ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий по дисциплине

«Теория вероятностей»

Автор
Азимова Н.Н.,
Давтян Д.Б.

Ростов-на-Дону, 2015

Аннотация

Методические указания предназначены для студентов специальности 11.03.01 очной формы обучения.

Автор

Старший преподаватель

Азимова Н.Н.

Старший преподаватель

Давтян Д.Б.

Оглавление

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Невозможность и невероятность событий. Вероятность суммы двух событий. Примеры.
2. Формула вероятности суммы многих событий .
3. Условная вероятность. Независимость событий. Независимость попарная и в совокупности.
4. Обобщение формулы условной вероятности на большое число событий.
5. Формула полной вероятности
6. Схема Бернулли повторения опытов.
7. Формулы Байеса пересчета вероятностей гипотез.

Литература

1.Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: «Высш. школа», 1975, 333с.

2.Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М: «Высш. школа», 2003, 497с.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

I). Несовместные - вместе не могут произойти. Может произойти либо A, либо B, либо C и т.д. Вероятность того, что произойдет либо A, либо B, либо C …. Равна:

$$P(A+B+C+\ldots)=P(A)+P(B)+P(C)+\ldots$$

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей.

Полная группа событий. Вероятность полной группы событий равна единице. Противоположные события A и $\bar{A}$ составляют полную группу событий, поэтому

$$P(A)+P(\bar{A})=1 \quad \rightarrow \quad P(A)=p \quad P(\bar{A})=q \quad \rightarrow \quad p+q=1$$

II). Совместные события - которые могут произойти совместно.

1. Условная вероятность - вероятность события A при условии, что событие B произошло - $P_B(A)$.

2. Произведение вероятностей (именно совместных):

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$$

2.а Обобщение:

$$P(A_1, A_2, A_3, \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A1}(A_2) \cdot P_{A1,A2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A1,A2,A3,\ldots An-1}(A_n)$$

Вероятность совмещения совместных событий равна вероятности одного, умноженной на вероятность другого, при условии, что первое событие произошло.

3. Совместные, но независимые события (они не могут быть условными, т.к. ни от чего не зависят):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

3.а Обобщение на случай нескольких независимых в совокупности событий

$$P(A_1, A_2, A_3, \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

Вероятность совместного появления независимых событий равна произведению их вероятностей.

4. Вероятность появления хотя бы одного события из полной группы совместных событий:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n$$

4.а. Если вероятности одинаковы $P(A) = 1 - q^n$.

5. Вероятность появления суммы (т.е. либо A либо B) совместных событий равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

5.а. При этом, если события зависимы, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B)$$

5.б. Если события независимы, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

6. Пусть событие A может произойти лишь при появлении одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, составляющих полную группу. Тогда

$$P(A) = P_{B1}(A) \cdot P(B_1) + P_{B2}(A) \cdot P(B_2) + P_{B3}(A) \cdot P(B_3) \ldots P_{Bn}(A) \cdot P(B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_{Bi}(A) \cdot P(B_i)$$

Это формула полной вероятности.

7. Пусть событие A может произойти лишь при появлении одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, составляющих полную группу. Поскольку заранее неизвестно, какое из них наступит, их называют гипотезами. При наступлении события A вероятности событий B изменятся. Тогда

$$P_A(B_K)=\frac{P_{Bk}(A)\cdot P(B_K)}{\sum_{i=1}^{n} P_{Bi}(A)\cdot P(B_i)}$$

Это формула Байеса.

8. Вероятность того, что в серии n испытаний событие A, вероятность которого постоянна и равна p, появится ровно m раз, определяется формулой Бернулли:

$$P_n(m)=\frac{n!}{m!\cdot(m-n)!}\cdot p^{m}\cdot q^{n-m}$$

9. Локальная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно m раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции:

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\phi(x)\quad при\quad x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}},$$

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Иногда ее называют теоремой Муавра – Лапласа.

10. Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(m_1, m_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от m_1 до m_2 раз, приближенно равна определенному интегралу:

$$P_n(m_1,m_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz \qquad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

Распределение вероятностей дискретной случайной величины

11. Биноминальный закон. Распределение вероятностей дается формулой Бернулли, где случайная величина X число появлений события A, вероятность которого постоянна и равна p в серии n испытаний.

$$P_n(m) = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

12. Распределение Пуассона. Здесь случайная величина X также число появлений события A, вероятность которого постоянна и равна p в серии n испытаний, но n - очень велико, p - очень мало, а $np = \lambda = const$. Вероятность случайной величины X определяется формулой:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Пример 1. Классическое определение вероятности.

Из колоды в 36 карт наудачу извлекли три карты. Найти вероятность среди них окажется валет. Решение. Найдем значения числителя и знаменателя $m = C_4^1 C_{32}^2$, $n = C_{36}^4$, тогда

$$P(A) = \frac{4 \cdot 32 \cdot 31}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{36 \cdot 35 \cdot 34} = 0.278.$$ Ответ $0,278$.

Пример 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

На объекте работают три видеокамеры. Вероятности безотказной работы видеокамер разные, и равны соответственно $0,9; 08; 07$. Найти вероятность того, что работает хотя

бы одна видеокамера этого объекта. Решение. Для суммы событий

$$P\ \ A + B + C\ \ = 1 - (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0.994$$

Ответ $0,994$.

Пример 3. Условная вероятность. Слово «мрамор» разложили по буквам , перемешали буквы и поместили в урну. Найти

вероятность того, что при извлечении букв из урны получится слово «мрамор». Решение.

В слове имеется повторение двух букв

$$P(мрамор) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{180} = 0,0055.$$

Пример 4. Полная вероятность. Формула Бейеса. Имеется две партии деталей. Известно, что в первой партии нет бракованных деталей, а во

партии вероятность наличия бракованных деталей равна $0,125$. Деталь, взятая нами из наугад выбранной партии деталей, оказалась годной. Найти вероятность того, что эта деталь без брака выбрана из первой партии деталей. Решение. Согласно условию имеем

$$P\ H_1\ = P\ H_2\ = 0.5, P\ A|H_1\ = 1, P\ A|H_2\ = 3/4,$$

найдем $P\ A\ = 0,5\cdot 1 + 0,5\cdot 3/4 = 7/8$

Вычислим условную вероятность.

$$P\ H_1|A\ = \frac{P\ A|H_2\ P(H_1)}{P(A)} = \frac{1\cdot 0,5}{7/8} = 4/7$$

Пример 5. Схема Бернулли. Предельные теоремы в формуле Бернулли.

Устройство состоит из 2000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа для каждого из этих элементов равна $0,005$. Найти вероятность отказа этого устройства,

если для отказа всего устройства достаточно, чтобы отказал хотя бы один его элемент.

Решение. Положим $P\ A\ = 1 - P_n(k),\ n = 2000,\ k = 0$.

Воспользуемся формулой Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \lambda = np$$

$$\lambda = 1,\ P_{2000}(0) = \frac{1}{e}, P(A) = 1 - \frac{1}{e} = 0,632$$