил 3, 4 и 5.

13) $y = 4x^3 - 12x^2 - 6x + 4 \qquad y' = 12x^2 - 24x - 6$

14) $y = e^{-3x}\sin 6x$

$$y' = \left(e^{-3x}\right)'\sin 6x + e^{-3x}\left(\sin 6x\right)' = -3e^{-3x}\sin 6x + 6e^{-3x}\cos 6x$$

15) $y = \dfrac{x^2-3}{2x^2+1}$

$$y' = \frac{\left(x^2-3\right)'\left(2x^2+1\right) - \left(2x^2+1\right)'\left(x^2-3\right)}{\left(2x^2+1\right)^2} = \frac{2x\left(2x^2+1\right) - 4x\left(x^2-3\right)}{\left(2x^2+1\right)^2} = \frac{14x}{\left(2x^2+1\right)^2}$$

16) $y = \left(4\ln 3 + \dfrac{\pi}{8}\right)\cos x$

$$y' = \left(4\ln 3 + \frac{\pi}{8}\right)(\cos x)' = -\left(4\ln 3 + \frac{\pi}{8}\right)\sin x$$

17) $y = x\cos x\sin x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x$. Сначала преобразуем данную функцию:

$$y = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

18) $y = \dfrac{x^2e^{x^2}}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$

$$=\frac{2x^3e^{x^2}+2x^5e^{x^2}+2xe^{x^2}+2x^3e^{x^2}-2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}=\frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

19) $y=\ln tg\frac{x}{2}-\frac{x}{\sin x}$

$$y'=\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}-\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{\sin x-\sin x+x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

20) $y=arctg\frac{2x^4}{1-x^8}$

$$y'=\frac{1}{\left(1+\frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)}\cdot\frac{8x^3(1-x^8)-(-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2}=$$

$$=\frac{(1-x^8)^2(8x^3-8x^{11}+16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2}=\frac{8x^3+8x^{11}}{(1+x^8)^2}=\frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2}=\frac{8x^3}{1+x^8}$$

21) $y=x^2e^{x^2}\ln x$

$$y'=\left(x^2e^{x^2}\right)'\ln x+x^2e^{x^2}\frac{1}{x}=\left(2xe^{x^2}+x^2e^{x^2}2x\right)\ln x+xe^{x^2}=$$

$$=2xe^{x^2}(1+x^2)\ln x+xe^{x^2}=xe^{x^2}(1+2\ln x+2x^2\ln x)$$

<u>Вычисление производных высших порядков</u>

22) $y=5x^4-6x^3+2x^2-4x+1$

$$y' = 20x^3 - 18x^2 + 4x - 4$$

$$y'' = 60x^2 - 36x + 4$$

$$y''' = 120x - 36$$

$$y^{(4)} = 120$$

$$y^{(5)} = 0$$

$y^{(6)} = 0$ и т.д.

23) $y = 3^x$

$$y' = 3^x \ln x;$$

$$y'' = 3^x \ln^2 3;$$

$$y''' = 3^x \ln^3 3;\ldots$$

$$y^{(n)} = 3^x \ln^n 3$$

Дифференцирование показательно-степенных функций

24) $y = (x+1)^x$ $\qquad \ln y = \ln(x+1)^x = x\ln(x+1)$

$$\frac{y'}{y} = \ln(x+1) + x\frac{1}{x+1}$$

$$y' = (x+1)^x\left[\ln(x+1) + x\frac{1}{x+1}\right]$$

25) $y = (\sin x)^x$ $\qquad \ln y = \ln(\sin x)^x = x\ln\sin x$

$$\frac{y'}{y} = \ln\sin x + x\frac{\cos x}{\sin x} = \ln\sin x + xctgx$$

$$y' = y(\ln\sin x + xctgx) = (\sin x)^x(\ln\sin x + xctgx)$$

Дифференцирование функций, заданных неявно

26) $x^2 - xy + \ln y = 2$. Найти y' и вычислить ее значение в точке (2,1).

$$2x - (y + xy') + \frac{y'}{y} = 0 \qquad y' = \frac{2xy - y^2}{xy - 1}.$$

Значение y' при x=2, y=1 $\qquad y'(2) = 3$.

27) $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - \left(2xe^y + x^2 e^y y'\right) = 0$$

$$y' = \frac{(2xe^y - 3x^2 e^y)y}{1 - x^2 e^y y}$$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

28) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -3a\cos^2 t\sin t \\ \dot{y} = 3b\sin^2 t\cos t \end{cases}$

$$y'_x = \frac{3b\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{b}{a}tgt$$

$$\left(y'_x\right)'_t = -\frac{b}{a}\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$y''_{xx} = -\frac{b}{a\cos^2 t(-3a\cos^2 t\sin t)} = -\frac{b}{3a^2\cos^4 t\sin t}$$

29) $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t \\ y = \cos t + t\sin t \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t \\ \dot{y} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{t\cos t}{t\sin t} = ctgt \qquad (y'_x)'_t = -\frac{1}{\sin^2 t};$$

$$y''_{xx} = \frac{1}{\sin^2 t \sin t} = -\frac{1}{t\sin^3 t}.$$

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi - 2arctgx}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$.

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}; \qquad g'(x) = e^{\frac{3}{x}} \cdot \frac{-3}{x^2};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right] = \frac{-2}{(0+1)\cdot 1\cdot(-3)} = \frac{2}{3}.$$

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой – либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2; \qquad g'(x) = 1 - \cos x;$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} = \dfrac{1+1-2}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ - опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталя еще раз.

$$f''(x) = e^x - e^{-x}; \qquad g''(x) = \sin x;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$ - применяем правило Лопиталя

еще раз.

$$f'''(x)=e^{x}+e^{-x};\qquad g'''(x)=\cos x;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вычислить производные:

1) $y=x^6$
2) $y=\frac{1}{x^3}$
3) $y=\frac{1}{x}$
4) $y=\sqrt[3]{x^2}$
5) $y=\sqrt{x}$
6) $y=\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$
7) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$
8) $y=3x^2-4x+8$
9) $y=4x^3-5x^8+11$
10) $y=2x^8-3\sin x+5\ln x-6$
11) $y=3\cos x-4\,\mathrm{tg}\,x+2^x+11$
12) $y=x^{10}-6\,\mathrm{ctg}\,x+e^x$
13) $y=\cos 10x$
14) $y=\sin 5x$
15) $y=\cos\frac{x}{3}$
16) $y=\mathrm{tg}\,2x$
17) $y=\mathrm{ctg}\,5x$
18) $y=e^{-3x}$
19) $y=e^{10x}$
20) $y=\cos(3x+1)$
21) $y=\sin(1-5x)$
22) $y=\mathrm{tg}(3x+8)$
23) $y=\mathrm{ctg}(2x^3+x)$
24) $y=\cos(x^2+1)$
25) $y=e^{3x^2-8x+5}$
26) $y=\sin\ln x$
27) $y=e^{\sin x}$
28) $y=e^{3\cos x-5x^4}$
29) $y=2^x$
30) $y=5^{\cos x}$
31) $y=(0{,}2)^{\cos 6x}$
32) $y=\arcsin 3x$
33) $y=\mathrm{arcctg}\,10x$

34) $y = \arccos e^{3x}$
35) $y = \operatorname{arcctg} \ln x$
36) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^3 + 1}$
37) $y = \sin^2 x$
38) $y = \cos^5 x$
39) $y = \ln^4 x$
40) $y = \dfrac{1}{\cos x}$
41) $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^5 x}$
42) $y = \dfrac{1}{\ln^2 x}$
43) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$
44) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$
45) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$
46) $y = (2x^3 + 1)^{10}$
47) $y = (1 - 5x)^6$
48) $y = \dfrac{1}{(3x^2 + 3)^{10}}$
49)
$y = (2x^4 + 5x^3 + 6x + 1)^7$
50) $y = \sqrt{1 - 5x}$
51) $y = \sqrt[4]{(1 + 6x)^5}$
52) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - 3x}}$
53) $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{(1 + 6x)^7}}$
54) $y = \ln 4x$
56) $y = \ln 2x$
57) $y = \ln(3x^2 + 6x + 1)$
58) $y = \ln(1 - 4x^5)$
59) $y = \ln \sin x$
60) $y = \ln \cos 10x$
61) $y = \ln\left(\sin^2 x + \sqrt{x}\right)$
62) $y = \cos(\ln^2 x + 3)$
63) $y = \operatorname{tg}(\ln(x^3 + 2))$
64) $y = \cos \ln \sin x$
65) $y = e^{-3x} \cos 2x$
66) $y = (3x^2 - 2) \operatorname{ctg} 5x$
67) $y = (x^8 + 1) \operatorname{tg} 3x$
68) $y = e^{4x}(3x^2 + 7x + 2)$
69) $y = e^{2x} \arcsin 3x$
70) $y = e^{3x}(x^3 + \sin 2x)$
71) $y = (x^3 + 2x + 1)\sqrt{x^2 + 1}$
72) $y = x^2 \ln(x + 1)$
73) $y = x^3 \sin(5x + 1)$
74) $y = \dfrac{e^x}{x}$
75) $y = \dfrac{\ln x}{x}$
76) $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$
77) $y = \dfrac{a + bx}{c + dx}$
78) $y = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$
79) $y = \dfrac{2x - 7}{2x + 8}$
80) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
81) $y = \ln 8 \sin x$
82) $y = (3x^2 + 1) \sin \dfrac{\pi}{12}$

83) $y = \frac{e^x + \ln 5 \sin x}{8 + \ln^2 5}$

84) $y = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 1 \quad y^{(6)} = ?$

85) $y = 2^x \quad y^{(n)} = ?$

86) $y = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 8 \quad y^{(5)} = ?$

87) $y = \ln x \quad y^{(n)} = ?$

88) $y = x^x$

89) $y = x^{\sin x}$

90) $y = (\sin x)^{3x}$

91) $y = (\cos x)^{\sin x}$

92) $y = (\operatorname{tg} x)^{\arcsin x}$

93) $y = (\operatorname{arctg} x)^x$

94) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$

95) $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi) \\ y = a(\varphi - \cos\varphi) \end{cases}$

96) $\begin{cases} x = a\cos^3\varphi \\ y = b\sin^3\varphi \end{cases}$

97) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$

98) $\begin{cases} x = \ln(1 - t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$

99) $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$

100) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

101) $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$

102) $y\sin x - \cos(x - y) = 0$

103) $y = \ln\sqrt{\frac{\sin x}{x}}$

104) $y = \ln\sqrt[3]{\frac{tgx}{x}}$

105) $y = \ln\sqrt[4]{\frac{2x+1}{\sin^3 x}}$

106) $y = \ln\frac{(3x+5)^4}{\sqrt{2x+8}}$

107) $y = \sqrt[5]{\frac{1+2x}{1-x}}$

108) $y = \frac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{\sin^8 x}$

109) $y = \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x(x-3)^2}{x^5}}$

110) $y = \arcsin\frac{2x^2}{1+x^4}$

111) $y = e^x \operatorname{arctg} e^x - \ln\sqrt{1 + e^{2x}}$

112) $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$

Найти пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2-8x+7}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$
9. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x^2}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{ctgx}$
12. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{tgx}{tg3x}$
13. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$
14. $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{2x})ctgx$
15. $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x}$
16. $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\, ctgx$
17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$
18. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$
19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$
20. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x^{tgx}$
21. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$
22. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$
23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$
24. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$
25. $\lim\limits_{x\to 1}\left(tg\dfrac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$
26. $\lim\limits_{x\to 0} ctgx^{\frac{1}{\ln x}}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 1: Учебное пособие для втузов.— 13-е изд.— М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1985.— 432 с.

2. Сборник задач по математике. Под редакцией А.В.Ефимова, Б.П. Демидовича. М., 1993 г.

3. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. Изд. 3-е. — Ростов н/Д, 2006. — 640 с.