ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

«Дискретная случайная величина»

по дисциплине

«Математика»

Авторы
Рябых Г. Ю.,
Ворович Е. И.,
Тукодова О. М.,
Фролова Н. В.,
Пристинская О. В.

Ростов-на-Дону, 2021

Аннотация

Учебное пособие предназначено для аудиторной и самостоятельной работы при различных видах обучения: очном, заочном и дистанционном. Для студентов всех направлений и специальностей.

Авторы

канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Рябых Г.Ю.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ворович Е.И.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Тукодова О.М.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пристинская О.В.

Оглавление

1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Понятие случайной величины является основным в теории вероятностей и ее приложениях. Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной величины. Случайными величинами, например, является число выпавших очков при однократном бросании игральной кости, число распавшихся атомов радия за данный промежуток времени, число вызовов на телефонной станции за некоторый промежуток времени, отклонение от номинала некоторого размера детали при правильно налаженном технологическом процессе и т. д.

Определение. **Случайной величиной** называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение с некоторой вероятностью.

Случайные величины можно разделить на две категории.

Определение. **Дискретной случайной величиной** называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы), с определенной вероятностью.

Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

Например, количество выстрелов до первого попадания в цель является дискретной случайной величиной, т.к. эта величина может принимать и бесконечное (счетное) количество значений.

Определение. **Непрерывной случайной величиной** называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно (и не является счетным).

2. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим ***дискретную*** случайную величину (случайные величины будем обозначать прописными буквами латинского алфавита: $X, Y, Z, \ldots$) X , то есть величину, возможные значения которой образуют конечную или бесконечную последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

На первый взгляд может показаться, что для задания дискретной случайной величины достаточно перечислить все ее возможные значения. В действительности это не так: случайные величины могут иметь одинаковые перечни возможных значений, а вероятности их – различные. Поэтому для задания дискретной случайной величины недостаточно перечислить все возможные ее значения, нужно еще указать их вероятности.

Важнейшей характеристикой случайной величины служит ее распределение вероятностей.

Закон распределения дискретной случайной величины.

Определение. Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется

законом распределения дискретной случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется **рядом распределения**.

Графическое представление этой таблицы называется **многоугольником распределения.** При этом сумма все ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая - их вероятности:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, заключаем, что события $X = x_1$, $X = x_2$, …, $X = x_n$ образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий, т. е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

$$P(X = x_k) = p_k, \qquad k = 1, 2, \ldots n, \qquad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \tag{2.1}$$

Эту таблицу называют ***рядом распределения*** случайной величины X. Наглядно функцию *p(x)* можно изобразить в виде графика. Для этого возьмем прямоугольную систему координат на плоскости. По горизонтальной оси будем откладывать возможные значения случайной величины X, а по вертикальной оси - значения функции $p_i = P(x = x_i)$. График функции *p(x)* изображен на рис. 3.1. Если соединить точки этого графика прямолинейными отрезками, то получится фигура, которая называется ***многоугольником распределения***.

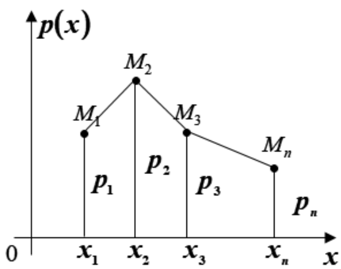


Рис. 3.1

Пример. 1) Пусть событие *А* — появление одного какого-либо очка при бросании игральной кости. Как мы знаем, вероятность выпадения какого-либо очка для всех цифр (1, 2, 3, 4, 5, 6) одинакова и равна P(A)=1/6.

Значения X	0	1	2	3	4	5	6
Вероятности $p(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

2) Рассмотрим случайную величину X — число наступлений события *А* (выпадения конкретного числа очков) при десяти бросаниях игральной кости (т.е. *n=10*). Значения функции *p(x)* (***закона распределения***) приведены в следующей таблице:

Значения X	0	1	2	3	4	5	6	...	10
Вероятности $p(x_i)$	0,162	0,323	0,291	0,155	0,054	0,013	0,002	...	0

$X=0$ означает, что конкретная цифра при десяти бросаний кости не выпала ни разу. $X=1$ - цифра при десяти бросаний выпала один раз. $X=2$ - два раза и т.д.

Вероятности $p(x_i)$ приведенные в таблице, вычислены по формуле Бернулли ($P_n(m)=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}\cdot p^m\cdot q^{n-m}$) при *n=10*. Для *x>6* они практически равны нулю:

$$P_{10}(0)=\frac{10!}{0!\cdot(10-0)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10-0}=\frac{10!}{10!}\cdot 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10}=0{,}162$$

$$P_{10}(1)=\frac{10!}{1!\cdot(10-1)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10-1}=\frac{10!}{9!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^9=10\cdot\frac{1}{6}\cdot 0{,}19=0{,}32$$

$$P_{10}(2)=\frac{10!}{2!\cdot(10-2)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^8=\frac{10!}{2\cdot 8!}\cdot\frac{1}{36}\cdot 0{,}232=0{,}291$$

$$P_{10}(3)=\frac{10!}{3!\cdot(10-3)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^7=\frac{10!}{2\cdot 3\cdot 7!}\cdot\frac{1}{6^3}\cdot 0{,}232=0{,}155$$

$$P_{10}(4)=\frac{10!}{4!\cdot(10-4)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{10!}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 6!}\cdot\frac{1}{6^4}\cdot 0{,}3348=0{,}054$$

$$P_{10}(5)=\frac{10!}{5!\cdot(10-5)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5=\frac{10!}{5!\cdot 5!}\cdot\frac{1}{6^5}\cdot 0{,}4018=0{,}013$$

График функции p(x) изображен на рис. 3.2.

Это так называемый биноминальный закон распределения

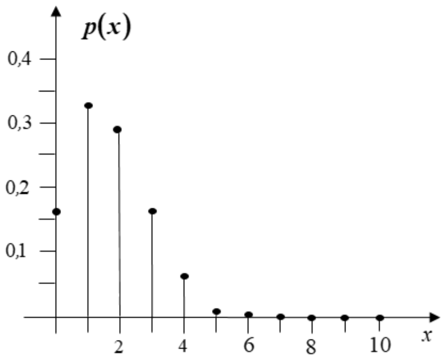


Рис. 3.2

3. ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. ***Закон распределения Бернулли***. Пусть случайная величина X это число, характеризующее наступления события А при одном испытании. При этом множество возможных значений X состоит из 2-х чисел 0 и 1: $x = 0$, если событие А не произошло, и $x = 1$ если событие А произошло. Таким образом:

$$p(0) = P(x = 0) = P(\overline{A}) = 1 - p = q \qquad p(1) = P(x = 1) = P(A) = p$$

x_i	0	1
p_i	q	p

Распределение Бернулли играет фундаментальную роль в теории вероятностей и математической статистики, являясь математической моделью опыта с двумя исходами.

Пусть, например, имеется партия некоторой продукции, в которой продукция без дефектов встречается с вероятностью p, а некачественная продукция с вероятностью $q=1-p$. Пусть случайная величина $X=1$, если при выборе попалась качественная продукция и $X=0$, если некачественная. Тогда случайная величина X будет иметь распределение Бернулли.

Пример. Случайная величина X — число очков, выпадающих при однократном бросании игральной кости. Возможные значения X — числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. При этом вероятность того, что X примет любое из этих значений, одна и та же и равна 1/6. Какой будет закон распределения?

Решение. Здесь закон распределения вероятностей есть функция *p(x)=1/6* для любого значения *x* из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

График этого закона имеет вид, изображенный на рис. 3.3.

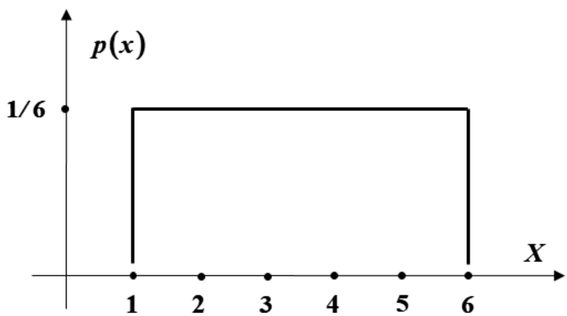


Рис. 3.3

2. ***Биноминальный закон распределения***. Случайная величина X принимает значения: $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \mathrm{n}$, с вероятностью, определяемой по формуле Бернулли:

$P(X=m)=P_n(m)=\dfrac{n!}{m!\ (n-m)!}p^m\cdot q^{n\ -m}$. Здесь p - постоянная вероятность того, что случайная величина X в серии n испытаний появится m раз.

	0	1	2		k		n
	$C_n^0\cdot p^0\cdot q^n$	$C_n^0\cdot p^0\cdot q^n$	$C_n^0\cdot p^0\cdot q^n$		$C_n^0\cdot p^0\cdot q^n$		$C_n^0\cdot p^0\cdot q^n$

Пример этого закона мы рассмотрели выше. График этого закона имеет вид, изображенный на рис. 3.4.

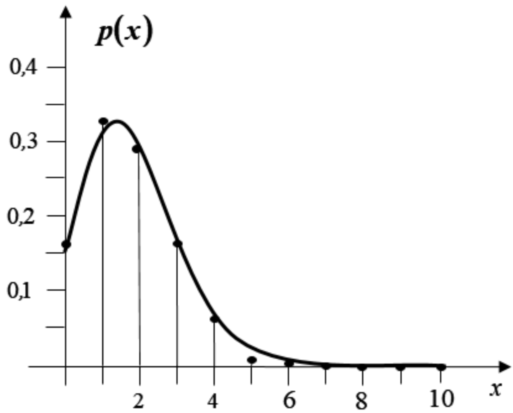


Рис. 3.4

3. ***Закон распределения Пуассона***. Случайная величина X принимает бесконечное счетное число значений: $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, k, \ldots$, с вероятностью, определяющейся по формуле Пуассона:

$$p(k)=P(X=k)=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!} \tag{3.2}$$

где $\lambda>0$ — некоторая положительная постоянная - параметр распределения Пуассона.

В этом случае говорят, что случайная величина X распределена по ***закону Пуассона***. Заметим, что при $k=0$ следует учесть, что $0!=1$.

Формулу Пуассона можно получить как предельный случай формулы Бернулли при неограниченном увеличении числа испытаний ***n*** и при стремлении к нулю вероятности $p=\dfrac{\lambda}{n}$.

Пример. На завод прибыла партия деталей в количестве **1000 шт.** Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна **0,001**. Какова вероятность того, что среди прибывших деталей будет **5** бракованных?

Решение: Здесь $\lambda=np=1000\cdot 0{,}001=1$. По формуле (3.2) находим

$$P_{1000}(5)\approx\frac{1^5\cdot e^{-1}}{5!}\approx 0{,}003$$

Распределение Пуассона часто встречается и в других задачах. Так, например, если телефонистка в среднем за один час получает N вызовов, то, как можно показать, вероятность $P(k)$ того, что в течение одной минуты она получит k вызовов, выражается формулой Пуассона, если положить $\lambda=\dfrac{N}{60}$.

$$P(k)=\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{N}{60}\right)^k\cdot e^{\left(-\frac{N}{60}\right)}$$

4. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЕ СВОЙСТВА

Рассмотрим некоторую функцию *F(x)*, определенную на всей числовой оси следующим образом: для каждого *x* значение этой функции *F(x)* равно вероятности того, что дискретная случайная величина X примет значение, меньшее *x*, т. е.

$$F(x) = P(X < x) \tag{3.3}$$

В этом случае эта функция называется ***функцией распределения вероятностей***, или кратко, ***функцией распределения***.

Пример. Найти функцию распределения случайной величины X, приведенной в **примере (**Случайная величина X — число очков, выпадающих при однократном бросании игральной кости**)**.

Решение: Ясно, что если $x \le 1$, то *F(x)=0*, так как X не принимает значений, меньших единицы.

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$.

Если $2 < x \le 3$, то $F(x) = P(X < x) = P(X < 3)$. Но событие $X < 3$ в данном случае является суммой двух несовместных событий: $X = 1$ и $X = 2$. Следовательно,

$$P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Итак, для $2 < x \le 3$ имеем *F(x)=1/3*. Аналогично вычисляются значения функции в промежутках $3 < x \le 4$, $4 < x \le 5$ и $5 < x \le 6$. Наконец, если $x > 6$ то *F(x)=1*, так как в этом случае любое возможное значение X *(1, 2, 3, 4, 5, 6)* меньше, чем *x*. График функции *F(x)* изображен на рис.

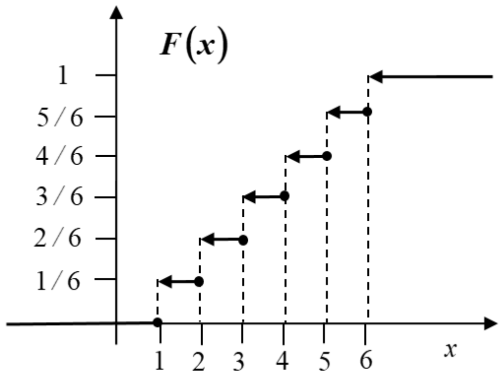


Рис. 3.5.

Зная функцию распределения *F(x)*, легко найти вероятность того, что случайная величина X удовлетворяет неравенствам $x_1 \le X < x_2$.

Действительно, рассмотрим событие, заключающееся в том, что случайная величина примет значение меньшее x_2. Это событие распадается на сумму двух несовместных событий: 1) случайная величина X принимает значения, меньшие $\boldsymbol{x_1}$, т.е. $X < x_1$; 2) случайная величина X принимает значения, удовлетворяющие неравенствам $x_1 \le X < x_2$. Используя аксиому сложения, получаем:

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2).$$

Отсюда $P(x_1 \le X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1)$. Но по определению функции распределения *F(x)* [см. формулу (3.3)], имеем $P(X < x_2) = F(x_2)$, $P(X < x_1) = F(x_1)$;следовательно,

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) \qquad (3.4)$$

Таким образом, ***вероятность попадания дискретной случайной величины в интервал*** $x_1 \le X < x_2$ ***равна приращению функции распределения на этом интервале.***

Рассмотрим основные свойства функции распределения.

1°. ***Функция распределения является неубывающей.***

В самом деле, пусть $x_1 < x_2$. Так как вероятность любого события неотрицательна, то $P(x_1 \le X < x_2)$. Поэтому из формулы (3.4) следует, что $F(x_2) - F(x_1) \ge 0$, т.е. $F(x_2) > F(x_1)$.

2°. ***Значения функции распределения удовлетворяют неравенствам*** $0 \le F(x) \le 1$.

Это свойство вытекает из того, что *F(x)* определяется как вероятность [см. формулу (3.3)]. Ясно, что

$F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$.

Здесь и в дальнейшем введены обозначения: $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

3°. **Вероятность того, что дискретная случайная величина X примет одно из возможных значений x_i, равна скачку функции распределения в точке x_i.**

Действительно, пусть x_i - значение, принимаемое дискретной случайной величиной, и $\Delta x > 0$. Полагая в формуле (3.4) $x_1 = x_i$, $x_2 = x_i + \Delta x$, по- лучим

$$P(x_i \le X < x_i + \Delta x) = F(x_i + \Delta x) - F(x_i)$$

В пределе при $\Delta x \to 0$ вместо вероятности попадания случайной величины на интервал $x_i \le X < x_i + \Delta x$ получим вероятность того, что величина X примет данное значение x_i:

$$\lim_{\Delta x \to 0} P(x_i \le X < x_i + \Delta x) = P(X = x_i) = p(x_i)$$

С другой стороны, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} P(x_i + \Delta x) = F(x_i + 0)$, т.е. предел функции *F(x)* справа, так как $\Delta x > 0$. Следовательно, в пределе формула примет вид

$$p(x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i - 0)$$

т.е. значение $p(x_i)$ равно скачку функции $F(x_i)$. Можно показать, что $F(x_i) = F(x_i - 0)$, т.е. что функция *F(x)* непрерывна слева в точке x_i. Это свойство наглядно иллюстрируется на рис.4.

5. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако, когда невозможно найти закон распределения, или этого не требуется, можно ограничиться нахождением значений, называемых числовыми характеристиками случайной величины. Эти величины определяют некоторое среднее значение, вокруг которого группируются значения случайной величины, и степень их разбросанности вокруг этого среднего значения.

<u>**Определение.**</u> **Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

С точки зрения вероятности можно сказать, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

<u>Свойства математического ожидания.</u>

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной.

$$M(C) = C$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$$M(Cx) = CM(x)$$

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

Это свойство справедливо для произвольного числа случайных величин.

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$$

Это свойство также справедливо для произвольного числа случайных величин.

Пусть производится *n* независимых испытаний, вероятность появления события А в которых равна *p*.

<u>Теорема.</u> *Математическое ожидание М(Х) числа появления события А в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.*

$$M(X) = np$$

Однако, математическое ожидание не может полностью характеризовать случайный процесс. Кроме математического ожидания надо ввести величину, которая характеризует отклонение значений случайной величины от математического ожидания.

Это отклонение равно разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием. При этом математическое ожидание отклонения равно нулю. Это объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, другие отрицательны, и в результате их взаимного погашения получается ноль.

<u>Определение.</u> **Дисперсией (рассеиванием)** дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2$$

<u>Пример.</u> Для рассмотренного <u>выше</u> примера закон распределения случайной величины имеет вид:

X	0	1	2
p	0,0625	0,375	0,5625

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Математическое ожидание случайной величины равно:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}5625 = 1{,}5$$

Возможные значения квадрата отклонения:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (0 - 1{,}5)^2 = 2{,}25$$

$$[x_2 - M(X)]^2 = (1 - 1{,}5)^2 = 0{,}25$$

$$[x_3 - M(X)]^2 = (2 - 1{,}5)^2 = 0{,}25$$

Тогда

$[X-M(X)]^2$	2,25	0,25	0,25
p	0,0625	0,375	0,5625

Дисперсия равна:

$$D(X) = 2{,}25 \cdot 0{,}0625 + 0{,}25 \cdot 0{,}375 + 0{,}25 \cdot 0{,}5625 = 0{,}375$$

Однако, на практике подобный способ вычисления дисперсии неудобен, т.к. приводит при большом количестве значений случайной величины к громоздким вычислениям.

Поэтому применяется другой способ.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИСПЕРСИИ

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадра-*

том ее математического ожидания.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Доказательство. С учетом того, что математическое ожидание M(X) и квадрат математического ожидания $M^2(X)$ – величины постоянные, можно записать:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] =$$
$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

$$\boxed{D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2}$$

Применим эту формулу для рассмотренного выше примера:

X	0	1	2
X^2	0	1	4
p	0,0625	0,375	0,5625

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 4 \cdot 0{,}5625 = 2{,}625$$

$$D(X) = 2{,}625 - [1{,}5]^2 = 0{,}375$$

Свойства дисперсии.

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(C) = 0$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)$$

Справедливость этого равенства вытекает из свойства 2.

<u>**Теорема.**</u> *Дисперсия числа появления события А в п независимых испытаний, в каждом из которых вероятность р появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в каждом испытании.*

$$\boxed{D(X)=npq}$$

7. СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

<u>**Определение.**</u> **Средним квадратическим отклонением** (СКО) случайной величины Х называется квадратный корень из дисперсии.

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{D(X)}}$$

<u>**Теорема.**</u> *Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин.*

$$\sigma(X_1+X_2+...+X_n)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+...+\sigma^2(X_n)}$$

<u>Пример.</u> Завод выпускает 96% изделий первого сорта и 4% изделий второго сорта. Наугад выбирают 1000 изделий. Пусть Х – число изделий первого сорта в данной выборке.

Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Выбор каждого из 1000 изделий можно считать независимым испытанием, в котором вероятность появления изделия первого сорта одинакова и равна p = 0,96.

Таким образом, закон распределения может считаться биноминальным.

$$m_x = pn = 1000 \cdot 0{,}96 = 960;$$

$$D_x = npq = 1000 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04 = 38{,}4;$$

<u>Пример.</u> Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события А в двух независимых испытаниях, если вероятности появления этого события в каждом испытании равны и известно, что M(X) = 0,9.

Т.к. случайная величина Х распределена по биноминальному закону, то

$$M(X) = np = 2p = 0{,}9; \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}45;$$

$$D(X) = npq = 2p(1-p) = 2 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 = 0{,}495.$$

<u>Пример.</u> Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события А в каждом испытании. Найти вероятность появления события А, если дисперсия числа появлений события в трех независимых испытаниях равна 0,63.

По формуле дисперсии биноминального закона получаем:

$$D(X) = npq = 3p(1-p) = 0{,}63;$$

$$3p^2 - 3p + 0{,}63 = 0$$

$$p^2 - p + 0{,}21 = 0;$$

$$p_1 = 0{,}7; \quad p_2 = 0{,}3;$$

Пример. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа каждого из приборов равны соответственно $p_1=0{,}3$; $p_2=0{,}4$; $p_3=0{,}5$; $p_4=0{,}6$. Найти математическое ожидание и дисперсию числа отказавших приборов.

Принимая за случайную величину число отказавших приборов, видим что эта случайная величина может принимать значения 0, 1, 2, 3 или 4.

Для составления закона распределения этой случайной величины необходимо определить соответствующие вероятности. Примем $q_i = 1 - p_i$.

1) Не отказал ни один прибор.

$$p(0) = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}084.$$

2) Отказал один из приборов.

$$p(1) = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 = 0{,}302.$$

3) Отказали два прибора.

$$p(2) = p_1 p_2 q_3 q_4 + p_1 q_2 p_3 q_4 + p_1 q_2 q_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 p_4 + q_1 q_2 p_3 p_4 = 0{,}38.$$

4) Отказали три прибора.

$$p(3) = p_1 p_2 p_3 q_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}198.$$

5) Отказали все приборы.

$$p(4) = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}036.$$

Получаем закон распределения:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
p	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

Математическое ожидание:

$$M(X)=0{,}302+2\cdot 0{,}38+3\cdot 0{,}198+4\cdot 0{,}036=1{,}8.$$

$$M(X^2)=0{,}302+4\cdot 0{,}38+9\cdot 0{,}198+16\cdot 0{,}036=4{,}18.$$

Дисперсия:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=4{,}18-3{,}24=0{,}94.$$

8. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - оценки, полученной на экзамене наугад выбранным студентом. Известно, что в группе из 20 человек 2 студента получили оценку – «2», 6 студентов – «3», 10 студентов – «4» и 2 студента – «5». Построить график функции распределения. Вычислить числовые характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$.

Решение: Дискретная случайная величина X - отметка студента, которая может принять значения 2; 3; 4 или 5. Вероятность события *{X=2}* равна $P(X=2)=p_1=2/20$, (число двоек - 2, а общее число студентов 20). Вероятности других возможных значений равны:

$$P(X=3)=p_2=\frac{6}{20},\ P(X=4)=p_3=\frac{10}{20},\ P(X=5)=p_4=\frac{2}{20}.$$

Следовательно, закон распределения дискретной случайной величины имеет вид:

X	2	3	4	5
P	0,1	0,3	0,5	0,1

Контроль: 0,1+0,3+0,5+0,1=1

Найдем числовые характеристики данной случайной величины. Математическое ожидание:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 2\cdot 0,1+3\cdot 0,3+4\cdot 0,5+5\cdot 0,1=0,2+0,9+2+0,5=3,6$$

Дисперсия:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2\cdot p_i.=(2-3,6)^2\cdot 0,1+(3-3,6)^2\cdot 0,3+$$
$$+(4-3,6)^2\cdot 0,5+(5-3,6)^2\cdot 0,1=$$
$$=2,56\cdot 0,1+0,36\cdot 0,3+0,16\cdot 0,5+1,96\cdot 0,1=0,64$$

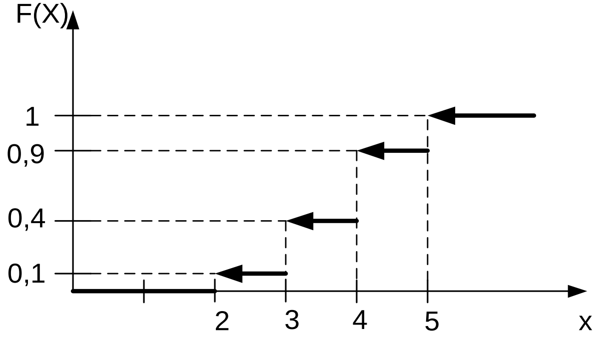
Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,64}=0,8.$$

Функция распределения $F(X)$ имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ \textit{если}\ x\le 2 \\ 0,1,\ \textit{если}\ 2<x\le 3 \\ 0,1+0,3,\ \textit{если}\ 3<x\le 4 \\ 0,1+0,3+0,5,\ \textit{если}\ 4<x\le 5 \\ 1,\ \textit{если}\ x>5 \end{cases}$$

График функции распределения имеет вид:



2. Найти *m* и числовые характеристики случайной величины *X*

X	-1	0	1	2
P	0,1	0,3	m	0,4

0,1+0,3+*m*+0,4=1 → *m*=0,2

M(x)=–1*0,1+0*0,3+1*0,2+2*0,4=0,9

$$D(x) = (-1-0{,}9)^2 + (0-0{,}9)^2 * 0{,}3 + (1-0{,}9)^2 * 0{,}2 + (2-0{,}9)^2 * 0{,}4 = 1{,}09$$

$$\sigma(x) = \sqrt{1{,}09} \approx 1{,}04$$

3. Найти функцию распределения случайной величины X — числа очков, выпадающих при однократном бросании игральной кости.

Решение: Ясно, что если $x \le 1$, то *F(x)=0*, так как X не принимает значений, меньших единицы.

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = \dfrac{1}{6}$.

Если $2 < x \le 3$, то $F(x) = P(X < x) = P(X < 3)$. Но событие $X < 3$ в данном случае является суммой двух несовместных событий: $X = 1$ и $X = 2$. Следовательно,

$$P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Итак, для $2 < x \le 3$ имеем *F(x)=1/3*. Аналогично вычисляются значения функции в промежутках $3 < x \le 4$, $4 < x \le 5$ и $5 < x \le 6$. Наконец, если $x > 6$ то *F(x)=1*, так как в этом случае любое возможное значение X *(1, 2, 3, 4, 5, 6)* меньше, чем *x*. График функции *F(x)* изображен на рис. 3.5.

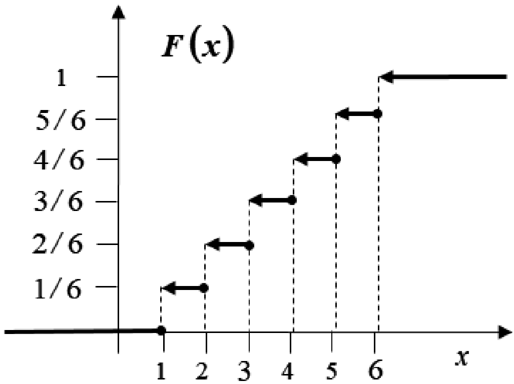


Рис. 3.5.

4. Дан ряд распределения случайной величины X:

x_i		10	20	30	40	50
p_i		0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Найти функцию распределения вероятности этой случайной величины.

Если *x≤10*, то *F(x)=P(X<x)=0;*

10<x ≤ 20, *F(x)=P(X<x)=0,2;*

20<x $\le$ 30, *F(x)=P(X<x)=0,2+0,3=0,5;*

30<x $\le$ 40, *F(x)=P(X<x)=0,2+0,3+0,35=0,85;*

40<x $\le$ 50, *F(x)=P(X<x)=0,2+0,3+0,35+0,1=0,95;*

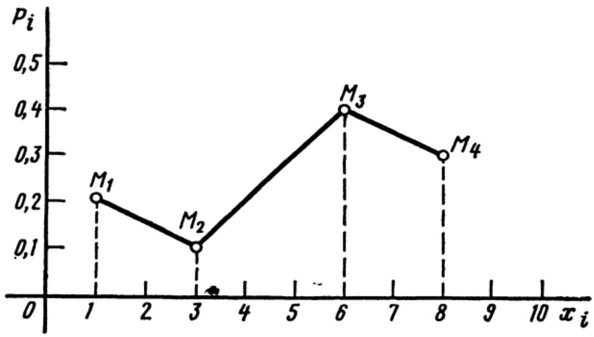
x>50, F(x)=P(X<x)=0,2+0,3+0,35+0,1+0,05=1

5. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения:

X	1	3	6	8
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить многоугольник распределения.

<u>**Решение.**</u> Построим прямоугольную систему координат, причем по оси абсцисс будем откладывать возможные значения x_i, а по оси ординат – соответствующие вероятности p_i. Построим точки



$M_1(1;0{,}2), M_2(3;0{,}1), M_3(6;0{,}4), M_4(8;0{,}3)$. Соединив эти точки отрезками прямых, получим искомый многоугольник распределения.

6. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

<u>Решение.</u> Дискретная случайная величина *X* (число отказавшихся элементов в одном опыте) имеет следующие возможные значения:

$x_1 = 0$ (ни один из элементов устройства не отказал), $x_2 = 1$ (отказал один элемент), $x_3 = 2$ (отказали два элемента) и $x_4 = 3$ (отказали три элемента).

Отказы элементов независимы один от другого, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому применима формула Бернулли. Учитывая, что, по условию, *n*=3, *p*=0,1 (следовательно, *q*=1-0,1=0,9), получим:

$$P_3(0) = q^3 = 0{,}9^3 = 0{,}729;\ P_3(1) = C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243;\ P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 =$$

$$= 0{,}027;\ P_3(3) = p^3 = 0{,}1^3 = 0{,}01.$$

<u>Контроль:</u> 0,729+0,243+0,027+0,001=1.

Напишем искомый биномиальный закон распределения *X:*

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,01

7. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

<u>Решение.</u> Случайная величина *X* - число стандартных деталей среди отобранных деталей - имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Найдем вероятности возможных значений *X* по формуле:

$$P(X = k) = C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k} / C_N^m$$

(N – число деталей в партии, n- число стандартных деталей в партии, m – число отобранных деталей, k – число стандартных деталей среди отобранных), находим:

$$P(X=0)=\frac{C_8^0\cdot C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{10\cdot 9/(1\cdot 2)}=\frac{1}{45};$$

$$P(X=1)=\frac{C_8^1\cdot C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{8\cdot 2}{45}=\frac{16}{45};$$

$$P(X=2)=\frac{C_8^2\cdot C_2^0}{C_{10}^2}=\frac{8\cdot 7/(1\cdot 2)}{45}=\frac{28}{45}.$$

Составим искомый закон распределения:

X	0	1	2
p	1/45	16/45	28/45

Контроль: 1/45+16/45+28/45=1

8. Из партии, содержащей 10 деталей, среди которых две бракованных, взяты наудачу три детали. Составить ряд распределения случайной величины *X* – числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение. Так как бракованных деталей в партии только две, среди трех отобранных должна быть, по крайней мере, одна стандартная деталь. Следовательно, случайная величина *X* может принимать три значения: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. Найдем соответствующие им вероятности. Число возможных наборов по три детали из 10 имеющихся, то есть число возможных исходов опыта, составляет:

$$n=C_{10}^3=\frac{10!}{3!\cdot 7!}=120.$$

Найдем число исходов, благоприятствующих каждому значению случайной величины:

$$m_1=C_8^1\cdot C_2^2=8,\ m_2=C_8^2\cdot C_2^1=56, m_3=C_8^3=56.$$

Тогда $p_1 = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$, $p_2 = p_3 = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$. Поэтому ряд распределения имеет вид:

x_i	1	2	3
p_i	1/15	7/15	7/15

9. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X из примера 10.

Решение. Используя найденный ряд распределения, получим:

$$\mathrm{M(X)} = 1 \cdot \frac{1}{15} + 2 \cdot \frac{7}{15} + 3 \cdot \frac{7}{15} = \frac{36}{15} = 2{,}4;$$

$$\mathrm{D(X)} = 1^2 \cdot \frac{1}{15} + 2^2 \cdot \frac{7}{15} + 3^2 \cdot \frac{7}{15} - 2{,}4^2 = \frac{92}{15} - 5{,}76 \approx 0{,}373;$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{D(X)}} = \sqrt{0{,}373} \approx 0{,}611.$$

9. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Монета бросается 3 раза. Найти закон распределения случайной величины X - числа появлений герба. Найти функцию распределения этой случайной величины и построить ее график.
2. В коробке 10 электроламп, из которых 2 нестандартных. Составить закон распределения случайной величины - X- числа стандартных ламп среди двух случайно отобранных. Найти функцию распределения и построить ее график.
3. Игральная кость бросается 3 раза. Найти закон распре-

деления случайной величины X - числа появлений четного числа очков. Построить график функции распределения.

4. В урне 5 белых и 6 черных шаров. Составить закон распределения случайной величины X, равной числу белых шаров среди двух шаров, взятых наудачу из урны.
5. Среди 200 билетов денежкой лотереи 23 выигрышных 2 выигрыша по 50000 рублей, 1 по 25000 и 20 по 1000 рублей, найти закон распределения стоимости возможного выигрыша для купившего один билет.
6. Прибор состоит из 3 независимо **работающих** элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте 0.4 Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.
7. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу нестандартных деталей среди 4 случайно отобранных из партии, в которой содержится 10% нестандартных деталей.
8. В партии из 10 деталей имеется 6 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения случайной величины X - числа стандартных деталей среди отобранных.
9. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0.8. Составить закон распределения случайной величины X - числа попаданий при 3 выстрелах. Построить график функции распределения.
10. Имеется 3 лампочки, **каждая и**з которых с вероятностью 0.1 имеет дефект. Дефектная лампочка сразу пе-

регорает. Найти закон распределения случайной величины X - числа перегоревших лампочек. Построить график функции распределения.

11. По мишени произведено два выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.2. Найти закон распределения случайной величины X - числа попаданий в мишень. Найти функцию распределения.
12. Устройство состоит из 5 блоков. Вероятность отказа в одном испытании для каждого блока равна 0.1. Найти закон распределения числа отказавших блоков в одном испытании. Найти функцию распределения.
13. Трижды бросается игральная кость. Найти закон распределения числа появлений тройки. Построить график функции распределения.
14. В аквариуме 30 рыб, причем 10 из них меченые. Было отловлено 5 рыб. Найти закон распределения случайной величины X - числа меченных рыб среди отловленных. Найти функцию распределения.
15. В партии хлопка 20% коротких волокон. Выбирают наудачу 10 волокон. Найти закон распределения **случайной** величины X - числа коротких волокон среди отобранных. Простроить график функции распределения.
16. Игральная кость бросается 2 раза. Найти закон распределения случайной величины X - числа появлений цифры, делящейся на 3. Построить график функции распределения.
17. В урне 10 белых и 6 черных шаров. Из урны наудачу

навлекают 3 шара. Найти закон распределения случайной величины X - числа белых шаров среди извлеченных. Построить график функции распределения

18. Игральная кость бросается 3 раза. Найти закон распределения случайной величины X - числа появлений цифры 1. Найти функцию распределения.
19. В коробке 10 деталей, из которых 7 окрашено. Наудачу извлекают 3 детали. Найти закон распределения случайной величины Х - числа окрашенных деталей среди извлеченных Найти функцию распределения.
20. Среди *100* билетов денежной лотереи 2 выигрышных билета по 50000, 3 по 10000 и 5 - по 1000 руб. Найти закон распределения случайной величины - Х - возможного выигрыша для купившего один билет Найти функцию распределения.
21. Производятся три выстрела по мишени с вероятностью попадания 0.4. Найти закон распределения случайной величины Х - числа попаданий в мишень. Найти функцию распределения.
22. Имеется 10 деталей, из которых 3 имеют дефект. Наудачу берут 2 детали. Найти закон распределения случайной величины X - количества дефектных деталей среди взятых. Найти функцию распределения и математическое ожидание.
23. Прибор состоит из четырех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента равна 0.2. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу отказавших элементов. Найти функцию

распределения.

24. Имеется 5 лампочек, каждая из которых с вероятностью 0.2 может быть дефектной. Дефектная лампочка сразу перегорает. Найти закон распределения случайной величины X - числа перегоревших лампочек. Построить график функции распределения.
25. В партии хлопка 25% коротких; волокон. Наудачу взяли 5 волокон. Найти закон распределения числа длинных волокон среди взятых. Построить график функции распределения.
26. Найти математическое ожидание случайной величины Z, если известны математически ожидания X и У

а) Z=X+2Y, M(X)=5, M(Y)=3

б) Z=3X+4Y, M(X)=2, M(У)=6

27. Случайные величины X и У независимы. Найти дисперсию случайной величины Z, если известны дисперсии случайных величин X и У.

а) Z=3X+2Y, D(X)=5, D(Y)=6.

б) Z=2X+3Y, D(X)=4, D(Y)=5.

28. Дано

X	-1	0	1
p	p_1	p_2	p_3

$M(X)=0,1$; $M(X^2)=0,9$.

Найти p_1, p_2, p_3.

29. Дано

X	1	2	3
p	P_1	P_2	P_3

$M(X)=2,3$; $M(X^2)=5,9$.

Найти p_1, p_2, p_3.

30. Дано

X	3	5	8	10
P	0,3	0,2	0,4	0,1

Найти M(X), D(X), σ (X), F(x).

31. Дано

X	x_1	0,1	1,5	2
p	0,1	0,3	0,4	0,2

M(X)= 4,08

Найти x_1 D(X), σ(X), F(x).

32. Дано

X	-3	-2	-4	-1
P	0,1	P_2	0,3	0,45

Найти p_2, M(X), D(X), ст(X), F(x).

10. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

1. а) Монета бросается 3 раза. Найти закон распределения случайной величины X - числа появлений герба. Найти функцию распределения этой случайной величины и построить ее график.

б) Найти математическое ожидание случайной величины Z, если известны математически ожидания X и У, если Z=X+2Y, M(X)=5, M(Y)=3

2. а) В коробке 10 электролламп, из которых 2 нестандартных. Составить закон распределения случайной величины - X- числа стандартных ламп среди двух случайно отобранных.

Найти функцию распределения и построить ее график.

б) Дано

X	1	2	3
p	P1	P2	Рз

M(X)=2,3; M(X2)=5,9. Найти p1, p2, p3.

3. а) Игральная кость бросается 3 раза. Найти закон распределения случайной величины X - числа появлений четного числа очков. Построить график функции распределения.

б) Дано

X	3	5	8	10
P	0,3	0,2	0,4	0,1

Найти M(X), D(X), ϭ (X), F(x).

4. а) В урне 5 белых и 6 черных шаров. Составить закон распределения случайной величины X, равной числу белых шаров среди двух шаров, взятых наудачу из урны.

б) Случайные величины X и У независимы. Найти дисперсию случайной величины Z, если известны дисперсии случайных величин X и У.

Z=3X+2Y, D(X)=5, D(Y)=6

5. а)Среди 200 билетов денежкой лотереи 23 выигрышных 2 выигрыша по 50000 рублей, 1 по 25000 и 20 по 1000 рублей, найти закон распределения стоимости возможного выигрыша для купившего один билет.

б) Дано

X	-3	-2	-4	-1

P	0,1	P2	0,3	0,45

Найти p2, M(X), D(X), ϭ (X), F(x).

6. а) Прибор состоит из 3 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте 0,4. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

б) Дано

X	x1	0,1	1,5	2
p	0,1	0,3	0,4	0,2

M(X)= 4,08

Найти x1 D(X), ϭ(X), F(x).

7. а) Найти закон распределения случайной величины X, равной числу нестандартных деталей среди 4 случайно отобранных из партии, в которой содержится 10% нестандартных деталей.

б) Найти математическое ожидание случайной величины Z, если известны математические ожидания X и У, если Z=3X+4Y, M(X)=2, M(У)=6

8. а) В партий из 10 деталей имеется 6 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения случайной величины X - числа стандартных деталей среди отобранных.

б) Дано

X	3	5	8	10
P	0,3	0,2	0,4	0,1

Найти M(X), D(X), ϭ (X), F(x).

9. а) Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0.8. Составить закон распределения случайной величины X - числа попаданий при 3 выстрелах. Построить график функции распределения.

б) Дано

X	-1	0	1
p	p1	p2	pз

M(X)=0,1, M(X2)=0,9.

Найти p1, p2, p3.

10. а) Имеется 3 лампочки, каждая из которых с вероятностью 0.1 имеет дефект. Дефектная лампочка сразу перегорает. Найти закон распределения случайной величины X - числа перегоревших лампочек. Построить график функции распределения.

б) Случайные величины X и У независимы. Найти дисперсию случайной величины Z, если известны дисперсии случайных величин X и У.Z=2X+3Y, D(X)=4, D(Y)=5.

11. а) По мишени произведено два выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.2. Найти закон распределения случайной величины X - числа попаданий в мишень. Найти функцию распределения.

б) Дано

X	1	2	3
p	P1	P2	Pз

M(X)=2,3, M(X2)=5,9.

Найти p1, p2, p3.

12. а) Устройство состоит из 5 блоков. Вероятность отказа в одном испытании для каждого блока равна 0.1. Найти закон распределения числа отказавших блоков в одном испытании. Найти функцию распределения.

б) Найти математическое ожидание случайной величины Z, если известны математически ожидания X и У, если Z=2X+4Y, M(X)=1, M(Y)=5

13. а) Трижды бросается игральная кость. Найти закон распределения числа появлений тройки. Построить график функции распределения.

б) Дано

X	-4	-6	-3	-1
P	0,5	0,1	0,2	0,1

Найти M(X), D(X), б (X), F(x).

14. а) В аквариуме 30 рыб, причем 10 из них меченые. Было отловлено 5 рыб. Найти закон распределения случайной величины X - числа меченых рыб среди отловленных. Найти функцию распределения

б) Дано

X	x1	8	10	3
p	0,15	0,35	0,3	0,2

M(X)= 7

Найти x1 D(X), б(X), F(x).

15. а) В партии хлопка 20% коротких волокон. Выбирают наудачу 10 волокон. Найти закон распределения случайной величины X - числа коротких волокон среди отобранных. Про-

строить график функции распределения.

б) Случайные величины X и У независимы. Найти дисперсию случайной величины Z, если известны дисперсии случайных величин X и У.

Z=5X+Y, D(X)=4, D(Y)=9

16. а) Игральная кость бросается 2 раза. Найти закон распределения случайной величины X - числа появлений цифры, делящейся на 3. Построить график функции распределения.

б) Дано

X	4	0	5	8
P	0,1	0,4	0,2	0,3

Найти M(X), D(X), ϭ (X), F(x).

17. а) В урне 10 белых и 6 черных шаров. Из урны наудачу навлекают 3 шара. Найти закон распределения случайной величины X - числа белых шаров среди извлеченных. Построить график функции распределения

б) Дано

X	3	1	X3	0
p	0,15	0,35	0,3	0,2

M(X)= 2,3

Найти x3 D(X), ϭ(X), F(x).

18. а) Игральная кость бросается 3 раза. Найти закон распределения случайной величины X - числа появлений цифры 1. Найти функцию распределения.

б) Дано

X	0	2	-3	4
P	0,55	0,05	0,2	0,2

Найти M(X), D(X), б (X), F(x).

19. а) В коробке 10 деталей, из которых 7 окрашено. Наудачу извлекают 3 детали. Найти закон распределения случайной величины X - числа окрашенных деталей среди извлеченных. Найти функцию распределения.

б) Дано

X	-14	-16	-3	-10
P	0,2	0,2	0,2	0,4

Найти M(X), D(X), б (X), F(x).

20. а) Среди 100 билетов денежной лотереи 2 выигрышных билета по 50000, 3 по 10000 и 5 - по 1000 руб. Найти закон распределения случайной величины - X - возможного выигрыша для купившего один билет. Найти функцию распределения.

б) Дано

X	-1	-6	-3	-5
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Найти M(X), D(X), б (X), F(x).

21. а) Производятся три выстрела по мишени с вероятностью попадания 0.4. Найти закон распределения случайной величины X - числа попаданий в мишень. Найти функцию распределения.

б) Дано

X	3	10	8	5
P	0,2	0,5	0,3	0

Найти M(X), D(X), ϭ (X), F(x).

22. а) Имеется 10 деталей, из которых 3 имеют дефект. Наудачу берут 2 детали. Найти закон распределения случайной величины X - количества дефектных деталей среди взятых. Найти функцию распределения и математическое ожидание.

б)Дано

X	-4	0	-3	-7
P	0,15	0,15	0,6	0,1

Найти M(X), D(X), ϭ (X), F(x).

23. а) Прибор состоит из четырех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента равна 0.2. Найти закон распределения случайной величины X , равной числу отказавших элементов. Найти функцию распределения.

б) Дано

X	1	4	3	7
P	0,7	0,1	0,1	0,1

Найти M(X), D(X), ϭ (X), F(x).

24. а) Имеется 5 лампочек, каждая из которых с вероятностью 0.2 может быть дефектной. Дефектная лампочка сразу перегорает. Найти закон распределения случайной величины X - числа перегоревших лампочек. Построить график функции распределения.

б) Дано

X	4	6	3	1
P	0,2	0,1	0,2	0,5

Найти M(X), D(X), ϭ (X), F(x).

25. а) В партии хлопка 25% коротких; волокон. Наудачу взяли 5 волокон. Найти закон распределения числа длинных волокон среди взятых. Построить график функции распределения.

б) Дано

X	15	20	21	23
P	0,5	0,1	0,2	0,1

Найти M(X), D(X), ϭ (X), F(x).

26. а) Прибор состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента равна 0.1. Найти закон распределения случайной величины X , равной числу отказавших элементов. Найти функцию распределения.

б) Найти математическое ожидание случайной величины Z, если известны математические ожидания X и У, если Z=5X–3Y, M(X)=5, M(У)=1

27. а) Игральная кость бросается 3 раза. Найти закон распределения случайной величины X - числа появлений четного числа очков. Найти функцию распределения.

б) Случайные величины X и У независимы. Найти дисперсию случайной величины Z, если известны дисперсии случайных величин X и У.

Z=3X+Y, D(X)=3, D(Y)=9

28. а) а) Имеется 2 лампочки, каждая из которых с вероятностью 0.3 имеет дефект. Дефектная лампочка сразу перегорает. Найти закон распределения случайной величины X - числа перегоревших лампочек. Построить график функции распределения.

29. а) В коробке 12 деталей, из которых 5 окрашено. Наудачу извлекают 4 детали. Найти закон распределения случайной величины X - числа неокрашенных деталей среди извлеченных. Найти функцию распределения.

б) Дано

X	17	13	23	20
P	0,25	0,1	0,5	0,15

Найти M(X), D(X), ϭ (X), F(x).

30. а) В урне 10 белых и 2 черных шаров. Составить закон распределения случайной величины X, равной числу белых шаров среди трех шаров, взятых наудачу из урны.

б) Найти математическое ожидание случайной величины Z, если известны математические ожидания X и У, если Z=3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., Наука.

2. В.Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа.

3. В.Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., Высшая школа.