ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

«Основы теории вероятности»
по дисциплине

«Математика»

Авторы
Рябых Г. Ю.,
Ворович Е. И.,
Тукодова О. М.,
Фролова Н. В.,
Пристинская О. В.

Ростов-на-Дону, 2021

Аннотация

Учебное пособие предназначено для аудиторной и самостоятельной работы при различных видах обучения: очном, заочном и дистанционном. Для студентов всех направлений и специальностей.

Авторы

канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Рябых Г.Ю.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ворович Е.И.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Тукодова О.М.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пристинская О.В.

Оглавление

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

<u>Определение.</u> Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. Т.е., в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е., в одном случае событие А может произойти совместно с событием В, в другом – нет.

<u>Определение.</u> События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

<u>Определение.</u> Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта.

<u>Определение.</u> Достоверным событием называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного или появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

<u>**Определение.**</u> События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

В приведенном выше примере появление красного или зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.

Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного.

Исходя из этих общих понятий можно дать определение вероятности.

<u>**Определение.**</u> **Вероятностью** события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий. При этом все исходы опыта считаются равновозможными.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию А, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1$$

Пример. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие А, появление зеленого – событие В, появление белого – событие С.

Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем:

$$P(A)=\frac{3}{10};\quad P(B)=\frac{2}{10};\quad P(C)=\frac{5}{10};$$

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Определение. Относительной частотой события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна:

$$W(A)=\frac{2}{5}$$

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Вообще говоря, классическое определение вероятности – довольно относительное.

Это обусловлено тем, что на практике сложно представить результат опыта в виде совокупности элементарных событий, доказать, что события равновероятные.

К примеру при произведении опыта с подбрасыванием монеты на результат опыта могут влиять такие факторы как несимметричность монеты, влияние ее формы на аэродинамические характеристики полета, атмосферные условия и т.д.

Классическое определение вероятности неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Чтобы преодолеть этот недостаток вводится понятие **геометрической вероятности**, т.е. вероятности попадания точки в какой – либо отрезок или часть плоскости (пространства).

Так если на отрезке длиной L выделен отрезок длины l, то вероятность попадания наугад взятой точки в отрезок l равна отношению l/L. При это попадание в любую точку отрезка считается равновозможным.

2. ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Определение. События А и В называются **равносильными**, если осуществление события А влечет за собой осуществление события В и наоборот.

Определение. **Объединением** или **суммой** событий A_k

называется событие А, которое означает появление **хотя бы одного** из событий A_k.

$$A = \bigcup_k A_k$$

<u>Определение.</u> Пересечением или **произведением** событий A_k называется событие А, которое заключается в осуществлении **всех** событий A_k.

$$A = \bigcap_k A_k$$

<u>Определение.</u> Разностью событий А и В называется событие С, которое означает, что происходит событие А, но не происходит событие В.

$$C = A \setminus B$$

<u>Определение.</u> Дополнительным к событию А называется событие $\overline{A}$, означающее, что событие А **не происходит.**

<u>Определение.</u> Элементарными исходами опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие А, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется **пространством элементарных событий**.

<u>Теорема</u> (сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*.

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

<u>Следствие 1:</u> *Если события* $A_1, A_2, ..., A_n$ *образуют пол-*

ную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Определение. Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.*

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$$

Следствие 2: *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.*

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Определение. Событие А называется **независимым** от события В, если вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет. Событие А называется **зависимым** от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Определение. Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется **условной вероятностью** события В.

$$\boxed{P_A(B) = P(B/A) = P(AB)/P(A)}$$

Теорема. (Умножения вероятностей) *Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на услов-*

ную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.

$$\boxed{P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P_A(B)}$$

Также можно записать:

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)=P(B)P_B(A)$$

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из определения условной вероятности.

Если события независимые, то $P(B/A)=P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$\boxed{P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})}$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события.

Если в результате испытания может появиться *n* событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$\boxed{P(A)=1-q_1q_2...q_n}$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$.

Пример. Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта.

Обозначим появление хотя бы одной бубновой карты – событие А, появление хотя бы одной червонной карты – событие В. Таким образом нам надо определить вероятность события С = А + В.

Кроме того, события А и В – совместны, т.е. появление одного из них не исключает появления другого.

Всего в колоде 13 червонных и 13 бубновых карт.

При вытаскивании первой карты вероятность того, что не появится ни червонной ни бубновой карты равна $\frac{26}{52}$, при вытаскивании второй карты - $\frac{25}{51}$, третьей - $\frac{24}{50}$, четвертой - $\frac{23}{49}$.

Тогда вероятность того, что среди вынутых карт не будет ни бубновых, ни червонных равна $P(\overline{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$.

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}945$

Пример. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

Вероятность выпадения 6 очков при одном броске кости равна $\frac{1}{6}$. Вероятность того, что не выпадет 6 очков - $\frac{5}{6}$. Вероятность того, что при броске трех костей не выпадет ни разу 6 очков равна $p=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$.

Тогда вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6 очков равна $1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$.

<u>**Пример.**</u> В барабане револьвера находятся 4 патрона из шести в произвольном порядке. Барабан раскручивают, после чего нажимают на спусковой крючок два раза. Найти вероятности хотя бы одного выстрела, двух выстрелов, двух осечек.

Вероятность выстрела при первом нажатии на курок (событие А) равна $P(A)=\frac{4}{6}$, вероятность осечки - $P(\overline{A})=\frac{2}{3}$. Вероятность выстрела при втором нажатии на курок зависит от результата первого нажатия.

Так если в первом случае произошел выстрел, то в барабане осталось только 3 патрона, причем они распределены по 5 гнездам, т.к. при втором нажатии на курок напротив ствола не может оказаться гнездо, в котором был патрон при первом нажатии на курок.

Условная вероятность выстрела при второй попытке - $P(B/A)=\frac{3}{5}$, если в первый раз был выстрел, $P(B/\overline{A})=\frac{4}{5}$ - если в первый раз произошла осечка.

Условная вероятность осечки во второй раз -

$P(\overline{B}/A)=\frac{2}{5}$, если в первый раз произошел выстрел,

$P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{1}{5}$ - если в первый раз была осечка.

Рассмотрим вероятности того, что во втором случае произойдет выстрел (событие В) или произойдет осечка (событие $\overline{B}$) при условии, что в первом случае произошел выстрел (событие А) или осечка (событие $\overline{A}$).

$$P(B)=P(A)P(B/A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{15}=0{,}4$$ - два выстрела подряд

$$P(B)=P(\overline{A})P(B/\overline{A})=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{15}\approx 0{,}267$$ - первая осечка, второй выстрел

$$P(\overline{B})=P(A)P(\overline{B}/A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}\approx 0{,}267$$ - первый выстрел, вторая осечка

$$P(\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}\approx 0{,}067$$ - две осечки подряд

Эти четыре случая образуют полную группу событий (сумма их вероятностей равна единице)

Анализируя полученные результаты, видим, что вероятность хотя бы одного выстрела равна сумме

$$P_1=\frac{6}{15}+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{14}{15}\approx 0{,}933$$

Теперь рассмотрим другой случай. Предположим, что после первого нажатия на курок барабан раскрутили и опять нажали на курок.

Вероятности первого выстрела и первой осечки не изменились - $P(A)=\dfrac{4}{6}$, $P(\overline{A})=\dfrac{2}{6}$. Условные вероятности второго выстрела и осечки вычисляются из условия, что напротив ствола может оказаться то же гнездо, что и в первый раз.

Условная вероятность выстрела при второй попытке – если в первый раз был выстрел, $P(B/\overline{A})=\dfrac{4}{6}$ - если в первый раз произошла осечка.

Условная вероятность осечки во второй раз - $P(\overline{B}/A)=\dfrac{3}{6}$, если в первый раз произошел выстрел, $P(\overline{B}/\overline{A})=\dfrac{2}{6}$ - если была осечка.

Тогда:

$P(B)=P(A)P(B/A)=\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{3}{6}=\dfrac{3}{9}\approx 0{,}333$ - два выстрела подряд

$P(B)=P(\overline{A})P(B/\overline{A})=\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{9}\approx 0{,}222$ - первая осечка, второй выстрел

$P(\overline{B})=P(A)P(\overline{B}/A)=\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{3}{6}=\dfrac{3}{9}\approx 0{,}333$ - первый выстрел, вторая осечка

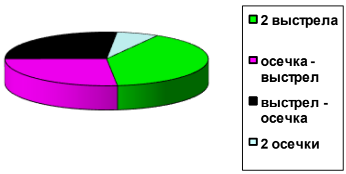
$$P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$$ - две осечки подряд

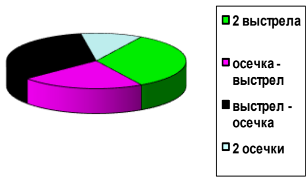
В этом случае вероятность того, что произойдет хотя бы один выстрел, равна

$$P_2 = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889$$

Ниже показаны диаграммы вероятностей для первого и второго рассмотренных случаев.

<u>Пример.</u> Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность





попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Обозначим попадание в цель первым стрелком – событие A, вторым – событие B, промах первого стрелка – событие $\overline{A}$, промах второго – событие $\overline{B}$.

$$P(A) = 0{,}7; \quad P(\overline{A}) = 0{,}3; \quad P(B) = 0{,}8; \quad P(\overline{B}) = 0{,}2.$$

Вероятность того, что первый стрелок попадет в мишень, а второй – нет равна

$$P(A)P(\overline{B}) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14$$

Вероятность того, что второй стрелок попадет в цель, а первый – нет равна

$$P(\overline{A})P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$$

Тогда вероятность попадания в цель только одним стрелком равна

$$P = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38$$

Тот же результат можно получить другим способом – находим вероятности того, что оба стрелка попали в цель и оба промахнулись. Эти вероятности соответственно равны:

$$P(A)P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56; \quad P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06.$$

Тогда вероятность того, что в цель попадет только один стрелок равна:

$$P = 1 - 0{,}56 - 0{,}06 = 0{,}38.$$

Пример. Вероятность того, что взятая наугад деталь из некоторой партии деталей, будет бракованной равна 0,2. Найти вероятность того, что из трех взятых деталей 2 окажется не бракованными.

Обозначим бракованную деталь – событие А, не бракованную – событие $\overline{A}$.

$$P(A) = 0{,}2; \quad P(\overline{A}) = 0{,}8;$$

Если среди трех деталей оказывается только одна бракованная, то это возможно в одном из трех случаев: бракованная деталь будет первой, второй или третьей.

$$P = P(A)P(\overline{A})P(\overline{A}) + P(\overline{A})P(A)P(\overline{A}) + P(\overline{A})P(\overline{A})P(A)$$
$$P = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}384$$

Пример. Вероятности того, что нужная деталь находится в первом, втором, третьем или четвертом ящике, соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Найти вероятности того, что эта деталь находится: а) не более, чем в трех ящиках; б) не менее, чем в двух ящиках.

а) Вероятность того, что данная деталь находится во всех четырех ящиках, равна

$$P = P_1 P_2 P_3 P_4 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}3024.$$

Вероятность того, что нужная деталь находиться не более, чем в трех ящиках равна вероятности того, что она не находится во всех четырех ящиках.

$$P(A) = 1 - P = 1 - 0{,}3024 = 0{,}6976.$$

б) Вероятность того, что нужная деталь находится не менее, чем в двух ящиках, складывается из вероятностей того, что деталь находиться только в двух ящиках, только в трех ящиках, только в четырех ящиках. Конечно, эти вероятности можно посчитать, а потом сложить, однако, проще поступить иначе. Та же вероятность равна вероятности того, что деталь не находится только в одном ящике и имеется вообще.

Вероятность того, что деталь находится только в одном ящике, равна

$$P = P_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 P_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 P_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 P_4$$

$$P = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 =$$
$$= 0{,}0036 + 0{,}0056 + 0{,}0096 + 0{,}0216 = 0{,}0404$$

$$Q = 1 - 0{,}0404 = 0{,}9596$$

Вероятность того, что нужной деталь нет ни в одном ящике, равна:

$$P_0 = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}0024$$

$$Q_0 = 1 - 0{,}0024 = 0{,}9976$$

Искомая вероятность равна

$$P(B) = Q \cdot Q_0 = 0{,}9596 \cdot 0{,}9976 = 0{,}9573.$$

3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть некоторое событие А может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности наступления события А при наступлении события H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Теорема. *Вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий* $H_1, H_2, ..., H_n$, *равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события А.*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)$$

Фактически эта формула **полной вероятности** уже использовалась при решении примеров, приведенных выше, например, в задаче с револьвером.

Доказательство.

Т.к. события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу событий, то событие А можно представить в виде следующей суммы:

$$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n = \sum_{i=1}^{n} AH_i$$

Т.к. события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ несовместны, то и события AH_i тоже несовместны. Тогда можно применить теорему о сложении вероятностей несовместных событий:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i)$$

При этом $P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i)$

Окончательно получаем: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$

Теорема доказана.

Пример. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна $\frac{1}{3}$.

Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

- для первого стрелка: $p_1^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16;$

- для второго стрелка: $p_2^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36;$

- для третьего стрелка: $p_3^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64;$

Искомая вероятность равна:

$$p = \frac{1}{3}p_1^2 + \frac{1}{3}p_2^2 + \frac{1}{3}p_3^3 = \frac{1}{3}(0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64) = \frac{29}{75}$$

4. ФОРМУЛА БЕЙЕСА (ФОРМУЛА ГИПОТЕЗ)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$ с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$. Пусть в результате опыта наступило событие А, условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ относительно события А, т.е. условные вероятности $P(H_i / A)$.

Теорема. *Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.*

$$\boxed{P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}}$$

Эта формула называется **формулой Бейеса**.

Доказательство.

По теореме умножения вероятностей получаем:

$$P(A)P(H_i / A) = P(H_i)P(A / H_i)$$

Тогда если $P(A) \neq 0$, $\quad P(H_i / A) = \dfrac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}$.

Для нахождения вероятности Р(А) используем формулу полной вероятности.

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)}$$

Если до испытания все гипотезы равновероятны с вероятностью $P(H_i) = p$, то формула Бейеса принимает вид:

$$\boxed{P(H_i / A) = \frac{P(A / H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A / H_i)}}$$

5. ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие А, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно события А.**

Допустим, что событие А наступает в каждом испытании с вероятностью $P(A)=p$. Определим вероятность $P_{m,n}$ того, что в результате n испытаний событие А наступило ровно m раз.

Эту вероятность в принципе можно посчитать, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, как это делалось в рассмотренных выше примерах. Однако, при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень большим вычислениям. Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи. Этот подход реализован в формуле Бернулли. (Якоб Бернулли (1654 – 1705) – швейцарский математик)

Пусть в результате n независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие А наступает с вероятностью $P(A) = p$, а противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p$.

Обозначим A_i – наступление события А в испытании с номером i. Т.к. условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны.

Если в результате n опытов событие А наступает ровно m раз, то остальные n-m раз это событие не наступает. Событие А может появиться m раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по m. Это количество сочетаний находится по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^m (1-p)^{n-m}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем **формулу Бернулли:**

$$\boxed{P_{m,n}=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}}$$

Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, т.е., того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей.

Пример. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий.

Т.к. выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в *n* испытаниях событие с вероятностью *p* наступает ровно *n* раз.

$$P_{m,n}=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}$$

В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_{5,5}=p^5=0{,}4^5=0{,}01024$$

Четыре попадания из пяти выстрелов:

$$P_{4,5}=\frac{5!}{4!\cdot 1!}p^4(1-p)=0{,}0768$$

Три попадания из пяти:

$$P_{3,5}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}p^3(1-p)^2=0{,}2304$$

Окончательно, получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов:

$$P = 0{,}01204 + 0{,}0768 + 0{,}2304 = 0{,}31744$$

6. ЛОКАЛЬНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМЫ ЛАПЛАСА

Локальная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

Здесь

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица функций $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена ниже; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей [функция $\varphi(x)$ - четная, следовательно, $\varphi(-x) = \varphi(x)$].

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Здесь

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}\,dx$$ - функция Лапласа,

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица функции Лапласа для положительных значений x ($0 \le x \le 5$) приведена ниже в таблице; для значений $x>5$ полагают $\Phi(x)=5$. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная [$\Phi(-x)=-\Phi(x)$].

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,242	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}\,dx$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438

0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951

1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499999

7. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

7.1 Классическое определение вероятности

Если можно пересчитать все возможные исходы проводимого опыта и если ни один из этих исходов не имеет приоритета по сравнению с другими (то есть при большом количестве опытов все исходы наблюдаются с одинаковой частотой), то говорят, что мы имеем дело со *схемой случаев*. Будем считать, что n – число возможных исходов данного опыта, а m – число его исходов, при которых происходит некоторое событие A (назовем такие исходы *благоприятными* или *благоприятствующими событию A*). Тогда вероятность события A определяется как отношение числа благоприятных исходов к числу возможных:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1. Из колоды в 32 карты вынуто последовательно без возвращения 2 карты. Найти вероятность того, что обе они – тузы.

<u>Решение.</u> Так как первую карту можно извлечь из колоды 32 способами, а вторую – 31 (поскольку в колоде осталось 31 карта), то число возможных исходов опыта $n=32\cdot31=992$. Определим число благоприятных исходов. Первый туз можно выбрать из четырех, имеющихся в колоде, второй – из трех оставшихся. Значит, число благоприятных исходов $m=4\cdot 3=12$, и искомая вероятность равна

$$p = \frac{12}{992} = \frac{3}{248} \approx 0{,}012$$

Во многих случаях, однако, непосредственный перебор всех возможных исходов опыта затруднителен в силу их большого количества. Для решения таких задач полезно использовать некоторых комбинаторные формулы, в частности, формулу для *числа сочетаний*. Число сочетаний из *n* и *k*, то есть число различных объектов равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

В частности, если имеется группа из *N* объектов двух видов (*M* элементов первого вида и *N-M* – второго), из которых требуется выбрать *n* элементов, среди которых должно быть *m* предметов первого типа и *n-m* второго, вероятность того, что случайно извлеченная подгруппа имеет нужный состав, определяется так:

$$p = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Знаменатель этой дроби представляет собой число возможных исходов опыта, то есть количество различных наборов по *n* элементов, выбранных из *N* имеющихся без учета их качественного состава. В числителе – число благоприятных исходов, представляющее собой число возможных наборов из *m* элементов нужного вида, умноженное на количество возможных наборов из *n-m* предметов второго типа.

Пример 2. Из коробки, в которой лежат пять пирожных «эклер» и семь – «наполеон», достали пять пирожных. Найти вероятность того, что среди них два «эклера» и три «наполеона».

Решение. Количество возможных исходов опыта представляет собой число сочетаний из 12 по 5:

$$n = C_{12}^5 = \frac{12!}{5!\cdot 7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{5!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792$$

Число благоприятных исходов является произведением количества способов, которыми можно выбрать два «эклера» из пяти имеющихся, и числа наборов по три «наполеона» из семи:

$$m = C_5^2 \cdot C_7^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 10 \cdot 35 = 350$$

Следовательно, искомая вероятность равна

$$p = \frac{350}{729} \approx 0{,}442$$

Пример 3. В ящике 10 одинаковых деталей, помеченных номерами 1, 2, …, 10. Наудачу извлечены шесть деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся: а) деталь №1; б) детали №1 и №2.

Решение. а) Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь шесть деталей, т.е. C_{10}^6.

Найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию: среди отобранных шести деталей есть деталь №1 и, следовательно, остальные пять деталей имеют другие номера. Число таких исходов, очевидно равно числу способов, которыми можно отобрать пять деталей из оставшихся девяти, т.е. C_9^5

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, к общему числу возможных элементарных исходов:

$$p = \frac{C_9^5}{C_{10}^6} = \frac{C_9^4}{C_{10}^4} = 0{,}6$$

б) Число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди отобранных деталей есть детали №1 и №2, следовательно, четыре детали имеют другие номера), равно числу способов, которыми можно извлечь четыре детали из оставшихся восьми, т.е. C_8^4 .

Искомая вероятность

$$p = \frac{C_8^4}{C_{10}^6} = \frac{1}{3}$$

Пример 4. В партии из *N* деталей имеется *n* стандартных. Наудачу отобраны *m* деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно *k* стандартных.

<u>Решение.</u> Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь *m* деталей из *N* деталей, т. е. C_N^m - числу сочетаний из *N* элементов по *m*.

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди *m* деталей ровно *k* стандартных): *k* стандартных деталей можно взять из *n* стандартных деталей C_n^k способами; при этом остальные *m-k* деталей должны быть нестандартными; взять же *m-k* нестандартных деталей из *N-n* нестандартных деталей можно. C_{N-n}^{m-k} способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_n^k C_{N-n}^{m-k}$

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$p = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

7.2 Геометрические вероятности

Если множество возможных исходов опыта можно представить в виде отрезка прямой или в виде некоторой плоской или трехмерной области, а множество исходов, благоприятных событию *A* — как часть этой области, то вероятность рассматриваемого события определяется следующим образом:

$$P(A) = \frac{s}{S},$$

где *S* — длина отрезка (площадь или объем области), задающего множество возможных исходов, а *s* — соответствующая мера множества благоприятных исходов.

Пример 1. В круг наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что она не попадет в правильный треугольник, вписанный в этот круг.

Решение. В этом случае мерой множества возможных исходов является площадь круга:$S = \pi R^2$, а мерой множества благоприятных исходов — разность площадей круга и треугольника: $s = R^2(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4})$. Следовательно, вероятность заданного события равна

$$p = \frac{s}{S} = \frac{R^2(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}).}{\pi R^2} = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0.586.$$

7.3 Теоремы сложения и умножения вероятностей

Напомним, что *суммой A + B* событий *A* и *B* называется событие, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из событий *A и B, а произведением AB* этик событий - событие, состоящее в том, что произошли оба данных события.

Вероятность суммы двух событий можно найти по *теореме сложения вероятностей:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Если события *A и B несовместны,* то есть не могут произойти одновременно, то вероятность их произведения равна нулю, и теорема сложения приобретает более простой вид:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Вероятность произведения событий определяется по *теореме умножения вероятностей:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A),$$

где $P(B|A)$ - так называемая *условная вероятность* события *B,* то есть вероятность *B* при условии, что *A* произошло. Если осуществление события *A* не изменяет вероятности события *B*, то A и B называются *независимыми,* и вероятность их произведения равна произведению вероятностей сомножителей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Заметим, что при решении задач теоремы сложения и умножения обычно используются совместно.

Пример 1. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания равны соответственно 0,6 и

0,9. Найти вероятности следующих событий:

A - оба попали в цель;

B - в цель попал хотя бы один.

<u>Решение.</u> Назовем событиями *C и D* попадание в мишень соответственно первого и второго стрелка и отметим, что *C и D* являются событиями совместными, но независимыми (иными словами, в мишень могут попасть оба стрелка, а вероятность попадания каждого не зависит от результата другого).

Событие A представляет собой произведение событий *C и D,* поэтому

$$P(A) = P(C) \cdot P(D) = 0{,}6 \cdot 0{,}9 = 0{,}54.$$

Событие B является суммой *C и D;* для определения его вероятности воспользуемся общим видом теоремы сложения:

$$P(B) = P(C + D) = P(C) + P(D) - P(CD) = 0{,}6 + 0{,}9 - 0{,}54 = 0{,}96.$$

Пример 2. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие A).

<u>Решение.</u> <u>Первый способ.</u> Требование - хотя бы один из трех взятых учебников в переплете - будет осуществлено, если произойдет любое из следующих трех несовместных событий: B - один учебник в переплете, C - два учебника в переплете, D-три учебника в переплете.

Интересующее нас событие A можно представить в виде суммы событии: $A = B + C + D$. По теореме сложения,

$$P(A)=P(B)+P(C)+P(D) \qquad (*)$$

Найдем вероятности событий *B, C* и *D*:

$$P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{45}{91}, P(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{20}{91}, P(D)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}.$$

Подставив эти вероятности в равенство (*), окончательно получим

P (A) = 45/91 + 20/91+2/91=67/91.

<u>Второй способ.</u> События *A* (хотя бы один из взятых трех учебников имеет переплет) и $\bar{A}$ (ни один из взятых учебников не имеет переплета) - противоположные, поэтому *P (A)+P(*$\bar{A}$ *)* = 1 (сумма вероятностей двух противоположных событии равна единице).

Отсюда *P (A)* =1 - $\bar{A}$.

Вероятность появления события $\bar{A}$ (ни один из взятых учебников не имеет переплета)

$$P(\bar{A})=\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\frac{24}{91}$$

Искомая вероятность *P (A)* =1 - $\bar{A}$ =1 – 24/91=67/91.

Пример 3. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: $p_1=0{,}1; p_2=0{,}15; p_3=0{,}2$. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

<u>**Решение.**</u> Элементы включены последовательно, поэтому тока в цепи не будет (событие А), если откажет хотя бы один из элементов.

Искомая вероятность

Р (А)= 1- $q_1q_2q_3$ =1-(1-0,1)(1-0,15)(1-0,2)=0,388.

Пример 5. Вероятность успешного выполнения упражнения для каждого из двух спортсменов равна 0,5. Спортсмены выполняют упражнение по очереди, причем каждый делает по две попытки. Выполнивший упражнение первым получает приз. Найти вероятность получения приза спортсменами.

Решение. Для вручения приза достаточно, чтобы хотя бы одна из четырех попыток была успешной. Вероятность успешной попытки p=0,5, а неуспешной q=1-0,5=0,5. Искомая вероятность

$$p = 1 - q^4 = 1 - 0{,}5^4 = 0{,}9375.$$

7.4 Формула полной вероятности и формула Байеса

Если событие А может произойти одновременно с одним из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, представляющих собой так называемую полную группу попарно несовместных событий (то есть в результате опыта обязательно произойдет одно и только одно событие из этой группы), то события $H_1, H_2, \dots, H_n$ называются гипотезами, а вероятность события А определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i).$$

Здесь $P(H_i)$ - вероятность i-ой гипотезы, а $P(A|H_i)$- условная вероятность события *А* при осуществлении данной гипотезы.

Пример 1. В трех одинаковых урнах лежат шары: в первой - 5 белых и 3 черных, во второй -2 белых и 6 черных, в третьей - 3 белых и 1 черный. Из случайно выбранной урны вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение. Будем считать гипотезами выбор одной из урн. Поскольку урны одинаковы, каждую из них можно выбрать с одинаковой вероятностью, а так как сумма вероятностей гипотез равна 1, то вероятность каждой гипотезы - $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$

Условная вероятность события A, то есть извлечения белого шара из урны, определяется по классическому определению вероятности (количеством благоприятных исходов при этом является число белых шаров, а числом возможных исходов - общее число шаров в урне). Поэтому

$$P(A|H_1)=\frac{5}{8}, \qquad P(A|H_2)=\frac{2}{8}, \qquad P(A|H_3)=\frac{3}{4}.$$

Используя формулу полной вероятности, получаем:

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{13}{24}\approx 0{,}542.$$

Если известно, что в результате опыта событие A произошло, то эта информация может изменить вероятности гипотез: повышаются вероятности тех гипотез, при которых событие A происходит с большей вероятностью, и уменьшаются вероятности остальных. Для переоценки вероятностей гипотез при известном результате опыта используется так называемая теорема гипотез, или формула Байеса:

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{P(A)}$$

(В знаменателе дроби в правой части равенства стоит полная вероятность события A).

Пример 2. В студенческой группе 20 студентов. Из них 5 отличников, которые знают все экзаменационные вопросы, 8 студентов знают ответы на 70 % вопросов и 7 - на 50 %. Первый вызванный студент ответил на первый вопрос экзаменационного билета. Найти вероятность того, что он отличник.

Решение. Будем считать гипотезой H_1 что, что данный студент является отличником, H_2 - что он принадлежит ко второй группе, H_3 - к третьей.

Тогда вероятности гипотез равны:

$$P(H_1)=\frac{5}{20}=0{,}25,\qquad P(H_2)=\frac{8}{20}=0{,}4,\qquad P(H_3)=\frac{7}{20}=0{,}35.$$

вопрос - при осуществлении каждой гипотезы:

$$P(A|H_1)=1,\qquad P(A|H_2)=0{,}7,\qquad P(A|H_3)=0{,}5.$$

Следовательно, полная вероятность события *A* равна

$P(A)$ =0,25·1 + 0,4·0,7 + 0,35·0,5 = 0,705.

Применяя формулу Байеса, находим:

$$P(H_1|A)=\frac{0{,}25\cdot 1}{0{,}705}=\frac{50}{141}\approx 0{,}355.$$

Пример 3. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

Решение. Обозначим через *A* событие - извлечен белый шар. Возможны следующие предположения (гипотезы) о первоначальном составе шаров: B_1 - белых шаров нет, B_2 - один белый шар, B_3 - два белых шара.

Поскольку всего имеется три гипотезы, причем по условию они равновероятны, и сумма вероятностей гипотез равна единице (так как они образуют полную группу событий), то вероятность каждой из гипотез равна 1/3, т. е. $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1/3$.

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне не было белых шаров $P_{B1}(A) = 1/3$.

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне был один белый шар $P_{B2}(A) = 2/3$.

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне было два белых шара $P_{B3}(A) = 1$.

Искомую вероятность того, что будет извлечен белый шар, находим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B3}(A) =$$
$$= 1/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 1 = 2/3.$$

Пример 4. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй - 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение. Обозначим через *A* событие - деталь отличного качества. Можно сделать два предположения (гипотезы): B_1-деталь произведена первым автоматом, причем (поскольку первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй) $P(B_1) = 2/3$; B_2 деталь произведена вторым автоматом, причем $P(B_2) = 1/3$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом, $P_{B1}(A) = 0{,}6$

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена вторым автоматом, $P_{B2}(A) = 0{,}84$.

Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}84 = 0{,}68.$$

Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена первым автоматом, по формуле Бейеса равна

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B1}(A)}{P(A)} = \frac{2/3 \cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{10}{17}.$$

Пример 5. Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично из той же партии наудачу извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

Решение. Обозначим через *А* событие - в каждом из двух испытаний (с возвращением) была извлечена стандартная деталь.

Можно сделать три предположения (гипотезы): B_1 - детали извлекались из первой партии; B_2 - детали извлекались из второй партии; B_3 - детали извлекались из третьей партии.

Детали извлекались из наудачу взятой партии, поэтому вероятности гипотез одинаковы:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1/3.$$

Найдем условную вероятность $P(B_1)$, т. е. вероятность того, что из первой партии будут последовательно извлечены две стандартные детали. Это событие достоверно, так как в первом партии все детали стандартны, поэтому $P_{B1}(A) = 1$.

Найдем условную вероятность $P_{B2}(A)$, т. е. вероятность того, что из второй партии будут последовательно извлечены (с возвращением) две стандартные детали:

$$P_{B2}(A) = \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} = \frac{9}{16}.$$

Найдем условную вероятность $P_{B3}(A)$, т. е. вероятность того, что из третьей партии будут последовательно извлечены (с возвращением) две стандартные детали:

$$P_{B3}(A) = \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{20} = \frac{1}{4}.$$

Искомая вероятность того, что обе извлеченные стандартные детали взяты из третьей партии, по формуле Бейеса равна

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B3}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B3}(A)}$$
$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{4}{29}.$$

7.5 Формула Бернулли. Теоремы Лапласа

Рассмотрим случай, когда требуется определить не вероятность осуществления некоторого события *A* в одном испытании, а вероятность того, что это событие произойдет заданное количество раз в серии из *n* опытов. Будем считать при этом, что вероятность *A* в каждом опыте одинакова и результат каждого опыта не зависит от результатов остальных. Такая постановка задачи называется *схемой независимых испытаний*. При выполнении указанных условий вероятность того, что при проведении *n* независимых испытаний событие *A* будет наблюдаться ровно *k* раз (неважно, в каких именно опытах), определяется по *формуле Бернулли:*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где р - вероятность появления *A* в каждом испытании, а q=1 - p - вероятность того, что в данном опыте событие *A* не произошло.

Пример 1. Победу в волейбольном матче одерживает команда, выигравшая 3 партии. Найти вероятность того, что матч между командами, для которых вероятность выигрыша каждой партии равна соответственно 0,8 и 0,2, будет состоять из 5 партий.

<u>Решение.</u> Для того, чтобы потребовалось играть пятую партию, нужно, чтобы после четырех партий счет в матче был 2:2. Следовательно, каждая из команд должна выиграть любые две партии из четырех. Если p = 0,8 есть вероятность выигрыша в каждой партии для первой команды, а q = 0,2 - вероятность ее проигрыша, то, применяя формулу Бернулли, найдем, что

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}04 = 0{,}1536.$$

Пример 2. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

Решение. Играют равносильные шахматисты, поэтому вероятность выигрыша p = 1/2; следовательно, вероятность проигрыша q также равна 1/2. Так как во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и безразлично, в какой последовательности будут выиграны партии, то применима формула Бернулли.

Найдем вероятность того, что две партии из четырех будут выиграны:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}.$$

Найдем вероятность того, что будут выиграны три партии из шести:

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

Так как $P_4(2) > P_6(3)$, то вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три из шести.

Пример 3. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

Решение. По условию, n=243; k=70; p=0,25; q=0,75. Так как n =243 - достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Найдем значение x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0{,}25}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \frac{9{,}25}{6{,}75} = 1{,}37.$$

По таблице найдем $\varphi(1{,}37) = 0{,}1561$. Искомая вероятность

$$P_{243}(70) = \frac{1}{6{,}75 \cdot 0{,}1561} = 0{,}0231.$$

Пример 4. Найти вероятность того, что событие *A* наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

Решение. Таи как *n* велико, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

Найдем значение x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1400 - 2400 \cdot 0{,}6}{\sqrt{2400 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = -\frac{40}{24} = -1{,}67.$$

Функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$-четная, поэтому $\varphi(-1{,}67) = \varphi(1{,}67)$. По таблице найдем $\varphi(1{,}67) = 0{,}0989$.

Искомая вероятность

$$P_{2400}(1400) = \frac{1}{24 \cdot 0{,}0989} = 0{,}0041.$$

Пример 5. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна *p* = 0,8.

Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа: $P_n(k_1,k_2) = \Phi\left(x''\right) - \Phi(x')$, где $\Phi(x)$ -функция Лапласа,

$x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

а) По условию, n = 100; p = 0,8; q =0,2; k_1 = 75; k_2 = 90. Вычислим x' и x'':

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = -1{,}25.$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = 2{,}5.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетна, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$,

получим

$$P_{100}(75; 90) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

По таблице найдем:

$\Phi(2{,}5) = 0{,}4938;\ \Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$

Искомая вероятность

$P_{100}(75; 90) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$

б) Требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75 либо 76, ..., либо 100. Таким образом, в рассматриваемом случае следует принять $k_1 = 75, k_2 = 100$. Тогда

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = -1{,}25.$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5.$$

По таблице найдем $\Phi(1{,}25) = 0{,}3944;\ \Phi(5) = 0{,}5$.

Искомая вероятность

$$P_{100}(75;100) = \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944.$$

в) События –«*A* появилось не менее 75 раз» и «*A* появилось не более 74 раз» противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно, искомая вероятность

$$P_{100}(0;74) = 1 - P_{100}(75;100) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056.$$

8. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Классическая вероятность

Теоремы сложения и умножения вероятностей

1. В ящике 10 красных, 5 синих и 15 белых шаров. Вынули наугад один шар. Какова вероятность того, что он либо красный, либо синий?

2. Найти вероятность того, что наугад взятое двузначное число будет кратным либо двум, либо пяти.

3. На полке в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Наугад берут три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из них в переплете.

4. В ящике 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик

наудачу берет три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окрашена.

5. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров, во втором - 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что они оба белые.

6. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что один из вынутых шаров белый. а другой — черный.

7. В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Вынули один шар и, не возвращая его в ящик, вынули второй шар. Найти вероятность того, что оба шара белые.

8. Бросили одновременно монету и игральную кость. Найти вероятность того, что на монете выпадет герб. А на кости- число очков, кратное трем.

9. Из ящика, содержащего три карточки, с написанными цифрами 1,2,3, наудачу вынимают по одной все карточки. Найти вероятность того, что при этом получится число 123.

10. Установлено 3 сигнализатора о пожаре, работающих независимо друг от друга. Вероятности срабатывания для них равны соответственно 0.9, 0.8, 0.7. Найти вероятность того, что при пожаре сработает: а) только один сигнализатор; 6) ни один; в) хотя бы один.

11. Вероятность попадания для первого стрелка и мишень 0.9, для второго —0.8, для третьего — 0.7. Найти вероятность того, что при одном залпе: а) все три стрелка попадут в цель; 6) ни один стрелок не попадет в цель; в) только один стрелок попадет в цель; г) только два стрелка попадут в цель; д) хотя бы один стрелок попадет в цель.

12. Монету бросают три раза. Найти вероятность того,

что «герб» выпадет: а) только один раз; б) хотя бы один раз; в) все три раза.

13. Имеются три ящика, в каждом из которых по 10 деталей. В первом ящике — 8 стандартных деталей, во втором — 7, в третьем 9. Найти вероятность того, что стандартными окажутся: а) только одна деталь; б) хотя бы одна деталь.

14. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0.9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартно.

15. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность. равна 0.4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

16. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта равна 0.8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

17. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0.38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0.8.

Формула полной вероятности, формулы Байеса

1. В телеателье имеется 4 кинескопа. Вероятность того, что первый кинескоп выдержит гарантийный срок службы равна 0.8, второй - 0.85, третий - 0.9, четвертый - 0.95. Найти вероятность

того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

2. В тире имеется 5 ружей. Вероятность попадания в цель для них соответственно равны: 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9. Найти вероятность попадания при одном выстрели, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

3. Один грибник нашел 20 грибов, из них 5 грибов белые; второй нашел 25 грибов, из них 6 белые. Из наудачу взятой корзины вынут один гриб. Какова вероятность того, что он белый?

4. На сборку поступают однотипные детали из четырех цехов. Вероятности брака в каждом из цехов соответственно равны 0.04, 0.03, 0.06, 0.02. Первый цех поставляет 30, второй - 20. третий - 50 и четвертый - 25 деталей. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется бракованной?

5. В прокатном пункте имеется 3 автомобиля, вероятности неисправности для которых равны 0.2, 0.1 и 0.15 соответственно. Определить вероятность того, что наугад выбранный автомобиль не сломается в дороге.

6. Литье в болванках поступает из двух цехов. Первый цех дает 70% продукции, второй – 30 %. Процент брака составляет в первом цехе 1 %, во втором - 0.5 %. Какова вероятность того, что наудачу взятая болванка не имеет дефектов?

7. В первой урне 3 белых и 2 черных шара, во втором – 4 белых и 6 черных. Из первой урны во вторую переложен один шар, посте чего из второй урны наудачу вынут шар. Какова вероятность того, что он черный?

8. Имеется две партии изделий по 15 и 10 штук, причем в каж-

дой партии 2 изделия бракованные. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия ю второй партии.

9. По линии связи передаются два сигнала: А и В соответственно с вероятностями 0.8 и 0.2. Из-за потех 1/6 часть сигнала А искажается и принимается как сигнал В, а 1/5 часть сигнала В принимается как сигнал А. Найти вероятность того, что на приеме появится сигнал А.

10. В пирамиде 5 винтовок, 3 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.95, для винтовки без оптического прицела — 0.7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

11. В ящике 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей, изготовленных на заводе №2 и 18 деталей, изготовленных на заводе №3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0.9, для завода №2 — 0.6, для завода №3 — 0.9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

12. Имеется три одинаковых ящика. В первом ящике 20 белых шаров., во втором - 10 белых и 10 черных шаров, в третьем — 20 черных шаров. Из наугад выбранного ящика вынут белый шар. Найти вероятность того, что он вынут из первого ящика.

13. Три станка изготавливают однотипные детали. Вероятность брака для первого станка — 0.03, для второго —0.05, для третьего - 0.04. Первый станок дает 25 % продукции: второй — 30%. третий — 45%. Взятая

наудачу деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена на первом станке.

14. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 с оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.95, для винтовки без оптического прицела - 0.8, стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

15. Число грузовые автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Вероятность того. что будет заправляться грузовая машина, равна 0.1., легковая — 0.2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

Схема Бернулли

1. В ящике 20 белых и 10 черных шаров. Вынули один шар, отметили его цвет и вернули в ящик. Найти вероятность того, что из четырех вынутых шаров два окажутся белыми.

2. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что орел появится не менее двух раз.

3. Вероятность дождливого дня в апреле равна 0.3. Какова вероятность того, что из пяти дней ровно три будут дождливыми?

4. В магазин вошли восемь покупателей. Найти вероятность того, что пять из них совершат покупку, если вероятность совершить покупку для каждого равна 0.4.

5. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что

вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

6. Всхожесть семян составляет 70%. Определить вероятность того, что из восьми посеянных семян взойдут не менее трех.

7. Найти вероятность того, что событие А появится не менее трех раз в четырех независимых испытаниях, если вероятность появления события А в одном испытании равна 0.4.

8. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину равна 0.7. Проведено 10 бросков. Что вероятнее: он забросит мяч в корзину 6 или 8 раз?

9. Игрок набрасывает кольца на колышек, вероятность удачи при этом равна 0.1. Найти вероятность того, что из шести колец на колышек попадут хотя бы два.

10. Вероятность попадания в десятку у данного стрелка при одном выстреле равна 0.2. Определить вероятность попадания в десятку не менее трех раз при 10 выстрелах.

11. Событие В появится в случае, если событие А наступит не менее четырех раз. Найти вероятность наступления события В, если будет произведено пять независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0.8.

12. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0.51.

13. Всхожесть семян составляет 70 %. Какова вероятность того, что из 100 посеянных семян взойдут ровно 75?

14. Вероятность того, что покупателю нужна обувь 41 размера,

равна 0.2. Найти вероятность того, что из 100 покупателей 41 размер спросят 30 человек.

15. Игральную кость бросают 800 раз. Найти вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет 267 раз.

16. Игральную кость бросают 800 раз. Найти вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет не менее 260 и не более 274 раз.

17. Прибор состоит из 100 узлов. Вероятность выхода из строя для каждого узла независима и равна 0.2. Найти вероятность того, что откажут от 10 до 30 узлов.

18. На сборы приглашены 120 спортсменов. Вероятность того, что случайно выбранный спортсмен выполнит норматив, равна 0.7. Определить вероятность того, что: выполнят норматив ровно 80 спортсменов; не менее 80 спортсменов.

9. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Вариант 1

1. В квадрат со стороной а = 2 вписан круг. В квадрат наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что она попадет в круг.

2. Монету подбрасывают три раза. Найти вероятность того, что она выпадет «гербом» вверх: а) только один раз, б) хотя бы один раз, в) все три раза.

3. В ящике 20 белых и 10 черных шаров. Вынули один шар, отметили его цвет и вернули в ящик. Найти вероятность того, что из четырех вынутых шаров два окажутся белыми.

4. Вероятность того, что покупателю нужна обувь 41

размера, равна 0.2. Найти вероятность того, что из 100 покупателей 41 размер спросят ровно 30 человек, от 20 до 60 человек.

Вариант 2

1. В магазин вошли восемь покупателей. Найти вероятность того, что пять из них совершат покупку, если вероятность совершить покупку для каждого равна 0.4.

2. Игральную кость бросают 800 раз. Найти вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет 267 раз, от 310 до 600 раз.

3. В урне 6 красных, 2 синих и 5 зеленых шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность, что среди них 4 красных, 1 синий и остальные зеленые.

4. Вероятность приживания саженца равна 0,8. Какова вероятность того, что из 100 саженцев приживутся от 80 до 90?

Вариант 3

1. На сборку поступают детали от двух автоматов. Первый дает в среднем 0,2% брака, а второй - 0,1%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если от первого автомата поступило 200 деталей, а от второго - 300.

2. Бросили монету и игральную кость. Какова вероятность того, что на монете выпадет «герб», а на кости - число очков, кратное трем?

3. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что орел появится не менее двух раз.

4. Всхожесть семян составляет 70%. Какова вероятность того, того из 100 посеянных семян взойдут ровно 75, от 25 до 60 семян?

Вариант 4

1. Вероятность дождливого дня в апреле равна 0.3. Какова вероятность того, что из пяти дней ровно три будут дождливыми?

2. Прибор состоит из 100 узлов. Вероятность выхода из строя для каждого у зла независима и равна 0.2. Найти вероятность того, что откажут от 10 до 50 узлов, ровно 30 узлов

3. Вероятность того, что при одном измерении будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

4. В группе 15 лыжников, 11 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника – 0,8, для велосипедиста – 0,85, для бегуна – 0,7. Спортсмен, выбранный наудачу, выполнил норму. Найти вероятность того, что это лыжник.

Вариант 5

1. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,6. Куплено 10 билетов. Найти вероятность того, что выигрышных будет 7 билетов. Найти наивероятнейшее число выигрышных билетов.

2. Установлено 3 сигнализатора, работающих независимо друг от друга. Вероятности срабатывания для них равны соответственно 0,9, 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что при пожаре сработает: а) только один сигнализатор; б) ни один; в) хотя бы один

3. Два равносильных шахматиста играют в шахматы.

Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

4. На сборы приглашены 120 спортсменов. Вероятность того, что случайно выбранный спортсмен выполнит норматив, равна 0.7. Определить вероятность того, что: выполнят норматив ровно 80 спортсменов; не менее 80 спортсменов.

Вариант 6

1. Всхожесть семян составляет 70%. Определить вероятность того, что из восьми посеянных семян взойдет не менее трех.

2. Вероятность попадания в десятку у данного стрелка при одном выстреле равна 0.2. Определить вероятность попадания в десятку не менее 30 раз при 100 выстрелах, ровно 40 раз.

3. Из букв разрезной азбуки составлено слово «интуиция». Ребенок рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось первоначальное слово.

4. В круг радиуса 5 см вписан квадрат. В круг наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что точка окажется внутри квадрата.

Вариант 7

1. Вероятность дождливого дня в апреле равна 0,3. Какова вероятность того, что из 5 дней ровно 3 будут дождливыми? Найти наивероятнейшее число дождливых дней в апреле.

2. На сборку поступают детали от двух станков: 25% от первого и 75% от второго. Вероятности брака: для первого станка - 0,01, а для второго - 0,05. Найти вероятность того, что

наудачу взятая деталь, окажется бракованной.

3. Найти вероятность того, что событие А появится не менее трех раз в четырех независимых испытаниях, если вероятность появления события А в одном испытании равна 0.4.

4. Игрок набрасывает кольца на колышек, вероятность удачи при этом равна 0.1. Найти вероятность того, что из 60 колец на колышек попадут ровно 40, не менее 40.

Вариант 8

1. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину равна 0.7. Проведено 10 бросков. Что вероятнее: он забросит мяч в корзину 6 или 8 раз?

2. Игральную кость бросают 800 раз. Найти вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет не менее 260 и не более 274 раз, ровно 270 раз.

3. Фабрика выпускает 75% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что из 200 изделий число первосортных заключено между 100 и 120.

4. В точке С, положение которой на телефонной линии АВ длиной 50 км равновозможно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка С удалена от точки А на расстояние не больше 10 км.

Вариант 9

1. Из шести карточек с буквами Л И Т Е Р А выбирают наугад 4 и выкладывают их в порядке появления. Определить вероятность того, что при этом получится слово «тире».

2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков равна 5, а произведение 4.

3. В ящике 15 белых и 10 черных шаров. Вынули один

шар, отметили его цвет и вернули в ящик. Найти вероятность того, что из шести вынутых шаров три окажутся белыми.

4. Вероятность того, что покупателю нужна обувь 41 размера, равна 0.4. Найти вероятность того, что из 150 покупателей 41 размер спросят ровно 60 человек, не более 60 человек.

Вариант 10

1. Монету бросают 10 раз. Найти вероятность того, что орел появится более двух раз.

2. Всхожесть семян составляет 65%. Какова вероятность того, того из 200 посеянных семян взойдут ровно 175, более 175 семян?

3. Устройство состоит из 6 элементов, из которых 3 изношены. При включении устройства включаются случайным образом 3 элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

4. Три стрелка произвели выстрел по цели. Вероятности попадания для них равны соответственно – 0,9, 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один стрелок поразит цель, б) хотя бы один, в) все три стрелка.

Вариант 11

1. В квадрате со стороной 4 см на стороне построен полукруг. Найти вероятность того, что точка, брошенная в квадрат, попадет в полукруг.

2. Вероятность того, что покупателю нужна обувь 41 размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 100 покупателей 41 размер спросят 30 человек.

3.Вероятность дождливого дня в апреле равна 0.7. Какова вероятность того, что из 7 дней ровно 2 будут дождливыми?

4. Прибор состоит из 50 узлов. Вероятность выхода из строя для каждого у зла независима и равна 0.1. Найти вероятность того, что откажут от 10 до 30 узлов, ровно 25 узлов

Вариант 12

1. В магазин вошли 10 покупателей. Найти вероятность того, что пять из них совершат покупку, если вероятность совершить покупку для каждого равна 0.8.

2. Игральную кость бросают 800 раз. Найти вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет 267 раз, от 310 до 600 раз.

3. Готовая обувь поступает в магазин из двух цехов: 30% из первого, 70% из второго. Вероятности брака для них равны соответственно 0,2 и 0,1. Найти вероятность того, что купленная пара обуви окажется бракованной.

4. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25%, вторая-35%, третья-40% всех изделий. Брак их продукции составляет соответственно 5%, 4% и 2%. Случайно выбранный болт оказался дефектным. Какова вероятность, что он изготовлен на второй машине?

Вариант 13

1. На семи карточках написаны буквы Д Е Н С Т Т У. Перемешав карточки, извлекают их одну за другой и кладут в порядке извлечения. Определить вероятность того, что получится слово «студент».

2. Вероятность того, что книга имеется фондах первой библиотеки равна 0,3, второй – 0,4, третьей – 0,45. Определить

вероятность того, что книга имеется: а) в фондах хотя бы одной библиотеки, б) в фондах только одной библиотеки.

3. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Какова вероятность выиграть 5 партий из 8 (ничьи во внимание не принимаются)?

4. На сборы приглашены 180 спортсменов. Вероятность того, что случайно выбранный спортсмен выполнит норматив, равна 0.9. Определить вероятность того, что: выполнят норматив ровно 110 спортсменов; не более 110 спортсменов.

Вариант 14

1. Всхожесть семян составляет 50%. Определить вероятность того, что из 5 посеянных семян взойдет ровно3.

2. Вероятность попадания в десятку у данного стрелка при одном выстреле равна 0.6. Определить вероятность попадания в десятку не более 50 раз при 80 выстрелах, ровно 50 раз.

3. Известно, что 95% продукции стандартно. Контроль признает стандартную продукцию годной с вероятностью 0,9 и нестандартную – с вероятностью 0,15. Наудачу взятая деталь признана годной. Определить вероятность того, что она стандартна.

4. Ящик содержит 90 годных и 10 дефектных деталей. Найти вероятность того, что среди трех наугад взятых деталей ровно две дефектных.

Вариант 15

1.В квадрат со стороной а = 6 вписан круг. В квадрат наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что она попадет в круг.

2.Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями 0.5,0.2,0.3. Вероятность того, что лампа проработает заданное количество часов, равны для этих партии, соответственно, 0.8, 0.6, 0.9. Определить вероятность, что взятая наудачу лампа проработает заданное количество часов.

3.Найти вероятность того, что событие А появится не более 2 раз в 8х независимых испытаниях, если вероятность появления события А в одном испытании равна 0.7.

4. Игрок набрасывает кольца на колышек, вероятность удачи при этом равна 0.6. Найти вероятность того, что из 70 колец на колышек попадут ровно 60, более 60.

Вариант 16

1.Монету бросают 10 раз. Найти вероятность того, что орел появится ровно 8 раз.

2. Всхожесть семян составляет 70%. Какова вероятность того, того из 200 посеянных семян взойдут ровно 150, от 150 до 175 семян?

3. Игральную кость бросают 800 раз. Какова вероятность того, что число очков, кратное 3, выпадет не меньше 260 и не более 274 раз?

4. В прокатном пункте имеются 3 автомобиля, вероятности неисправности для которых равны 0,2, 0,1 и 0,15 соответственно. Пришедший выбирает один из автомобилей наудачу. Определить вероятность того, что выбранный автомобиль не сломается в дороге.

Вариант 17

1. В партии деталей 15% нестандартных. Найти вероятность того, что из 10 отобранных деталей нестандартными

окажутся 4.

2. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов. Первый завод поставляет 50%, второй – 35%, третий – 15% всех изделий. Среди изделий первого завода – 80% первосортных, второго – 70%, третьего – 75%. Куплено одно изделие, оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что это изделие выпущено вторым заводом.

3. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину равна 0.8. Проведено 11 бросков. Что вероятнее: он забросит мяч в корзину 3 или 6 раз?

4. Игральную кость бросают 100 раз. Найти вероятность того, что четное число очков, выпадет не менее 26 раз, ровно 26 раз.

Вариант 18

1. В ящике 2 белых и 10 черных шаров. Вынули один шар, отметили его цвет и вернули в ящик. Найти вероятность того, что из 6 вынутых шаров два окажутся белыми.

2. Вероятность того, что покупателю нужна обувь 41 размера, равна 0.6. Найти вероятность того, что из 150 покупателей 41 размер спросят ровно 80 человек, менее 80 человек.

3. Прибор состоит из 8 узлов. Вероятность выхода из строя каждого узла независима и равна 0,2. Найти вероятность того, что откажут ровно3 узла. Найти наивероятнейшее число отказавших узлов.

4. Студент разыскивает нужную формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула находится в первом справочнике 0,4, во втором – 0,5, в третьем – 0,6. Найти вероятность того, а) формула будет найдена, б) формула будет

найдена только в двух справочниках.

Вариант 19

1.Из колоды в 52 карты вынимают 5, одна из которых оказывается тузом. Перемешав эти 5 карт, наугад берут одну из них. Какова вероятность, что это опять туз?

2.Хозяйка в поисках нужной ей вещи имеет возможность обойти 4 магазина. Вероятность купить нужную вещь в первом магазине – 0.6, во втором – 0.7, в третьем – 0.5, в четвертом – 0.8. Найти вероятность, что вещь куплена во втором магазине.

3.Вероятность ясного дня в июле равна 0.9. Какова вероятность того, что из 10 дней ровно 2 будут дождливыми?

4. Прибор состоит из 1000 узлов. Вероятность выхода из строя для каждого у зла независима и равна 0.1. Найти вероятность того, что откажут от 100 до 500 узлов, ровно 500 узлов

Вариант 20

1.Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из пяти или две партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

2. На сборы приглашены 320 спортсменов. Вероятность того, что случайно выбранный спортсмен выполнит норматив, равна 0.6. Определить вероятность того, что: выполнят норматив ровно 180 спортсменов; от 180 до 280 спортсменов.

3.Игральную кость бросают 3 раза. Какова вероятность, что число очков, кратное трем выпадет 2 раза?

4.В одной урне 1 белый и 9 черных шаров, во второй – 2 черных и 6 белых. Из каждой урны наугад взяли по одному шару, остальные ссыпали в один ящик. Какова вероятность, что взятый наудачу из ящика шар белый?

Вариант 21

1.В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность попадания в цель для винтовки с прицелом – 0.95, без прицела – 0.8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Из какой винтовки наиболее вероятно был сделан выстрел?

2.Прибор состоит из 4 узлов. Вероятность безотказной работы каждого 0.6. Найти вероятность, что за выбранный промежуток времени выйдут из строя менее двух узлов.

3.В магазин вошли восемь покупателей. Найти вероятность того, что пять из них совершат покупку, если вероятность совершить покупку для каждого равна 0.4.

4. Игральную кость бросают 800 раз. Найти вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет 267 раз, от 310 до 600 раз.

Вариант 22

1.Всхожесть семян составляет 80%. Определить вероятность того, что из 7 посеянных семян взойдет ровно 6.

2. Вероятность попадания в десятку у данного стрелка при одном выстреле равна 0.8. Определить вероятность попадания в десятку не менее 40 раз при 80 выстрелах, ровно 40 раз.

3.В альбоме 100 марок, из которых 20 гашеных. 4 марки наудачу подвергают спецгашению. Какова вероятность, что взятые после этого случайным образом 3 марки чистые?

4.В урну, содержащую 2 шара, опущен белый шар. После чего из нее наудачу извлечен белый шар. Найти вероятность, что в урне не было белых шаров, если равновозможны все предположения о первоначальном составе шаров.

Вариант 23

1.Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0.8. Найти вероятность, что при 4 выстрелах будет 3 попадания.

2.В партии электрических лампочек 2 части изготовлены заводом №1, 3 – заводом №2, 5 – заводом №3. Вероятность брака для первого завода 0.03, для второго 0.05, а для третьего 0.06. Наудачу извлекли лампочку. Какова вероятность, что она бракованная?

3.Найти вероятность того, что событие А появится ровно 8 раз в 10 независимых испытаниях, если вероятность появления события А в одном испытании равна 0.7.

4. Игрок набрасывает кольца на колышек, вероятность удачи при этом равна 0.5. Найти вероятность того, что из 70 колец на колышек попадут ровно 50, не менее 50.

Вариант 24

1.Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину равна 0.9. Проведено 6 бросков. Что вероятнее: он забросит мяч в корзину 4 или 5 раз?

2. Игральную кость бросают 400 раз. Найти вероятность того, что число очков, равное трем, выпадет не менее 360 и не более 374 раз, ровно 360 раз.

3.При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки в отношении 1:3:6. При попадании в танк, крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0.9, средний – 0.3, мелкий – 0.1. Осколок пробил броню. Найти вероятность, что это средний осколок?

4.Монета брошена 5 раз. Какова вероятность, что герб выпал менее двух раз?

Вариант 25

1. В ящике 5 белых и 12 черных шаров. Вынули один шар, отметили его цвет и вернули в ящик. Найти вероятность того, что из 6 вынутых шаров два окажутся белыми.

2. Вероятность того, что покупателю нужна обувь 41 размера, равна 0.3. Найти вероятность того, что из 10 покупателей 41 размер спросят ровно 8 человек.

3. Прибор состоит из 80 узлов. Вероятность выхода из строя каждого узла независима и равна 0,2. Найти вероятность того, что откажут ровно30 узла.

4. Студент разыскивает нужную формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула находится в первом справочнике 0,49 во втором – 0,5, в третьем – 0,8. Найти вероятность того, а) формула будет найдена, б) формула будет найдена только в двух справочниках.

Вариант 26

1. На семи карточках написаны буквы А Н А Н А С. Перемешав карточки, извлекают их одну за другой и кладут в порядке извлечения. Определить вероятность того, что получится слово «ананас».

2. Вероятность того, что книга имеется фондах первой библиотеки равна 0,7, второй – 0,8, третьей – 0,9. Определить вероятность того, что книга имеется: а) в фондах хотя бы одной библиотеки, б) в фондах только одной библиотеки.

3. Два равносильных шахматиста играют в шахматы.

Какова вероятность выиграть 2 партий из 5 (ничьи во внимание не принимаются)?

4. На сборы приглашены 100 спортсменов. Вероятность того, что случайно выбранный спортсмен выполнит норматив, равна 0.8. Определить вероятность того, что: выполнят норматив ровно 90 спортсменов; не более 90 спортсменов.

Вариант 27

1.Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину равна 0.6. Проведено 10 бросков. Что вероятнее: он забросит мяч в корзину 6 или 8 раз?

2. Игральную кость бросают 800 раз. Найти вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет не менее 260 и не более 274 раз, ровно 270 раз.

3. Фабрика выпускает 75% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что из 200 изделий число первосортных заключено между 100 и 120.

4. В точке С, положение которой на телефонной линии АВ длиной 50 км равновозможно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка С удалена от точки А на расстояние не больше 10 км.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. ФИЗМАТЛИТ, 1996, 1985. 416 с.

2. В.Е. Гмурман. Теория. вероятностей и математическая статистика. Издание девятое, стереотипное. Рекомендовано. ... УДК 519.2 ББК 22.171. Учеб. пособие для вузов. Изд. Высш. шк., 2003. ISBN 5-06-004214-6. Книга (8-с изд, 2002 г.)

3. В.Е.Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и. Математической статистике. М.: Высш. школа, 1979, 400 с.