ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

«Двойные интегралы»

по дисциплине

«Математика»

Авторы
Рябых Г. Ю.,
Ворович Е. И.,
Тукодова О. М.,
Фролова Н. В.,
Пристинская О. В.

Ростов-на-Дону, 2021

Аннотация

Учебное пособие предназначено для аудиторной и самостоятельной работы при различных видах обучения: очном, заочном и дистанционном. Для студентов технических и экономических направлений и специальностей.

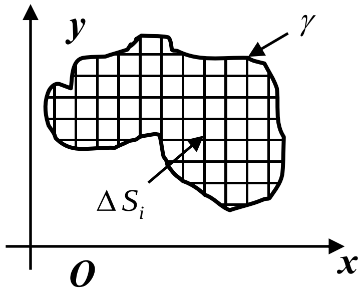
Авторы

канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Рябых Г.Ю.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ворович Е.И.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Тукодова О.М.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пристинская О.В.

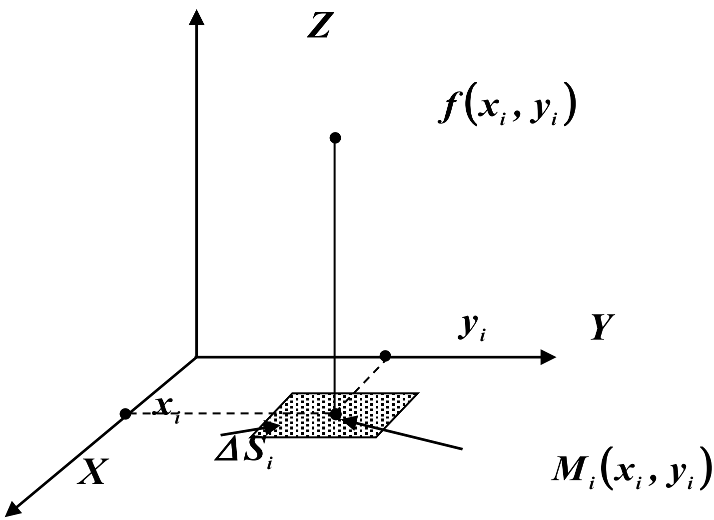
Оглавление

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

На плоскости Oxy рассмотрим область S площадью S, ограниченную замкнутой кривой γ. Пусть в области S определена функция $z = f(x, y)$. Разобьем область S сетью линий на конечное число областей ΔS_1, ΔS_2 и т.д. площади которых соответственно $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots \Delta S_n$.



В каждой $i-ой$ элементарной области ΔS_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$, значение функции в этой точке умножим на площадь ΔS_i соответствующей обла-



сти и все произведения сложим.

Полученная сумма

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$$

называется интегральной суммой функции $f(x, y)$ в области S.

Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области S называется конечный предел I интегральной суммы I_n при $\lambda \to 0$, где λ - наибольший из диаметров элементарных областей ΔS_i ;

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$$

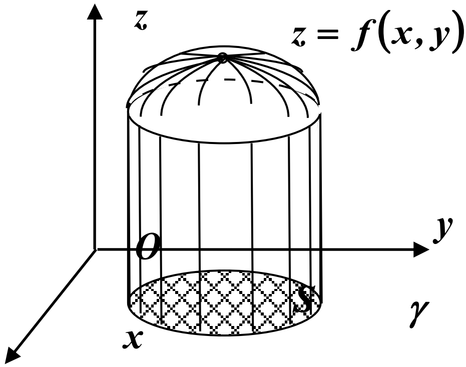
Отметим, что предел не зависит от характера разбиения.

Обозначения двойного интеграла:

$$I = \iint_S f(x, y) dS, \qquad I = \iint_S f(x, y) dx\,dy$$

Функция $z = f(x, y)$, для которой рассмотренный предел существует и конечен, называется интегрируемой. Если Функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области S, то она интегрируема в этой области.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА



Если $f(x,y)>0$, то двойной интеграл от функции $z=f(x,y)$ по области S равен объему тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, с боков – цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит контур γ фигуры S, снизу – плоскостью $z=0$.

3. СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. $I=\iint\limits_S c\cdot f(x,y)\,dS=c\cdot\iint\limits_S f(x,y)\,dS \qquad c=const$

2. $\iint\limits_S\left(f(x,y)\pm\varphi(x,y)\right)dS=\iint\limits_S f(x,y)dS\pm\iint\limits_S\varphi(x,y)dS$

3. Если $f(x,y)\le\varphi(x,y)$, то $\iint\limits_S f(x,y)dS\le\iint\limits_S\varphi(x,y)dS$

4. $\left|\iint\limits_S f(x,y)dS\right|\le\iint\limits_S\left|f(x,y)\right|dS$

5. Если S_1 и S_2 области, на которые разбита область S, то

$$\iint\limits_S f(x,y)dS=\iint\limits_{S_1} f(x,y)dS+\iint\limits_{S_2} f(x,y)dS.$$

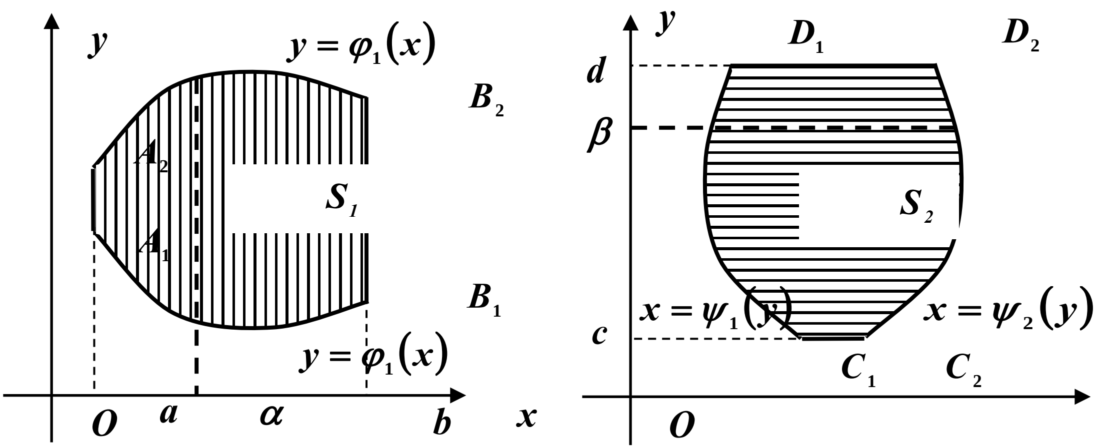
6. Если в области S $m \le f(x,y) \le M$, то

$$m \cdot S \le \iint_S f(x,y)\,dS \le M \cdot S,$$

Откуда $\iint_S f(x,y)dS = \mu \cdot S \quad (m \le \mu \le M)$.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Различают две основных области интегрирования, как показано на рисунках.



Если для функции $f(x,y)$, определенной в области S_1, существует двойной интеграл, а при каждом постоянном значении x из $[a,b]$ простой интеграл

$$I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

то существует также и повторный интеграл

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx$$

и выполняется равенство

$$\iint_S f(x,y)dS = \int_a^b dx \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dy$$

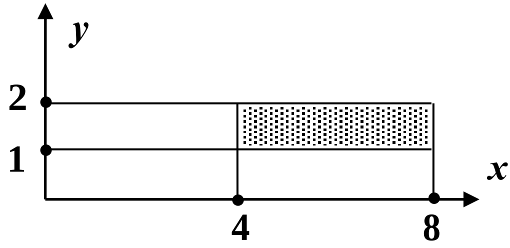
В случае области второго рода S_2 двойной интеграл равен:

$$\iint_S f(x,y)dS = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dx$$

Если область S является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат, причем $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, то

$$\iint_S f(x,y)dS = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

$$\iint_S f(x,y)dS = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$



Пример. Вычислить $\iint\limits_S xy\,dx\,dy$, где область S является прямоугольником $[4,8;1,2]$.

Согласно формуле

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy,$$ запишем

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_4^8 dx\int\limits_1^2 xy\,dy$$

Так как

$$\int\limits_1^2 xy\,dy = x\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^2 = \frac{x}{2}(4-1) = \frac{3}{2}x,$$

то

$$\int\limits_4^8 dx\int\limits_1^2 xy\,dy = \int\limits_4^8 \frac{3}{2}xdx = \frac{3}{2}\int\limits_4^8 xdx = \frac{3}{2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_4^8 = \frac{3}{4}(64-16) = 36$$

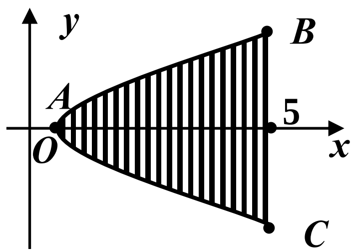
Следовательно, $\iint\limits_S xydxdy = 36$.

5. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Площадь S плоской области S выражается формулой

$$S = \iint\limits_S dS = \iint\limits_S dxdy$$

Пример. Вычислить площадь области, ограниченной линиями $x = 1 + y^2$, $x = 5$.



Данная область ограничена параболой $x = 1 + y^2$ и прямой $x = 5$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x = 1 + y^2 \\ y = 0 \end{cases},$$

находим точку $A(1,0)$ пересечения параболы с осью Ox.

Из системы

$$\begin{cases} x = 1 + y^2 \\ x = 5 \end{cases}$$

находим две точки пересечения параболы с прямой $x = 5$: $B(5,2)$, $C(5,-2)$.

Область ABC можно рассматривать как область первого вида и как область второго вида. Будем рассматривать ее как область первого вида.

$$S=\iint\limits_S dxdy=\int\limits_1^5 dx\int\limits_{-\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x-1}} dy=\int\limits_1^5\left(y\Big|_{-\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x-1}}\right)dx=\int\limits_1^5\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}\right)dx=2\int\limits_1^5\sqrt{x-1}\,dx=$$

$$=2\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\Big|_1^5=\frac{4}{3}\left((5-1)^{3/2}-(1-1)^{3/2}\right)=\frac{4}{3}4^{3/2}=\frac{4}{3}\sqrt{4^3}=\frac{4}{3}\sqrt{64}=\frac{4}{3}8=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}$$

6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Вычислить $\iint\limits_D x\ln y\,dx\,dy$, если область D — прямоугольник $0\leqslant x\leqslant 4,\ 1\leqslant y\leqslant e$.

$$\triangle\quad \iint\limits_D x\ln y\,dx\,dy=\int\limits_0^4 x\,dx\int\limits_1^e \ln y\,dy=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4\cdot[y\ln y-y]_1^e=8(e-e+1)=8.\ \blacktriangle$$

2. Вычислить $\iint\limits_D(\cos^2 x+\sin^2 y)\,dx\,dy$, если область D — квадрат $0\leqslant x\leqslant \pi/4,\ 0\leqslant y\leqslant \pi/4$.

$$\triangle\quad \iint\limits_D(\cos^2 x+\sin^2 y)\,dx\,dy=\int\limits_0^{\pi/4}dx\int\limits_0^{\pi/4}(\cos^2 x+\sin^2 y)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/4}\left[y\cos^2 x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\sin 2y\right]_0^{\pi/4}dx=\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\pi}{4}\cos^2 x+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{\pi}{8}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)x\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{16}.\ \blacktriangle$$

3. Вычислить $I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x^2}(2x-y)\,dy$.

$$\triangle\quad I=\int\limits_1^2\left[2xy-\frac{1}{2}y^2\right]_x^{x^2}dx=\int\limits_1^2\left(2x^3-\frac{1}{2}x^4-2x^2+\frac{1}{2}x^2\right)dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{2}x^3\right]_1^2=0{,}9.\ \blacktriangle$$

Пример. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)dx\,dy$ по области (D), ограниченной линиями: x = 0, x =1, y =x, y =2- x^2.

Решение: Область D ограничена прямыми x = 0, y = x и параболой $y=2-x^2$, тогда $\iint\limits_{(D)}(x+y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2-x^2}(x+y)dy.$

Вычисляем внутренний интеграл, считая x постоянным:

$$\int\limits_x^{2-x^2}(x+y)dy=(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_{y=x}^{y=2-x^2}=\left[x(2-x^2)+\frac{(2-x^2)^2}{2}\right]-(xx+\frac{x^2}{2})=$$

$$=\frac{x^4}{2}-x^3-\frac{7}{2}x^2+2x+2.$$

4. Вычислить $\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $y=2-x^2$, $y=2x-1$.

△ Построим область D. Первая линия — парабола с вершиной в точке $(0;\ 2)$, симметричная относительно оси Oy. Вторая линия — прямая. Решая совместно уравнения $y=2-x^2$ и $y=2x-1$, найдем координаты точек пересечения: $A(-3;\ -7)$, $B(1;\ 1)$ (рис. 3).

Область интегрирования принадлежит к первому виду. Находим

$$\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy=\int\limits_{-3}^{1} dx\int\limits_{2x-1}^{2-x^2}(x-y)\,dy=\int\limits_{-3}^{1}\left[xy-\frac{1}{2}y^2\right]_{2x-1}^{2-x^2}dx=$$

$$=\int\limits_{-3}^{1}\left(2x-x^3-2+2x^2-\frac{1}{2}x^4-2x^2+x+2x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-3}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+x-\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right]_{-3}^{1}=4\frac{4}{15}.\ ▲$$

5. Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$, если область D ограничена прямыми $y=x$, $y=2x$, $x=2$, $x=3$.

$$△\qquad \iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy=\int\limits_{2}^{3} dx\int\limits_{x}^{2x}(x+2y)\,dy=\int\limits_{2}^{3}[xy+y^2]_{x}^{2x}\,dx=$$

$$=\int\limits_{2}^{3}(2x^2+4x^2-x^2-x^2)\,dx=4\int\limits_{2}^{3}x^2\,dx=\frac{4}{3}x^3\Big|_2^3=25\frac{1}{3}.\ ▲$$

37. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=4y-y^2$, $x+y=6$.

△ Найдем координаты точек пересечения заданных линий, решая систему уравнений $x=4y-y^2$ и $x+y=6$ (чертеж рекомендуется выполнить самостоятельно). В результате получим $A(4;\ 2)$, $B(3;\ 3)$. Таким образом,

$$S=\iint\limits_D dx\,dy=\int\limits_{2}^{3} dy\int\limits_{6-y}^{4y-y^2}dx=\int\limits_{2}^{3} x\Big|_{6-y}^{4y-y^2}dy=$$

$$=\int\limits_{2}^{3}(-y^2+5y-6)\,dy=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{5}{2}y^2-6y\right]_2^3=\frac{1}{6}\ (\text{кв. ед.}).\ ▲$$

7. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вычислить повторные интегралы

37. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 \left(x^2 + 2y^2\right)dx$

38. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dy$

39. $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$

40. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} (2x-y)dy$

41. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2 dy}{y^2}$

42. $\int\limits_{-3}^3 dy \int\limits_{y^2-4}^{5} (x+2y)dx$

43. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 (x+y)dy$

44. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^2 (2x+3y)dx$

45. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{x^2} x^2 y^2 dy$

Вычислить двойные интегралы

46. $\iint\limits_D x dx dy,\ \ D: x=0,\ \ y=0,\ \ y=1-x$

47. $\iint\limits_D xy dx dy,\ \ D: x=1,\ \ y=0,\ \ y=x$

48. $\iint\limits_D y dx dy,\ \ D: y=1,\ \ y=0,\ \ y=x$

49. $\iint\limits_D e^{x+y} dx dy,\ \ D: x=0,\ \ y=0,\ \ y=1,\ \ x=1$

8. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО ТЕМЕ «ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ»

Вариант 1

1. Изменить порядок интегрирования. Области интегрирования изобразить на чертеже.

a) $\int_0^{0,75} dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$

b) $\int_1^2 dy \int_{\frac{4}{y}}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_y^4 f(x,y)dx$

2. Вычислить двойной интеграл, если область интегрирования ограничена заданными линиями.

$\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy;$ D: x=1, y=x^2, y=$-\sqrt{x}$.

Найти площадь области, ограниченной линиями:

a. $y^2 = 4 + 3x$ b. $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$,

$x + y = 0$ $x^2 + y^2 = 1$.

Вариант 2

1. Изменить порядок интегрирования. Области интегрирования изобразить на чертеже.

a) $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y^2+1} f(x,y)dx$

b) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$

2. Вычислить двойной интеграл, если область интегрирования ограничена заданными линиями.

$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}};$ D: $x^2 + y^2 - 2y = 0$, y=$\frac{x}{\sqrt{3}}$, y=$x\sqrt{3}$.

3. Найти площадь области, ограниченной линиями:

a. $y = 2x - 3x^2, y = -x.$ b.$\rho = 6sin\varphi, \rho = 12sin\varphi.$

Вариант 3

1. Изменить порядок интегрирования. Области интегрирования изобразить на чертеже.

a) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$

b) $\int_0^1 dx \int_{-x}^{1} f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{3-x^3}}^{0} f(x,y)dy$

2. Вычислить двойной интеграл, если область интегрирования ограничена заданными линиями.

$\iint_D \frac{3dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; D: x^2+y^2-4y, y=x, x=0, $x^2+y^2-6y=0$.

3.Найти площадь области, ограниченной линиями:

a. $y = x^3, y = \sqrt{x}$.

b. $x^2+y^2=2y$, y=x, $x^2+y^2=6y, x=0$.

Вариант 4

1. Изменить порядок интегрирования. Области интегрирования изобразить на чертеже.

a) $\int_0^{0,5} dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$

b) $\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{\sqrt{y-3}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

2. Вычислить двойной интеграл, если область интегрирования ограничена заданными линиями.

$\iint_D (xy-4x^2y^3)dxdy$; D: x=1, y=x^2, y=$-\sqrt{x}$.

3.Найти площадь области, ограниченной линиями:

a. $y^2 = 8x,\ y = 2x$, $y + 4x - 24 = 0$.

b. $\rho = 3(1-cos\varphi)$, $\rho cos\varphi = 3$.

Вариант 5

1.Изменить порядок интегрирования. Области интегрирования изобразить на чертеже.

a) $\int_0^4 dy \int_y^{10-y} f(x,y)dx$

b) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^x dx \int_{lnx}^1 f(x,y)dy$

2. Вычислить двойной интеграл, если область интегрирования ограничена заданными линиями.

$\iint_D (3+4x^2+4y^2)dxdy;$ D:$x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-2y=0$.

3.Найти площадь области, ограниченной линиями:

a. $xy=9$, x=y, $x=5$.

b. $x^2+y^2=6x, y=0$ $x^2+y^2==3x$. y=$\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Вариант 6

1. Изменить порядок интегрирования. Области интегрирования изобразить на чертеже.

a) $\int_0^2 dx \int_x^{x^2+2} f(x,y)dy$

b) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x,y)dx$

2. Вычислить двойной интеграл, если область интегрирования ограничена заданными линиями.

$\iint_D (4xy+16x^3y^3)dxdy;$ D: $x=1, y=-x^3$, y=$\sqrt[3]{x}$.

3.Найти площадь области, ограниченной линиями:

a. $y=2x$, x=2y, $xy=2$.

b. $\rho=5sin3\varphi$.

Вариант 7

1. Изменить порядок интегрирования. Области интегрирования изобразить на чертеже.

a) $\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{x^3}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx$

b) $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-x-2}^{0} f(x,y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)dy$

2. Вычислить двойной интеграл, если область интегрирования ограничена заданными линиями.

$\iint_D (2-3x^2-3y^2)dxdy;$ D:$x^2+y^2-2y=0, \quad x=0,$ $x^2+y^2-6y=0, y=x\sqrt{3}.$

3.Найти площадь области, ограниченной линиями:

a. $y=\frac{x^3}{3}$, y=4- $\frac{2}{3}x^2$, b. $(x^2+y^2)^2=8(x^2-y^2).$

Вариант 8

1. Изменить порядок интегрирования. Области интегрирования изобразить на чертеже.

a) $\int_{0}^{1} dx \int_{2x-1}^{4-x^2} f(x,y)dy$

b) $\int_{1}^{3} dy \int_{-x-2}^{\frac{y-1}{2}} f(x,y)dx + \int_{3}^{4} dy \int_{0}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$

2. Вычислить двойной интеграл, если область интегрирования ограничена заданными линиями.

$\iint_D (9xy^2+3x^3y)dxdy;$ D: $y=\sqrt{x}, x+y=0,$ x=1.

3.Найти площадь области, ограниченной линиями:

a. $y=\sqrt{x}$, y=3$\sqrt{x}$, x+y=2.

b. $\rho=3(1+sin\varphi),$ $\rho=9sin\varphi.$

Вариант 9

1. Изменить порядок интегрирования. Области интегрирования изобразить на чертеже.

a) $\int_0^2 dy \int_y^{y^2+3} f(x,y)dx$

b) $\int_1^2 dx \int_2^{x+1} f(x,y)dy + \int_2^5 dx \int_2^{\frac{11-x}{3}} f(x,y)dy$

2. Вычислить двойной интеграл, если область интегрирования ограничена заданными линиями.

$\iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2}dxdy;$ D: $x = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

3.Найти площадь области, ограниченной линиями:

a. $y = x^2$, y=3-2x.

b. $x^2 + y^2 = 4y, y = x,$
$x^2 + y^2 = y, y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Вариант 10

1. Изменить порядок интегрирования. Области интегрирования изобразить на чертеже.

a) $\int_0^1 dy \int_y^{2-y^2} f(x,y)dx$

b) $\int_{-1}^0 dx \int_{-x}^1 f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y)dy$

2. Вычислить двойной интеграл, если область интегрирования ограничена заданными линиями.

$\iint_D (5 - x^2 - y^2)dxdy;$ D: $x^2 + y^2 - 2y = 0, x = 0$
$x^2 + y^2 - 4y = 0, y = x.$

3.Найти площадь области, ограниченной линиями:

a. $y = x^2 - 2$, x=0,

b. $\rho = 1 - sin\varphi, \rho = sin\varphi.$

$y=1-x^2$, $x=1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 1: Учебное пособие для втузов.— 13-е изд.— М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1985.— 432 с.

2. Сборник задач по математике. Под редакцией А.В.Ефимова, Б.П. Демидовича. М., 1993 г.

3. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. Изд. 3-е. — Ростов н/Д, 2006. — 640 с