ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ
Кафедра «Прикладная математика»

Конспект лекций

по прикладной математике для магистров

Автор

Братищев А.В.

Ростов-на-Дону, 2016

Аннотация

Конспект лекций для магистров направлений УМВТ, УМТС и других. Состоит из двух частей: «Управляемые динамические системы» и «Исследование операций», имеющих характер введения в соответствующие разделы прикладной математики. В зависимости от специализации те или иные главы курса могут быть опущены. Лекции читаются в мультимедийном режиме. Конспект содержит ограниченное число примеров, иллюстраций и не содержит доказательств. Предполагается, что во время лекции студент вносит в соответствующие места своей распечатки (на обратной стороне листа) доказательства, рисунки, примеры, а также выделяет ключевые слова определений. На практических занятиях используется стандартный пакет MATLAB+ SIMULINK для проектирования S-моделей различных классов управляемых динамических систем и последующих вычислительных экспериментов с этими моделями.

Спецкурс существенно опирается на курс математики автора для первого - четвертого семестров, конспект которого также выложен на сайте кафедры.

Представлен список вопросов и теорем к экзамену.

Автор:

доктор физ.-мат. наук,

профессор кафедры "Прикладная математика"

Братищев А.В.

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ 1

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ГЛАВА 1 УПРАВЛЯЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ.

ГЛАВА 2 ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ АВТОМАТОВ.

§ 2.1. Булевы функции. Синтез логических схем.
§ 2.2. Автомат Мили. Синтез цифрового автомата.

ГЛАВА 3 ЭЛЕМЕНТЫ БИФУРКАЦИОННОГО АНАЛИЗА.

§ 3.1. Основные понятия качественной теории автономных систем.
§ 3.2. Основные понятия теории устойчивости.
§ 3.3. Грубые системы. Бифуркация.
§ 3.4. Кратные и нейтральные положения равновесия.

ГЛАВА 4 ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СИНЕРГЕТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.

ЧАСТЬ 2

ВВЕДЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

ГЛАВА 5 ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМ СРОКОМ ГОДНОСТИ.

ГЛАВА 6 ДИСКРЕТНОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ.

ГЛАВА 7 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ.

ГЛАВА 8 МЕТОД ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

ГЛАВА 9 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ.

§ 9.1. Классификация игр.
§ 9.2. Конечные антагонистические игры.
§ 9.3. Бескоалиционные игры.
§ 9.4. Позиционные и конечношаговые игры с полной информацией.

ЛИТЕРАТУРА

СПИСОК ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

ЧАСТЬ 1
ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ГЛАВА 1
УПРАВЛЯЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Опр. Управляемой динамической системой (УДС) называется восьмерка объектов $\Sigma := \{T, U, U(\cdot), X, Y, Y(\cdot), \delta, \lambda\}$, где:

T - область определения рассматриваемых в системе функций (упорядоченное множество, часто - множество моментов времени);

U - множество значений функций входа системы (входной алфавит);

$U(\cdot) = \{u : T \to U\}$ - множество допустимых функций входа (входов, входных воздействий) системы;

Y - множество значений функций выхода системы;

$Y(\cdot) := \{y : T \to Y\}$ - множество допустимых функций выхода (выходов) системы;

X - множество состояний системы;

$\delta : (T \times T)^+ \times X \times U \to Y$ - функция перехода (переходная функция) состояний, которая определяет по заданной функции входа $u(\cdot) \in U(\cdot)$ и начальному состоянию системы $x = x(\tau) \in X$ состояние для $\forall t \geq \tau,\ t \in T,$ по правилу $x(t) := \delta(t; \tau, x, u(\cdot))$ здесь

$(T \times T)^+ := \{(t, t_0) : t \geq t_0\}$ есть правая полуплоскость t, t_0- плоскости, определяемая биссектрисой первой и третьей четвертей. $\lambda : T \times X \to Y$ - выходное отображение системы, определяющее функцию выхода $y(t) := \lambda\big(t, \delta\big(t; \tau, x, u(\cdot)\big)\big)$.

Опр. Сужения функции входа $u_{[t_1,t_2]} := u(\cdot)\big|_{[t_1,t_2]}$, (выхода $y_{[t_1,t_2]} := y(\cdot)\big|_{[t_1,t_2]}$) называются отрезком функции входа (отрезком функции выхода).

ЗАМЕЧАНИЕ Функция перехода должна удовлетворять условиям:

1) (согласованность) $\forall u(\cdot) \in U(\cdot)\ \forall x \in X\ \forall t \in T\ \ \delta(t, t, x, u(\cdot)) = x$;

2) (полугрупповое свойство)

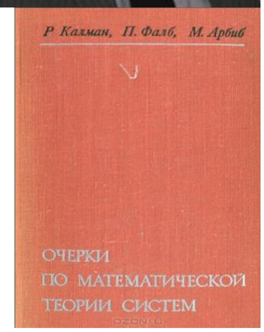
$$\forall t_1 < t_2 < t\ \forall u(\cdot) \in U(\cdot)\ \forall x \in X\ \ \delta(t, t_1, x, u(\cdot)) \equiv \delta\big(t, t_2, \delta\big(t_2, t_1, x, u(\cdot)\big), u(\cdot)\big);$$

3) (причинность) Если $u'(\cdot), u''(\cdot) \in U(\cdot)$ и $u'_{(t_0,t]} = u''_{(t_0,t]}$, то

$$\delta(t; t_0, x, u'(\cdot)) = \delta(t; t_0, x, u''(\cdot)).$$

Опр. Свободная динамическая система (СДС) это частный случай УДС, когда множество допустимых входных воздействий $U(\cdot)$ содержит один элемент.

ЗАМЕЧАНИЕ Это формальное определение. Менее формально свободная динамическая система это математический объект, соответствующий реальным физическим, химиче ским, биологическим и другим системам, эволюция которых на бесконечном интервале времени однозначно определяется начальным состоянием. Свободные динамические системы – образы соответствующих реальных систем. Они также изменяют свое состояние с течением времени.



Рудольф Калман (1930) – американский инженер, исследователь в области теории управления. 1957-58 - инженер в Исследовательской лаборатории компании IBM. Участвовал в работке дискретных сис тем управления, а также в приложениях теории Ляпунова к разработ ке систем управления. 1958-1964 - Институт перспективных исследо ваний в Принстоне. В этот период пионерские работы в области тео рии управления: вопросы наблюдаемости и управляемости систем управления, теория оптимальных систем управления. 1959 г. -разра-ботка фильтра Калмана: основываясь на предшествующих работах Винера, Колмогорова, Шеннона и др., К. разработал технику оценки вектора состояния системы управления с использованием неполных и неточных (зашумленных) измерений (используется в частности, в системах навигации). С **1964** г. - отделение «Электротехника, механи-ка и исследование операций» Стэнфордского университет. В этот пери од занимался теорией реализаций и теорией алгебраических систем.

Джордж Дэ́вид Би́ркгоф (1884-1944) – американский математик. Положил основание общей теории дина-мических систем, выделив в них особенно интересные классы движений - центральные и рекуррентные дви жения. Известен работами по статистической механи ке и эргодической теории. Доказал последнюю теоре му Пуанкаре. Положил начало теории гиперцикличе ских операторов. Президент AMS (1925-1926). Известные ученики: М. Морс, Х. Уитни. Сын – математик Гаррет Биркгоф.
Предложил математическую теорию эстетики в работе «Эстетическая мера» (1933).

Опр. УДС Σ называется обратимой, если функция перехода определена при всех t и τ.

Опр. Пара (t,x), где $t\in T$, $x\in X$ называется событием (фазой, состоянием) системы Σ, а пара (T,X) - пространством событий (фазовым пространством) этой системы.

Опр. Функция перехода $x(t):=\delta(t;\tau,x,u(\cdot))$ называется траекторией (движением, орбитой, потоком, решением). Говорят, что управление u переносит (переводит, изменяет, преобразует) состояние x системы в состояние $x(t)\left(=\delta(t;\tau,x,u(\cdot))\right)$.

ПРИМЕР Пусть для автономной системы (АС) $\begin{cases} x_1' = f_1(x_1,\dots,x_n) \\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ , \\ x_n' = f_n(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$ $x:=(x_1,\dots,x_n)\in G\subset \tilde{\mathbb{R}}^n$

выполнена теорема единственности в области G для $t\in(-\infty,\infty)=:T$. Сопоставим ей абстрактную СДС по следующему правилу. Положим множество состояний $X:=G$. Обозначим $x(t;\tau,x)$ решение задачи Коши АС с начальным условием $x(t;\tau,x)=x$, и определим функцию перехода по правилу $\delta(t;\tau,x):=x(t;\tau,x)$ В силу теоремы единственности решения задачи Коши выполняются все 3 требования к этой функции, и полученная СДС является обратимой динамической системой.

Опр. УДС Σ называется стационарной, если:

1) T есть аддитивная группа (определена операция сложения);
2) множество допустимых функций входа $U(\cdot)$ замкнуто относительно операции сдвига аргумента: если $u(\cdot)\in U(\cdot)$, то $\forall\tau\in T\ \ u(\cdot+\tau)\in U(\cdot)$;
3) $\forall s\in T\ \ \delta(t+s;\tau+s,x,u(\cdot+s))\equiv\delta(t;\tau,x,u(\cdot))$;
4) $\forall t\in T\ \ \lambda(t,\cdot)\equiv\lambda(\cdot):X\to Y$.

Опр. УДС называется системой с непрерывным временем, если $T=\mathrm{R}$, и системой с дискретным временем, если $T=\mathrm{Z}$.

Опр. УДС называется конечным автоматом (Мура), если она дискретная по времени и $card(U)<\infty,\ card(X)<\infty,\ card(Y)<\infty$, то есть множества имеют конечное число элементов.

Опр. УДС называется конечномерной, если $U,\ X,\ Y$ есть конечномерные векторные пространства: $m:=\dim(U)<\infty,\ n:=\dim(X)<\infty,\ l:=\dim(Y)<\infty$.

Опр. УДС называется линейной, если:

1) множества $U, U(\cdot), X, Y, Y(\cdot)$ являются векторными пространствами;
2) отображения $\delta(t;\tau,\cdot,\cdot):X\times U(\cdot)\to X,\quad \eta(t,\cdot):X\to Y(\cdot)$ являются линейными.

Из определения вытекает

СЛЕДСТВИЕ Функции перехода и выхода линейной УДС имеют вид

$$\begin{cases} x(t)=\delta(t;\tau,x,u(\cdot))=\tilde{\Phi}(t,t_0)x+\tilde{\Theta}(t,t_0)u(\cdot) \\ y(t)=\lambda(t,x)=\tilde{C}(t)x \end{cases},$$

где $\tilde{\Phi}(t,t_0):X\to X,\quad \tilde{\Theta}(t,t_0):U(\cdot)\to X,\quad \tilde{C}(t):X\to Y$ - линейные операторы; $\tilde{\Phi}(t,t_0)x:=\delta(t;\tau,x,0),\ \tilde{\Theta}(t,t_0)u(\cdot):=\delta(t;\tau,0,u(\cdot))$.

Опр. Конечномерная УДС Σ называется гладкой, если:

1) $T=\mathrm{R}$;
2) $T, X, U, U(\cdot)$ топологические пространства;
3) $\forall\tau,x\ \ x(t)=\delta(t;\tau,x,u(\cdot))$ гладкая функция каждый раз, когда $u(\cdot)$ есть функция непрерывная.

ЗАМЕЧАНИЕ В случае гладкой системы существует такое отображение $F:T\times X\times U\to X$, что переходное отображение δ представляет собой общее решение НСОДУ

$$\frac{dx}{dt}=F\left(t,x,u\right).$$

Пусть УДС Σ линейная, конечномерная и гладкая. В выделенном в X базисе операторы $\tilde{\Phi}(t,t_0),\ \tilde{C}(t)$ могут быть заданы в виде операторов умножения на соответствующие матрицы $\Phi(t,t_0),\ C(t)$. Можно показать, что определенный на пространстве входных процессов $U(\cdot)$ оператор $\tilde{\Theta}(t,t_0)$ представим в виде интегрального оператора

$$\left[\Theta(t,t_0)\right]u(\cdot)=\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

где $K(t,\tau)$ - функциональная матрица размера $n\times m$ (ядро оператора). Тогда предыдущая система перепишется в виде

$$\begin{cases} x(t)=\Phi(t,t_0)x+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ y(t)=C(t)x \end{cases}.$$

С помощью дифференцирования по t первого из уравнений и полугруппового свойства функции перехода устанавливается равенство

$$\forall\tau\le t\ \ K(t,\tau)=\Phi(t,\tau)K(\tau,\tau)=:\Phi(t,\tau)B(\tau),$$

а также равенство $\dfrac{dx}{dt}=A(t)x(t)+B(t)u(t)$, где $A(t):=\left.\dfrac{\partial\Phi(v,t)}{\partial v}\right|_{v=t}$.

ВЫВОД Для линейной конечномерной гладкой системы существуют такие функциональные матрицы $A(t),\ B(t),\ C(t)$ размеров соответственно $n\times n,\ n\times m,\ l\times n$, что ее функцию перехода и функцию выхода можно описать такими уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+B(t)u(t) \\ y(t)=C(t)x(t) \end{cases}.$$

Первое уравнение называется уравнением состояния (уравнением перехода, эволюционным уравнением), а второе - уравнением выхода

Опр. Линейная УДС, описываемая предыдущей системой называется собственной (строго реализуемой). УДС называется несобственной если, она описывается системой вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+B(t)u(t) \\ y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t) \end{cases}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ Линейная конечномерная гладкая УДС стационарна тогда и только тогда, когда матрицы $A(t),\ B(t),\ C(t)$ не зависят от t:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+Bu(t) \\ y(t)=Cx(t) \end{cases}.$$

В этом случае фундаментальная матрица (переходная матрица состояний системы) имеет такой явный вид $\Phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)},\ \Phi(t):=e^{At}$.

СЛЕДСТВИЕ Теоретико-управленческий смысл формулы Коши состоит в том, что она дает в явном виде формулу вычисления состояния линейной стационарной УДС в роизвольный момент времени t по известному начальному состоянию $x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \dots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ и

известному входу системы $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{pmatrix}$:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau .$$

При этом выход системы вычисляется, очевидно, по формуле

$$y(t) = Ce^{(t-t_0)A}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau .$$

Опр. Состояние $x \in X$ линейной системы называется управляемым, если

$$\exists u(\cdot) \in U(\cdot)\ \exists t > 0\ \ \delta(t;0,x,u(\cdot)) = 0$$

Опр. Состояние $x \in X$ системы называется достижимым (из начала координат), если

$$\exists u(\cdot) \in U(\cdot)\ \exists t > 0\ \ \delta(t;0,0,u(\cdot)) = x$$

Опр. УДС Σ полностью управляемая (полностью достижимая), если все ее состояния управляемы (достижимы).

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Для непрерывной стационарной линейной системы полностью управляемая система является полностью достижимой и наоборот. Такую систему можно перевести из любого состояния в любое другое состояние с помощью подходящего управления за конечное время.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Для непрерывной стационарной линейной системы множество управля емых состояний является подпространством в X (управляемое подпространство).

Опр. Состояние $x \in X$, $x \neq 0$ линейной системы Σ называется ненаблюдаемым, если для нулевого входного сигнала $u(\cdot) = 0$ выходной сигнал будет нулевым:

$$\forall t \geq 0\ \ \lambda\big(t;\delta(t;0,x,0)\big) = 0 .$$

Опр. Два состояния $x_1 \neq x_2$ линейной системы Σ принадлежат одному классу наблюдаемых состояний, если $\forall t \geq 0\ \forall u(\cdot) \in U(\cdot)\ \ \lambda\big(t;\delta(t;0,x_1,u(\cdot))\big) = \lambda\big(t;\delta(t;0,x_2,u(\cdot))\big)$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Состояния $x_1 \neq x_2$ принадлежат одному классу наблюдаемых состояний $\Leftrightarrow$ состояние $x_1 - x_2$ ненаблюдаемое.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Множество ненаблюдаемых состояний линейной системы Σ образует подпространство в X (ненаблюдаемое подпространство).

Опр. Линейная УДС Σ называется полностью наблюдаемой, если все ее ненулевые состояния не являются ненаблюдаемыми ($\equiv$ являются наблюдаемыми).

Следующий критерий полной наблюдаемости системы доказывается методом от противного.

ЗАМЕЧАНИЕ Линейная УДС Σ полностью наблюдаемая $\Leftrightarrow$ по известным входу и вы ходу $u(\cdot)$, $y(\cdot)$ всегда однозначно определяется начальное состояние системы $x_0 = x(0)$.

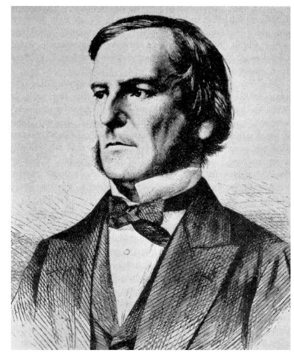
Опр. Линейная УДС Σ называется идентифицируемой (восстанавливаемой, определяемой), если существует $t_0 \in T$ такое, что по $u_{(-\infty,t_0]}$, $y_{(-\infty,t_0]}$ всегда однозначно определяется конечное состояние системы $x(t_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ Для непрерывной стационарной линейной системы полностью наблюдаемая система является идентифицируемой и наоборот.

ГЛАВА 2 ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СИНТЕЗА АВТОМАТОВ

§ 2.1 Булевы функции. Синтез логических схем.

Теории автоматов предшествует теория функциональных преобразователей и комбинационных схем.



Опр. Обозначим множество $A := \{0,1\}$. Отображение $F: A^n \to A^m$ называется функциональным преобразователем.

Опр. Отображение $f: A^n \to A$ называется двоичной (булевой) функцией от n двоичных переменных.

Джордж Буль (1815-1864) - английский математик и логик. Один из основателей математической логики. Идеи применения символиче ского метода к логике впервые высказаны им в статье «Математический анализ логики» (1847). В «Исследование законов мышления» (1854) , изложен общий символический метод логического вывода. Показал, как из любого числа высказываний, включающих любое число терминов, вывести любое заключение, следующее из этих высказываний, путём чисто символических манипуляций.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Функциональный преобразователь $F: A^n \to A^m$ является отображением $F = (f_1, ..., f_m)$, координатные функции которого есть булевы функции от n переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Существует $16 = 2^{2^2}$ булевых функций от двух двоичных переменных (бинарные операции): $p \vee q$ - дизъюнкция; $p \wedge q = pq$ - конъюнкция; $p \Rightarrow q$ - импликация; $p \oplus q$ - сложение по модулю два; $p \Leftrightarrow q$ - эквиваленция; $p \mid q = \neg(pq)$ - штрих Шеффера; $p \downarrow q = \neg(p \vee q)$ - стрелка Пирса; и так далее.

p	q	0	1	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \oplus q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \mid q$	$p \downarrow q$	...
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	.
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	...
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	...
1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	

Опр. Булева функция задаваемая в виде упорядоченной системы унарных и бинарных операций над входящими в неё двоичными переменными и постоянными 0, 1, называется логической формулой (переключательной функцией).

ЗАМЕЧАНИЕ Булевы функции могут задаваться аналитически, графически, таблично, в векторной форме и в виде логических схем.

ПРИМЕР Логическая формула $f(p,q,r) = \neg p \vee q \oplus rq(p \vee r)$ имеет такое табличное задание:

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$r \wedge q$	$p \vee q$	$rq(p \vee r)$	$(\neg p \vee q) \oplus rq(p \vee r)$
0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0

Опр. Логическая формула называется тавтологией (тождественно -ложной), если порождаемая ею булева функция тождественно равна единице (нулю).

Опр. Логические формулы называются равносильными, если соответствующие им булевы функции совпадают.

Обозначение. Равносильность формул обозначается знаком =.

ПРИМЕР Докажем равносильность формул $1 \oplus p$ и $\bar{p}$.

p	$1 \oplus p$	$\bar{p}$
0	1	1
1	0	0

Опр. Суперпозицией (композицией) функций называется сложная функция, составленная из этих функций.

ТЕОРЕМА 2.1 (*Шеннона*) Любая булева функция может быть представлена как суперпозиция трёх операций $(\neg, \vee, \wedge)$ над двоичными переменными

$$f(x_1,..,x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} \quad \text{(- формула Шеннона)},$$

где $x_i^{\sigma_j} := \begin{cases} x_i, & \sigma_j = 1 \\ \bar{x}_i, & \sigma_j = 0 \end{cases}.$

Опр. Конъюнктом называется любая конъюнкция двоичных переменных или их отрицаний.

ПРИМЕР $x_1 \bar{x}_2 x_3 x_2$.

Опр. Булева функция вида $f(x_1,...,x_n) = k_1 \vee ... \vee k_s$, где k_i - конъюнкты, называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

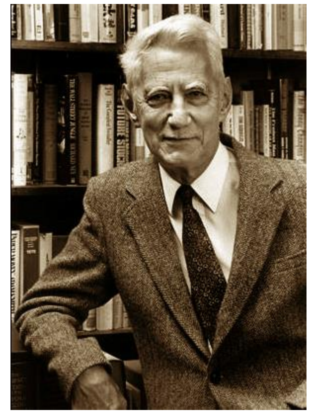
Опр. Если каждый конъюнкт содержит все переменные (причём только саму перемен ную или её отрицание), то ДНФ называется совершенной (СДНФ).

СЛЕДСТВИЕ Из формулы Шеннона следует, что любая булева функция представима в виде СДНФ (причём это представление единственно, с точностью до перестановки конъюнктов).

АЛГОРИТМ приведения к СДНФ с помощью таблицы истинности:

1) заполнить таблицу истинности для функции f;

2) по строкам, в которых функция равна 1, выписать формулу Шеннона.



Клод Э́лвуд Ше́ннон (1916-2001) -американский инженер и математик, его работы являются синтезом математических идей с конкретным анализом чрезвычайно сложных проблем их технической реализации. Является основателем теории информации, нашедшей применение в современных высокотехнологических системах связи. Внес огромный вклад в теорию вероятностных схем, теорию автоматов и теорию систем управления — области наук, входящие в понятие «кибернетика». В статье «Математическая теория связи», 1948 г., предложил использовать слово «бит» для обозначения наименьшей единицы информации.

ПРИМЕР Представим формулу $\bar{p} \vee q \oplus rq(p \vee q)$ в виде СДНФ.

Руководствуясь теоремой Шеннона, выписываем дизъюнкцию тех конъюнктов, на которых формула принимает значение 1. Последние берем из таблицы истинности. Тогда

$$\bar{p} \vee q \oplus rq(p \vee q) = (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}).$$

ПРИМЕР Ранее мы составили таблицу истинности для формулы $f(p,q,r) = \neg p \vee q \oplus rq(p \vee r)$. Поэтому в соответствии с алгоритмом имеем такую ее СКНФ $\neg p \vee q \oplus rq(p \vee r) = (p \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee q \vee r) \wedge (\bar{p} \vee q \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r})$

Опр. Замыканием подмножества M булевых функций называется множество $[M]$ булевых функций, которые получаются из M с помощью операции суперпозиции (составления сложных функций).

ПРИМЕР Для $M = \{\wedge\}$ имеем $[M] = \{x_1 \wedge x_1 = x_1,\ x_2,\ x_1 \wedge x_2,\ x_3,\ x_1 \wedge x_3,\ x_1 \wedge x_2 \wedge x_3, \ldots\}$

Опр. Подмножество M булевых функций называется функционально полным (базисом), если $[M]$ совпадает со всем множеством булевых функций.

ПРИМЕР В силу теоремы Шеннона подмножество $M = \{\neg, \vee, \wedge\}$, называемое базисом Буля, функционально полное.

ЗАМЕЧАНИЕ Известен критерий Поста функциональной полноты произвольного множества M.

Опр. Функционально полное множество M называется базисом (минимальным базисом), если удаление хотя бы одной функции из M делает оставшееся множество не функционально полным.

ТЕОРЕМА 2.2 Следующие подмножества операций являются базисами:
1) $M = \{\neg, \vee\}$; 2) $M = \{\neg, \wedge\}$; 3) $M = \{|\}$; 4) $M = \{1, \wedge, \oplus\}$.

Опр. Класс электронных схем, реализующих одну и ту же основную логическую функцию, называется логическим элементом (ЛЭ).

ЗАМЕЧАНИЕ Штрих Шеффера имеет реализации в так называемых ТТЛ, ДТЛ, МОП-логике и ряд других (курсы электроники и схемотехники).

Обозначение. Логические элементы называются "и", "или", "не", "и-не", "или-не" и обозначаются ярлыками.

Опр. Логической схемой (ЛС) называется схема, составленная из логических элементов (ЛЭ), путем соединения выходов одних ЛЭ со входами других по следующим правилам:

1) выход ЛЭ можно присоединить ко входам нескольких ЛЭ;
2) на вход ЛЭ можно подавать сигналы двух типов (0 или 1);
3) выходы ЛЭ нельзя соединять вместе;
4) выходы ЛЭ нельзя подключать к собственным входам.

Опр. Логическая схема с n входами $x_1,...,x_n$ и m выходами $z_1,...,z_m$, описываемая функциональным преобразователем $\begin{cases} z_1 = f_1(x_1,..,x_n) \\ .... \\ z_m = f_m(x_1,..,x_n) \end{cases} : A^n \to A^m$ называется комбинационной схемой (КС) или (n,m) – полюсником.

ЗАМЕЧАНИЕ В комбинационной схеме могут присутствовать и контуры (обратные связи). Согласно определению ЛС контур содержит не менее двух ЛЭ.

Опр. Две КС называются эквивалентными, если их функциональные преобразователи совпадают.

Опр. Задачей анализа КС называется задача нахождения ее функционального преобразователя. Последний формируется пошагово, двигаясь по логическим элементам схемы от ее выходов ко входам.

ПРИМЕР Произведем анализ КС

$$z = \overline{y_1 y_2} = \overline{(\overline{x_1 x_2})(x_1 \vee x_2)} = x_1 x_2 \vee \overline{(x_1 \vee x_2)} = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 = \overline{x_1 \oplus x_2}$$

Опр. Задачей синтеза КС называется процесс ее построения, включающий три этапа:

1) нахождение функционального преобразователя по словесному описанию;
2) минимизация функционального преобразователя;
3) построение КС в данном элементном базисе.

ПРИМЕР Синтезировать в элементном базисе "и-не" КС принятия решений судьями в боксерском поединке. Перед каждым из трех судей по одной кнопке. Очко засчитывается, если после удара боксера нажатыми оказались на менее двух из трех кнопок.

1) Принятие решения засчитать удар будем обозначать 1, а не засчитать - 0. Решения трех судей отождествим с булевыми переменными соответственно x_1, x_2, x_3, причем $x_i = 1$ означает, что i - ый судья принял решение засчитать удар, а $x_i = 0$ - не засчитать удар. Тогда таблица истинности функционального преобразователя искомой КС должна иметь вид:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2) Применим метод минимизирующих карт (исходная карта будет той же, что и в примере). В результате получаем равносильную логическую формулу

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3 .$$

3) Используя полученную выше реализацию операций $\vee, |$ в элементном базисе "и-не", образуем в два шага комбинационную схему нашей функции.

§ 2.2 Автомат Мили. Синтез цифрового автомата.

Опр. Конечным автоматом Мили называется множество из пяти объектов $А = (S, A, B, \delta, \lambda)$, в котором:

S - конечное непустое множество (пространство) состояний,
A - конечное непустое множество входных сигналов (входной алфавит),
B - конечное непустое множество выходных сигналов (выходной алфавит),
$\delta : S \times A \to S$ - функция переходов,
$\lambda : S \times A \to B$ - функция выходов.

ЗАМЕЧАНИЕ Автоматы могут задаваться:

1) в виде взвешенного орграфа (диаграмма состояний автомата) или в виде блок-схемы программы, реализующей поведение автомата,
2) таблично (функции переходов и выходов задаются в виде таблиц или совмещенной таблицы состояний).

Джордж Х. Мили (1927 -2010) - американский ученый. Работал в лабораториях Белла. Преподавал в Гарварде. Изобрёл одноименный автомат Мили. Был также пионером модульного программирования - один из ведущих дизайнеров языка программирования IPL-V и давний сторонник микропроцесссоров в программирование на языке ассемблера

ПРИМЕР (*автомат "мудрый отец"*) Пусть входной алфавит обозначает оценки, приносимые из школы сыном

$$A = \{a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4,\ a_4 = 5\};$$

выходной алфавит – внешнюю реакцию отца

$$B = \{b_1 = \text{наказать},\ b_2 = \text{поругать},\ b_3 = \text{успокоить},$$
$$b_4 = \text{выразить надежду},\ b_5 = \text{порадоваться},\ b_6 = \text{похвалить}\}$$

пространство состояний – возможные психические состояния отца

$$S = \{q_1 = \text{крайнее раздражение},\ q_2 = \text{напряженность},$$
$$q_3 = \text{миролюбие},\ q_4 = \text{удовлетворение}\}.$$

Кроме того, психологами составлены таблицы функций переходов и выходов δ:

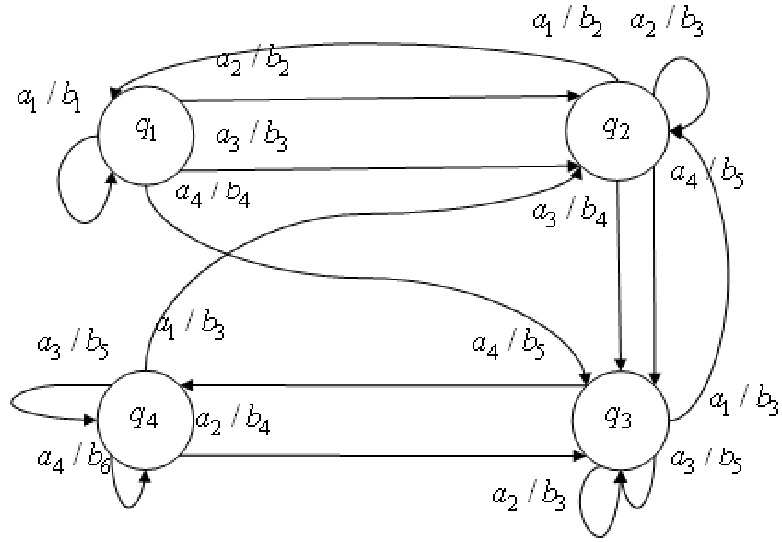
δ:

$a \setminus q$	q_1	q_2	q_3	q_4
a_1	q_1	q_1	q_2	q_2
a_2	q_2	q_2	q_3	q_3
a_3	q_2	q_3	q_3	q_4
a_4	q_3	q_3	q_4	q_4

λ:

$a \setminus q$	q_1	q_2	q_3	q_4
a_1	b_1	b_2	b_3	b_3
a_2	b_2	b_3	b_3	b_4
a_3	b_3	b_4	b_5	b_5
a_4	b_4	b_5	b_5	b_6

ЗАМЕЧАНИЕ При графическом изображении автомата состояния обозначают вершинами, а переходы - дугами с направлениями, определяемыми функцией переходов. При этом над дугой указываются соответствующие значения входа и выхода (взвешенная дуга) .



Рассмотрим специальный класс автоматов.

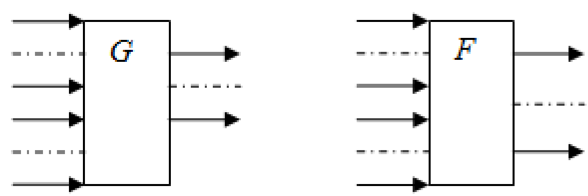
Опр. Пусть $A=\{0,1\}^n,\ B=\{0,1\}^m,\ S=\{0,1\}^p$. Тогда функции перехода и выхода

$$\delta:\{0,1\}^p\times\{0,1\}^n=\{0,1\}^{p+n}\to\{0,1\}^p,\quad \lambda:\{0,1\}^p\times\{0,1\}^n=\{0,1\}^{p+n}\to\{0,1\}^m$$

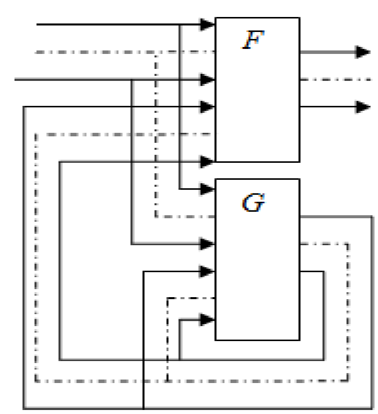
являются функциональными преобразователями. Обозначим ихсоответственно

$$G(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n)=\left(g_1(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n),...,g_p(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n)\right):\{0,1\}^{p+n}\to\{0,1\}^p,$$

$$F(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n)=\left(f_1(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n),...,f_m(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n)\right):\{0,1\}^{p+n}\to\{0,1\}^m,$$



и реализуем в виде логических схем (ЛС) с $p+$ входами и соответственно $p,\ m$ выходами. Составим из них ЛС, соединив выходы левого блока с соответствующими входами правого и левого блоков. n входов сделаем общими для обоих блоков. Полученная ЛС всегда находится в определенном состоянии, пока на нее не действуют входные сигналы. Ввиду того, что один и тот же сигнал может вызвать разные выходные сигналы, эта ЛС не будет комбинационной. Она называется последовательностной схемой или цифровым автоматом.



ЗАМЕЧАНИЕ 1 Цифровой автомат задается еще и:

3) аналитически (G,F задаются в виде функциональных преобразователей),

4) в виде логической схемы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Произвольный автомат можно реализовать как составную часть цифрового автомата.

Для построения последнего нам понадобятся некоторые понятия.

Опр. Пусть A - конечное множество и $2^n\geq card\,A$. Тогда инъективное отображение

$K: A \to \{0,1\}^n$ называется кодировщиком множества A, а сюръективное $D: \{0,1\}^n \to A$ - декодировщиком множества A.

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть $\Phi: A \to B$ - отображение конечного множества A в конечное множество B и $2^n \ge card\, A,\ 2^m \ge card\, B$. Тогда это отображение можно представить в виде композиции $\Phi = D \circ F \circ K$, где $K: A \to \{0,1\}^n$ - кодировщик, $F: \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ - функциональный преобразователь и $D: \{0,1\}^m \to B$ - декодировщик. Область определения и область значений функционального преобразователя по числу элементов, вообще говоря, больше соответственно областей A, B для отображения Φ.

ПРИМЕР Образуем по автомату "мудрый отец" соответствующий цифровой автомат, который назовем "цифровой отец". Для этого составим, например, такие таблицы кодировщиков и декодировщиков.

Для $K_A: A \to \{0,1\}^2$

S	q_1	q_2	q_3	q_4
$Z = \{0,1\}^2$	00	01	10	11

Для $K_S: S \to \{0,1\}^2$

A	a_1	a_2	a_3	a_4
$X = \{0,1\}^2$	00	01	10	11

Для $D_S: \{0,1\}^2 \to S$

$Z = \{0,1\}^2$	00	01	10	11
S	q_1	q_2	q_3	q_4

Для $D_B: \{0,1\}^3 \to B$

$Y = \{0,1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
E	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	-	-

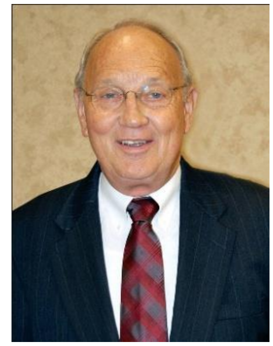
Обозначим x_1x_2 код состояния, x_1x_2 - код входа, $x_1^+x_2^+$ - значение функции переходов, $y_1y_2y_3$ - значение функции выходов. По этим таблицам строим функцию переходов
$G: \{0,1\}^2 \times \{0,1\}^2 = \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^2, \quad (x_1^+, x_2^+) := G(x_1, x_2, x_3, x_4)$
и функцию выходов
$F: \{0,1\}^2 \times \{0,1\}^2 = \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^3, \quad (y_1, y_2, y_3) := F(x_1, x_2, x_3, x_4)$
цифрового автомата "цифровой отец":

Z	X	$Z \times X$	$G:$	$F:$
x_1x_2	x_3x_4	$x_1x_2x_3x_4$	$x_1^+x_2^+$	$y_1y_2y_3$
00	00	0000	00	000
00	01	0001	01	001
00	10	0010	01	010
00	11	0011	10	011
01	00	0100	00	001
01	01	0101	01	010
01	10	0110	10	011
01	11	0111	10	100
10	00	1000	01	010
10	01	1001	10	010
10	10	1010	10	100
10	11	1011	11	100
11	00	1100	01	010
11	01	1101	10	011
11	10	1110	11	100
11	11	1111	11	101

Задаваясь элементным базисом, можно построить ЛС автомата "цифровой отец".

Опр. Автомат Мили $\mathrm{A} = (S, A, B, \delta, \lambda)$, у которого функция выходов задается в виде $\lambda(q,a) = h(\delta(q,a))$, где $h: S \to B$ - отображение (называемое определяющим), называется автоматом Мура. То есть функция выходов автомата Мура определяется только состоянием автомата, но не q, как у автомата Мили, а состоянием $\delta(q,a)$, в которое он переходит при подаче буквы a.

Обозначение. $\mathrm{A} = (S, A, B, \delta, h)$.



Э́двард Фо́рест Мур (1925-2003) - американский математик и информатики. Работал в Bell Labs в течение 10 лет. Профессор университета Висконсин-Мадисон. Был первым, кто использовал наиболее распространённый в наши дни тип конечного автомата - автомат Мура. Совместно с Клодом Шенноном Мур проделал плодотворную работу по теории вычислимости и построении надёжных схем с использованием менее надёжных реле.

Опр. Реакцией состояния q автомата Мура называется отображение $h_q : A^* \to B^*$, определяемое по правилу

$$\forall a_1 ... a_n \in A^* \quad h_q(a_1 ... a_n) := h(\delta(q,a_1))h(\delta(\delta(q,a_1),a_2))...h(\delta(\delta^*(q,a_1...a_{n-1}),a_n))$$

ЗАМЕЧАНИЕ Каждый автомат Мили порождает эквивалентный ему автомат Мура с числом состояний $\le card\, S \cdot card\, B$ по правилу: каждое состояние исходного автомата заменяется на несколько состояний в количестве, равном числу различных значений функции выходов при переходе автомат в это состояние.

Опр. Синтезом автомата называется построение автомата по заданному его поведению «вход-выход». На этапе абстрактного синтеза строятся таблицы переходов и выходов или граф автомата. Минимизируется число состояний. На этапе структурного синтеза строится схема, реализующая автомат из логических элементов заданного вида. На этапе надежностного синтеза преобразовывают построенные схемы с целью обеспечения надежности их функционирования. Если автомат строится из физических элементов, то на этапе технического синтеза отыскивают и устраняют искажения сигналов, возникающие вследствие неидеальности применяемых элементов.

Опр. Автомат Мура A обладает полной системой переходов, если

$$\forall q_1, q_2 \in S \;\; \exists a \in A \;\; \delta(q_1, a) = q_2 .$$

Опр. Автомат Мура A обладает полной системой выходов, если каждому состоянию автомата соответствует свой собственный выходной сигнал, отличный от выходных сигналов, соответствующих любому другому состоянию автомата.

ЗАМЕЧАНИЕ В предположении, что область значений функции выхода совпадает с выходным алфавитом, определяющая функция $h: S \to B$ автомата с полной системой выходов является биекцией.

Опр. Триггер - класс электронных устройств, обладающих способностью длительно находиться в одном из двух устойчивых состояний и чередовать их под воздействием внешних сигналов.

ПРИМЕР 1 Автомат Мура с двумя состояниями и отмеченной таблицей называется D-триггером (элементом задержки). В соответствии с определениями он обладает полными системами переходов и выходов.

	q_1	q_2
	0	1
a	q_1	q_1
b	q_2	q_2

После кодировки входного алфавита и пространства состояний получаем такую таблицу:

A	a	b
$\{0,1\}$	0	1

S	q_1	q_2
$\{0,1\}$	0	1

Здесь в момент времени t под воздействием входного сигнала $a(t)$ автомат переходит из состояния $q(t)$ в состояние $q(t+1)$.

$a(t)$	$q(t)$	$q(t+1)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

ПРИМЕР 2 Автомат Мура с двумя состояниями и отмеченной таблицей называется Т-триггером (триггером со счетным входом).
Он также обладает полными системами переходов и выходов.

При аналогичной кодировке получаем вторую таблицу.

	q_1	q_2
	0	1
a	q_1	q_2
b	q_2	q_1

$a(t)$	$q(t)$	$q(t+1)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Опр. Набор из автоматов и логических элементов называется структурно полным, если из элементов этого набора можно построить любой конечный автомат.
ТЕОРЕМА 2.3 (*Глушкова о структурной полноте*) Для того чтобы набор был структурно полным, необходимо и достаточно, чтобы он содержал: 1) хотя бы один автомат с двумя состояниями, обладающий полными системами переходов и выходов, и 2) его логические элементы образовывали функционально полную систему для синтеза логических схем.

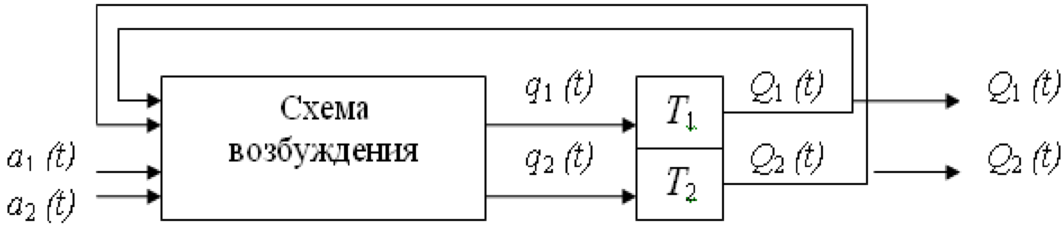
Глушко́в Ви́ктор Миха́йлович (1923-1982) - советский математик, кибернетик. Родился в Ростове-на-Дону. Окончил РГУ. Академик АН СССР (1964), депутат Верховного Совета СССР (1969). Автор трудов по алгебре, кибернетике и вычислительной технике, монографий «Синтез цифровых автоматов» 1962, «Введение в кибернетику»,1964, «Основы безбумажной информатики», 1982, «Логическое проектиро вание дискретных устройств», 1987, статьи «Кибернетика» в Британ ской энциклопедии. Создатель теории цифровых автоматов. Под его руководством в 1966 году разработана первая в СССР персональная ЭВМ «МИР-1» (машина для инженерных расчётов).

Опр. Количество триггеров структурной схемы совпадает с числом разрядов простран ства состояний ассоциированного цифрового автомата. Функции, определяющие работу этих триггеров, называются функциями возбуждения автомата.

Опр. Каноническим методом синтеза автомата называется структурный синтез, который проводится в следующей последовательности:

1) Кодирование входных, выходных сигналов и состояний автомата.
2) Выбор элементов памяти и базиса логических элементов.
3) Запись уравнений функций выходов и функций возбуждения автомата.
4) Построение структурной схемы автомата.

ПРИМЕР В случае автомата «цифровой отец» и Т-триггеров регистр памяти имеет вид



По таблице переходов Т-триггеров

$a(t)$	$q(t)$	$q(t+1)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

образуем таблицу переходов их параллельного соединения $(Q_1(t+1),Q_2(t+1))$:

$(q_1(t),q_2(t))\backslash(Q_1(t),Q_2(t))$	00	01	10	11
00	00	01	10	11
01	01	00	11	10
10	10	11	00	01
11	11	10	01	00

Таблица функций возбуждения заполняется так, чтобы функции переходов регистра памяти и автомата «цифровой отец» совпадали: $\delta=(Q_1(t+1),Q_2(t+1))$ (смотри функциональный преобразователь G автомата «цифровой отец»).

$(a_1(t),a_2(t))\backslash(Q_1(t),Q_2(t))$	00	01	10	11
00	00	00	01	01
01	01	01	10	10
10	01	10	10	11
11	10	10	11	11

В результате получаем такую таблицу $(q_1(t),q_2(t))$:

$(a_1(t),a_2(t))\backslash(Q_1(t),Q_2(t))$	00	01	10	11
00	00	01	11	10
01	01	00	00	01
10	01	11	00	00
11	10	11	01	00

ГЛАВА 3 ЭЛЕМЕНТЫ БИФУРКАЦИОННОГО АНАЛИЗА

§ 3.1. Основные понятия качественной теории автономных систем.

Предполагается, что правые части автономной системы (АС)

$$\begin{cases} x'_t = f_1(x,y) \\ y'_t = f_2(x,y) \end{cases}. \tag{3.1}$$

являются аналитическими функциями в некоторой области G.

Опр. Множество $A \subseteq G$ называется инвариантным множеством соответствующей ДС, если A вместе с каждой точкой содержит траекторию, проходящую через эту точку.
ПРИМЕР 1 Пусть $O(x_0, y_0)$ есть положение равновесия (иногда говорят особая точка (3.1)) системы, то есть является постоянным решением системы (3.1). Оно является инвариантным множеством.
ПРИМЕР 2 Периодическое решение АС изображается в фазовой плоскости замкнутой кривой, которая называется циклом. Цикл является инвариантным множеством.

Опр. Если в любой сколь угодно малой окрестности положения равновесия O лежит замкнутая траектория, то все траектории, проходящие через точки некоторой достаточно малой окрестности будут замкнуты. Такое положение равновесия называется центром.
ЗАМЕЧАНИЕ Пусть в любой сколь угодно малой окрестности положения равновесия O нет замкнутых траекторий. Можно показать, что всякая целиком лежащая внутри некоторой окрестности полутраектория будет стремиться к O.

Опр. Пусть для любой точки из некоторой окрестности положения равновесия $O(x_0, y_0)$ АС (3.1) соответствующие решения задачи Коши $\left(x(t), y(t)\right)$ обладают свойством $\exists \theta_0 \in \left(-\infty, +\infty\right)$ $\theta(t) := \arg\left(\dfrac{y(t)-y_0}{x(t)-x_0}\right) \to \theta_0$ и $\lim\left(x(t), y(t)\right) = (x_0, y_0)$ при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$). То есть радиус-вектор $\left\{x(t)-x_0, y(t)-y_0\right\}$ изображающей точки (ИТ) $\left(x(t), y(t)\right)$ приближается к фиксированному направлению. Тогда положение равновесия (x_0, y_0) называется узлом.

Опр. Если $\lim \theta(t) = \infty$, то положение равновесия называется фокусом.

Выделим в правых частях системы (3.1) линейные слагаемые

$$\begin{cases} x'_t = a_{11}\left(x-x_0\right) + a_{12}\left(y-y_0\right) + r_1(x,y) \\ y'_t = a_{21}\left(x-x_0\right) + a_{22}\left(y-y_0\right) + r_2(x,y) \end{cases},$$

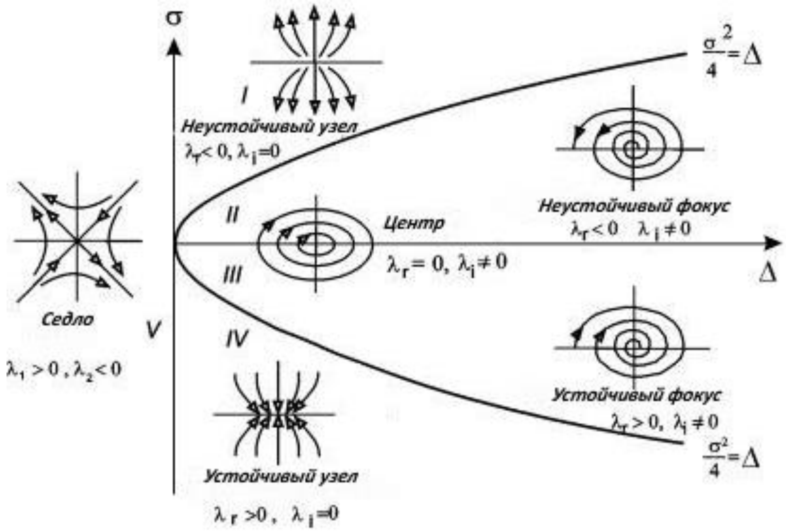
Обозначим λ_1, λ_2 собственные числа матрицы $A = (a_{ij})$, являющиеся решениями характеристического уравнения

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =: \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta.$$

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \alpha\beta \neq 0$. Если $\alpha < 0$, то все траектории, проходящие вблизи точки O, наматываются на нее как спирали при $t \to +\infty$. Имеем устойчивый фокус. Если $\alpha > 0$, то все траектории, проходящие вблизи точки O, наматываются на нее как спирали при $t \to -\infty$. Имеем неустойчивый фокус.

Опр. Положение равновесия, обладающее свойством, что только конечное число траекторий стремятся к нему при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), называется седлом.

ЗАМЕЧАНИЕ Плоскость параметров Δ, σ можно разбить координатными осями и параболой $\Delta = \dfrac{\sigma^2}{4}$ на области параметров с одинаковым характером положения равновесия. На рисунке собственные числа обозначены $\lambda = \lambda_r \pm \lambda_i i$. Разбиение (без учета границ!) годится для АС.



Пункаре, Жан Анри (1854-1912) - французский математик, физик, астроном. Фундаментальные открытия П., касающиеся поведения интегральных кривых дифференциальных уравнений связаны с решением проблем небесной механики, в частности, проблемы трех тел. Научно-популярные работы «Ценность науки» (1905), «Наука и Метод» (1908).

Леоте (1985) впервые использовал фазовый портрет системы для изучения характера возможных в системе движений и еще до П. показал типичную картину фазового портрета, содержащего предельный цикл.

ТЕОРЕМА 3.1 Пусть $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, l_+ - прямая, проходящая через точку O в направлении собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_1, а l_-- прямая, проходящая через ту же точку в направлении собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_2. Тогда существуют ровно две траектории l_1^+, l_2^+ системы (3.1), которые при $t \to +\infty$ стремятся к точке O. Кривая $l_1^+ x_0 l_2^+$ непрерывно дифференцируема и касается прямой l_+ в точке O. Аналогично, существуют ровно две траектории l_1^-, l_2^- системы (3.1), которые при $t \to -\infty$ стремятся к точке O. Кривая $l_1^- x_0 l_2^-$ непрерывно дифференцируема и касается прямой l_- в точке O.

Опр. Траектории $l_1^+, l_2^+, l_1^-, l_2^-$ называются сепаратрисами, причем l_1^+, l_2^+ - устойчивыми усами, а l_1^-, l_2^- - неустойчивым усами.

ЗАМЕЧАНИЕ Сепаратрисы связывают седло с узлами, фокусами или предельными циклами, образуя вместе с ними каркас фазового портрета, который определяет поведение всех остальных траекторий системы. Области, границами которых являются точки каркаса, называются элементарными ячейками. Траектории, расположенные внутри ячейки, ведут себя одинаковым образом: они либо все являются циклами, либо стягиваются к одному и тому же множеству на границе ячейки.

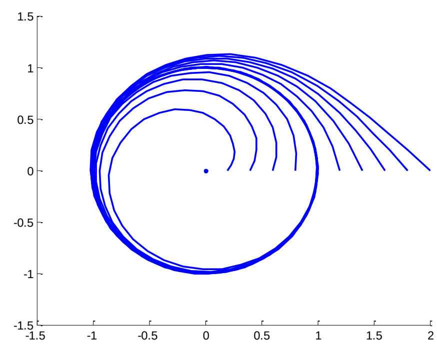
Опр. Пусть существует ограниченная траектория l, которая стремится к O как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$. Область, ограниченная $l \bigcap O$, называется эллиптической (замкнутой узловой областью).

Опр. Пусть две полутраектории l_1, l_2 стремятся к положению равновесия O, и вместе с частью окружности $S(O,\varepsilon_0)$ ограничивают криволинейную треугольную область. Эта область называется седловым (гиперболическим) сектором, если через все ее точки проходят траектории, как при $t \to +\infty$ так и при $t \to -\infty$ выходящие из нее. Область G называется открытым узловым сектором, если через все точки из некоторой ε-окрестности $D(O,\varepsilon)$, $\varepsilon \le \varepsilon_0$, проходят траектории, которые при $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$ стремятся к O, не выходя из G, а при $t \to -\infty$ $(t \to +\infty)$ выходят из G.

ТЕОРЕМА 3.2 Всякая достаточно малая окрестность положения равновесия O АС (3.1), не являющаяся центром, узлом или фокусом, состоит из конечного числа эллиптических, параболических и гиперболических областей, из траекторий, отделяющих эти области одну от другой, и из точки O.

Опр. Цикл ДС называется предельным, если во множестве траекторий, проходящих через точки, достаточно близкие к этому циклу, нет замкнутых траекторий.

Опр. Цикл называется устойчивым (притягивающим),_если он является асимптотой для всех траекторий, проходящих через достаточно близкие к этому циклу точки, при $t \to +\infty$. Цикл называется неустойчивым (отталкивающим), если он является асимптотой для всех близких траекторий при $t \to -\infty$.



Пр. Построим фазовый портрет АС

$$\begin{cases} x_t' = x(1-\sqrt{x^2+y^2}) - y \\ y_t' = y(1-\sqrt{x^2+y^2}) + x \end{cases}.$$

§ 3.2. Основные понятия теории устойчивости.

Обозначим $x(x_0,t),\ t$ i 0, решение задачи Коши с начальным условием $x(x_0,0) = x_0$ (-положительная полутраектория в фазовой плоскости).

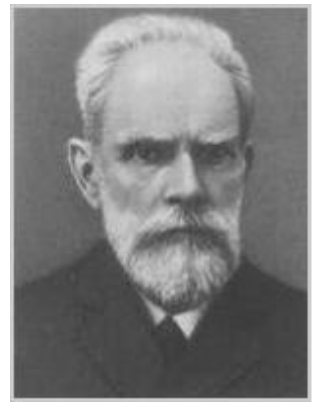
Опр. Замкнутое в евклидовой плоскости $\tilde{\square}^{2}$ инвариантное множество K МG называется устойчивым по Ляпунову, если

$$\text{"}\ \mathrm{e}>0\ \$\mathrm{d}>0\ \text{"}\ x_0\,\mathrm{O}G,\ \mathrm{r}(x_0,K)<\mathrm{d},\quad \text{Ю}\quad \text{"}\,t\ \mathrm{i}\ 0\ \mathrm{r}(x(x_0,t),K)<\mathrm{e}.$$

Если кроме того $\lim\limits_{t\text{®}+\text{Ґ}} \mathrm{r}(x(x_0,t),K) = 0$, то множество K называется асимптотически устойчивым.

Опр. Если замкнутое инвариантное множество K асимптотически устойчиво, то множество $A = A(K)$ всех точек $x_0\,\mathrm{O}G,\ x_0\,\mathrm{П}K$, для которых $\lim\limits_{t\text{®}+\text{Ґ}} \mathrm{r}(x(x_0,t),K) = 0$, называется областью асимптотической устойчивости инвариантного множества K.

Опр. Инвариантное множество называется асимптотически устойчивым в целом, если его область асимптотической устойчивости совпадает со всей фазовой плоскостью $\tilde{\square}^{2}$.



Ляпунов Александр Михайлович (1857 - 1918), русский математик, механик, ученик П.Л.Чебышёва. Создал современную строгую теорию устойчивости равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров. Построен общий метод решения задач об устойчивости. Основной труд – докторская диссертация «Общая задача об устойчивости движения» (1892).

Циклы исследований по фигурам равновесия вращающихся жидкостей, по по математической физике. В теории вероятностей - метод характеристических функций; доказана центральная предельная теорема при весьма общих условиях

Опр. Замкнутое инвариантное множество K называется аттрактором, если существует такое открытое множество $U \supset K$, что $\forall x_0 \in U \ \forall t \geq 0 \ x(x_0,t) \in U$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(x(x_0,t),K) = 0$.

Понятия аттрактора и асимптотически устойчивого множества равносильны.

ТЕОРЕМА 3.3 (*Ляпунова*) Пусть $O(x_0, y_0)$ есть положение равновесия системы (3.1) . Тогда: а) если все собственные числа матрицы Якоби $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ системы имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия $O(x_0, y_0)$ асимптотически устойчиво;

б) если же хотя бы одно собственное число имеет положительную вещественную часть, то это положение равновесия неустойчиво.

§ 3.3. Грубые системы. Бифуркация.

Будем рассматривать ДС, задаваемые автономной системой второго порядка

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) \end{cases}$$

или в матричном виде $X_t' = F(x,\alpha),\ \alpha =: \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_s\right)$, правые части которой являются аналитическими функциями как от переменных x_1, x_2, так и от параметров.

Опр. Два фазовых портрета ДС (для двух различных наборов параметров) называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм, отображающий один портрет на другой с сохранением направления движения по траекториям.

ЗАМЕЧАНИЕ Гомеоморфизм переводит циклы и положения равновесия соответственно в циклы и положения равновесия с сохранением характера их устойчивости.

Опр. Пространство параметров разбивается на области с качественно различными типами динамического поведения системы. Результатом является параметрический портрет системы: разбиение пространства параметров. Вместе с фазовым портретом он содержит информацию о возможных динамических режимах в системе и их качественных перестройках.

Опр. Пусть $x_0 = x_0(\alpha) = \left(x_1^0(\alpha), x_2^0(\alpha)\right)$ есть положение равновесия АС. Выделим в правых частях линейные слагаемые

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}\left(x_1 - x_1^0(\alpha)\right) + a_{12}\left(x_2 - x_2^0(\alpha)\right) + r_1(x_1, x_2, \alpha) \\ x_2' = a_{21}\left(x_1 - x_1^0(\alpha)\right) + a_{22}\left(x_2 - x_2^0(\alpha)\right) + r_2(x_1, x_2, \alpha) \end{cases},$$

и найдем собственные числа $\lambda_1 = \lambda_1(\alpha),\ \lambda_2 = \lambda_2(\alpha)$ матрицы Якоби

$$A = (a_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(x_1^0(\alpha), x_2^0(\alpha), \alpha\right)\right)$$

правой части. Положение равновесия называется грубым, когда оба числа $\neq 0$, если они вещественны и $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$, если они комплексные.

ЗАМЕЧАНИЕ Грубость равносильна тому, что в характеристическом уравнении

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =: \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta$$

будет либо $\Delta > 0,\ \sigma \neq 0$, либо $\Delta < 0$.

Опр. Динамическая система называется грубой (структурно устойчивой), если при малых возмущениях параметров топологическая структура фазового портрета не меняется.

ТЕОРЕМА 3.4 (*свойства грубых систем*) 1) (*критерий грубости системы*) ДС является грубой в замкнутой ограниченной области тогда и только тогда, когда

а) в области могут быть только грубые положения равновесия;

б) в области могут быть только простые предельные циклы, то есть циклы C с периодом p, в которых мультипликатор цикла

$$\mu(\alpha) := \exp\left\{\int_0^p \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t)) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1(t), x_2(t))dt\right\} \neq 1;$$

при $\mu < 1$ цикл устойчив, а при $\mu > 1$ неустойчив;

в) в области нет сепаратрис, идущих из седла в седло.

2) Грубые системы заполняет область в пространстве параметров.

3) У грубой в замкнутой области системы может существовать только конечное число предельных циклов.

4) Грубые системы образуют всюду плотное множество в пространстве всех ДС.

При исследовании моделей ДС, задаваемых автономной системой, содержащей параметры, возникают вопросы двух типов.

1) Поведение системы при фиксированных значениях параметров: качественное понимание характера режимов, установившихся в системе по прошествии достаточно большого времени. Ответ на вопросы первого типа можно получить из фазового портрета системы.

2) Вопросы второго типа касаются событий, происходящих в системе при изменении значений параметров.

Опр. Качественная перестройка фазового портрета называется бифуркацией.

Вопросы второго типа подразумевают:

а) определение бифуркационных значений параметров,

б) описание перестроек фазового портрета, происходящих при переходе через эти критические значения.

Опр. Значение параметра α системы $X'_t = F(x,\alpha)$ называется бифуркационным (критическим), если сколь угодно малое его возмущение может изменить тип положений равновесия: новое не будет эквивалентно старому. Это значение α, рассматриваемое как точка в пространстве параметров, называется также точкой бифуркации ДС.

Опр. Теория, изучающая зависимость качественной картины разбиения на траектории фазового портрета ДС от параметра, называется теорией бифуркаций динамических систем.

Опр. Разбиение окрестности бифуркационной точки из пространства параметров на множества, отвечающие различным типам фазовых портретов системы, называется бифуркационной диаграммой точки.

Опр. Бифуркационная диаграмма с указанием фазового портрета для каждого из множеств этого разбиения называется описанием бифуркации.

Опр. Две бифуркационные диаграммы называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм параметрических окрестностей бифуркационных точек, переводящий одну диаграмму в другую так, что фазовые портреты соответствующих параметрических точек топологически эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ Описание бифуркации проводится с точностью до топологически эквивалентных диаграмм.

Опр. Система общего положения – система, на которую не наложены никакие специальные ограничения типа условий равенства, групп симметрии, консервативности и другие.

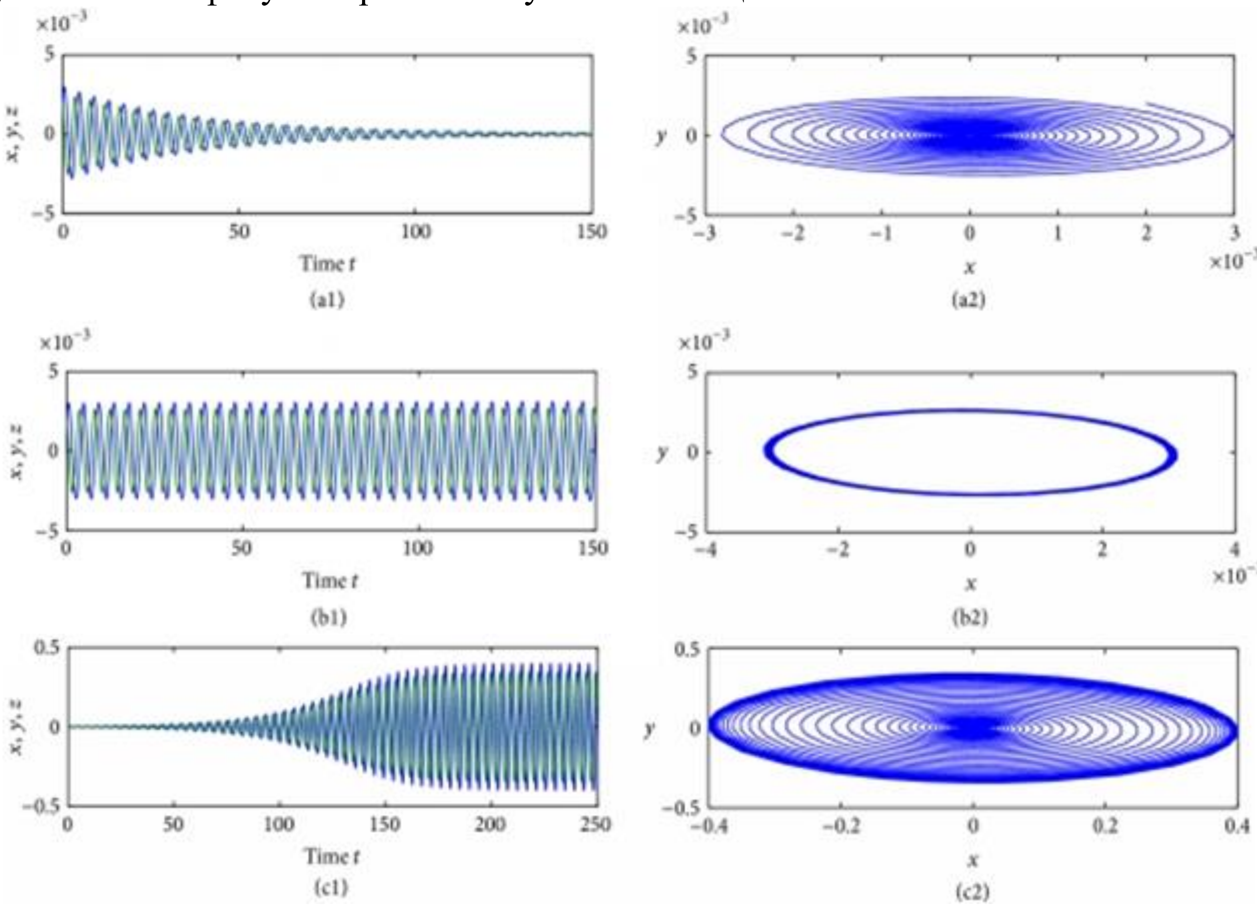
Опр. Бифуркационной диаграмме отвечает бифуркация коразмерности k, если в ней выполняется k бифуркационных условий (- условия типа равенства) и некоторый набор условий невырожденности (- условия типа неравенства).

Опр. Бифуркация называется локальной, если она происходит в сколь угодно малой, но фиксированной окрестности положения равновесия. В противном случае бифуркация называется нелокальной.

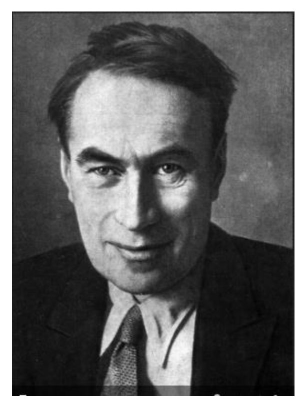
ПРИМЕР Рассмотрим АС

$$\begin{cases} x_1' = 2\beta x_1 - \omega x_2 + 2l x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2' = \omega x_1 + 2\beta x_2 + 2l x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases},$$

где $l, \omega \neq 0$, β - бифуркационный параметр. Бифуркация рождения из фокуса (0,0) малого предельного цикла (бифуркация Андронова-Хопфа), когда β проходит через ноль, является локальной. Левые рисунки показывают поведение фазовых координат ИТ во временной области, а правые - соответствующие им траектории в фазовом пространстве. До бифуркации (рисунки a1, a2) был устойчивый фокус. В точке бифуркации (рисунки b1, b2) сформировался центр. После бифуркации (рис. c1, c2) в окрестности неустойчивого фокуса образовался устойчивый цикл.



Бифуркация Андронова-Хопфа имеет коразмерность 1 и задается одним бифуркацион ным условием: собственные числа ее матрицы линеаризации должны быть чисто мнимыми: $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$.



Андронов Александр Александрович (1901-1952) - советский физик, механик и математик, академик АН СССР. Специалист в области эле ктротехники, радиофизики и прикладной механики, создатель нового направления в теории колебаний и динамике систем. В1928 г. первым указал эффективный математический аппарат для рассмотрения задач теории нелинейных колебаний и его помощью создал основы строгой теории автоколебаний. Ввел понятие автоколебания - колебания систе мы, период которых определяется параметрами самой системы. Распространил развитые им методы теории нелинейных колебаний на проблемы автоматического регулирования, решил ряд важных нели нейных задач 1) теоретической радиотехники, в области 2) регулирования и 3) общей динамики машин. В 1937 г. Опубликовал классическую монографию «Теория колеба ний» (совместно с А. А. Вит том и С. Э. Хайкиным). Создал школу специалистов в обла сти нелинейных колебаний и смежных проблем. Историк науки.

§ 3.4. Кратные и нейтральные положения равновесия.

В системах второго порядка возможны две локальных бифуркации коразмерности 1.

Опр. Положение равновесия называется кратным, если $\Delta = \det(A) = 0$, $\sigma = a_{11} + a_{22} \neq 0$ и нейтральным, если наоборот, $\sigma = a_{11} + a_{22} = 0,\ \Delta = \det(A) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) Кратные положения соответствуют σ-оси (Δ, σ)-плоскости, а нейтральные положения – Δ-оси этой плоскости.

2) Нейтральное положение равновесия может быть как седлом ($\lambda_2 = -\lambda_1 \neq 0$), так и центром ($\lambda_{1,2} = \pm\beta i$). В первом случае имеем грубое положение равновесия.

ПРИМЕР Рассмотрим случай бифуркаций коразмерности 1 с двумя условиями невырожденности. а) Простейшая система в случае кратного положения равновесия, например, при $\lambda_1 = 0$ имеет вид $\begin{cases} u_1' = \tilde{\alpha} + a u_1^2 \\ u_2' = \lambda_2 u_2 \end{cases}$, где $\tilde{\alpha} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ - параметр. При этом выполнено одно бифуркационное условие $\Delta = \det(A) = 0$ и два условия невырожденности: $\lambda_2 = \lambda_2(\alpha) \neq 0,\ a = a(\alpha) \neq 0$.

б) В случае нейтрального положения равновесия и бифуркации рождения цикла ($\lambda_{1,2} = \pm\beta i$) простейшая система имеет вид

$$\begin{cases} u_1' = \tilde{\alpha} u_1 - \beta u_2 + \alpha_3 u_1 (u_1^2 + u_2^2) \\ u_2' = \beta u_1 + \tilde{\alpha} u_2 + \alpha_3 u_2 (u_1^2 + u_2^2) \end{cases},$$

где $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$, $\tilde{\alpha} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ - параметр. При этом выполнено одно бифуркационное условие $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(\alpha) = 0$ и два условия невырожденности: $\beta = \operatorname{Im}\lambda_{1,2}(\alpha) \neq 0,\ \alpha_3 = \alpha_3(\alpha) \neq 0$. Здесь α_3 - первая ляпуновская величина (смотри ниже).

Перейдем к классификации кратных и нейтральных положений равновесия.

Напомним виды жордановой нормальной формой (ЖНФ) для квадратной матрицы размера 2×2.

ЗАМЕЧАНИЕ Для каждой матрицы $A = (a_{ij}) \neq 0$ существует невырожденная матрица S (матрица перехода) со свойством $S^{-1}AS = J$ и :

1) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ в случае $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2$,

2) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ или $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ в случае $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$,

3) $J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ в случае $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \beta \neq 0$.

Здесь J есть ЖНФ матрицы A.

Рассмотрим АС

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{3.2}$$

с положением равновесия (x_0, y_0) и условием невырожденности

$$\left|\frac{df_1}{dx}(x_0, y_0)\right| + \left|\frac{df_1}{dy}(x_0, y_0)\right| + \left|\frac{df_2}{dx}(x_0, y_0)\right| + \left|\frac{df_2}{dy}(x_0, y_0)\right| \neq 0 .$$

Для матрицы

$$A := \begin{pmatrix} \dfrac{df_1}{dx}(x_0, y_0) & \dfrac{df_1}{dy}(x_0, y_0) \\ \dfrac{df_2}{dx}(x_0, y_0) & \dfrac{df_2}{dy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

это условие в силу $S^{-1}AS = J$ равносильно неравенству $J \neq 0$ для соответствующей ЖНФ

Опр. Сделаем в АС (3.2) замену переменных по формуле $X = SY + X_0$. Тогда новая АС с выделенной линейной правой частью примет вид

$$Y_t' = J \cdot Y + G_2(y_1, y_2, \alpha) . \tag{3.3}$$

Последняя называется каноническим видом АС. По построению эта АС имеет положение равновесия $(0,0)$.

В случае кратного положения равновесия АС (3.2) имеет такой канонический вид

$$\begin{cases} y_1' = g_1(y_1, y_2) \\ y_2' = \lambda y_2 + g_2(y_1, y_2) \end{cases}, \quad \lambda \neq 0,$$

где $g_1(y_1, y_2)$, $g_2(y_1, y_2)$ и их частные производные первого порядка равны нулю в точке (0,0). Решение $y_2 = \varphi(y_1)$ уравнения $\lambda y_2 + g_2(y_1, y_2) = 0$ подставим в функцию $g_2(y_1, y_2)$, и обозначим $\psi(y_1) := g_1(y_1, \varphi(y_1))$. Тогда

$$\psi(y_1) = g_1(y_1, \varphi(y_1)) = \Delta_m y_1^m + ..., \ \Delta_m \neq 0 .$$

ТЕОРЕМА 3.5 Кратное положение равновесия имеет следующий качественный характер:

1) (*сложное седло*) характер седла, если m нечетное и $\Delta_m > 0$;
2) (*сложный узел*) характер узла, если m нечетное и $\Delta_m < 0$ ($\lambda < 0$ - устойчивый узел, $\lambda > 0$ - неустойчивый узел);
3) (*седло-узел*) один узловой сектор и два седловых при m четном; если $\lambda\Delta_m < 0$, то узловой сектор расположен слева от оси OY, а при $\lambda\Delta_m > 0$ - справа от оси. Если $\lambda > 0$ - узловой сектор неустойчивый, и устойчивый, если $\lambda < 0$.

Опр. Седло-узел называется простейшим двукратным седло-узлом, если $m = 2$, и сложным седло-узлом, если $m > 2$.

В случае положения равновесия с собственными числами $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ДС (3.2) имеет такой канонический вид

$$\begin{cases} y_1' = \alpha y_1 - \beta y_2 + g_1(y_1, y_2) \\ y_2' = \beta y_1 + \alpha y_2 + g_2(y_1, y_2) \end{cases}.$$

Делая здесь замену переменных $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, получим

$$\begin{cases} r_t' = \alpha r + r^2\left(\mathrm{g}_1(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta + g_2(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta\right) + \ldots \\ \theta_t' = \beta - r\left(\mathrm{g}_1(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta - g_2(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta\right) + \ldots \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{\alpha + rg_3(r, \cos\theta, \sin\theta)}{\beta + rg_4(r, \cos\theta, \sin\theta)} r = R(r, \theta).$$

Обозначим $r = g(\theta, \theta_0, r_0)$ решение задачи Коши с начальным условием $r(\theta_0) = r_0$, и разложим $r = g(2\pi, 0, r_0) := \alpha_1 r_0 + \alpha_2 r_0^2 + \ldots$ в ряд по степеням r_0.

Опр. Функция $r = g(2\pi, 0, r_0) = \alpha_1 r_0 + \alpha_2 r_0^2 + \ldots$ называется функцией последования.

ЗАМЕЧАНИЕ Несложно проверить, что $\alpha_1 = \exp\left\{2\pi \dfrac{\alpha}{\beta}\right\}$.

ТЕОРЕМА 3.6 (*Ляпунова*) Первый не равный нулю коэффициент ряда $(\alpha_1 - 1)r_0 + \alpha_2 r_0^2 + \ldots$ имеет нечетный индекс.

Опр. Если $\alpha_1 = 1,\ \alpha_3 \neq 0$, то α_3 называется первой ляпуновской величиной. Если $\alpha_1 = 1,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_5 \neq 0$, то α_5 называется второй ляпуновской величиной. И так далее.

ТЕОРЕМА 3.7 1) Считаем $\alpha = \mathrm{Re}\lambda_i \neq 0$ $(\alpha_1 \neq 1)$, либо $\alpha = \mathrm{Re}\lambda_i = 0$ $(\alpha_1 = 1)$ и хотя бы одна ляпуновская величина α_{2k+1} не равна нулю. В первом случае положение равновесия является грубым фокусом, а во втором – сложным фокусом кратности k (k-кратным сложным фокусом). При этом:

а) фокус устойчив, если соответственно $\dfrac{\alpha}{\beta} < 0$ или $\alpha = 0,\ \alpha_{2k+1} < 0$;

б) фокус неустойчив, если соответственно $\dfrac{\alpha}{\beta} > 0$ или $\alpha = 0,\ \alpha_{2k+1} > 0$.

2) $\alpha = \alpha_3 = \alpha_5 = \ldots = 0$. Тогда все траектории из достаточно малой окрестности замкнуты, и положение равновесия имеет характер центра.

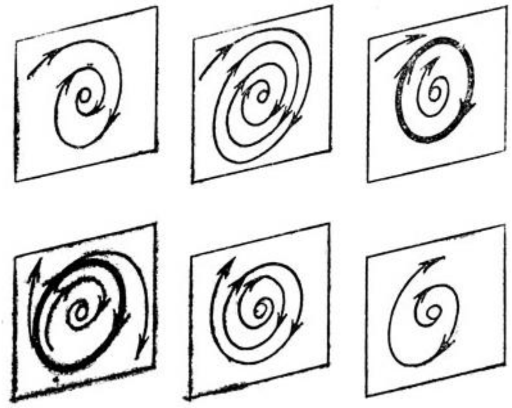
3) (*Ляпунов*) Чисто мнимое положение равновесия является центром тогда и только тогда, когда каноническая система имеет в окрестности этого положения интеграл вида $x_1^2 + x_2^2 + F_3(x_1, x_2) + F_4(x_1, x_2) + \ldots = C$, где $F_k(x_1, x_2)$ - однородный многочлен k-ой степени.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Рассмотрим АС $\begin{cases} u_1' = \tilde{\alpha} u_1 - \beta u_2 + \alpha_3 u_1(u_1^2 + u_2^2) \\ u_2' = \beta u_1 + \tilde{\alpha} u_2 + \alpha_3 u_2(u_1^2 + u_2^2) \end{cases},\quad \beta > 0,\ \alpha_3 \neq 0$.

При $\tilde{\alpha} = 0$ положение равновесия $(0,0)$ является нейтральным. При переходе параметра $\tilde{\alpha}$ слева направо через нейтральную точку бифуркации $\tilde{\alpha} = 0$ положение равновесия теряет устойчивость, превращаясь из устойчивого фокуса в неустойчивый. Точнее:

1) в случае $\alpha_3 < 0$ устойчивый равновесный режим сменяется устойчивыми автоколе бания ми малой амплитуды (мягкая потеря устойчивости; верхний ряд рисунков);

2) в случае $\alpha_3 > 0$ потеря устойчивости сопровож дается гибелью в нем неустойчивого предельного цикла. При этом новый неустойчивый режим сильно отличается от прежне го. Говорят, что происходит жесткая потеря устойчивости (нижний ряд рисунков).



ГЛАВА 4 ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СИНЕРГЕТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Колесников Анатолий Аркадьевич (1935) – профессор кафедры синергетики и процессов управления Таганрогского технологического института Южного федерального университета. Ученый в области теории и систем управления, нелинейного системного синтеза, нели нейной динамики и синергетики. Является руководителем известной российской научной школы в области нелинейного системного синтеза – системной физики.

Пусть динамическая система задается автономной системой

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n' = f_n(x_1,\ldots,x_n) \end{cases} \qquad (4.1)$$

Метод аналитического конструирования нелинейных регуляторов (*АКАР*) базируется на положении, что в фазовом пространстве ДС могут существовать устойчивые в целом инвариантные многообразия, к которым притягиваются фазовые траектории синтезируе мого регулятора. Требуемое многообразие (аттрактор) проектируемого регулятора задается как множество точек L, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \psi_1(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ., \\ \psi_p(x_1,\ldots,x_n) = 0 \end{cases} \qquad 1 \le p < n, \qquad (4.2)$$

с условием $rang\left(\psi'_{ix_j}(x,y)\right) = p$. Управление осуществляется скоростями изменения каких-либо p фазовых переменных и представляет собой слагаемые правых частей соответствующих уравнений (аддитивное управление).

Опр. Функции $\psi_i = \psi_i(x_1,\ldots,x_n)$ называются агрегированными переменными. Траектории регулятора обязаны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} T_1\psi_1'(t)+\psi_1(t)=0 \\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ ,\quad 1\le p<n. \\ T_p\psi_p'(t)+\psi_p(t)=0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Интегрирую эту систему на траекториях проектируемого регулятора, получим

$$\begin{cases} \psi_1(x_1(t),...,x_n(t))=C_1e^{-t/T_1}\ \to 0 \\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ ,\quad t\to+\infty \\ \psi_p(x_1(t),...,x_n(t))=C_pe^{-t/T_p}\ \to 0 \end{cases}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 В этом смысле изображающая (ИТ) точка любой траектории приближа ется к множеству L . В этом смысле понимается и устойчивость в целом множества L .

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Если в какой-то момент t_0 точка $\left(x_1(t_0),...,x_n(t_0)\right)\in\mathrm{L}$, то из последнего равенства следует $C_1=...=C_p=0$. Таким образом, L состоит из траекторий регулятора, то есть является инвариантным множеством по определению.

Дифференцируя (4.3) на траекториях регулятора, получаем такую систему

$$\begin{cases} \psi'_{1x_1}x_1'(t)+...+\psi'_{1x_n}x_n'(t)=-\dfrac{1}{T_1}\psi_1 \\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ ,\quad 1\le p<n \\ \psi'_{px_1}x_1'(t)+...+\psi'_{px_n}x_n'(t)=-\dfrac{1}{T_p}\psi_p \end{cases}.$$

По теореме о неявном отображении система локально разрешима относительно каких-то *p* производных. Добавляя к этим *p* уравнениям *n*-*p* уравнений автономной системы (4.1), которые содержат остальные производные, получаем систему из *n* уравнений синергетического регулятора.

ЗАМЕЧАНИЕ Уравнение $T\psi_t'(t)+\psi(t)=0$ равносильно уравнению Эйлера вариацион ной задачи вида

$$\Phi(x_1,...,x_n)=\int_0^\infty \psi^2\left(x_1(t),...,x_n(t)\right)+T^2\psi_t'^2\left(x_1(t),...,x_n(t)\right)dt\ \to\ \min,\quad \lim_{t\to+\infty}\psi\left(x_1(t),...,x_n(t)\right)=0$$

при условии $\forall t\ \ \sum_{k=1}^{n}\psi_k'^2(t)\ne 0$. Действительно, составим уравнения Эйлера для этого функционала

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x_i'}=2\psi\psi'_{x_i}+2T^2\psi_t'\sum_{k=1}^{n}\psi''_{x_kx_i}x_k'-\frac{d}{dt}\left(2T^2\psi_t'\psi'_{x_i}\right)=2\psi'_{x_i}\left(\psi-T^2\psi_t''\right)=0\quad\Rightarrow$$

$$\left(\psi-T^2\psi_t''\right)=0\quad\Rightarrow\quad\psi(t)=C_1e^{-\frac{t}{T}}+C_2e^{\frac{t}{T}}\quad\Leftrightarrow\quad\psi(t)=C_1e^{-\frac{t}{T}}\quad\Leftrightarrow\quad T\psi_t'(t)+\psi(t)=0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ Интересно, что постановка вариационной задачи не зависит от исходной динамической системы.

Далее рассмотрим автономную систему второго порядка

$$\begin{cases} x_t' = f_1(x,y) \\ y_t' = f_2(x,y) \end{cases}$$

с одной агрегированной переменной $\psi(x,y)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению $T\psi'(t)+\psi(t)=0$ на траекториях синтезируемого уравнения, или подробнее,

$$\psi_x' x_t' + \psi_y' y_t' = -\frac{1}{T}\psi .$$

В предположении $\psi_y'(x,y)\neq 0$ синергетический регулятор имеет вид

$$\begin{cases} x_t' = f_1(x,y) \\ y_t' = -\dfrac{\psi_x'}{\psi_y'} f_1 - \dfrac{1}{T\psi_y'}\psi \end{cases}, \qquad (4.4)$$

то есть осуществляется аддитивное управление скоростью второй фазовой переменной. Если же $\psi_x'(x,y)\neq 0$, то регулятор принимает вид

$$\begin{cases} x_t' = -\dfrac{\psi_y'}{\psi_x'} f_2 - \dfrac{1}{T\psi_x'}\psi \\ y_t' = f_2(x,y) \end{cases} \qquad (4.5).$$

В этом случае происходит аддитивное управление скорость первой фазовой переменной.

В случаях (4.4), (4.5) положения равновесия регулятора являются, очевидно, решениями систем уравнений соответственно

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ \psi(x,y)=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \psi(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}.$$

Имеет место такой критерий устойчивости положений равновесии регулятора.

ТЕОРЕМА 4.1 1) Пусть (x_c,y_c): $f_1(x_c,y_c)=0$, есть положение равновесия синергетиче ского регулятора (4.4). Оно асимптотически устойчиво, если

$$f_{1x}'(x_c,y_c) - \frac{\psi_x'(x_c,y_c)}{\psi_y'(x_c,y_c)} f_{1y}'(x_c,y_c) < 0, \qquad (4.6)$$

и неустойчиво, если $f_{1x}'(x_c,y_c) - \dfrac{\psi_x'(x_c,y_c)}{\psi_y'(x_c,y_c)} f_{1y}'(x_c,y_c) > 0$.

2) Пусть (x_c,y_c): $f_2(x_c,y_c)=0$, есть положение равновесия синергетического регулятора (4.4). Оно асимптотически устойчиво, если

$$f_{2y}'(x_c,y_c) - \frac{\psi_y'(x_c,y_c)}{\psi_x'(x_c,y_c)} f_{2x}'(x_c,y_c) < 0, \qquad (4.7)$$

и неустойчиво, если $f_{2y}'(x_c,y_c) - \dfrac{\psi_y'(x_c,y_c)}{\psi_x'(x_c,y_c)} f_{2x}'(x_c,y_c) > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ Особый интерес представляет синтез синергетического регулятора, стягивающего все траектории к одной наперед заданному состоянию. В соответствии с выше сказанным соответствующая точка необходимо лежит на множестве $f_1(x,y)=0$ или на множестве $f_2(x,y)=0$. Кроме того, эта точка должны быть асимптотически устойчивым в целом положением равновесия соответствующего регулятора. Поэтому задача синтеза состоит из трех этапов решения:

1) найти такую агрегированную переменную $\psi_i(x,y)=0$, чтобы соответствующая функциональная система имела ровно одно решение;
2) с помощью теоремы проверить его на асимптотическую устойчивость;
3) доказать, что область притяжения полученного положения равновесия совпадает со все фазовой плоскостью.

ПРИМЕР Динамическая система «хищник-жертва» задается автономной системой

$$\begin{cases} x'_t = a_1x - a_2xy - a_3x^2 \\ y'_t = -b_1y + a_2xy \end{cases}$$

где $x(t)$ - количество жертв, $y(t)$ - количество хищников. Требуется построить синергетический регулятор количества хищников

$$\begin{cases} x'_t = a_1x - a_2xy - a_3x^2 \\ y'_t = -b_1y + a_2xy + u_2 \end{cases},$$

который обеспечивает стремление всех траекторий к произвольному наперед заданному допустимому положению равновесия. Последние должны лежать в первой четверти и на вырожденной кривой второго порядка $a_1x - a_2xy - a_3x^2 = 0$, то есть на $l_1 := \{(x,y):\ x=0\}$ или на $l_2 := \{(x,y):\ a_3x + a_2x - a_1 = 0\}$.

1) Выберем в качестве агрегированной переменной функцию $\psi = a_3x + a_2y - \alpha$ с параметром $\alpha \neq a_1$. Уравнение регулятора принимает вид

$$\begin{cases} x'_t = a_1x - a_2xy - a_3x^2 \\ y'_t = -\dfrac{a_3}{a_2}\left(a_1x - a_2xy - a_3x^2\right) - \dfrac{1}{Ta_2}\left(a_3x + a_2y - \alpha\right) \end{cases},$$

и, очевидно, не зависит от правой части второго уравнения исходной ДС. Для каждой такой агрегированной переменой соответствующая функциональная система

$$\begin{cases} a_1x - a_2xy - a_3x^2 = 0 \\ a_3x + a_2y - \alpha = 0 \end{cases}$$

имеет одно положение равновесия $s = (0, \alpha/a_2) \in l_1$. Проверим условие устойчивости из теоремы 4.1 этого положения равновесия.

$$f'_{1x}(x_c,y_c) - \frac{\psi'_{2x}(x_c,y_c)}{\psi'_{2y}(x_c,y_c)} f'_{1y}(x_c,y_c) = (a_1 - a_2y - 2a_3x) - \frac{a_3}{a_2}(-a_2x)\bigg|_s = a_1 - \alpha < 0.$$

Итак, если $\alpha > a_1$, то единственное положение равновесия регулятора является устойчивым, а если $\alpha < a_1$, то неустойчивым.

2) Выберем теперь в качестве агрегированной переменной функцию

$$\psi_2 = a_3 x^2 + a_2 xy - \alpha x + 1,\ \ \alpha \neq a_1 .$$

Уравнение скалярного регулятора принимает вид

$$\begin{cases} x_t' = a_1 x - a_2 xy - a_3 x^2 \\ y_t' = -\dfrac{2a_3 x + a_2 y - \alpha}{a_2 x}\left(a_1 x - a_2 xy - a_3 x^2\right) - \dfrac{1}{Ta_2 x}\left(a_3 x^2 + a_2 xy - \alpha x + 1\right) \end{cases}.$$

Для каждой такой агрегированной переменой соответствующая функциональная система

$$\begin{cases} a_1 x - a_2 xy - a_3 x^2 = 0 \\ a_3 x^2 + a_2 xy - \alpha x + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет одно решение $s = \left(\dfrac{1}{\alpha - a_1}, \dfrac{1}{a_2}\left(a_1 - \dfrac{a_3}{\alpha - a_1}\right)\right)$.

Проверим условие устойчивости из теоремы в этом положении равновесия.

$$f_{1x}'(x_c, y_c) - \frac{\psi_{2x}'(x_c, y_c)}{\psi_{2y}'(x_c, y_c)} f_{1y}'(x_c, y_c) = (a_1 - a_2 y - 2a_3 x) - \frac{2a_3 x + a_2 y - \alpha}{a_2 x}(-a_2 x)\Bigg|_s = a_1 - \alpha < 0 .$$

Итак, если $\alpha > a_1$, то единственное положение равновесия регулятора является устойчивым, а если $\alpha < a_1$, то неустойчивым. По физическому смыслу задачи при $\alpha \geq a_1 + \dfrac{a_3}{a_1}$ любая общая точка прямой l_2 и первой четверти является единственным положением равновесия соответствующего регулятора при подходящем выборе параметра α (причем устойчивым узлом).

В обоих случаях остается проверить эти положения равновесия на устойчивость в целом.

ЧАСТЬ 2

ВВЕДЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Опр. ***Исследование операций*** – теория математических моделей принятия оптимальных решений.

ГЛАВА 5
ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМ СРОКОМ ГОДНОСТИ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Партия товара с ограниченным сроком годности закупается по оптовой цене r_1 р. за штуку, чтобы затем продавать в розницу по r_2 р. за штуку. После окончания срока годности товар считается нереализованным и одномоментно реализует ся по цене r_0 р. $(< r_1 < r_2)$ за штуку. По результатам статистических наблюдений оптовому покупателю известен закон распределения случайной величины (СВ) $\xi = k$ (спрос на количество товара)

k	0	1	. . .	N	N+1	. . .
p	p_0	p_1		p_N	0	

Требуется определить количество закупаемого товара, при котором, средняя прибыль оптовика при розничной продаже будет максимальной, а также величину этой прибыли.
ТЕОРЕМА 5.1 Обозначим вероятность того, что спрос не будет превышать s шт. $P(k \le s) := \sum_{k=0}^{s} p_k$. Тогда искомое количество товара находится из неравенства

$$P(k \le s-1) < \frac{r_2 - r_1}{r_2 - r_0} \le P(k \le s).$$

◄ Пусть закупается $s-1 < N$ шт. Тогда закон распределения соответствующей СВ ξ_{s-1} спроса имеет вид

k	0	1	. .	s-2	s-1	. .
p	p_0	p_1		p_{s-2}	p_{s-1}^*	

где $p_{s-1}^* := 1 - \sum_{k=0}^{s-2} p_k$. Заметим, что прибыль при продаже одной штуки равна $r_2 - r_1$, а убыток при продаже товара с закончившимся сроком годности равен $r_0 - r_1$. Прибыль (убыток) является функцией СВ ξ_{s-1} и имеет вид $\eta_{s-1} := (r_2 - r_1)\xi_{s-1} + (r_0 - r_1)(s - 1 - \xi_{s-1})$. Математическое ожидание последней СВ , то есть средняя прибыль при этом законе ξ_{s-1} равна

$$q_{s-1} := \big(0(r_2 - r_1) + (s-1)(r_0 - r_1)\big)p_0 + \big(1(r_2 - r_1) + (s-2)(r_0 - r_1)\big)p_1 + \ldots +$$
$$+\big((s-1)(r_2 - r_1) + 0(r_0 - r_1)\big)p_{s-1}^*.$$

Пусть теперь закупается $s \le N$ шт. Тогда закон распределения СВ ξ_s спроса имеет вид

k	0	1	. . .	s-1	s	. . .
p	p_0	p_1		p_{s-1}	p_s^*	

где $p_s^* := 1 - \sum_{k=0}^{s-1} p_k$. В этом случае прибыль будет такой функцией СВ ξ_s $\eta_{s-1} := (r_2 - r_1)\xi_{s-1} + {}$ $+(r_0 - r_1)(s - 1 - \xi_{s-1})$. Ее среднее значение по определению матожидания равно

$$q_s := \big(0(r_2 - r_1) + s(r_0 - r_1)\big)p_0 + \big(1(r_2 - r_1) + (s-1)(r_0 - r_1)\big)p_1 + \ldots +$$
$$\big((s-1)(r_2 - r_1) + (r_0 - r_1)\big)p_{s-1} + \big(s(r_2 - r_1) + 0(r_0 - r_1)\big)p_s^*. \qquad (1)$$

Найдем наибольшее число закупаемого товара s, при котором ещё будет $q_s > q_{s-1}$. Имеем

$$0 < q_s - q_{s-1} = (r_0 - r_1)p_0 + \ldots + (r_0 - r_1)p_{s-2} +$$

$$+\left((s-1)(r_2-r_1)+(r_0-r_1)\right)p_{s-1}+s(r_2-r_1)p_s^*-(s-1)(r_2-r_1)p_{s-1}^*=$$

$$=(r_0-r_1)\sum_{k=0}^{s-1}p_k+(s-1)(r_2-r_1)p_{s-1}+s(r_2-r_1)\left(1-\sum_{k=0}^{s-1}p_k\right)-(s-1)(r_2-r_1)\left(1-\sum_{k=0}^{s-2}p_k\right)=$$

$$=(r_0-r_1)\sum_{k=0}^{s-1}p_k+(r_2-r_1)\left(1-\sum_{k=0}^{s-1}p_k\right)=(r_2-r_1)-(r_2-r_0)\sum_{k=0}^{s-1}p_k=$$

$$=(r_2-r_1)-(r_2-r_0)P(k\le s-1).$$

Отсюда s нужно выбирать максимальным, при котором еще

$$P(k\le s-1)<\frac{r_2-r_1}{r_2-r_0}. \qquad ►$$

ПРИМЕР Продавец ежедневно покупает газеты по 10р. за штуку, а затем в течение дня продает их по 20 р. за штуку. Спрос на газеты является случайным. Если у него остаются непроданные газеты, то предполагается, что на следующий день все они будут проданы (возвращены оптовому продавцу) по 4 р. за штуку. Необходимо определить:

1) количество газет, которое нужно покупать продавцу ежедневно, чтобы иметь в будущем максимальный доход, 2) величину среднего дохода при ежедневной закупке газет.

Имеются наблюдения за спросом в течение 100 дней. По этой выборке строим таблицу « Объем спроса в день = к; n=n(k) - число дней (из 100), когда объем спроса = к ».

Объем спроса = к	Число дней n, когда объем спроса = к	Объем спроса = к	Число дней n, когда, когда объем спроса = к	Объем спроса = к	Число дней n, когда, когда объем спроса = к	Объем спроса = к	Число дней n, когда, когда объем спроса =A
0	0	13	1	26	4	39	1
1	0	14	3	27	3	40	2
2	1	15	3	28	3	41	0
3	1	16	3	29	4	42	1
4	1	17	4	30	2	43	1
5	2	18	3	31	3	44	0
6	1	19	4	32	3	45	0
7	1	20	3	33	2	46	1
8	1	21	4	34	2	47	0
9	2	22	5	35	2	48	0
10	2	23	4	36	1	49	1
11	1	24	4	37	2	50	0
12	3	25	3	38	2	>50	0

Или иначе

к	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
n	0	0	1	1	1	2	1	1	1	2	2	1	3	1	3	3	3	4
к	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
n	3	4	3	4	5	4	4	3	4	3	3	4	2	3	3	2	2	2
к	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	>50		
n	1	2	2	1	2	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0		

Здесь $n = n(k)$ - частота покупки у продавца k газет.

Используем маргинальный анализ, отождествляя таблицу относительных частот с законом распределения СВ «Вероятность спроса $к$ газет в день»: делим частоты на объем выборки =100.

к	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	0	0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.01	0.03
к	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
p	0.01	0.03	0.03	0.03	0.04	0.03	0.04	0.03	0.04	0.05	0.04	0.04	0.03
к	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
p	0.04	0.03	0.03	0.04	0.02	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01	0.02	0.02
к	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	>50
p	0.01	0.02	0	0.01	0.01	0	0	0.01	0	0	0.01	0	0

Так, $P(32) = 0.03,\ P(41) = 0$.

По условию задачи и теореме максимальное число газет s находим из неравенства

$$P(k \le s-1) < \frac{r_2 - r_1}{r_2 - r_0} = \frac{20-10}{20-4} = \frac{10}{16} = 0.625 \le P(k \le s)\ .$$

Для нахождения такого s составим таблицу кумулятивных сумм вероятностей

к	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
s	0	0	0.01	0.02	0.03	0.05	0.06	0.07	0.08	0.1	0.12	0.13	0.16
к	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
s	0.17	0.2	0.23	0.26	0.3	0.33	0.37	0.4	0.44	0.49	0.53	0.57	0.6
к	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
s	0.64	0.67	0.7	0.74	0.76	0.79	0.82	0.84	0.86	0.88	0.89	0.91	0.93
к	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	48	50	>50
s	0.94	0.96	0.96	0.97	0.98	0.98	0.98	0.99	0.99	0.99	1	1	1

Из нее видно, что s=26. Таким образом, наименьшее число покупаемых газет, при котором средний доход продавца в день будет наибольшим, равно 26.

Вычислим средний доход продавца при покупке 26 газет по формуле (1).

$$q_{26} := \big(0(r_2 - r_1) - 26(r_1 - r_0)\big)\,p_0 + \big(1(r_2 - r_1) - 25(r_1 - r_0)\big)\,p_1 + \ldots +$$

$$\big(26(r_2 - r_1) - 0\cdot(r_1 - r_0)\big)\,p_{26} + \big(26(r_2 - r_1) - 0\cdot(r_1 - r_0)\big)(p_{27} + \ldots + p_{49}) =$$

$$(r_2 - r_0)\big(0\cdot p_0 + 1\cdot p_1 + \ldots + 26 p_{26}\big) + 26(r_2 - r_1)(p_{27} + \ldots + p_{49}) -$$

$$-27(r_1 - r_0)\big(p_0 + \ldots + p_{26}\big) = 278.72 - 97.2 = 181.52\,\text{р}.$$

ГЛАВА 6
ДИСКРЕТНОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Опр. Дискретное динамическое программирование - раздел математики, в котором изучаются многошаговые задачи оптимального управления.

Слово "программирование" означает "принятие решений", планирование"; "динамическое" означает существенность времени или наличие порядка выполнения операций.

Опр. Пусть решение некоторой задачи удается представить в виде последовательности принятия решений, при реализации которых мы последовательно переходим из начального состояния $x_0 \in X_0$ (- множество допустимых начальных состояний) через последовательность промежуточных состояний $x_k \in X_k$ в конечное состояние $x_n \in X_n$ (- множество допустимых конечных состояний). Обозначим принятие решения (- управление) по переходу из x_{k-1} в x_k через $u_k \in U(x_{k-1})$ (- множество допустимых управлений), и правило $x_k = f_k(x_{k-1}, u_k),\ k = 1,...n$, назовем уравнением состояния. Пара $d := \{\hat{x}, \hat{u}\}$, где

$$\hat{u} := \{u_1, ..., u_n\},\ u_k \in U(x_{k-1}), \quad x_k = f_k(x_{k-1}, u_k),\ k = 1,...n, \quad \hat{x} := \{x_0, ..., x_n\}$$

называется допустимым процессом, $\hat{x}$ - допустимой траекторией, $\hat{u}$ - допустимым управлением.

ОБОЗНАЧЕНИЕ $D(x_0, x_n)$ - множество допустимых процессов $d := \{\hat{x}, \hat{u}\}$ с начальным состоянием x_0 и конечным состоянием x_n. Множество допустимых процессов - $D := \bigcup\limits_{x_0 \in X_0,\, x_n \in X_n} D(x_0, x_n)$.

Опр. Пусть на каждом $U(x_{k-1})$ определена целевая функция $Z_k(x_{k-1}, \cdot) : U(x_{k-1}) \to \mathrm{R}$. Тогда на множестве допустимых процессов D определен функционал

$$Z(d) = Z(\hat{x}, \hat{u}) := \sum_{k=1}^{n} Z_k(x_{k-1}, u_k),$$

который называется целевой функцией управления (функционалом качества).

Опр. Многошаговой задачей оптимизации (задачей с начальным состоянием x_0 и конечным состоянием x_n) называется задача нахождения на множестве (на множестве $D(x_0, x_n)$) процесса $d^* = (x^*, u^*)$, на котором достигается экстремум функционала качества

$$\underset{d \in D}{extr}\, Z(d) = Z(d^*) \quad \left(\underset{d \in D(x_0, x_n)}{extr} Z(d) = Z(d^*) \right).$$

где x^* - оптимальная траектория, а u^* - оптимальное управление.

АЛГОРИТМ (*построения оптимального управления*)

1) На первом этапе на фазовом пространстве всех состояний $X := \bigcup\limits_{k=0}^{n} X_k$ строится функция Беллмана $B : X \to \mathrm{R}$ последовательно, начиная с X_n, на котором

$\forall x_n \in X_n \;\; B(x_n) := 0$. Далее

$$\forall x_{n-1} \in X_{n-1} \;\; B(x_{n-1}) := \underset{u_n \in U(x_{n-1})}{extr} Z_n(x_{n-1}, u_n),$$

$$\forall k = 0, \dots, n-2 \;\; \forall x_k \in X_k \;\; B(x_k) := \underset{u_{k+1} \in U(x_k)}{extr} \left(Z_{k+1}(x_k, u_{k+1}) + B(f_{k+1}(x_k, u_{k+1})) \right)$$

Эти уравнения называются уравнениями Беллмана. В силу определения функция Бел лмана $B(x_k)$ совпадает с экстремальным значением функционала качества на всех допус тимых траекториях $D(x_k, X_n)$ с начальным состоянием x_k и конечным состоянием в X_n.

2) На втором этапе с помощью состояния x_0^* и функции $B(x_k)$ строится оптимальный процесс, при этом u_k^* находится из уравнения

$$B(x_{k-1}^*) := \underset{u_k \in U(x_{k-1}^*)}{extr} \left(Z_k(x_{k-1}^*, u_k) + B(f_k(x_{k-1}^*, u_k)) \right),$$

а соответствующее x_k^* вычисляется по формуле

$$x_k^* := f_k(x_{k-1}^*, u_k^*), \;\; k = 1, \dots, n.$$

ПИМЕР В развитие предприятия в течение $N = 4$ лет планируется вложить 5 миллионов рублей долями, кратными 1 миллиону. Прибыль в k-м году при вложении в этом году суммы m равна $J(k, m)$ и дана в таблице. Требуется распределить 5 миллионов по годам так, чтобы суммарная прибыль была максимальной.

N *года*.\ m	0	1	2	3	4	5
$J(1,m)$	0	0,4	0,7	1,04	1,2	1,36
$J(2,m)$	0	0,5	0,8	0,96	1,12	1,24
$J(3,m)$	0	0,34	0,76	1	1,1	1,2
$J(4,m)$	0	0,6	0,9	1	1,1	1,36

◄ Сначала рассмотрим задачу для одного (первого) года работы. В этом случае $B(1, i) := J(1, i), \;\; i = 0, \dots, 5$. Теперь выпишем функцию Беллмана в случае двух лет работы.

$$B(2, j) := \max_{i \le j} \left(J(2, j-i) + B(1, i) \right), \;\; j = 0, \dots, 5.$$

Ее вычисление удобно оформить в виде следующей таблицы.

		0	1	2	3	4	5
$J(1,i)$	$J(2,i)$	0	0,5	0,8	0,96	1,12	1,24
0	0	$\boxed{0}$	$\boxed{0,5}$	0,8	0,96	1,12	1,24
1	0,4	0,4	$\boxed{0,9}$	$\boxed{1,2}$	1,36	1,52	
2	0,7	0,7	$\boxed{1,2}$	1,5	1,66		
3	1,04	1,04	$\boxed{1,54}$	$\boxed{1,84}$			
4	1,2	1,2	1,7				
5	1,36	1,36					

Здесь в рамки включены максимальные прибыли при соответствующих распределяемых суммах. Например, $1,54 = B(2,4)$.

Теперь выпишем функцию Беллмана в случае трех лет работы.

$$B(3,k) := \max_{j\le k}\big(J(3,k-j)+B(2,j)\big),\ \ k=0,...,5.$$

Таблица составляется по функциям $J(3,k)$ и $B(2,k)$.

$B(2,i)$ $J(3,i)$		0	1	2	3	4	5
		0	0,5	0,9	1,2	1,54	1,84
0	0	$\boxed{0}$	$\boxed{0{,}5}$	$\boxed{0{,}9}$	1,2	1,54	1,84
1	0,34	0,34	0,84	1.24	1,54	1,88	
2	0,76	0,76	$\boxed{1.26}$	$\boxed{1{,}66}$	$\boxed{1{,}96}$		
3	1	1	1,5	1,9			
4	1,1	1,1	1,6				
5	1,2	1,2					

Выпишем, наконец, функцию Беллмана в случае четырех лет работы.

$$B(4,5) := \max_{k\le 5}\big(J(4,5-k)+B(3,k)\big).$$

$B(3,i)$ $J(4,i)$		0	1	2	3	4	5
		0	0,5	0,9	1,26	1,66	1,96
0	0						1,96
1	0,6					$\boxed{2{,}26}$	
2	0,9				2.16		
3	1			1,9			
4	1,1		1,6				
5	1,36	1,36					

Таблица составляется по функциям $J(4,k)$ и $B(3,k)$.

Из уравнения $B(4,5) := \max\limits_{k\le 5}\big(J(4,5-k)+B(3,k)\big)=2,26$ и последней таблицы находим $u_4^*=1,\ B(3,4)=1,66$.

Из уравнения $B(3,4) := \max\limits_{j\le 4}\big(J(3,4-j)+B(2,j)\big)=1,66$ и предпоследней таблицы находим $u_3^*=2,\ B(2,2)=0,9$.

Наконец, из уравнения $B(2,2) := \max\limits_{i\le 2}\big(J(2,2-i)+J(1,i)\big)=0,9$ и первой таблицы находим $u_2^*=1,\ u_1^*=1$.

Таким образом, максимальная прибыль получается при распределении $u^*=\{1,1,2,1\}$ и она равна $B(4,5)=2,26$ миллиона рублей.

ГЛАВА 7
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Опр. Система массового обслуживания (СМО) обеспечивает обслуживание требований, поступающих из источника требований и возвращающихся после обслуживания в источник. Обслуживание производят обслуживающие приборы (в количестве $\kappa \geq 1$).

Облуживание производится по одной из дисциплин обслуживания:

1) FCFS - первый пришел – первый обслужен;
2) LCFS - последний пришел – первый обслужен;
3) RANDOM – очередное требование выбирается из очереди наугад.

Определение Поток требований - случайная последовательность требований, поступающих в систему обслуживания.

Определяется двумя СВ – моментами поступления τ_i и количеством требований γ_i, поступивших в момент τ_i.

Опр. Поток требований называется рекуррентным, если $\gamma_i \equiv 1$, а промежутки времени между последовательными требованиями $\xi_i = \tau_{i+1} - \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots$, являются независимыми положительными и одинаково распределенными СВ.

Опр. Рекуррентный поток требований называется пуассоновским потоком с интенсивностью λ, если случайные величины ξ_i имеют пуассоновское распределение с параметром λt.

Последовательность длительностей обслуживания рассматривается как последова тельность независимых положительных СВ, распределенных по экспоненциальному закону с параметром μ.

Из теории массового обслуживания известны следующие формулы.
Вероятность того, что в произвольный момент достаточно отдаленного будущего в СМО не будет находиться ни одного требования, вычисляется по формуле

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1},$$

где m - число обслуживающих приборов в СМО, $\rho := \frac{\lambda}{m\mu}$ - «коэффициент использования» обслуживающих приборов СМО.

Математическое ожидание числа требований в очереди на обслуживание равно

$$\overline{c} := \frac{m^m \rho^{m+1}}{m!(1-\rho)^2} p_0 .$$

Математическое ожидание числа свободных приборов в СМО равно

$$\overline{g} := (1-\rho)m .$$

Функция потерь в единицу времени вычисляется по формуле

$$R(m) := a\overline{c} + b\overline{g} ,$$

где a - себестоимость часа пребывания в очереди одного требования, b - себестоимость часа работы одного прибора в СМО.
ЗАМЕЧАНИЕ Известно, что функция потерь имеет только один минимум по m. Этот минимум находится методом проб.

ГЛАВА 8
МЕТОД ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Опр. Общей задачей линейного программирования (ЗЛП) называется задача нахождения экстремума линейной целевой функции

$$Z(x_1,...,x_n) := c_1x_1 + ... + c_nx_n$$

при линейных ограничениях задачи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad \begin{cases} a'_{11}x_1 + ... + a'_{1n}x_n \le b'_1 \\ \quad . \quad . \quad . \\ a'_{l1}x_1 + ... + a'_{ln}x_n \ge b'_l \end{cases}.$$

Опр. Задачей линейного программирования в канонической форме называется задача нахождения экстремума целевой функции с ограничениями вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad m \le n, \qquad \begin{cases} x_1 \ge 0 \\ . \quad . \quad .. \\ x_n \ge 0 \end{cases}$$

Покажем на примере, как ЗЛП приводится к каноническому виду.
ПРИМЕР Пусть дана целевая функция $Z = x_1 + x_2 \to \max$ с ограничениями

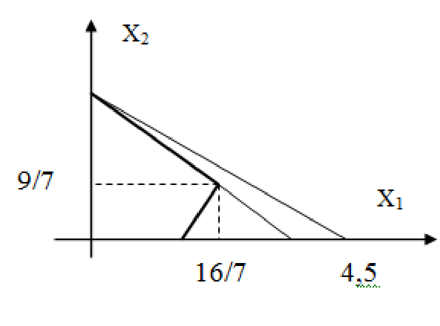
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}, \quad x_1 \ge 1.$$

Выразим переменную x_2 через две новые неотрицательные по правилу $x_2 =: x'_2 - x'_3$. Для превращения неравенства в системе в равенство введем в него неотрицательное слагаемое x'_4. Наконец, положим $x'_1 := x_1 - 1$. В итоге получаем такую ЗЛП в канонической форме: $Z = x'_1 + x'_2 - x'_3 \to \max$,

$$\begin{cases} x'_1 - x'_2 + x'_3 + x'_4 \le 0 \\ 2x'_1 + x'_2 - x'_3 = 1 \end{cases}, \quad x'_1 \ge 0, x'_2 \ge 0, x'_3 \ge 0, x'_4 \ge 0 .$$

Опр. Последовательность чисел $x = (x_1,...,x_n)$, удовлетворяющая ограничениям задачи, называется допустимым планом (решением). Множество допустимых планов называется областью допустимых планов. Допустимый план, а который доставляет максимум целевой функции на множестве допустимых планов, называется оптимальным планом (решением).

ПРИМЕР Область допустимых планов следующей ЗЛП в канонической форме $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ с ограничениями



$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 12 \end{cases}, \quad x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0$$

можно изобразить в виде выпуклого многоугольника допустимых планов, причем оптимальный план достигается в его вершине и равен $(0,3)$.

ЗАМЕЧАНИЕ Целевую функцию и СЛАУ можно переписать в векторной форме $Z(\bar{x}) = \bar{C}\bar{x}$, $\bar{A}_1 x_1 + \ldots + \bar{A}_n x_n = \bar{A}_0$, где $\bar{C} := \{c_1, \ldots, c_n\}$, $\bar{x} := \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\bar{A}_i$ - вектор из элементов i -го столбца, $\bar{A}_0$ - вектор свободных членов СЛАУ.

Опр. Без потери общности (в силу теоремы Кронекера-Капелли) ранг матрицы коэффициентов СЛАУ предполагается равным m. Тогда матрица имеет m линейно независимых столбцов, соответствующие которым переменные называют базисными. Остальные переменные называют свободными. Если при нулевых свободных переменных решение СЛАУ оказывается допустимым планом, то его называют опорным планом ЗЛП.

Опр. Уравнения СЛАУ называют ограничениями. Ограничение имеет предпочти тельный вид, если при неотрицательной правой части оно содержит с коэффициентом $=1$, а в остальных $m-1$ ограничениях эта неизвестная отсутствует.

Опр. СЛАУ (система ограничений) имеет предпочтительный вид, если каждое ее ограничение имеет предпочтительный вид.

Пусть СЛАУ имеет предпочтительный вид, причем упоминаемые в его определении неизвестные занимают в СЛАУ первые m мест. Тогда каноническая ЗЛП имеет вид

$$Z(x_1, \ldots, x_n) := c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n, \quad \begin{cases} x_1 = -a_{1,m+1} x_{m+1} - \ldots - a_{1n} x_n + b_1 \\ \quad . \quad . \quad . \\ x_m = -a_{m,m+1} x_{m+1} - \ldots - a_{mn} x_n + b_m \end{cases}, \quad m \le n, \quad \begin{cases} x_1 \ge 0 \\ . \quad . \quad \ldots \\ x_n \ge 0 \end{cases},$$

Исключая с помощью последних равенств из целевой функции базисные переменные, получаем

$$Z = -c_1 \sum_{k=m+1}^{n} a_{1k} x_k + c_1 b_1 + \ldots + -c_m \sum_{k=m+1}^{n} a_{mk} x_k + c_m b_m + c_{m+1} x_{m+1} + \ldots + c_n x_n =$$

$$= \left(c_1 b_1 + \ldots + c_m b_m\right) - \left(c_1 a_{1,m+1} + \ldots + c_m a_{m,m+1} - c_{m+1}\right) x_{m+1} + \ldots + \left(c_{n1} a_{n,m+1} + \ldots + c_m a_{n,m+1} - c_n\right) x_n =$$

$$=: \bar{C}_б \bar{A}_0 - \left(\bar{C}_б \bar{A}_{m+1} - c_{m+1}\right) x_{m+1} - \ldots - \left(\bar{C}_б \bar{A}_n - c_n\right) x_n =: \Delta_0 - \sum_{k=m+1}^{n} \Delta_k x_k,$$

где $\bar{C}_б := (c_1, \ldots, c_m\}$, $\quad \Delta_0 := \bar{C}_б \bar{A}_0$, $\quad \Delta_k := \bar{C}_б \bar{A}_k - c_k$, $\quad k = m+1, \ldots, n$.

Решение ЗЛП опирается на следующий результат

ТЕОРЕМА 8.1 1) Опорный план является граничной точкой многогранника допустимых планов (вершиной или лежит на ребре, грани).

2) Оптимальный план является опорным.

3) Если в ЗЛП с системой ограничений предпочтительного вида $\forall k \ge 1\ \Delta_k \ge 0$, то опорный план $\bar{x}^* = \{x_1^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0\}$ является оптимальным, причем $Z(\bar{x}^*) = \Delta_0$.

◄ Без доказательства. ►

ПРИМЕР Решим каноническую задачу линейного программирования для целевой функции $Z=-2x_1+x_2-3x_3+2x_4-x_5 \to \max$ с ограничениями

$$\begin{cases} x_1-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_5=\frac{1}{2} \\ x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_5=1\frac{1}{2}. \\ x_3+x_4=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, СЛАУ имеет предпочтительный вид с базисными переменными x_1, x_2, x_4. Решение в соответствии с последним пунктом теоремы проводится в виде последователь ного заполнения следующей симплексной таблицы, и вычисления нижней строки по приведенной формуле.

Базисные переменные	$\bar{C}_б$	$\bar{A}_0$	$c_1=-2$ $\bar{A}_1$	$c_2=1$ $\bar{A}_2$	$c_3=-3$ $\bar{A}_3$	$c_4=2$ $\bar{A}_4$	$c_5=-1$ $\bar{A}_5$
x_1	-2	0,5	1	0	-0,5	0	0,5
x_2	1	1,5	0	1	0,5	0	0,5
x_4	2	2	0	0	1	1	1
$\Delta_k := \bar{C}_б\bar{A}_k - c_k$		4,5	0	0	6,5	0	0,5

Так как $\forall k \geq 1 \ \Delta_k \geq 0$, то опорный план $\bar{x}^* = \{0{,}5, 1{,}5, 0, 2, 0\}$ оптимален, и $\bar{Z}^* = \Delta_0 = 4{,}5$.

Опр. Метод решения ЗЛП называется симплекс-методам и состоит в приведении ЗЛП к виду, когда выполняется последний пункт теоремы, и в последующем заполнении соответствующих симплексных таблиц.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Пусть система ограничений имеет предпочтительный вид, но в последовательности величин Δ_k есть отрицательные. В этом случае изменяют состав базисных переменных, убирая из него неперспективную переменную x_{i_0} и заменяя ее на перспективную x_{j_0}. Для этого производится перерасчет матрицы коэффициентов по жордановой формуле

$$a'_{ij} := \frac{a_{i_0,j_0}a_{i,j} - a_{i,j_0}a_{i_0,j}}{a_{i_0,j_0}}.$$

Опр. Преобразование ЗЛП к новым базисным переменным по жордановым формулам называется симплексным преобразованием.

В рассматриваемом случае применяется следующий алгоритм:

1) Индекс перспективной переменной j_0 выбирается таким, при котором Δ_{j_0} есть наибольшее отрицательное число.
2) Индекс неперспективной переменной i_0 выбирается таким, что на нем достигается $\min\left\{\frac{b_i}{a_{i,j_0}} : x_i - \text{базисная переменная},\ a_{i,j_0} > 0\right\}$.

3) Составляется новая симплексная таблица, в которой в первом столбце неперспектив ная переменная заменяется на перспективную. Таблица заполняется с помощью жордановых формул.
4) Вычисления прекращаются, если все Δ_k оказываются неотрицательными. В противном случае процесс замены неперспективной переменой повторяется.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Если система ограничений не имеет предпочтительный вид, то для его создания применяют метод искусственного базиса, который имеет такой алгоритм:

1) Дополняют искусственно предпочтительные переменные новыми $y_1,..,y_s,\ s \le m$ до ЗЛП предпочтительного вида.
2) В целевую функцию вводят слагаемое вида $-My_1 - ... - My_s$, где M считается достаточно большим фиксированным числом.
3) Полученную ЗЛП предпочтительного вида решают (M - задача) по алгоритму предыдущего замечания.
4) Если в полученном оптимальном плане $\left\{x_1^0,...,x_n^0,y_1^0,...,y_s^0\right\}$ все числа y_i^0 равны нулю, то план $\overline{x}^* := \left\{x_1^0,...,x_n^0\right\}$ будет оптимальным для исходной ЗЛП. Если же в полученном оптимальном плане не все эти числа равны нулю, то область допустимых планов исходной задачи пуста.

ГЛАВА 9
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

§ 9.1 Классификация игр.

Опр. ***Конфликт*** - это явление, применительно к которому можно говорить:

1) кто и как в этом явлении участвует (- ***игроки***),
2) какие у него могут быть исходы,
3) кто и как в этих исходах заинтересован.

Опр. ***Теория игр*** – теория математических моделей принятия оптимальных решения в условиях конфликта.

ЗАМЕЧАНИЕ Математический аппарат теории игр затратен. Его применяют для оправданных задач: политика, экономика монополий и распределения рыночной власти и т. п.

Джон фон Не́йман (1903-1957) - венгеро-американский математик еврейского происхождения, сделавший важный вклад в квантовую физику, квантовую логику, функциональный анализ, теорию мно жеств, информатику, экономику и другие отрасли науки.

В его статье «К теории стратегических игр», 1928 г., содержатся современные идеи теории игр.

Математические аспекты и приложения теории были изложены в монографии Дж. Неймана и О.Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение», 1944 г.

Дж. Нейман и М. Дрешер применяли теорию игр для выработки оптимальной стратегии при атомной бомбардировке Японии.

В военном деле также был введен термин "исследование операций".

Оскар Моргенштерн (1902-1977) - американский экономист немецкого происхождения, один из создателей теории игр.

Имеет место следующая классификация игр.

Опр. ***Коалиция*** – группа лиц или сторона, принимающая решение в конфликте (***коалиция действия***), либо отстаивающая некоторые интересы (***коалиция интересов***).

Опр. ***Бескоалиционная игра*** - игра, в которой каждая коалиция состоит лишь из одного игрока.

ПРИМЕР «Подкидной дурак».

Опр. ***Кооперативная бескоалиционная игра*** – игра, в которой допускаются:

1) временные объединения игроков в коалиции в процессе игры с последующим разделением полученного выигрыша или 2) принятие совместных решений.

Опр. ***Коалиционная игра*** – игра, в которой игроки согласно правилам игры объединены в фиксированные коалиции. Члены одной коалиции могут: а) свободно обмениваться информацией и б) принимать согласованные решения.

Пр. Волейбол.

Опр. ***Игра антагонистическая*** – игра, выигрыш в которой одного игрока не совпадает с проигрышем другого. В противном случае - ***игра с нулевой суммой***.

ПРИМЕР Игрой с отличной от нуля суммой является *торговля*, где каждый участник извлекает выгоду. *Война* является пример игры с уменьшающейся суммой.

Опр. ***Игра в нормальной форме*** – игра, в которой игроки получают всю предназначен ную им информацию до начала игры.

Опр. ***Динамическая игра*** – игра, в которой информация поступает игрокам в процессе развития игры.

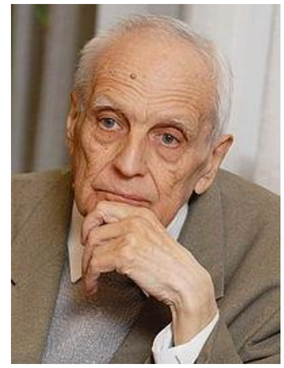
ПРИМЕР Шахматы – динамическая игра.

Опр. ***Теория дифференциальных игр*** – раздел математической теории управления, в котором изучается управление в конфликтных ситуациях.

ЗАМЕЧАНИЕ Первые работы по теории дифференциальных игр появились в 50-ых годах 20 века. Различают дифференциальные игры двух игроков и нескольких игроков. Наиболее исследованными являются *дифференциальные игры преследования*.

Айзекс Руфус Филипп (1914 - 1981) - американский математик. Работал в области теории функций, теории графов, теории чисел, аэродинамики и оптимизации. В 1965 г. опубликовал фундаментальную работу по теории дифференциальных игр, в которой исследовались антагонистические игры преследования, оказавшую значительное влияние на развитие динамического программирования и оптимального управления.

Красóвский Николáй Николáевич (1924-2012) - советский и россий ский учёный в области математики и механики. Основатель крупной научной школы по теории оптимального управления и дифференци альных игр. Ученики академики: Ю. С. Осипов, А. Б. Куржанский, А. И. Субботин, А. В. Кряжимский, члены-корреспонденты РАН: А. Г. Ченцов, В. Е. Третьяков, В. Н. Ушаков, Н. Н. Субботина и др. Сформулировал и доказал новые критерии устойчивости движений нелинейных систем, установил существование функции Ляпунова для ряда основных теорем об устойчивости и неустойчивости.



Один из создателей теории оптимального управления. Методами функционального анализа разработал теорию, позволяющую формулировать эффективные условия суще ствования оптимальных решений, необходимые и достаточные условия оптимальности.

Развил минимаксный подход к задачам наблюдения при определённых помехах, полу чил ряд основополагающих результатов по оптимальному управлению стохастическими схемами и теории оптимальной стабилизации управляемых систем.

Предложил оригинальную концепцию позиционных дифференциальных игр, метод экс тремального прицеливания. Разработанная Н. Н. Красовским формализация дифференци альной игры составила базу для развития теории (существование седловых точек в клас сах чистых и смешанных стратегий, стабилизация решений и т. д.) и для построения эф фективных вычислительных алгоритмов. Вместе с А. И. Субботиным свёл задачу об опти мальном управлении в дифференциальных играх к построению т. н. «стабильного моста»

Петросян Леон Аганесович (род.1940) - российский математик, профессор Санкт-Петербургского универ ситета. В 1962 г.Н.Н.Воробьев предложил ему занять ся дифференциальными играми. В 1965 г. построил явное решение игр преследования с «линией жизни». Построенная оптимальная стратегия преследователя (стратегия параллельного сближения) оказалась опти мальной и в других задачах преследования (простое преследование в полуплоскости, простое преследование с двумя преследователями и одним убегающим и др.), которые были также решены в последующих работах. С конца 70-х годов центр тяжести исследований П. переходит на неантагонистические дифференциальные игры.

§ 9.2 Конечные антагонистические игры.

Опр. ***Антагонистической игрой в нормальной форме*** называется тройка объектов $\Gamma := (X, Y, K)$, где X, Y - множества, элементы которых называются ***стратегиями первого*** и ***второго игроков*** соответственно; $K : X \times Y \to R$ - ***функция выигрыша игры*** Γ, называется также ***функцией выигрыша первого игрока***. Пара стратегий $(x, y) \in X \times Y$ называется ***ситуацией***.

Опр. Первому игроку приписывается выигрыш $K(x, y)$, а второму - $-K(x, y)$. Поэтому игра Γ является ***игрой с нулевой суммой***.

Опр. ***Игра конечная***, если число стратегий в ней конечно: $card(X)<\infty,\ card(Y)<\infty$. ***Игра бесконечная*** в противном случае.

Опр. Предполагается, что оба игрока действуют разумно. Это значит, что при выборе стратегии x первым игроком его максимальный выигрыш будет равен $\inf\limits_{y\in Y} K(x,y)$, а в целом по игре - $\underline{v}:=\sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y} K(x,y)$ - ***нижняя цена игры***. Стратегия x_0, на которой достигается максимальное значение: $\underline{v}:=\max\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y} K(x,y)=\inf\limits_{y\in Y} K(x_0,y)$, называется ***максиминной стратегией***, а само это значение $\underline{v}$ – ***максимином***.

Опр. При выборе стратегии y вторым игроком максимальный выигрыш первого игрока (а значит максимальный проигрыш второго) будет равен $\sup\limits_{x\in X} K(x,y)$. Поэтому второй игрок должен выбирать стратегию так, чтобы минимизировать этот максимальный выигрыш $\overline{v}:=\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x\in X} K(x,y)$. Эта величина называется ***верхней ценой игры***. Стратегия y_0, на которой достигается минимальное значение $\overline{v}:=\min\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x\in X} K(x,y)=\sup\limits_{y\in Y} K(x,y_0)$, называется ***минимаксной стратегией***, а само это значение $\overline{v}$ – ***минимаксом***.

ЗАМЕЧАНИЕ Можно доказать, что $\underline{v}\le\overline{v}$.

Опр. В антагонистической игре $\Gamma:=\left(X,Y,K\right)$ ситуация (x_0,y_0) называется ***седловой точкой*** (***ситуацией равновесия***), если

$$\forall x\in X\ \ \forall y\in Y\ \ K(x,y_0)\le K(x_0,y_0)\le K(x_0,y).$$

В этом случае число $v:=K(x_0,y_0)$ называется ***значением*** (***ценой***) ***игры***. x_0 называется ***оптимальной стратегией первого игрока***, а y_0 - ***оптимальной стратегией второго игрока***.

ТЕОРЕМА 9.1 В игре $\Gamma:=\left(X,Y,K\right)$ существует седловая точка тогда и только тогда, когда существуют минимакс $\min\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x\in X} K(x,y)$ и максимин $\max\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y} K(x,y)$, и они совпадают.

Опр. Антагонистическая игра называется ***матричной***, если она конечная: $cardX<\infty,\ cardY<\infty$. В этом случае полагают

$$X=\{1,\dots,n\},\ Y=\{1,\dots,m\},\ K(i,j)=a_{i,j},\ i=1,\dots,n\ \ j=1,\dots,m.$$

Матрица $A=(a_{i,j})$ называется ***матрицей игры***.

ПРИМЕР (*игра на пальцах*) 2 игрока одновременно и независимо друг от друга показывают 1, 2 или 3 пальца. Если общее число k пальцев нечетное, то второй игрок платит первому k руб., а если k нечетное, то наоборот. Существует ли седловая точка у такой игры?

Обозначим стратегии игроков соответственно $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{1,2,3\}$. Тогда матрица A игры имеет такой вид.

X\Y	1	2	3
1	-2	3	-4
2	3	-4	5
3	-4	5	-6

Вычислим нижнюю и верхнюю цену игры для первого игрока.
$\underline{v} := \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} K(x,y) = \max\{\min\{-2,3,-4\}, \min\{3,-4,5\}, \min\{-4,5,-6\}\} = \max\{-4,-4,-6\} = -4$,
$\overline{\text{v}} := \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} K(x,y) = \min\{\max\{-2,3,-4\}, \max\{3,-4,5\}, \max\{-4,5,-6\}\} = \min\{3,5,5\} = 3$.

Нижняя цена игры для первого игрока равна -4 при выборе им стратегии 1 или 2 пальца. Она достигается, если стратегия второго игрока будет соответственно 3 или 2 пальца.

Верхняя цена игры равна 3 при выборе вторым игроком стратегии 1 палец. Она достигается, если стратегия первого игрока будет 2 пальца.

Без этого анализа первый игрок может потерять и 6 руб., а второй 5 руб.

Рассмотрим случай, когда в матричной игре нет ситуации равновесия. В этой ситуации игрокам разумно действовать случайно.

Опр. Пусть стратегии игрока являются значениями дискретной случайной величины. Тогда её называют ***смешанной стратегией игрока***.

ЗАМЕЧАНИЕ Смешанная стратегия первого игрока есть m - мерный вектор
$x = (\xi_1,...,\xi_m) \in \tilde{\mathrm{R}}^m,\ \sum_{i=1}^{m}\xi_i = 1,\ \xi_i \geq 0$, а второго игрока n - мерный вектор
$y = (\eta_1,...,\eta_n) \in \tilde{\mathrm{R}}^n,\ \sum_{j=1}^{n}\eta_j = 1,\ \eta_j \geq 0$.

ПРИМЕР Стратегии вида $(0,...0,1,0,...,0)$ называются ***чистыми стратегиями***.

Обозначение. $\mathrm{M},\ \mathrm{N}$ - множества чистых стратегий соответственно первого и второго игроков.

Опр. Пара (x,y) смешанных стратегий игроков в матричной игре называется ***ситуацией в смешанных стратегиях***.

Опр. Обозначим X, Y множества смешанных стратегий первого и второго игроков. ***Выигрышем первого игрока в ситуации*** (x,y) ***в смешанных стратегиях*** называется математическое ожидание соответствующей двумерной СВ (x,y)

$$K(x,y) := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\eta_j = xAy'.$$

Опр. Тройка $\overline{\Gamma}_A := (X,Y,K)$ называется ***смешанным расширением матричной игры*** $\Gamma_A := (M,N,A)$.

Опр. Ситуация (x_0,y_0) в игре $\overline{\Gamma}_A$ называется ***ситуацией равновесия***, а число $v := K(x_0,y_0)$ называется ***значением*** (***ценой***) ***игры***, если

$$\forall x \in X\ \ \forall y \in Y\ \ K(x,y_0) \leq K(x_0,y_0) \leq K(x_0,y).$$

ЗАМЕЧАНИЕ Стратегии x_0, y_0, входящие в ситуацию равновесия, являются соответственно максиминной и минимаксной.

ТЕОРЕМА 9.2 Всякая матричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

Опр. Пусть $A=(a_{ij})\in M_{mn},\ c,x\in\tilde{\mathrm{R}}^m\ \ b,y\in\tilde{\mathrm{R}}^n$, и рассматривается (прямая стандартная) задача линейного программирования $\min\limits_{x\ge 0} cx := \min\limits_{x\ge 0}\sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i$, $x\ge 0$, $Ax\ge b$. Задача нахождения максимума $\max\limits_{y\ge 0} by := \max\limits_{y\ge 0}\sum\limits_{j=1}^{n} b_j y_j$ при условии $y\ge 0, Ay\ge c$, называется ***двойственной задачей линейного программирования***.

ТЕОРЕМА 9.3 (*двойственности*) Если прямая и двойственная задачи линейного программирования имеют допустимые решения, то они имеют оптимальные решения соответственно $\bar{x},\bar{y}$, и при этом $c\bar{x}=b\bar{y}$.

ТЕОРЕМА 9.4 Построим по матричной игре $\Gamma_A := \left(M,N,A\right)$ с положительной матрицей прямую и двойственную задачи линейного программирования

$$\min_{x\ge 0} ux,\ xA\ge w;\quad \max_{y\ge 0} wy,\ Ay\le u,$$

где $u=(1,...,1)\in\tilde{\mathrm{R}}^m,\ w=(1,...,1)\in\tilde{\mathrm{R}}^n$. Обозначим $\bar{X},\ \bar{Y}$ множества оптимальных решений соответствующих задач. Справедливы утверждения:

1) Обе задачи имеют решения, при этом $\theta := \min\limits_{x\ge 0} ux = \max\limits_{y\ge 0} wy$.

2) Значение игры $\bar{\Gamma}_A := \left(X,Y,K\right)$ равно $v_A := \dfrac{1}{\theta}$, а стратегии

$$x_0 := \frac{\bar{x}}{\theta},\ \bar{x}\in\bar{X},\quad y_0 := \frac{\bar{y}}{\theta},\ \bar{y}\in\bar{Y}$$

являются оптимальными.

3) Множества оптимальных стратегий игроков $X_0,\ Y_0$ матричной игры $\bar{\Gamma}_A := \left(X,Y,K\right)$ и множества оптимальных решений задач из пункта 1) связаны равенствами

$$X_0 = \frac{1}{\theta}\bar{X},\ Y_0 = \frac{1}{\theta}\bar{Y}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ Если матрица не строго $A=(a_{ij})$ положительна, то её заменяют на положительную $A'=(a_{ij}+b)$ с подходящим $b>0$. По предыдущей теореме для $\bar{\Gamma}_{A'}$ существует ситуация равновесия (x_0,y_0), а значение обозначим $v_{A'} := \dfrac{1}{\theta}$.

Можно показать, что (x_0,y_0) будет ситуацией равновесия в игре $\bar{\Gamma}_A$, а значение её равно $v_A := v_{A'} - b = \dfrac{1}{\theta} - b$

ПРИМЕР (*игра на пальцах*) В этой игре матрица неположительна. Выберем $b=7$, и

по матрице $A' = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 \\ 10 & 3 & 12 \\ 3 & 12 & 1 \end{pmatrix}$ построим задачи линейного программирования.

Прямая задача линейного программирования имеет вид

$$x_1+x_2+x_3\to\min,\quad \begin{cases}5x_1+10x_2+3x_3\ge 1\\ 10x_1+3x_2+12x_3\ge 1,\\ 3x_1+12x_2+x_3\ge 1\end{cases}\quad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0.$$

Приводим её к каноническому виду

$$x_1+x_2+x_3\to\min,\quad \begin{cases}5x_1+10x_2+3x_3-x_4=1\\ 10x_1+3x_2+12x_3-x_5=1,\\ 3x_1+12x_2+x_3-x_6=1\end{cases}\quad x_1,...,x_6\ge 0,$$

и решаем. $\theta=1/7$, $x_0=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

Сопряженная задача линейного программирования имеет вид

$$y_1+y_2+y_3\to\max,\quad \begin{cases}5x_1+10x_2+3x_3\le 1\\ 10x_1+3x_2+12x_3\le 1,\\ 3x_1+12x_2+x_3\le 1\end{cases}\quad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$$

Приводим её к каноническому виду

$$x_1+x_2+x_3\to\min,\quad \begin{cases}5x_1+10x_2+3x_3+x_4=1\\ 10x_1+3x_2+12x_3+x_5=1,\\ 3x_1+12x_2+x_3+x_6=1\end{cases}\quad x_1,...,x_6\ge 0,$$

и решаем $\theta=1/7$, $y_0=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

Для исходной задачи цена игры в силу Замечания равна $v_A:\frac{1}{\theta}-b=0$. В серии игр на пальцах 1 и 3 пальца следует выбрасывать одинаковое число раз, а 2 пальца – в два раза больше. Тогда гарантированным результатом будет ничья.

§ 9.3 Бескоалиционные игры.

В неантагонистических играх различают бескоалиционное поведение, когда соглашения между игроками запрещены правилами, и кооперативное поведение игроков, когда разрешается кооперация: а) типа выбора совместных стратегий или б) совершения побочных платежей.

Опр. ***Бескоалиционная игра*** это множество $\Gamma:=\left(N,\{X_i\}_{i\in N},\{H_i\}_{i\in N}\right)$, N -множество игроков, X_i множество стратегий i-го игрока, H_i- функция выигрыша i-го игрока, определенная на ***множестве стратегий игры*** $X:=\prod_{i=1}^{N}X_i$.

Это есть *математическое описание* бескоалиционной игры.

ЗАМЕЧАНИЕ Суть игры: игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают свои стратегии x_i, в результате чего формируется ситуация $x=(x_1,...,x_N)$. По ней вычисляются выигрыши игроков по формулам $H_i(x)$. На этом игра заканчивается.

Опр. Игра называется ***конечной***, если конечны все множества (чистых) стратегий X_i. Конечная бескоалиционная игра двух игроков называется ***биматричной***.

ЗАМЕЧАНИЕ Если в биматричной игре с матрицей первого игрока $H_1 = A = (a_{ij}) \in M_{mn}$ и матрицей второго $H_2 = B = (b_{ij}) \in M_{mn}$ первый игрок выбрал стратегию i, а второй – стратегию j, то выигрыш первого составит $H_1(i, j) := a_{ij}$, а выигрыш второго - $H_2(i, j) := b_{ij}$

Обозначение. Для ситуации $x := \left(x_1, ..., x_N\right) \in X$ обозначим $x \| x_i'$ ситуацию, которая получается из x заменой стратегии x_i i-го игрока на стратегию x_i'.

Воробьёв Никола́й Никола́евич (1925-1995) - советский и российский математик, специалист в области алгебры, математической логики и теории вероятностей, основатель советской школы в области теории игр. Научный руководитель - А.А.Марков. В 1959г. в журнале "Успехи математических наук" публикуется его работа "Конечные бескоалиционные игры". В 60-х годах им был разработан механизм решения биматричных игр. Впоследствии этот способ приобрел название алгоритма Воробьева-Куна.

Опр. Ситуация $x^0 := \left(x_1^0, ..., x_n^0\right) \in X$ называется ***ситуацией равновесия по Нэшу***, если

$$\forall i \le N \ \ \forall x_i \in X_i \ \ H_i(x^0) \ge H_i(x^0 \| x_i).$$

ВЫВОД Ни один игрок не заинтересован в отклонении от стратегии x_i^0, входящей в ситуацию равновесия по Нэшу $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$.

Опр. Ситуация $x_i^0 \in X_i$ называется ***равновесной для*** i ***-го игрока***, если она входит хотя бы в одну ситуацию равновесия по Нэшу.

Джон Форбс Нэш (1928-2015) - американский математик, работав ший в области теории игр и дифференциальной геометрии. В своих трудах разработал принципы ***управленческой динамики***. Первые концепции теории игр анализировали антагонистические игры, когда есть проигравшие и выигравшие за их счет игроки. Нэш разработал *методы анализа*, в которых *все* участники или выигрывают, или терпят поражение. Эти ситуации получили названия «***равновесие по Нэшу***», или «***некооперативное равновесие***». В этой ситуации стороны используют оптимальную стратегию, что и приводит к созданию устойчивого равновесия. Дж. Нэш показывает, что классический подход к конкуренции А.Смита, когда каждый сам за себя, неоптимален. Более оптимальны стратегии, когда каждый старается сделать лучше для себя, делая лучше для других. Стал одним из ведущих специалистов в области ведения «холодной войны», что подтверждает масштабность задач, которыми занимается теория игр.

Обозначение. $\{H(x)\} := \left\{H_1(x), ..., H_n(x)\right\}$ - множество всех вектор-выигрышей игроков во всевозможных ситуациях $x \in X$.

Опр. Ситуация $\bar{x}$ в бескоалиционной игре Γ называется ***оптимальной по Парето***, если не существует ситуации $x \in X$, для которой имеют место равенства

$$\forall i \in N \;\; H_i(x) \ge H_i(\bar{x}), \qquad \exists i_0 \in N \;\; H_{i_0}(x) > H_{i_0}(\bar{x}).$$

Обозначение. X^P - множество всех ситуаций, оптимальных по Парето.

Сравним понятия ситуации равновесия по Нэшу и оптимальной ситуации по Парето. ЗАМЕЧАНИЕ В первой из них один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить своего выигрыша. Во второй все игроки, действуя совместно, не могут не уменьшая выигрыш каждого увеличить выигрыш хотя бы одного из них.

Вильфредо Парето (1848-1923) –итальянский инженер, экономист и социолог. Один из основоположников теории элит: «в политической жизни есть универсальный закон, согласно котором элита всегда обманывает массы». Разработал теории, названные впоследствии его именем: статистическое Парето-распределение и Парето-оптимум, широко используемые в экономической теории и иных научных дисциплинах . Закон Парето: затраты времени на выполнение плана: 20% труда реализуют 80% результата, но остальные 20% результата требуют 80% общих затрат. «История - это кладбище аристократий».

ПРИМЕР Требуется поделить 100$ между двумя игроками по следующему правилу. Они одовременно называют желаемую сумму. Если числа совпали, то они получают по 50$. Если нет, то игрок, назвавший меньшую сумму, получает её, а второй игрок получает оставшиеся деньги. В этой игре стратегии игроков $X_i = \{1, 2, ..., 100\}$. Определим функции выигрышей на этих стратегиях. $\forall k \le 100 \;\; H_i(k,k) = 50$. Если $k < l$, то $H_1(k,l) = k, \;\; H_2(k,l) = 100 - k$. Если $l < k$, то $H_2(k,l) = l, \;\; H_1(k,l) = 100 - l$. Нетрудно непосредственно проверить, что в этой игре имеются две ситуации равновесия по Нэшу: (50, 50) и (51, 51).

Введем смешанное расширение бескоалиционной игры. Обозначим μ_i произвольную смешанную стратегию i -го игрока (имеющего m_i стратегий), а $\mu_i(x_i)$ - вероятность, которую стратегия μ_i приписывает чистой стратегии $x_i \in X_i$. $\bar{X}_i$ множество всех смешанных стратегий i -го игрока.

Опр. Пусть каждый игрок применяет свою смешанную стратегию. Тогда ***вероятностью появления ситуации*** $x := (x_1, ..., x_N) \in X$ называется произведение вероятностей выборов составляющих её стратегий $\mu := \mu_1(x_1) \times ... \times \mu_N(x_N)$. При этом набор $\mu := (\mu_1, ..., \mu_N)$ называется ***ситуацией в смешанных стратегиях***.

Опр. Ситуация в смешанных стратегиях реализует различные ситуации в чистых стратегиях с некоторыми вероятностями. Поэтому функция выигрыша каждого из игроков есть случайная функция от ситуации. Математическое ожидание этой случайной функции называют ***функцией выигрыша*** i ***-го игрока***

$$K_i(\mu) := \sum_{x \in X} H_i(x)\mu(x) = \sum_{x_1 \in X_1} \dots \sum_{x_N \in X_N} H_i(x_1, \dots, x_N)\mu_1(x_1) \dots \mu_N(x_N), \quad x := (x_1, \dots, x_N) \in X .$$

Опр. Игра $\bar{\Gamma} := (N, \{\bar{X}_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N})$ называется ***смешанным расширением игры*** $\Gamma := (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N})$.

Обозначение $K_i(\mu \,\|\, x_j') := \sum_{x_1 \in X_1} \dots \sum_{x_1 \in X_{j-1}} \sum_{x_{j+1} \in X_{j+1}} \dots \sum_{x_N \in X_N} H_i(x \,\|\, x_j') \prod_{k \neq j} \mu_k(x_k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) $K_i(\mu \,\|\, \mu_j') := \sum_{x_j'} K_i(\mu \,\|\, x_j')\mu_j'(x_j')$.

2) Если для любой чистой стратегии i-го игрока имеет место неравенство $K_j(\mu \,\|\, x_i) \le a$, то для любой смешанной стратегии μ_i' имеет место неравенство $K_j(\mu \,\|\, \mu_j') \le a$.

ТЕОРЕМА 9.5 В любой конечной бескоалиционной игре существует хотя бы одна ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. В частности, пусть $\Gamma(A,B)$ - биматричная $(m \times n)$-игра. Существуют смешанные стратегии $x^0 \in X_1,\ y^0 \in X_2$ первого и второго игроков такие, что пара (x^0, y^0) является ситуацией равновесия по Нэшу.

Перейдем к свойствам оптимальных стратегий.

ТЕОРЕМА 9.6 Ситуация μ^0 в игре $\Gamma := (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N})$ является ситуацией равновесия в смешанных стратегиях тогда и только тогда, когда

$$\forall i \le N \ \ \forall x_i \in X_i \ \ K_i(\mu^0 \,\|\, x_i) \le K_i(\mu^0).$$

ТЕОРЕМА 9.7 Если равновесная стратеги i-го игрока μ_i^0 входит в ситуацию равновесия μ^0 и приписывает положительную вероятность чистой стратегии $x_i \in X_i$: $\mu_i^0(x_i) > 0$, то $K_i(\mu^0 \,\|\, x_i) = K_i(\mu^0)$. В частности, пусть $\Gamma(A,B)$ - биматричная $(m \times n)$-игра, и пусть $(x^0, y^0) \in Z(\Gamma)$ - ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Тогда

$$\forall i \in M_x \ \ \forall j \in N_y \ \ K_1(i, y^0) = K_1(x^0, y^0), \quad K_2(x^0, j) = K_2(x^0, y^0),$$

где M_x (N_y) - спектр смешанной стратегии x (y).

ТЕОРЕМА 9.8 Пусть $\Gamma(A,B)$ - биматричная $(m \times n)$-игра и матрицы A, B не вырождены. Если игра Γ имеет вполне смешанную стратегию равновесия, то эта последняя единственна и вычисляется по формуле

$$x^0 = v_2 u B^{-1}, \ \ y^0 = v_1 A^{-1} u,$$

где $v_1 := \dfrac{1}{uA^{-1}u}$, $v_2 := \dfrac{1}{uB^{-1}u}$. Обратно, если точки $x^0 \ge 0, y^0 \ge 0$ определяются по предыдущей формуле, то пара (x^0, y^0) образует ситуацию равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в игре $\Gamma(A,B)$ с вектором равновесных выигрышей (v_1, v_2).

§ 9.4. Позиционные и конечношаговые игры с полной информацией.

Общие позиционные игры относятся к числу бескоалиционных и делятся на классы: позиционные и динамические игры. Последние в свою очередь делятся на: стохастические игры, рекурсивные игры и игры на выживание.

Опр. ***Позиционная игра*** – игра, имеющая характер развертывающегося в дискретном времени процесса на древовидно упорядоченном множестве (дереве).

Пусть дано дерево $G=(X,F)$, где X - множество вершин, которые назовем ***множеством позиций игры***, F - множество дуг, F_x - множество вершин, смежных вершине x и являющихся концами дуг, начинающихся в x.

X разбито на подмножества $X=\bigcup_{i=1}^{N+1} X_i$, где X_{N+1} - ***множество окончательных позиций***, X_i ***- множество очередности*** i ***-го игрока***, $i=1,2,...,N$ (i *-ый игрок выбирает позицию* (*делает ход*)*, только когда находится в позиции из* X_i). ***Начальная вершина*** x_0 ***дерева*** G принадлежит одному из множеств очередности X_i.

ЗАМЕЧАНИЕ Очевидно, $\forall x\in X_{N+1}\ F_x=\varnothing$.

Опр. На множестве X_{N+1} определены функции $H_1(x),...,H_N(x)$, называемые ***выигрышами соответствующих игроков***.

Опр. Игра начинается с позиции $x_0\in X_{i_1}$. Игрок i_1 выбирает какую-то позицию (вершину) $x_1\in F_{x_0}$. Если $x_1\in X_{i_2}$, то следующим будет игрок i_2 и он тоже выбирает какую-то позицию (вершину) $x_2\in F_{x_1}$. И так далее, пока не достигается окончательная позиция $x_l\in X_{N+1}$. Полученный путь $x_0,x_1,...,x_l$ называется ***партией в игре.***

ЗАМЕЧАНИЕ Путь $x_0,x_1,...,x_l$ однозначно определяет окончательную позицию x_l. Обратно, двигаясь по дугам дерева из этой позиции можно однозначно восстановить партию. Это свойство дерева выделяет ***игры с полной информацией на конечном дереве***.

ПРИМЕР Примером игры с полной информацией являются шахматы, если требовать, чтобы игроки записывали свои ходы. В этом случае партии могут быть различными несмотря на одинаковые окончательные позиции на шахматной доске.

Опр. Однозначное отображение $u_i: X_i\to F$ со свойством $\forall x\in X\ u_i(x)\in F_x$ называется ***стратегией игрока*** i.

Обозначение. U_i - множество всевозможных стратегий i-го игрока.

Опр. Упорядоченный набор $u:=(u_1,...,u_i,...,u_N)$, $u_i\in U_i$, называется ***ситуацией в игре***, а декартово произведение $U:=\prod_{i=1}^{N} U_i$ - ***множеством ситуаций***.

ЗАМЕЧАНИЕ Каждая ситуация $u:=(u_1,...,u_i,...,u_N)$, $u_i\in U_i$, очевидно, однозначно определяет партию в игре, так как первой позицией в любой партии всегда является x_0. Обозначим x_l окончательную позицию этой партии. Тогда на множестве ситуаций

$U := \prod_{i=1}^{N} U_i$ можно определить функции выигрыша игроков по формуле

$$K_i(u_1,...,u_N) := H_i(x_l),\ i = 1,..,N\ .$$

Тем самым получаем следующую игру в нормальной форме $\Gamma := \left\{ N, \{U_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N} \right\}$, где N - множество игроков, U_i - множество стратегий i-го игрока, K_i - функция выигрыша i-го игрока.

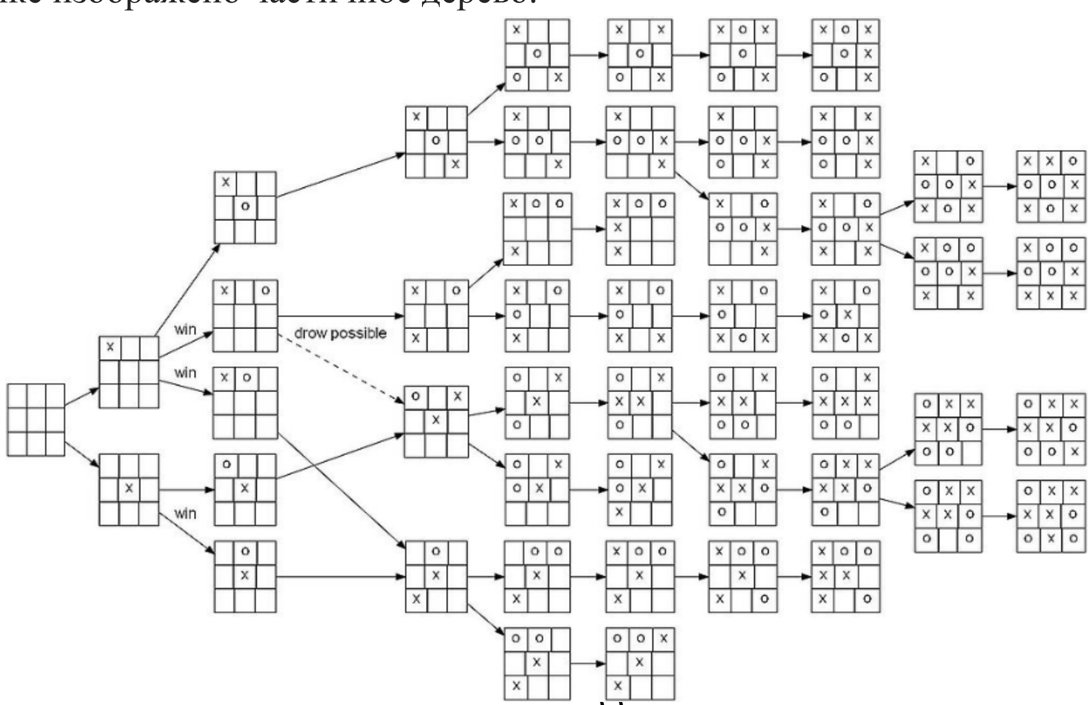
ЗАМЕЧАНИЕ По дереву естественным образом определяется поддерево $G_z = (X_z, F)$ с начальной вершиной в произвольной точке z. Рассуждая как выше, строим подыгру в нормальной форме $\Gamma_z := \left\{ N, \{U_i^z\}_{i\in N}, \{K_i^z\}_{i\in N} \right\}$, где выигрыши K_i^z определены на декартовом произведении $U^z := \prod_{i=1}^{N} U_i^z$.

Опр. Ситуация равновесия по Нэшу $u^* := (u_1^*,...,u_N^*)$ называется ситуацией ***абсолютного равновесии по Нэшу*** в игре $\Gamma := \left\{ N, \{U_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N} \right\}$, если $\forall z \in X$ ситуация $(u^*)^z := \left((u_1^*)^z,...,(u_N^*)^z \right)$, где $(u_i^*)^z$ есть сужение стратегии u_i^* на подыгру Γ_z, является ситуацией равновесия по Нэшу в подыгре Γ_z.

ТЕОРЕМА 9.9 В любой многошаговой игре с полной информацией на конечном дереве существует ситуация абсолютного равновесия по Нэшу.

ПРИМЕР («*крестики-нолики*») Полное число вершин в таком дереве равно 9!=362880. Если учитывать досрочное окончание игры (менее 9 ходов до выигрыша), то их число составит 255 168. При анализе с «карандашом и бумагой» за счет симметричных партий это число можно еще существенно уменьшить. Например, первый игрок, в действитель ности, может сделать не 9, а 3 разных хода. Если он выбирает угловую клетку, то второй игрок может сделать с учетом симметрии не 8, а 5 разных ходов. И так далее.

На рисунке изображено частичное дерево.



ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. 1968.
2. Братищев А.В. Математическая теория управляемых динамических систем. Уч. пособие. ДГТУ, 2015.
3. Нефёдов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. 1992.
4. Глушков В.М. Цифровые автоматы. 1962.
5. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. 1992.
6. Базыкин А.Д., Кузнецов Ю.А., Хибник А.И. Портреты бифуркаций.1989.
7. Зубов В.И. Устойчивость движения. 1973.
8. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного анализа. 2006.
9. Сергеева Н.В., Юдаева Н.В. Задачи по системному анализу. Саратов: издательство «Научная книга», 2001.
10. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. - 432с.
11. Кузнецов А.В., Сахнович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование. Минск. 1994.
12. Петросян Л. А. Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов. - М.: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998. —304 с.
13. Математическая энциклопедия. Т.1-5.
14. Братищев А.В. Руководство к работе с пакетами MATLAB и SIMULINK. Элементы проектирования и анализа. Учеб. пособие. ДГТУ, 2012.
15. Википедия.

СПИСОК ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ

1) Опр. отображений входа и перехода ДС (+ 3 условия).
2) Опр. УДС Σ (по Калману).
3) Опр. свободной и обратимой УДС, дискретной, непрерывной по времени УДС. Пр.
4) Опр. стационарной, конечномерной, линейной и гладкой УДС. Замечание. Пр.
5) Опр. функционального преобразователя, булевой функции и логической формулы.
6) Опр. замыкания множества булевых функций, функционально полной системы и базиса. Пр.
7) Опр. логического элемента, логической и комбинационной схем (КС). Пр.
8) Опр. эквивалентных КС, задач анализа и синтеза КС. Пр.
9) Опр. автомата Мили. Способы задания. Пр.
10) Опр. кодировщика, декодировщика и цифрового автомата. Пр.
11) Опр. автомата Мура. Этапы синтеза автомата.
12) Опр. полных систем переходов и выходов автомата. D- и T-триггеры.
13) Опр. структурно полного набора автоматов и логических элементов. Теорема Глушкова.
14) Опр. канонического метода синтеза автомат и функции возбуждения автомата.
15) Опр. фазового портрета ДС, топологически эквивалентных фазовых портретов и

грубой ДС.
16) Опр. бифуркации, локальной бифуркации. Критические значения параметров ДС и параметрический портрет ДС.
17) Опр. грубого положения равновесия, сепаратрисы и каркаса фазового пространства.
18) Опр. канонических видов ДС, кратного и нейтрального положений равновесия.
19) Качественный характер портрета в случае кратного положения равновесия.
20) Опр. функции последования, ляпуновских величин и качественный характер портрета в случае нейтрального положения равновесия.
21) Функция последования (вывод) в случае нейтрального положения равновесия.
22) Опр. ляпуновской величины и их связь с характером нейтрального положения равновесия. Жесткая и мягкая потеря устойчивости.
23) Постановка и алгоритм решения задачи управления запасами.
24) Опр. дискретного динамического программирования и уравнения состояния.
25) Опр. допустимых процессов, целевой функции и многошаговой задачи оптимизации.
26) Алгоритм построения оптимального управлении и уравнение Беллмана.
27) Опр. системы массового обслуживания, потока требования и рекуррентного потока.
28) Опр. пуссоновского, экспоненциального распределений и функции потерь.
29) Опр. задачи линейного программирования (ЗЛП) и ЗЛП в канонической форме.
30) Опр. допустимого плана, области допустимых планов и оптимального плана.
31) Опр. базисных, свободных переменных и СЛАУ предпочтительного вида.
32) Опр. симплекс-метода и симплексного преобразования.
33) Опр. исследования операций, конфликта и теории игр.
34) Опр. коалиции, коалиционной игры и кооперативной бескоалиционной игр. Пр.
35) Опр. игры в нормальной форме, динамической игры. Пр.
36) Опр. антагонистической игры в нормальной форме, стратегий игроков и ситуаций.
37) Опр. антагонистической игры, игры с нулевой суммой. Пр.
38) Опр. нижней цены игры, максиминной стратегии и максимина. Пр.
39) Опр. верхней цены игры, минимаксной стратегии и минимакса. Пр.
40) Опр. цены игры, седловой точки (ситуации равновесия) и оптимальных стратегий игроков. Пр.
41) Опр. Конечной и матричной игр. Пр.
42) Опр. бескоалиционной игры, множества стратегий и биматричной игры.
43) Опр. ситуации равновесия по Нэшу. Вывод. Опр. ситуации, оптимальной по Парето. Замечание.
44) Опр. смешанного расширения бескоалиционной игры.
45) Опр. позиционной игры с полной информацией на конечном дереве.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПО MATLAB+SIMULINK

Создание S-модели динамической системы с параметрами. Ее бифуркационный анализ. Проектирование синергетического регулятора и создание его S-модели.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИЙ