ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Конспект лекций

по курсу математики первого семестра

Автор

Братищев А.В.

Ростов-на-Дону, 2016

Аннотация

Переработанный конспект лекции для студентов инженерных специальностей автоматиза ции, управления, электротехники, робототехники, системного анализа. Лекции читаются в мультимедийном режиме, поэтому конспект не содержит доказательств, рисунков и примеров. Предполагается, что студент имеет распечатку этого курса, а во время лекции вносит в соответствующие места распечатки (на обратной стороне листа) доказательства, рисунки, примеры, а также выделяет ключевые слова определений. В процессе освоения курса должна быть выучена большая часть букв греческого алфавита, которые, как видно из таблицы, понадобятся также в последующих дисциплинах.

Представлен список вопросов к рубежным контролям, список теорем и список типов практических заданий к экзамену.

Автор:

доктор физ.-мат. наук,

профессор кафедры "Прикладная математика"

Братищев А.В.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§ 1.1 Элементы теории множеств.
§ 1.2 Элементы математической логики.

ГЛАВА 2 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 2.1 Системы линейных алгебраических уравнений. Матрицы. Определители.
§ 2.2 Векторное пространство и его свойства. Примеры.
§ 2.3 Лнейные операторы. Евклидово пространство.
§ 2.4 Векторная алгебра в пространстве $\tilde{V}_3$.
§ 2.5 Прямые и плоскости в евклидовых пространствах $\tilde{V}_2, \tilde{V}_3$.
§ 2.6 Алгебраические кривые второго порядка в евклидовой плоскости $\tilde{V}_2$.
§ 2.7 Дальнейшие свойства матриц и классы матриц.
§ § 2.8 Поверхности второг порядка. Движения. Квадратичная форма.
§ 2.9 Линейные операторы и операторные уравнения.

ГЛАВА 3 ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 3.1 Элементы теории множеств и отображений.
§ 3.2 Числовые последовательности и ряды.
§ 3.3 Предел функции. Непрерывные функции.

ГЛАВА 4 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 4.1 Дифференциальное исчисление функций одной переменной.
§ 4.2 Интегральное исчисление функций одной переменной.

ИСТОЧНИКИ

Списки вопросов к рубежным контролям.
Список вопросов к экзамену.
Список теорем к экзамену.
Список типов задач к экзамену.

Греческий алфавит

Название	Буква		Примеры использования
	Заглавная	Прописная	
Альфа	Α	α	углы, угловое ускорение, различные коэффициенты
Бета	Β	β	углы, коэффициенты
Гамма	Γ	γ	деформация сдвига, поверхностное натяжение, кинематическая вязкость
Дельта	Δ	δ	приращение разности, показатель затухания
Эпсилон	Ε	ε	линейная деформация
Дзета	Ζ	ζ	
Эта	Η	η	динамическая вязкость, коэффициент полезного действия
Тета	Θ	θ	углы, температура, объемная деформация
Йота	Ι	ι	
Каппа	Κ	ϰ	сжимаемость
Лямбда	Λ	λ	длина волны, теплопроводность
Мю	Μ	μ	коэффициент Пуассона, коэффициент трения
Ню	Ν	ν	динамическая вязкость
Кси	Ξ	ξ	
Омикрон	Ο	ο	
Пи	Π	π	математическая постоянная
Ро	Ρ	ρ	плотность
Сигма	Σ	σ	нормальное напряжение, среднеквадратичное отклонение, сумма
Тау	Τ	τ	касательное напряжение
Ипсилон	Υ	υ	
Фи	Φ	φ	углы, плотность теплового потока, потенциальная энергия
Хи	Χ	χ	
Пси	Ψ	ψ	угол подъема винтовой резьбы, угол наклона линии зуба (в зубчатой передаче)
Омега	Ω	ω	угловая скорость, телесный угол (ω) электрическое сопротивление (Ω)

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§ 1.1 Элементы теории множеств.

Георг Кантор (1845, Санкт-Петербург - 1918) - немецкий математик . Наиболее известен как создатель теории множеств, ставшей краеугольным камнем в математике. Ввёл понятие взаимно-однозначного соответствия между элементами множеств и понятие мощности множества, дал определения бесконечного и вполне-упорядоченного множеств, доказал, что действительных чисел «больше», чем натуральных. Определил понятия кардинальных и порядковых чисел и их арифметику.

Под множеством будем понимать совокупность элементов, обладающим каким-либо свойством.

Обозначение Множество обозначается прописными латинскими буквами $A, B, X, \ldots$; элементы – строчными латинскими $a, b, x, \ldots$; свойство представляет собой предложение или формулу $P(x)$, содержащие обозначение элемента. Запись $A := \{x : P(x)\}$ читается "A по определению есть множество элементов x, которые обладают свойством $P(x)$.

Пр. Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел $1, 2, \ldots$. Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Множество $\mathbb{Q} := \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ рациональных чисел (дробей). Множество действительных (вещественных) чисел $\mathbb{R}$, которое состоит из множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и множества иррациональных чисел $\mathbb{I}$. Иррациональными являются, например, числа $\sqrt{2} = 1,4241\ldots$, $\pi = 3,14159\ldots$, $e = 2,71828\ldots$.

ЗАМЕЧАНИЕ Действительной число рационально тогда и только тогда, когда оно представимо периодической десятичной дробью.

Пр.

Опр. Множество, не содержащее элементов, называется пустым.

Обозначение ϕ.

Опр. Множество B, все элементы которого принадлежат A, называется подмножеством множества A.

Обозначение Если же B является подмножеством, но не совпадает с A, то $B \subset A$ (Шаудер, 1890).

Пр.

Опр. Множества A, B совпадают, если $A \subseteq B$, $B \subseteq A$. Обозначение $A = B$.

Пр.

Опр. Декартовым произведением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество упорядоченных n-ок элементов

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

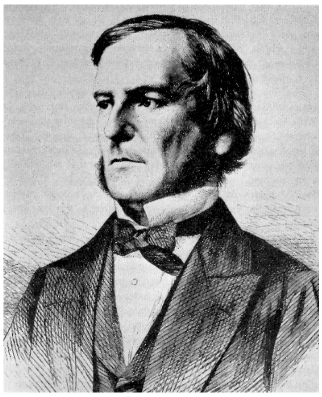
Обозначение Знак $\times$ ввел Оутред, 1631 г.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Если $A_1 = \ldots = A_n =: A$, то $A^n := \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n}$.

Остальные понятия теории множеств будут вводиться по мере необходимости.

§ 1.2 Элементы математической логики.



Джордж Буль (1815—1864) - английский математик и логик. Профессор математики Королевского колледжа Корка с 1849. Один из основателей математической логики. Идеи применения символического метода к логике впервые высказаны им в статье «Математический анализ логики» (1847). Система, представленная в «Исследовании законов мышления» (1854) , образует общий символический метод логического вывода. Буль показал, как из любого числа высказываний, включающих любое число терминов, можно вывести любое заключение, следующее из этих высказываний, путём чисто символических манипуляций.

Опр. Высказывание - предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно.

Пр.

Обозначение. Если нас интересует высказывание безотносительно к его истинности или ложности, то оно обозначается большими латинскими буквами $A, B, \ldots$. Истинное высказывание обозначается 1, а ложное - 0.

Определим 5 операций над высказываниями.

Опр. Отрицанием высказывания A называется высказывание, которое истинно, если A ложно, и наоборот, ложно, если A истинно.

Обозначение $\neg A$ или $\overline{A}$. Читается "неверно, что A".

Истинностная таблица операции отрицания:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Опр. Дизъюнкцией высказываний A, B называется высказывание, которое истинно, когда истинно A или B, или оба вместе.

Обозначение $A \vee B$. Читается "A или B".

Истинностная таблица операции дизъюнкции:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Опр. Конъюнкцией высказываний A, B называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда и A и B истинны.
Обозначение. $A \wedge B$ или просто AB. Читается "A и B".

Истинностная таблица операции конъюнкции:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Опр. Импликацией высказываний A, B называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.
Обозначение. $A \Rightarrow B$. Читается "если A, то B" или "из A следует B.

Истинностная таблица операции импликации:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Опр. Эквиваленцией высказываний A, B называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда A, B оба истинны или оба ложны.
Обозначение $A \Leftrightarrow B$. Читается "A тогда и только тогда, когда B", или "A равносильно B".

Истинностная таблица операции эквиваленции:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Опр. Высказывание, получаемое из какой-либо группы исходных (элементарных, простых) с помощью 5 операций, называется формулой (логической).
ЗАМЕЧАНИЕ Порядок выполнения операций в формуле следующий: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.
Порядок можно задать ил изменить расстановкой скобок.
Пр.

Опр. Переменные, принимающие только два значения 0 или 1, называются двоичными. Функция от n двоичных переменных, принимающая только два значения 0 или 1, называется булевой функцией.
Каждая формула порождает булеву функцию, которая задается истинностной таблицей.
Пр.

Опр. Формулы называются эквивалентным (равносильными), если их булевы функции совпадают.
Обозначение. $A \sim B$.
Пр.

Опр. Теорема, формулируемая в форме высказывания $A \Rightarrow B$ называется прямой. Образованное из нее высказывание $B \Rightarrow A$ - обратной теоремой. Высказывание вида $\neg A \Rightarrow \neg B$ называется противоположной теоремой, а высказывание $\neg B \Rightarrow \neg A$ - теоремой, обратной к противоположной.
Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Прямая теорема равносильна обратной к противоположной; обратная теорема равносильна противоположной. Это следует из совпадения соответствующих таблиц истинности.

Опр. Методом доказательства от противного теоремы $A \Rightarrow B$ называется доказатель ство равносильной ей теоремы $\neg B \Rightarrow \neg A$.
Пр.

Опр. Теорема, формулируемая в форме $A \Leftrightarrow B$, называется критерием.
ЗАМЕЧАНИЕ Так как $(A \Leftrightarrow B) \sim (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, то доказательство критерия равносильно доказательству двух теорем - прямой и обратной.

Готлоб Фреге (1848- 1925) - немецкий логик, математик и философ. Представитель школы аналитической философии.
Ввел понятие логической функции. Первым в явной форме ввел в математическую логику кванторы и систематически использовал их

Рассматривал математические теории как «прикладные» системы логики. Его формальная арифметика была первой формализацией конкретной математической теории.

ЗАМЕЧАНИЕ Математическое понятие обладает определенным объемом в смысле классической логики.

Опр. Понятия, обладающие объемом с числом объектов >1 называются предметными переменными, а их объем называется областью определения предметной переменной. Конкретные значения (реализации, интерпретации, примеры) этих понятий, а также имена собственные называются предметными постоянными. Предметные постоянные и предметные переменные называются термами.
Пр.

Опр. Предложение, содержащее термы, называется высказывательной функцией (предикатом), если оно становится высказыванием всякий раз, когда входящие в него предметные переменные принимают конкретные значения.
Пр.

Subjectum от *лат.* подлежащее. Predicutum от *лат.* сказуемое.

Опр. Предикат называется n-местным, если он содержит n предметных переменных. Обозначение $P(X_1, ..., X_n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 0-местный предикат естественно считать высказыванием.

Опр. Областью определения предиката называется множеств D n-ок значений $(x_1,...,x_n)$, которые могут принимать предметные переменные $X_1,...,X_n$.

Пр.

Опр. Квантором общности называется операция перехода от n- местного предиката $P(X_1,...,X_n)$ к $(n-1)$-местному предикату, которая читается так: "для каждого $x_k \in D_k$ имеет место $P(X_1, ..., x_k, ..., X_n)$".

Обозначение $\forall x_k \in D_k\ P(X_1, ..., x_k,.., X_n)$.

Опр. Переменная X_k предиката $P(X_1, ..., X_n)$ называется свободной, а исчезнувшая переменная X_k предиката $\forall x_k \in D_k\ P(X_1, ..., x_k,.., X_n)$ называется связанной.

Пр.

Опр. Квантором существования называется операция перехода от n-местного предиката $P(X_1,...,X_n)$ к $(n-1)$-местному, которая читается так: "для некоторого $x_k \in D_k$ имеет место $P(X_1,...,x_k, ..., X_n)$".

Обозначение $\exists x_k \in D_k\ P(X_1,...,x_k,..,X_n)$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Термин «квантор» - Ч. Пирс, 1885. Обозначение $\exists$ - от перевернутой первой буквы английского слова Exists – существует, а $\forall$ - от первой буквы немецкого слова Alle – все (Пеано, 1892).

ЗАМЕЧАНИЕ Над предикатами можно производить пять логических операций.

Пр.

ГЛАВА 2 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 2.1 Системы линейных алгебраических уравнений. Матрицы. Определители.

Опр. Матрицей размера $m\times n$ называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов.

Обозначение $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix} = \left(a_{ij}\right) = \left\|a_{ij}\right\|.$

ЗАМЕЧАНИЕ Понятие матрицы впервые появилось в середине XIX века в работах Уильяма Гамильтона и Артура Кэли. Термин «матрица» (matrix - *лат.* матка животного) ввел Джеймс Сильвестр в 1850 г.

Пр.

Опр. Матрицы $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ называются равными, $A=B$, если они имеют одинаковые размеры и $\forall i\ \forall j\ \ a_{ij}=b_{ij}$.

Опр. Матрица называется квадратной, если $m=n$.

Опр. Диагональ квадратной матрицы, начинающаяся в левом верхнем, и оканчивающаяся в правом нижнем углу, называется главной; вторая диагональ – неглавная.

Опр. Квадратная матрица называется единичной, если все числа на главной диагонали равны 1, а все числа вне главной диагонали равны 0.

Пр.

Опр. Матрица называется нулевой (нуль-матрица), если все ее элементы равны 0.

Опр. Суммой двух матриц $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ размера $m\times n$ называется матрица

$$A+B:=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}\ldots a_{1n}+b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}+b_{m1}\ldots a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

Пр.

Опр. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число λ называется матрица

$$\lambda A:=\left(\lambda\, a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} \lambda a_{11}\ldots\lambda a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda a_{m1}\ldots\lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Пр.

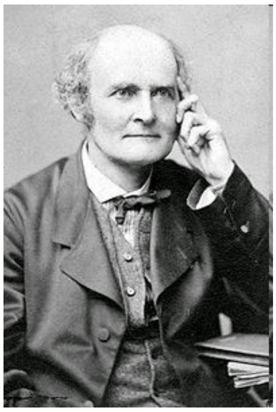
Опр. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ размера $m\times p$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размера $p\times n$ называется матрица $AB:=\left(c_{ij}\right)$ размера $m\times n$, элементы которой вычисляются по правилу

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}.$$

Пр.

Опр. Квадратная матрица $A^{-1}=\left(b_{ij}\right)$ размера $n\times n$ называется обратной к квадратной матрице $A=\left(a_{ij}\right)$ размера $n\times n$, если $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Пр.



А́ртур Кэ́ли (1821-1895) - английский математик. Основные матема тические работы относятся к алгебр, алгебраической геометрии, теории инвариантов. Начал разработку теории матриц: определил сумму, умножение матриц и произведение матрицы на число. Обнаружил ассоциативность и некоммутативность матриц. «Понятие матрицы предшествует идее детерминанта».

Опр.1 Определителем (детерминантом) первого порядка квадратной матрицы $A=(a_{11})$ размера 1×1 называется число $\det A = |A| = |a_{11}| := a_{11}$.

Опр. 2 Определителем n-го порядка квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ размера $n\times n$ называется число
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := a_{i1}{}^{i+1} M_{i1} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} M_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(-1\right)^{i+k} M_{ik},$$
где M_{ik} - определитель $(n-1)$-го порядка матрицы, которая получается вычеркиванием из матрицы A i-той строки и k-го столбца.

ЗАМЕЧАНИЕ Данная формула вычисления называется разложением определителя по i - ой строке. Формула разложения по j - ому столбцу имеет вид
$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\left(-1\right)^{k+j} M_{kj} = a_{1j}\left(-1\right)^{1+j} M_{1j} + \dots + a_{nj}\left(-1\right)^{n+j} M_{nj}.$$
Пр.

ТЕОРЕМА 2.1 (*свойства определителя*)

1) Если в определителе поменялись местами две строки (два столбца), то новый определитель будет отличаться от исходного только знаком.
2) Если элементы одной строки (или столбца) умножить на одно и тоже число λ, то полученный новый определитель будет в λ раз больше исходного.
3) Если к одной строке (столбцу) прибавить поэлементно другую строку (столбец), то полученный новый определитель совпадет с исходным.
4) Пусть два определителя одинакового порядка различаются только одной строкой (столбцом). Тогда их сумма совпадает с определителем, у которого соответствующая строка (столбец) есть сумма строк (столбцов) слагаемых определителей.

Опр. Минором порядка k матрицы A называется определитель матрицы, элементы которой стоят на пересечении каких-либо k строк и k столбцов матрицы A.
Пр.

Опр. Рангом матрицы называется самый большой порядок у не равных нулю миноров этой матрицы.
Обозначение $rang\,A$.
Пр.

Опр. Квадратная матрица A называется невырожденной, если $\det A \neq 0$, то есть когда $rang\,A = n$.
Пр.

Опр. Матрица $A^T = A' := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется транспонированной к матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Пр.

Опр. Число $A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A, а матрица $\left(A_{ij}\right)^T$ - присоединенной матрицей к матрице A.

ЗАМЕЧАНИЕ Если матрица A не вырождена, то существует обратная матрица A^{-1}, которая вычисляется по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\left(A_{ij}\right)^T$.

Пр.

Опр. Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется система уравнений вида $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$, где известные числа a_{ij}, $i = 1, \dots, m$, называются коэффициентами СЛАУ; известные числа $b_1, \dots, b_m$ - свободными членами; неизвестные, искомые числа $x_1, \dots, x_n$ - решением СЛАУ.

Пр.

Обозначения. $A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ - матрица свободных членов; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица неизвестных; $A' := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ - расширенная матрица СЛАУ.

Эти обозначения позволяют записать СЛАУ в матричном виде $A\,X = B$.

Опр. Решить СЛАУ – это значит найти все ее решения.

Опр. СЛАУ называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае СЛАУ несовместна.

Кпр.

Опр. Две СЛАУ одинакового порядка называются эквивалентными, если они обе несовместны или обе совместны и имеют одинаковое множество решений.

ЗАМЕЧАНИЕ СЛАУ переходит в эквивалентную при следующих элементарных преобразованиях:

1) перестановка местами двух уравнений,
2) умножение какого-либо уравнения на неравное нулю число,
3) поэлементное прибавление к одному уравнению другого уравнения.

Опр. СЛАУ называется определенной, если она имеет ровно одно решение и неопределенной, если решений больше одного.

Пр.

ТЕОРЕМА 2.2 (*о разрешимости СЛАУ*)

1) (*критерий Кронекера-Капелли совместности СЛАУ*, 1892*, Доджсон,* 1867) СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы этой СЛАУ равен рангу расширенной матрицы.
2) (*критерий определенности СЛАУ*) Для того чтобы СЛАУ была определенной необходимо и достаточно, чтобы она была совместной и ранг матрицы коэффициентов совпадал с числом неизвестных: $rang\ A = rang\ A' = n.$
3) (*формулы Крамера*) Определенная СЛАУ с помощью элементарных преобразований приводится к СЛАУ, у которой матрица коэффициентов A квадратная и $\det A \neq 0$. В этом случае решение СЛАУ вычисляется по формулам Крамера $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \dots \ , x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, где $\Delta := \det A$, Δ_i -определитель, получаемый из Δ заменой i -ого столбца на столбец свободных членов.

СЛЕДСТВИЕ СЛАУ с $m = n$ будет определенной тогда и только тогда, когда $rang\ A = n$.

Опр. Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие:

1) перестановка двух строк;
2) поэлементное умножение какой-либо строки на неравное нулю число;
3) прибавление к одной строке соответствующих элементов другой строки.

ЗАМЕЧАНИЕ СЛАУ преобразуется в эквивалентную СЛАУ, если ее расширенную матрицу подвергнуть элементарным преобразованиям.

Опр. Методом Гаусса называется метод решения СЛАУ с помощью элементарных преобразований по следующему правилу.

АЛГОРИТМ (*решения СЛАУ методом Гаусса*) Сначала обнуляются все элементы, стоящих ниже главной диагонали последовательно по столбцам, начиная с первого; затем обнуляют элементы над диагональю последовательно по столбцам, начиная с последнего.

Пр.

§ 2.2 Векторное пространство и его свойства. Примеры.

Опр. Векторным (линейным) пространством называется множество E, для элементов которого определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие следующим аксиомам (термин - Банах; аксиомы - Пеано, 1888):

1) $\forall\, x, y \in E \quad x + y = y + x$,

2) $\forall x, y, z \in E \quad (x + y) + z = x + (y + z)$,

3) $\exists\, 0 \quad \forall x \in E \quad 0 + x = x$,

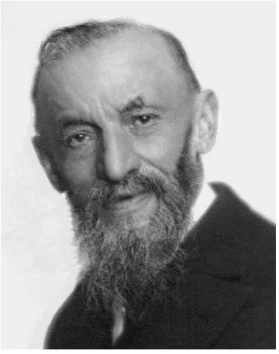
4) $\forall x \in E \ \exists (-x) \in E \quad x + (-x) = 0$,

5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,

6) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

7) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in E \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

8) $\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x$.



Джузеппе Пеано (1858-1932) – итальянский математик. Автор стандартной аксиоматизации натуральной арифметики, в частности, системы аксиом векторного пространства.

Опр. Линейной комбинацией (линейной алгебраической суммой) элементов $e_1, \ldots, e_n \in E$ называется сумма вида $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ - действительные числа, которые называются коэффициентами разложения.

Опр. Элементы $e_1, \ldots, e_n \in E$ называются линейно зависимыми, если существует равная нулю линейная комбинация этих элементов, в которой не все коэффициенты равны нулю. В противном случае элементы называются линейно независимыми.

СЛЕДСТВИЕ Элементы линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них представим в виде линейной комбинации остальных.

Пр.

Опр. Последовательность элементов $e_1, \ldots, e_n \in E$ называется полной (базисом) в векторном пространстве E, если каждый элемент из E (единственным образом) представим в виде линейной комбинации этих элементов.

Пр.

ТЕОРЕМА 2.3 (*свойства базиса*) 1) Последовательность $e_1, \ldots, e_n \in E$ является базисом в векторном пространстве тогда и только тогда, когда элементы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы и каждый элемент из E представим в виде их линейной комбинации.

2) Базисы в векторном пространстве имеют одинаковое число элементов.

Опр. Если в векторном пространстве существует базис, то число элементов n этого базиса называется размерностью пространства E, а пространство называется n- мерным.

Обозначение. $\dim E := n$.

Опр. Векторное пространство E называется бесконечномерным, если в нём не существует базис с конечным числом элементов.

Пр.

Опр. Декартовым произведением векторных пространств E и F называется декартово произведение соответствующих множеств $E \times F := X\{x, y\}:\ x \in E,\ y \in F$, на котором определены операции сложения элементов и умножения их на число по правилу:

$$\{x_1, y_1\} + \{x_2, y_2\} := \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}, \quad \lambda\{x, y\} := \{\lambda x, \lambda y\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Введенные операции на декартовом произведении удовлетворяют 8 аксиомам.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Аналогично определяются декартовы произведения n пространств $E_1 \times ... \times E_n$ и $E^n := \underbrace{E \times ... \times E}_{n}$.

Пр.

Дадим 5 развернутых важных примеров векторных пространств.

ПРИМЕР 1 Пространство векторов с общим началом V_3 (vehere от *лат*. нести).

ЗАМЕЧАНИЕ Развитые операции с векторами опубликовал Гамильтон (1840-ые) как часть своего кватернионного исчисления (вектор образовывали мнимые компоненты кватерниона). Он же предложил термин вектор (vector от *лат.* несущий). Максвелл использовал этот формализм в работах по электромагнетизму, тем самым обратив внимание учёных на новое исчисление. В 1880-ых г.г. вышли «Элементы векторного анализа» Гиббса. Хэвисайд (1903) придал векторному анализу современный вид.

ПРИМЕР 2 Пространство комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Опр. Символ вида $i = \sqrt{-1}$, обладающий свойством $i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} := -1$, называется мнимой единицей.

Опр. Выражение вида $a + bi = a + b\sqrt{-1}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, называется комплексным числом (в алгебраической форме).

Обозначение Комплексное число традиционно обозначается буквой $z := a + bi$; множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Пр.

Опр. Вещественное число a называется действительной частью комплексного числа $z := a + bi$, а вещественное число b называется коэффициентом мнимой части bi комплексного числа.

Обозначение $\operatorname{Re} z := a$, $\operatorname{Im} z := b$.

Опр. Комплексные числа $z_1 := a_1 + b_1 i$, $z_2 := a_2 + b_2 i$, называются равными, если равны их действительные и мнимые части: $z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$.

Опр. Число вида $0 + 0i$ называется нулём (комплексным) и кратко обозначается 0.

Вместо $a + 0i$ обычно пишут просто a.

Опр. Суммой комплексных чисел $z_1 := a_1 + b_1 i$, $z_2 := a_2 + b_2 i$ называется комплексное

число $z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.
Пр.
Следующее определение несколько более общее, чем требуется в примере 2.

Опр. Произведением комплексных чисел $z_1 := a_1 + b_1 i$, $z_2 := a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $z_1 z_2 := (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.
Пр.
ЗАМЕЧАНИЕ 1 Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ удовлетворяет аксиомам 1) - 8) векторного пространства относительно операций сложения и умножения на действительной число.
ЗАМЕЧАНИЕ 2 Вещественная и мнимая единицы 1, i образуют базис в $\mathbb{C}$. Поэтому $\dim \mathbb{C} = 2$.
ЗАМЕЧАНИЕ 3 В определении векторного пространство элементы умножаются на действительные числа. Аналогично определяется векторное пространство, в котором элементы умножаются на комплексные числа. В этом случае говорят о векторном пространстве над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ (комплексном пространстве).

ПРИМЕР 3 Пространство $M_{m,n}$ матриц размера $m \times n$.
Пр. Проверим для множества $M_{m,n}$, например, четвертую аксиому: матрица
$$-A := \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{m,n} \end{pmatrix}$$ является противоположной к матрице $A = (a_{ij})$.

Действительно, $A + (-A) = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{11} & \dots & a_{1n} - a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - a_{m1} & \dots & a_{m,n} - a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ - нуль-матрица.

ЗАМЕЧАНИЕ Попарно различные матрицы размера $m \times n$ в количестве $m \cdot n$ штук, у каждой из которых один элемент равен 1, а остальные равны 0, образуют базис в пространстве $M_{m,n}$.
Пр.

ПРИМЕР 4 Пространство P_n многочленов степени $\le n$.

Опр. Многочленом степени $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ называется функция вида $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, где $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (или $\in \mathbb{C}$) – коэффициенты многочлена, причем $a_n \neq 0$. То есть многочлен является линейной комбинацией степеней $1 := x^0, x, ,\dots, x^n$

Опр. Многочлены $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$ называются равными, если у них совпадают коэффициенты при одинаковых степенях $\forall k \le n \ a_k = b_k$

Опр. Многочлен $0 + 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^n$ называется нулевым (нулем в пространстве) P_n и обозначается 0.

Опр. Суммой многочленов $p(x), q(x) \in P_n$ называется многочлен

$$[p+q](x) := (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+...+(a_n+b_n)x^n .$$

Опр. Произведением числа $\lambda \in \mathbb{R}$ на многочлен $p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ называется многочлен $[\lambda p](x)=\lambda a_0+\lambda a_1x+...+\lambda a_nx^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Множество P_n удовлетворяет аксиомам 1) - 8), и потому является векторным пространством.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Последовательность многочленов $1, x, ,..., x^n$ является базисом в P_n. Поэтому $\dim P_n = n+1$.

ПРИМЕР 5 Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n := \{\{a_1,...,a_n\}:\ a_1,...,a_n \in \mathbb{R}\}$ - множество упорядоченных n-ок действительных чисел.

Опр. Две n-ки $\{a_1,...,a_n\}$, $\{b_1,...,b_n\}$ называются равными, если числа, стоящие на одинаковых местах, совпадают: $\forall\, 1 \le k \le n \quad a_k = b_k$.

Опр. Нулём в $\mathbb{R}^n$ называется n - ка вида $\{0,...,0\}$.

Опр. Суммой двух n-ок $a=\{a_1,...,a_n\}$, $b=\{b_1,...,b_n\}$ называется n - ка $a+b:=\{a_1+b_1,...,a_n+b_n\}$

Пр.

Опр. Произведением числа λ на n-ку $a=\{a_1,...,a_n\}$ называется n-ка $\lambda a:=\{\lambda a_1,...,\lambda a_n\}$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Множество $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет аксиомам 1) - 8) и потому является векторным пространством.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Элементы $e_1 := \{1,0,...,0\}, \quad e_2 := \{0,1,0,...,0\},...,e_n := \{0,...0,1\}$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$. $\Rightarrow \dim \mathbb{R}^n = n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3 Множества чисел $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ не являются векторными пространствами.

§ 2.3 Линейные операторы. Евклидово пространство.

Опр. Отображением множества A в множество B называется правило, сопоставляю щее каждому элементу из A один элемент из B. В случае $B=A$ отображение называется преобразованием.

Обозначение. Правило обозначается латинскими буквами. Например, $F: A \to B$.

Пр.

Опр. Множество A называется областью определения отображения F; множество B - областью значений отображения; множество $F(A) := \{y \in B : \exists x \in A \ \ y = F(x)\}$ - множеством значений (образом отображения) F.

Пр.

Опр. Отображение L из векторного пространства E в векторное пространство F

называется линейным оператором (отображением), если

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall a, b \in E \quad L(\alpha a + \beta b) = \alpha La + \beta Lb$$

ЗАМЕЧАНИЕ Operator от *лат.* работник. Термин ввел Кармайкл,1855.
Линейный оператор - Хевисайд,1881.
Пр.

Опр. Линейный оператор $L: E \to F$ называется изоморфизмом векторных пространств E и F, если он переводит разные элементы в разные: $\forall x_1, x_2 \in E \ (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (Lx_1 \neq Lx_2)$, и каждый элемент из F является образом некоторого элемента из E: $\forall y \in F \ \exists x \in E \ \ Lx = y$
При этом пространства E, F называются изоморфными.
Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Это понятие позволяет формулировать результаты для векторного пространства на языке изоморфного ему пространства. Иногда это оказывается удобным.

Опр. Линейный оператор из E в $\mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ называется линейной формой (линейным функционалом).
Пр.

Опр. Отображение $F(x_1,...,x_n)$ из векторного пространства E^n в векторное пространство F называется n- линейным (полилинейным) отображением, если оно является линейным отображением из E в F по каждой переменной x_k, $k = 1,..,n$, при фиксированных остальных.

Опр. n- линейное отображение из E^n в $\mathbb{R}$ называется n- линейной (полилинейной) формой.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 - линейное отображение $F(x_1, x_2): E^2 \to F$ принято называть билинейным отображением .

Опр. Билинейная форма $B(x, y): E^2 \to \mathbb{R}$ называется скалярным произведением на векторном пространстве E, если она обладает свойствами:

1) $\forall x, y \in E \quad B(y, x) = B(x, y)$;
2) $\left(\forall y \in E \ \ B(x, y) = 0\right) \Rightarrow \left(x = 0\right)$;
3) $\forall x \neq 0 \quad B(x, x) > 0$.

Обозначение. $\left\langle x, y \right\rangle = (x, y) := B(x, y)$. Слово scale (*лат.* ступенька) ввел Виет. Термины «скалярное произведение», «векторное прозведение» ввел Хевисайд (1885).
Пр.

Уи́льям Ро́уэн Га́мильтон (1805 -1865) - ирландский математик и физик. Основные работы посвящены математической оптике, механике, вариационному исчислению.

Разрабатывал теорию комплексных чисел. Идею комплексных чисел распространил на пространство, определив четыре единицы: 1, i, j, k. *Ввел понятие* кватерниона, *термин* вектор**.**

Г. ввел (1846) скалярное произведение как скалярную часть и векторное произведение как векторную часть произведения двух кватернионов.

Опр. Отображение $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}$, называется нормой, если оно обладает свойствами:

1) $\forall x \neq 0 \ \ \|x\| > 0$; 2) $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$; 3) $\forall x, y \in E \ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Понятие нормы, как нетрудно заметить по свойствам, обобщает понятие длины вектора в V_3 (norma – *лат.* мера. Термин ввел Гаусс, 1831).

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Каждое скалярное произведение $\langle x, y\rangle : E^2 \to \mathbb{R}$ порождает норму в E по правилу $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

СЛЕДСТВИЕ Естественное скалярное произведение в $\tilde{\mathbb{R}}^n$ обладает свойством:

$$\forall \{x_1,\dots,x_n\},\ \{y_1,\dots,y_n\} \quad |x_1y_1 + \dots + x_ny_n| \leq \left|x_1^2 + \dots + x_n^2\right| \left|y_1^2 + \dots + y_n^2\right|.$$

Опр. n-мерным евклидовым (точечным) пространством называется тройка объектов:

1) n-мерное векторное пространство E,
2) какое-либо скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ на нём,
3) множество “точек” P, которое согласовано с векторами из E следующим образом:

а) каждой упорядоченной паре точек $A, B \subset P$ поставлен в соответствие один элемент $x \subset E$, который обозначают $x = \overline{AB}$;

б) $\forall x \in E \quad \forall A \in P$ существует единственная точка B со свойством $x = \overline{AB}$;

в) $\forall A, B, C \in P \quad \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Обозначение $\widetilde{E} = \widetilde{E}_n = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle, P)$.

Опр. Расстоянием между двумя точками $M_1, M_2 \in P$ называется число

$\rho(M_1, M_2) := \sqrt{\langle \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_2} \rangle} = \|\overline{M_1M_2}\|$.

Опр. $n-$мерным аффинным пространством называется пара (E, P) со свойствами 1)-3)

Опр. $n-$мерным евклидовым векторным пространством называется пара $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Опр. n- мерным арифметическим евклидовым пространством $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ называется тройка объектов: арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$, естественное скалярное произведение $\langle x, y\rangle := x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ и множество ”точек” $P := \{(x_1,\dots,x_n) : x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}\}$. При этом точки

$A=(x_1,...,x_n)$, $B(y_1,...,y_n)\in\tilde{\mathbb{R}}^n$ свяжем с вектором из $\mathbb{R}^n$ по правилу $\overline{AB}=\{y_1-x_1,...,y_n-x_n\}$. Тогда расстояние между точками $A=(x_1,...,x_n)$, $B=(y_1,...,y_n)\in\tilde{\mathbb{R}}^n$ вычисляется по формуле

$$\rho(A,B):=\sqrt{\left\langle\overline{AB},\overline{AB}\right\rangle}=\sqrt{(y_1-x_1)^2+...+(y_n-x_n)^2}\ .$$

Опр. В $n-$мерном евклидовом пространстве $\tilde{E}$ совокупность каких-либо точки $O\in P$ и базиса $e_1,...,e_n\in E$ называется декартовой системой координат (ДСК).
Пр.

Опр. Символом Кронекера называется отображение $\delta_{i\,j}:\mathbb{N}^2\to\{0,1\}$, определяемое по правилу $\delta_{i\,j}:=1$, если $i=j$ и $\delta_{ij}:=0$, если $i\neq j$.

Опр. Базис называется ортонормированным, если $\forall\, i,j\le n\ \left\langle e_i,e_j\right\rangle=\delta_{ij}$.

ЗАМЕЧАНИЕ Элементы e_i такого базиса попарно перпендикулярны: $\forall\, i\neq j\ \left\langle e_i,e_j\right\rangle=0$ и их нормы равны единице: $\forall i\le n\ \|e_i\|==\sqrt{\left\langle e_i,e_i\right\rangle}=1$. Здесь аналогия со школой, когда равенство нулю скалярного произведения означало ортогональность векторов, а квадрат модуля вектора совпадал со скалярным произведением вектора на себя.

Опр. ДСК, в которой выделенный базис является ортонормированным, называется прямоугольной декартовой системой координат (ПДСК).

ЗАМЕЧАНИЕ Всюду ниже ДСК предполагается прямоугольной, если не оговорено противное.

Опр. Коэффициенты разложения элемента $a\in E$ по базису $e_1,...,e_n$: $a=x_1e_1+...+x_ne_n$, называются, как и ранее, координатами (компонентами) вектора a в базисе $e_1,...,e_n$.
Обозначение. $a=\{x_1,...,x_n\}$. Это обозначение объясняется изоморфизмом между пространствами E и $\mathbb{R}^n$, устанавливаемым линейным оператором $La:=\{x_1,...,x_n\}$, где $a=x_1e_1+...+x_ne_n$.

Опр. Радиусом-вектором точки M и ПДСК называется вектор $\overline{OM}$.

Опр. Координатами точки $M\in P$ в ПДСК называются компоненты её радиуса-вектора $\overline{OM}$.

Обозначение. Если $\overline{OM}=x_1e_1+...+x_ne_n$, то $M=(x_1,...,x_n)=M(x_1,...,x_n)$.

Опр. Пусть дана матрица $A=(a_{ij})$ размера $(n-k)\times n$, $rang\,A=n-k$ и последователь ность чисел $b_1,...,b_{n-k}\in\mathbb{R}$. k-мерной плоскостью в n-мерном евклидовом пространстве $\tilde{E}$ с фиксированной ПДСК называется множество точек $A(x_1,...,x_n)$, координаты которых удовлетворяют СЛАУ $\begin{cases}a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=b_1\\ \quad ...\\ a_{n-k\,1}x_1+...+a_{n-k\,n}x_n=b_{n-k}\end{cases}$.

Пр.

Опр. Прямой в $\tilde{E}$ называется 1-плоскость.
Пр.

Опр. Полярной системой координат в $\tilde{V}_2$ называется совокупность точки O (-полюс) и луча с началом в этой точке (- полярная ось).
Рис.
Опр. Полярными координатами точки M называется пара чисел (ρ,φ), где $\rho=\left|\overline{OM}\right|$, φ - угол между полярной осью и вектором $\overline{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки
ЗАМЕЧАНИЕ 1 Термин «полюс» - Монж, 1802. Термин «полярная ось» - Магнус,1833. Термин «полярные координаты» – Ламе, 1854.
ЗАМЕЧАНИЕ 2 Каждая точка евклидовой плоскости $\tilde{V}_2$ вполне определяется заданием полярных координат.
ЗАМЕЧАНИЕ 3 Совместим прямоугольную декартову и полярную системы координат так, чтобы начало координат совпадало с полюсом, а ось OX - с полярной осью Тогда декартовы координаты (x,y) точки M и ее полярные координаты связаны равенствами

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi=arctg\,\dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad \text{(Эйлер,1748).}$$

Пр.

Опр. В $\tilde{V}_3$ с ПДСК фиксируем точку $M(x,y,z)$. Тройка чисел (ρ,ψ,φ), где $0\le\psi\le\pi$, $0\le\varphi<2\pi,\quad \rho\ge 0$, называется сферическими координатами точки M.
Рис.
ЗАМЕЧАНИЕ 1 Каждая точка $\tilde{V}_3$ вполне определяется своими сферическими координатами.
ЗАМЕЧАНИЕ 2 Так как $OM'=\rho\sin\varphi$, то декартовы и сферические координаты точки M связаны равенствами

$$\begin{cases} x=\rho\cdot\sin\psi\cdot\cos\varphi \\ y=\rho\cdot\sin\psi\cdot\sin\varphi \\ z=\rho\cdot\cos\psi \end{cases} \quad \text{(Лагранж, 1773).}$$

Пр.

Опр. В $\tilde{V}_3$ с ПДСК фиксируем точку $M(x,y,z)$. Тройка чисел (r,ψ,z), где $z\in\mathbb{R},\ 0\le\varphi<2\pi,\ r\ge 0$ называется цилиндрическими координатами точки M.
Рис.
ЗАМЕЧАНИЕ 1 Каждая точка M вполне определяется своими цилиндрическими координатами.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 В ПДСК декартовы и цилиндрические координаты точки M связаны равенствами: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$ (Ламе, 1828).

Пр.

§ 2.4 Векторная алгебра в пространстве $\tilde{V}_3$.

Опр. Пусть даны ось l ($\equiv$направленная прямая) и вектор $\overline{a}$. Опустим перпендикуляры из его концов на ось. Проекцией вектора $\overline{a}$ на ось l называется расстояние между основаниями этих перпендикуляров, взятое со знаком "+", если $0\le\widehat{l\,\overline{a}}<\frac{\pi}{2}$, со знаком "-", если $\frac{\pi}{2}<\widehat{l\,\overline{a}}\le\pi$ и равное нулю, если $\overline{a}\perp l$. Правило, сопоставляющее каждому вектору его проекцию на ось, называется операцией проектирования.

Обозначение. $\text{пр}_l\overline{a}$.

ЗАМЕЧАНИЕ Projectio от *лат*. бросание вперед; термин вел Фейрич, 1820.

ТЕОРЕМА 2.4 (*свойства проекции*)

1) $\text{пр}_l\overline{a}=a\cos\widehat{l\,\overline{a}}$. 2) $\forall\overline{a},\overline{b}\in\tilde{V}_3$ $\text{пр}_l(\overline{a}+\overline{b})=\text{пр}_l\overline{a}+\text{пр}_l\overline{b}$.

3) $\forall\overline{a}\in\tilde{V}_3\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\text{пр}_l\alpha\overline{a}=\alpha\ \text{пр}_l\overline{a}$, то есть операция проектирования является линейным функционалом.

4) Фиксируем ПДСК в $\tilde{V}_3$. Тогда проекции вектора на оси координат OX, OY, OZ совпадают с компонентами этого вектора в базисе $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$: если $\overline{a}=\{x,y,z\}$, то $x=\text{пр}_i\overline{a}$, $y=\text{пр}_j\overline{a}$, $z=\text{пр}_k\overline{a}$;

5) Косинусы $\cos\widehat{i\,\overline{a}}$, $\cos\widehat{j\,\overline{a}}$, $\cos\widehat{k\,\overline{a}}$ называются направляющими косинусами вектора $\overline{a}$ и связаны равенством $\cos^2\widehat{\overline{i}\,\overline{a}}+\cos^2\widehat{\overline{j}\,\overline{a}}+\cos^2\widehat{\overline{k}\,\overline{a}}=1$.

СЛЕДСТВИЕ Скалярное произведение векторов связано с операцией проектирования равенством $(\overline{a},\overline{b}):=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\widehat{\overline{a}\overline{b}}=|\overline{a}|np_{\overline{a}}\overline{b}=|\overline{b}|np_{\overline{b}}\overline{a}$.

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть точка $C(x,y,z)$ делит отрезок AB с концами в точках $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ в отношении $\frac{AC}{CB}=\frac{\lambda}{\mu}$. Тогда координаты C вычисляются по формулам

$$x=\frac{\mu x_1+\lambda x_2}{\lambda+\mu},\quad y=\frac{\mu y_1+yx_2}{\lambda+\mu},\quad z=\frac{\mu z_1+\lambda z_2}{\lambda+\mu}.$$

ТЕОРЕМА 2.5 (*свойства скалярного произведения*)

1) $\overline{a}\,\overline{a}=a^2$. 2) $\overline{a}\,\overline{b}=0\ \Leftrightarrow\ (\overline{a}=0)\vee(\overline{b}=0)\vee(\overline{a}\perp\overline{b})$. 3) $\overline{a}\overline{b}=\overline{b}\overline{a}$.

4) Скалярное произведение является билинейной формой на V_3^2.

5) Если в ПДСК $\overline{a}=\{x_1,y_1,z_1\}, \overline{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, то $\overline{a}\,\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Опр. (*физический смысл скалярного произведения*) Работой постоянной силы $\overline{F}$ по перемещению материальной точки из начала в конец вектора $\overline{s}$ называется величина $A:=\overline{F}\cdot\overline{s}$.

Опр. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ с общим началом называется правой (левой), если из конца вектора $\overline{c}$ движение от $\overline{a}$ к $\overline{b}$ по кратчайшему из двух углов происходит против (по) часовой стрелки(е).

Опр. Векторным произведением векторов $\overline{a},\overline{b}$ называется вектор $\overline{0}$, если $(\overline{a}=0)\vee(\overline{b}=0)\vee(\overline{a}\parallel\overline{b})$. В противном случае векторным произведением $\overline{a},\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, который вполне определяется свойствами: 1) $\left|\overline{c}\right|=a\cdot b\cdot\sin\widehat{\overline{a}\overline{b}}$; 2) $\overline{c}\perp\overline{a},\overline{b}$; 3) $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ - правая тройка векторов (Хевисайд, 1885).

Опр. Смешанным произведением трех векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ называется число

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}:=([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 (*геометрический смысл модуля*) 1) $|[\overline{a},\overline{b}]|$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b}$ как на сторонах. 2) $|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}|$ численно равен объему призмы, построенной на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ как на ребрах

$$|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}|=|[\overline{a},\overline{b}]|\cdot|\overline{c}|\cdot|\cos(\widehat{[\overline{a}\,\overline{b}]\overline{c}})|=S_{пар}\cdot h=V_{приз}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2 $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a}=\overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b}=-\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}=-\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b}=-\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}$.

ТЕОРЕМА 2.6 (*свойства векторного произведения*)

1) Векторное произведение является билинейным отображением из V_3^2 в V_3.

2) Если $\overline{a}=\{x_1,y_1,z_1\}, \overline{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, то $\left[\overline{a},\overline{b}\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$.

СЛЕДСТВИЕ Ненулевые векторы $\overline{a}=\{x_1,y_1,z_1\}, \overline{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ параллельны тогда и только тогда, когда $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

Векторное произведение имеет до десятка физических смыслов. Приведем наиболее характерные.

Опр. (*физический смысл векторного произведения*). Моментом относительно точки A силы $\overline{F_B}$, приложенной к точке B, называется вектор $M_A[\overline{F}_B]:=[\overline{AB},\overline{F}_B]$.

Опр. (*физический смысл векторного произведения*) Пусть материальная точка A

вращается по окружности (с центром O) с линейной скоростью $\bar{V}_A$. Вектором угловой скорости вращения этой точки относительно цента O называется расположенный на оси вращения вектор $\bar{\omega}$, определяемый равенством $\bar{V}_A = [\bar{\omega}, \bar{r}]$. Это равенство называется *формулой Эйлера*.

ТЕОРЕМА 2.7 (*свойства смешанного произведения*)

1) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \Leftrightarrow (\bar{a} = \bar{0}) \vee (\bar{b} = 0) \vee (\bar{c} = 0) \vee$ (векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны)

2) Смешанное произведение является 3– линейной формой: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}: V_3^3 \to \mathbb{R}$.

3) Если $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\bar{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$, то $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

§ 2.5 Прямые и плоскости в евклидовых пространствах $\tilde{V}_2, \tilde{V}_3$.

Рене Декарт (Картезий, 1596-1650) –французский философ, математик, механик, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии, современной алгебраической символики. В работе «Рассуждение о методе, позволяющем направлять свой разум и отыскивать истину в науках» (1637) переработана математическая символика Виета в близкую к современной. Коэффициенты он обозначал a, b, c…, а неизвестные - x,y, z. Натуральный показатель степени принял современный вид. Появилась черта над подкоренным выражением. Уравнения приводятся к канонической форме (в правой части - ноль). Предложил классификацию алгебраических кривых. Новый способ задания кривой - с помощью уравнения - был решающим шагом к понятию функции.

Напомним, что плоскостью $\mathcal{L}$ (2 - плоскостью) в $\tilde{V}_3$ с фиксированной ПДСК называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Опр. Вектором нормали к плоскости называется вектор, перпендикулярный любому вектору, начало и конец которого лежат в этой плоскости.

Опр. Углом между плоскостями называется угол между их векторами нормалей. В зависимости от выбранных векторов нормалей этот угол имеет два значения.

ТЕОРЕМА 2.8 (*свойства плоскости*) Пусть заданы 3 плоскости

$$\mathcal{L}_i: A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \quad i = 1,2,3; \; A := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \quad A' := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1) $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2} \quad \Leftrightarrow \quad rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=1$.

2) $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2} \quad \Leftrightarrow \quad rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}=1$.

3) Плоскости $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $rang\ A=3 \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0$.

4) плоскости $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ пересекаются по одной прямой тогда и только тогда, когда $rangA = rangA' = 2$.

5) $\cos \widehat{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2} = \dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

6) Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $\mathcal{L}_1$ вычисляется по формуле

$$\rho(M_0,\mathcal{L}_1)=\frac{|A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}.$$

Опр. Пусть векторы $\bar{a}:=\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\}$, $\bar{b}:=\{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\}$ не коллинеарны, и задана точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Формула $\begin{cases} x=\alpha_1u+\alpha_2v+x_0 \\ y=\beta_1u+\beta_2v+y_0, \quad u,v\in\mathbb{R} \\ z=\gamma_1u+\gamma_2v+z_0 \end{cases}$, определяющая множество точек с координатами (x,y,z) в $\tilde{V}_3$, называется параметрическим уравнением плоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ а) Если плоскость задана параметрическим уравнением, то ее общее уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}(z-z_0)=0$.

б) Если плоскость задана уравнением $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ и для определенности $A\neq 0$, то ее параметрическое уравнение можно задать, например, в виде

$$\begin{cases} x=-\dfrac{B}{A}u-\dfrac{C}{A}v+x_0 \\ y=u+y_0 \\ z=v+z_0 \end{cases}, \quad u,v\in\mathbb{R}.$$

Следующее замечание доказывается аналогично теореме.

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть в какой-либо ПДСК в евклидовой плоскости $\tilde{V}_2$ заданы две прямые l_1, l_2 уравнениями $A_ix+B_iy+C_i=0,\ i=1,2$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) $l_1 \parallel l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$. 2) $l_1 = l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$. 3) $\cos\widehat{l_1\, l_2}=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

4) Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой l_1 вычисляется по формуле

$$\rho(M_0,l_1)=\frac{|A_1x_0+B_1y_0+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}.$$

____

Опр. Множество точек, координаты которых (x,y,z) удовлетворяют СЛАУ

$$\begin{cases} A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0 \\ A_2(x-x_0)+B_2(y-y_0)+C_2(z-z_0)=0 \end{cases}, \qquad (1)$$

где $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=2$, называется уравнением прямой в $\tilde{V}_3$, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Опр. Пусть даны вектор $\bar{k}=\{m,n,p\}\neq 0$ и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Система уравнений вида

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (2)$$

называется каноническим уравнением прямой (Коши, 1826).

Опр. Формула,

$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0\,, \quad t\in\mathbb{R}, \\ z=pt+z_0 \end{cases} \qquad (3)$$

определяющая множество точек в $\tilde{V}_3$ с координатами (x,y,z), называется параметри ческим уравнением прямой.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Направляющий вектор $\bar{k}$ параллелен любому вектору, начало и конец которого лежат на этой прямой.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Уравнения (1), (2), (3), в которых $m:=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\ n:=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\ p:=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$, задают одну и ту же прямую в $\bar{V}_3$.

Опр. Углом между двумя прямыми называется угол между направляющими векторами этих прямых. Этот угол принимает два значения.

ТЕОРЕМА 2.9 (*свойства прямых*) Пусть даны две прямые $l_i:\dfrac{x-x_0}{m_i}=\dfrac{y-y_0}{n_i}=\dfrac{z-z_0}{p_i},\ i=1,2$ и плоскость $\mathcal{L}: Ax+By+Cz+D=0$. Тогда имеют место утверждения.

1) l_1, l_2 скрещиваются $\Leftrightarrow \quad \det A:=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad rangA=3$.

2) $l_1 \parallel l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2} \quad \Leftrightarrow \quad rang\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{pmatrix} = 1$

3) $l_1 = l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}\right) \wedge \left(\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad rang\, A = 1$.

4) l_1, l_2 пересекаются $\Leftrightarrow \quad rangA = rang\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{pmatrix} = 2$.

5) $\cos\widehat{l_1\, l_2} = \dfrac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{p_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$.

6) Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямой l_1 вычисляется по формуле $\rho(M_0, l_1) = \dfrac{\left|[\overline{M_0 M_1}, \overline{k}_1]\right|}{|\overline{k}_1|}$.

7) Расстояние между двумя прямыми вычисляется по формуле $\rho(l_1, l_2) = \dfrac{\left|(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{M_0 M_1})\right|}{|[\overline{k}_1, \overline{k}_2]|}$.

Приведем без доказательства виды уравнения прямой в евклидовой плоскости $\tilde{V}_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 а) $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n}$, $\quad \overline{k} := \{m, n\}$ - каноническое уравнение прямой на плоскости.

б) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

в) $\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$, $\quad t \in \mathbb{R}$ - параметрическое уравнение прямой.

г) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ - уравнение прямой "в отрезках на осях OX, OY ". Название объясняется тем, что прямая пересекается с осью OX в точке a, а с осью OY - в точке b.

д) $\cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y - p = 0$ - нормальное уравнение прямой, где $\overline{n} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ - единичный вектор нормали к прямой, а $p = \cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y = (\overline{n}, \overline{OM}) = np_{\overline{n}}\overline{OM}$ есть про екция радиусов-векторов точек M прямой на направление вектора нормали.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Основные задачи на прямую в плоскости изложены Лакруа, 1798-1799 г.

§ 2.6 Алгебраические кривые второго порядка в евклидовой плоскости $\tilde{V}_2$.

Опр. Кривой второго порядка в $\tilde{V}_2$ называется множество точек, координаты которых в какой-либо ПДСК удовлетворяют уравнению $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1 x + b_2 y + c = 0$, где $a_{11}, a_{12}, a_{22} \neq 0$ одновременно.

Пр. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ можно задать и в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = R\cos t + x_0 \\ y = R\sin t + y_0 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

в чем нетрудно убедиться подстановкой в предыдущее уравнение.

Опр. Прямая l, проходящая через точку M_0 кривой, называется касательной к кривой в этой точке, если расстояние от переменной точки кривой M до прямой стремится к нулю быстрее, чем расстояние от нее до M_0: $\dfrac{\rho(M,l)}{MM_0} \to 0$, когда $M \to M_0$.

Опр. Эллипс – множество точек в $\tilde{V}_2$, сумма расстояний от каждой и которых до двух заданных точек (фокусов) есть величина постоянная.

Фиксируем ПДСК в $\tilde{V}_2$. Обозначим сумму расстояний до фокусов $2a$, и расположим фокусы на оси OX симметрично относительно начала координат: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. Положим $b := \sqrt{a^2 - c^2}$. Предполагается для определенности $a > b$.

Опр. Эксцентриситетом эллипса называется величина $\varepsilon := \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} \in [0,1]$.

ТЕОРЕМА 2.10 (*свойства эллипса*) 1) Уравнение эллипса (каноническое) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2) (*геометрический смысл эксцентриситета*) Если $\varepsilon \to 0$ при фиксированном a, то эллипс деформируется к окружности $x^2 + y^2 = a^2$. Если $\varepsilon \to 1$, то эллипс деформируется к отрезку $[-a,a]$.

3) Уравнение касательной к эллипсу в точке (x_0, y_0) имеет вид $\dfrac{x_0}{a^2}x + \dfrac{y_0}{b^2}y = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ Отрезки $[-a,0]$, $[0,a] \subset OX$ называются большими полуосями, а отрезки $[-b;0]$, $[0,b] \subset OY$ - малыми полуосями эллипса.

Опр. Прямая l называется асимптотой неограниченной кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой стремится к нулю, когда точка неограниченно удаляется по кривой.

Опр. Гипербола – множество точек в $\tilde{V}_2$, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (фокусов) есть величина постоянная.

Опр. Пусть модуль разности расстояний от текущей точки $M(x,y)$ гиперболы до фокусов $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ равен $2a$: $|MF_1 - MF_2| = 2a$. Эксцентриситетом гиперболы называется величина $\varepsilon := \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} \in (1,\infty)$.

ТЕОРЕМА 2.11 (*свойства гиперболы*)

1) Уравнение гиперболы (каноническое) имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где $b := \sqrt{c^2 - a^2}$.

2) (*геометрический смысл эксцентриситета*) Пусть a фиксировано. Тогда:

а) $\varepsilon \to 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{b}{a} \to 0$, то есть тогда и только тогда, когда асимптоты проворачиваются вокруг начала координат к оси OX. При этом ветви гиперболы сжимаются к полуинтервалам $(-\infty, c], [c, +\infty) \subset OX$, а их фокусы приближаются к вершинам.

б) $\varepsilon \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{b}{a} \to \infty$, то есть тогда и только тогда, когда асимптоты проворачиваются к оси OY. При этом ветви гиперболы разгибаются в вертикальные прямые $x = \pm a$, а фокусы удаляются в бесконечность.

3) Уравнение касательной к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в точке (x_0, y_0) имеет вид $\dfrac{x_0}{a^2} x - \dfrac{y_0}{b^2} y = 1$.

4) Прямые $y = \pm \dfrac{b}{a} x$ являются асимптотами гиперболы при $x \to +\infty, -\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ Отрезки $[-a, 0]$, $[0, a] \subset OX$ называются вещественными полуосями, а отрезки $[-b; 0]$, $[0, b] \subset OY$ - мнимыми полуосями гиперболы. Точки $(\pm a, 0)$ называются вершинами гиперболы.

Опр. Парабола - множество точек в $\tilde{V}_2$, расстояния от которых до заданной точки (фокуса) и до заданной прямой (директрисы) совпадают.

Пусть в какой-либо ПДСК уравнение директрисы $x = -\dfrac{p}{2}$, а координаты фокуса $\left(\dfrac{p}{2}, 0\right), \quad p > 0$.

ТЕОРЕМА 2.12 (*свойства параболы*) 1) Уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$.

2) Точка параболы $(0,0)$ является ближайшей к директрисе и называется вершиной параболы.

3) Уравнение касательной l к параболе $y^2 = 2px$ в точке (x_0, y_0) имеет вид $y_0 y = p(x + x_0)$.

ТЕОРЕМА 2.13 (*классификация кривых второго порядка*)

Уравнение кривой второго порядка с помощью последовательно: преобразования поворота ПДСК вокруг начала координат, последующего сдвига ПДСК на некоторый вектор и, возможно, отражения относительно какой-то из осей координат может быть приведено к одному из простейших видов:

1) каноническому уравнению эллипса, гиперболы, параболы;
2) уравнению пары прямых;
3) уравнению, которому удовлетворяют координаты одной точки;
4) уравнению, которому не удовлетворяют координаты ни одной точки.

§ 2.7 Дальнейшие свойства матриц и классы матриц.

Опр. Квадратная матрица, все элементы которой, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется диагональной.

Пр.

Опр. Матрица A_r называется правой обратной к матрице A, если $AA_r = E$. Матрица A_l называется левой обратной к матрице A, если $A_l A = E$.

Пр.

Опр. Матрица A называется обратимой, если она имеет и правую и левую обратные матрицы.

ТЕОРЕМА 2.14 (*свойства матриц*)

1) Обратимая матрица необходимо является квадратной. При этом ее правая и левая обратные совпадают, и потому существует обратная матрица.
2) Если A, B – квадратные матрицы одного размера, то $\det AB = \det A \det B$.
3) Квадратная матрица A имеет обратную тогда и только тогда, когда она не вырождена.
4) $rang\, A = k$ тогда и только тогда, когда A имеет равно k линейно независимых строк (столбцов), если последние рассматривать как векторы.
5) $rang\, AB \le \min(rang\, A, rang\, B)$.

СЛЕДСТВИЕ 1 Если матрица A не вырождена, то для любой квадратной матрицы B того же размера $rang(AB) = rang(BA) = rangB$.

СЛЕДСТВИЕ 2 Произведение квадратных матриц не вырождено тогда и только тогда, когда не вырождены сомножители. Это следует из равенства $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Опр. Характеристическим многочленом матрицы $A \in M_{n,n}$ называется многочлен n-ой степени $p(\lambda) := \det(\lambda E - A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ В поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ по теореме Гаусса он представим в виде $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_r)^{p_r}$, где λ_i - попарно различные нули $p(\lambda)$ с соответствующими кратностями p_i, и $p_1 + ... + p_r = n$.

Пр.

Опр. Корни характеристического многочлена $p(\lambda)$ называются собственными числами матрицы A.

Пр.

Опр. Для собственного числа λ однородная СЛАУ $(A - \lambda E)X = 0$ является совместной, но неопределенной в силу теоремы. Ее ненулевые решения называются собственными векторами матрицы A.

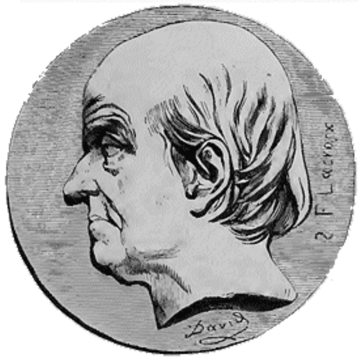
Пр.

Опр. Вещественная квадратная матрица A называется ортогональной, если она обратима и обратная матрица совпадает с сопряженной: $A^{-1} = A^T$.
Пр.

Опр. Квадратная матрица A над называется симметричной, если $A^T = A$.

§ 2.8 Поверхности второго порядка. Движения. Квадратичная форма.

Леона́рд Э́йлер (1707-1783) - швейцарский, немецкий и российский математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук. В первом томе «введение в анализ бесконечно малых» исследовал кривые 2-го, 3-его и 4-ого порядков, и поверхности второго порядка.
Почти полжизни провёл в России, внёс существенный вклад в становление российской науки. Первые русские академики-математики (С. К. Котельников) и астрономы (С. Я. Румовский) были учениками Эйлера.



Сильвестр Лакруа (1765 - 1843) - французский математик. Профессор парижских нормальной и политехнической школ, декан факультета наук. Известен по составленному им курсу дифференциального и интегрального исчисления: «Traité du calcul différentiel et intégral», по которому училось несколько поколений. В «Геометрии» предмет впервые излагается в почти современной форме и порядке. В России учебниками Л. широко пользовались при чтении лекций в университетах.

Опр. Поверхностью второго порядка в $\widetilde{V}_3$ называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0,$$

или в матричной записи $X'AX + BX + c = 0$, где $X := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, а $A = (a_{ij}) \neq 0$ - симметричная матрица.

Опр. Эллипсоидом называется множество точек в $\widetilde{V}_3$ с ПДСК координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (термин «эллипсоид» - Монж, 1801).

Опр. Однополостным гиперболоидом называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Опр. Двуполостным гиперболоидом называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

Опр. Конической поверхностью (конусом) называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Опр. Эллиптическим параболоидом называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ (термин «параболоид» - Монж, 1801).

Опр. Гиперболическим параболоидом (седлом) называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$.

Опр. Эллиптическим цилиндром называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Опр. Гиперболическим цилиндром называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Опр. Параболическим цилиндром называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y^2=2px$.

ЗАМЕЧАНИЕ Уравнением кривой второго порядка можно так же задать:

1) пару плоскостей $(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$;
2) прямую $\alpha^2(x-x_0)^2+\beta^2(y-y_0)^2=0$;
3) точку $\alpha^2(x-x_0)^2+\beta^2(y-y_0)^2+\gamma^2(z-z_0)^2=0$;
4) пустое множество, например, $\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2=-1$, где $\alpha,\beta,\gamma>0$.

ЗАМЕЧАНИЕ Названия кривых второго порядка предложил Монж (начало XIX века).

Опр. Движением n-мерного евклидова пространства $\tilde{E}$ называется преобразование $F:\tilde{E}\to\tilde{E}$, сохраняющее расстояние между любыми двумя точками: $\rho(M_1,M_2)=\rho(F(M_1),F(M_2))$

ЗАМЕЧАНИЕ Движение в $\tilde{E}$ порождает преобразование на множестве векторов по прави лу $\overline{F}\left(\overline{AB}\right):=\overline{F(A)\,F(B)}$. Это преобразование сохраняет длины преобразованных векторов и углы между ними. Последнее следует из равенства треугольников $\Delta ABC=\Delta\left(F(A)\,F(B)\,F(C)\right)$

Перечислим *элементарные движения в* $\tilde{V}_3$

1) Вращение пространства $\tilde{V}_3$ вокруг прямой.
2) Сдвиг всех точек пространства $\tilde{V}_3$ на один и тот же вектор.
3) Зеркальное отражение пространства $\tilde{V}_3$ в какой-либо плоскости.

Опр. Функция n переменных $f(x_1,...x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$, где коэффициенты $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $a_{ij}=a_{ji}$, а переменные $x_1,...,x_n\in\mathbb{R}$, называется квадратичной формой.

ЗАМЕЧАНИЕ Образуем симметричную матрицу $A=(a_{ij})$ называемую матрицей квадратичной формы, и матрицу переменных $X:=\begin{pmatrix}x_1\\ ...\\ x_n\end{pmatrix}$. Тогда квадратичная форма может быть записана в матричном виде $f(x_1,...,x_n)=X^TAX$.

Опр. Квадратичные формы $f(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\quad g(y_1,...,y_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}y_iy_j$ называ ются эквивалентными, если для некоторой невырожденной матрицы $C\quad A=C^TBC$, то есть первая преобразуется во вторую после замены переменных $Y=CX$.

ЗАМЕЧАНИЕ Каждая квадратичная форма $f(x_1,...x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ эквивалентна канониче ской квадратичной форме вида $g(y_1,...,y_n)=\sum_{k=1}^{n}d_ky_k^2$, причем соответствующую матрицу C можно выбрать ортогональной.

ТЕОРЕМА 2.15 (*классификация поверхностей второго порядка*)
Уравнение поверхности второго порядка с помощью преобразования поворота простран ства вокруг оси, проходящей через начало координат, последующего сдвига его на неко торый вектор, и, возможно, вращения вокруг координатной оси и отражения в коорди натной плоскости, может быть приведено к уравнению одного из 12 перечисленных выше типов геометрических объектов в $\tilde{V}_3$.

Пр.

§ 2.9 Линейные операторы и операторные уравнения.

Опр. Суммой двух линейных операторов $L_1,L_2:E\to F$ называется отображение, определяемое по правилу $\forall a\in E\quad [L_1+L_2]a:=L_1a+L_2a$.

ЗАМЕЧАНИЕ Сумма двух линейных операторов является линейным оператором.

Опр. Произведением числа λ на линейный оператор $L:E\to F$ называется отображение, определяемое по правилу: $\forall a\in E\quad [\lambda L]a:=\lambda(La)$.

ЗАМЕЧАНИЕ Произведение числа на линейный оператор является линейным оператором.

Пр.

Обозначение. $\mathcal{L}(E,F)$ - множество всех линейных операторов из векторного пространства E в векторное пространство F.

ЗАМЕЧАНИЕ Множество $\mathcal{L}(E,F)$ является векторным пространством относительно введенных выше операций сложения и умножения на число. При этом нулевой оператор определяется по правилу: $\forall a \in E \quad O(a) := 0$.

Опр. Отображение $I : E \to E$, определяемое по правилу: $\forall a \in E \; I\, a := a$, называется тождественным преобразованием.

ЗАМЕЧАНИЕ I является линейным преобразованием.

Опр. Пусть $L_1 \in \mathcal{L}(E,F), L_2 \in \mathcal{L}(F,G)$. Произведением (композицией) линейных операторов L_1, L_2 называется отображение $L_2 L_1 : E \to G$, определяемое по правилу:

$$\forall a \in E \quad [L_2 L_1](a) := L_2\left(L_1(a)\right).$$

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Произведение двух линейных операторов является линейным оператором.

Опр. Пусть $e_1, ..., e_n$ - базис в E, а $f_1, ..., f_m$ - базис в F. Пусть $L \in \mathcal{L}(E,F)$ и $\forall j \le n \;\; Le_i = \alpha_{1j} f_1 + ... + \alpha_{mj} f_m$. Тогда матрица коэффициентов $A(L) := \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{..................} \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется матрицей оператора L в базисах $\{e_i\}, \{f_j\}$.

ТЕОРЕМА 2.16 (*свойства матрицы линейного отображения*)

1) Матрица $A(\alpha L_1 + \beta L_2)$ линейной комбинации операторов совпадает с линейной комбинацией $\alpha A(L_1) + \beta A(L_2)$ матриц этих операторов.
2) Матрица произведения $A(L_2 L_1)$ двух линейных операторов совпадает с произведением матриц $A(L_2) A(L_1)$ этих операторов.
3) Линейный оператор $L \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ представим в виде оператора умножения на матрицу:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \;\; Lx = A(L)x.$$

Опр. Множество $E_1 \subseteq E$ называется подпространством векторного пространства E, если $\forall x, y \in E_1 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha x + \beta y \in E_1$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Подпространство удовлетворяет аксиомам 1) - 8) и потому само является векторным пространством.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 1) Линейная оболочка $span\, A$ является наименьшим векторным подпространством, содержащим A.

2) Базисом в $span\left\{e_1, ..., e_k\right\}$ является максимальная совокупность линейно независимых

элементов среди $e_1,...,e_k$.

Опр. Ядром линейного оператора $L:E\to F$ называется множество

$$KerL:=\{x\in E: Lx=0\}$$

Образом линейного оператора $L:E\to F$ называется множество $\operatorname{Im}L:=\{y\in F:\exists x \;\; Lx=y\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ Ядро и образ оператора L являются подпространствами соответственно в E, F.

Опр. Уравнение вида $Lx=y$ $(Lx=0)$, где x - искомый, а y - известный элемент, называ ется неоднородным (однородным) линейным операторным уравнением. (Престе,1675)

Опр. Элемент $x_0\in E$ называется решением такого уравнения, если при его подстанов ке вместо x уравнение обращается в равенство.

Опр. Решить уравнение это значит, найти все его решения.

Следующее понятие используется при исследовании разрешимости операторных уравнений.

Опр. Рангом линейного оператора L называется размерность образа $\operatorname{Im}L$ этого оператора.

ТЕОРЕМА 2.17 (*свойства линейных операторных уравнений*)

Пусть $L\in\mathcal{L}(E,F),\ \dim E=n,\ \dim F=m$.

1) Разрешимость операторного уравнения $Lx=y$ при выделенных базисах $e_1,...,e_n\in E,\quad f_1,...,f_m\in F$ равносильна разрешимости СЛАУ $A(L)X=Y$, где

$$x=x_1e_1+...+x_ne_n,\quad X:=\begin{pmatrix}x_1\\ ...\\ x_n\end{pmatrix},\quad y=y_1f_1+...+y_mf_m,\quad Y:=\begin{pmatrix}y_1\\ ...\\ y_m\end{pmatrix}.$$

2) Ранг линейного оператора совпадает с рангом матрицы этого оператора.

3) $\dim(Ker\,L)+\dim(\operatorname{Im}L)=n$.

4) Если $e_1,...,e_k$ - базис в ядре $KerL$, то произвольное (общее) решение однородного операторного уравнения $Lx=0$ имеет вид $\alpha_1 e_1+...+\alpha_k e_k$, где $\alpha_1,...,\alpha_k\in\mathbb{R}$.

5) Если x_0 - какое-либо частное решение неоднородного операторного уравнения $Lx=y$, то произвольное (общее) решение этого уравнения имеет вид

$$x_0+\alpha_1x_1+...+\alpha_kx_k,\quad \alpha_1,...,\alpha_k\in\mathbb{R}.$$

Опр. Линейные операторы $L_r, L_l\in\mathcal{L}(F,E)$ называется соответственно правым и левым обратным к линейному оператору $L:E\to F$, если $L\,L_r=I_F\in\mathcal{L}(F,F)$ $\quad(L_lL=I_E\in\mathcal{L}(E,E)$.

Опр. Линейный оператор $L^{-1}:E\to E$ называется обратимым, если существуют и правый и левый обратные к нему.

ЗАМЕЧАНИЕ Для обратимого оператора как и в случае матриц доказывается, что $L_r=L_l$. Поэтому можно говорить об обратном к L операторе $\quad L:=L_r=L_l$.

Опр. Линейный оператор $L:E\to F$ называется взаимно однозначным (мономорфиз

мом), если он преобразует разные элементы в разные: $a_1 \neq a_2 \;\Rightarrow\; La_1 \neq La_2$.
Пр.
ЗАМЕЧАНИЕ $L \in \mathcal{L}(E,F)$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда однородное уравнение $La = 0$ имеет единственное (то есть нулевое) решение.

Опр. Линейное отображение $L: E \to F$ называется отображением "на" (эпиморфизмом), если $\forall b \in F \;\; \exists a \in E \quad La = b$, то есть операторное уравнение $Lx = y$ имеет решение в E для каждой правой части $y \in F$.
Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Линейное отображение $L: E \to F$ является изоморфизмом (в соответствии с определением) $\Leftrightarrow$ оно является мономорфизмом и эпиморфизмом.

ГЛАВА 3 ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 3.1 Элементы теории множеств и отображений.

Опр. Объединением множеств A, B называется $A \bigcup B := \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

Опр. Пересечением множеств A, B называется $A \bigcap B := \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.
Пр.

Опр. Множества A, B называются непересекающимися, если $A \bigcap B = \varnothing$.

Опр. Разбиением множества A называется совокупность $T = \{A_1, ..., A_n\}$ попарно непересекающихся его подмножеств со свойством $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = A$.
Пр.

Опр. Разностью множеств A, B называется $A \setminus B := \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.
Пр.

Опр. Пусть дано отображение $f : X \to Y$ множества X в множество Y. В обозначении $y = f(x)$ x называется независимой переменной величиной с областью определения X; $y = f(x)$ - зависимой переменной величиной с множеством значений $Y_f := \{y \in Y : \exists x \in X \;\; y = f(x)\}$; Y называется областью значений отображения.
Пр.

Опр. Графиком отображения $f : X \to Y$ называется подмножество декартова произведения $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$.

Пр.

Опр. Отображение $f : X \to Y$ называется инъективным (взаимно однозначным), если она разным элементам из X сопоставляет разные элементы из Y.

Пр.

Опр. Отображение $f : X \to Y$ называется сюръективным (отображением "на"), если $Y_f = Y$.

Пр.

Опр. Отображение $f : X \to Y$ называется биективным (биекцией), если она инъективно и сюръективно.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Биективное отображение и только такое отображение имеет обратное f^{-1}. При этом область определения последнего есть Y.

Опр. Множества A, B называются равномощными, если существует биекция A на B.

Пр.

Опр. Мощностью конечного множества называется число его элементов. Обозначение. *card A* Термин мощность вел Штейнер, а понятие - Кантор, 1872.

Опр. Множество называется счетным, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$.

Пр.

Опр. Множество называется множеством мощности континуум, если оно равномощно множеству $\mathbb{R}$.

Пр.

Опр. Множество элементов называется упорядоченным, если для любых его двух элементов всегда можно сказать, что один из них предшествует другому.

ЗАМЕЧАНИЕ Если на вещественной оси выбрать начало координат и масштаб, то между множествами $(-\infty, +\infty)$ и $\mathbb{R}$ можно установить взаимно однозначное соответствие (то есть они равномощны), при котором сохраняется отношение порядка. Поэтому в дальнейшем мы иногда не будем различать эти два упорядоченных множества (точек и чисел).

Опр. Множество точек $X \subset (-\infty, \infty)$ называется ограниченным сверху (снизу) если $\exists M \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in X \ \ x \le M \ \ (x \ge M)$; множество ограничено, если оно ограниченно и сверху и снизу: $\exists M > 0 \ \ \forall x \in X \ \ |x| \le M$.

Пр.

Опр. Точной верхней (нижней) гранью множества $X \subset (-\infty, \infty)$ называется наименьшее (наибольшее) число $\sup X$ ($\inf X$) со свойствами

$$\left(\forall x \in X \ \ x \le \sup X\right) \wedge \left((\forall x \in X \ \ x \le M) \Rightarrow (\sup X \le M)\right)$$

$$\left(\forall x\in X \quad x\geq \inf X\right) \wedge \left((\forall x\in X \quad x\geq M) \Rightarrow (\inf X\geq M)\right).$$

Пр.

Опр. Композицией отображений $f: X\to Y$ и $g: Y\to Z$ называется отображение $g\circ f: X\to Z$, определяемое по правилу $\forall x\in X \quad [g\circ f](x):=g\left(f(x)\right)$.

Пр.

Опр. Преобразование $id: X\to X$, $\forall x\in X \quad id(x)=x$, называется тождественным отображением.

Опр. Отображение $g: Y\to X$ называется правым (левым) обратным к отображению $f: X\to Y$, если $[f\circ g]=id_Y: Y\to Y \quad \left([g\circ f]=id_X: X\to X\right)$.

Кпр.

Отображение $f^{-1}: Y\to X$ называется обратным к отображению $f: X\to Y$, если оно является и правым и левым обратным к f.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) Отображение $f: X\to Y$ является инъективным тогда и только тогда, когда оно имеет левое обратное отображение.

2) Отображение $f: X\to Y$ является сюръективным тогда и только тогда, когда оно имеет правое обратное отображение.

3) Отображение $f: X\to Y$ является биекцией тогда и только тогда, когда оно имеет обратное отображение.

Опр. Пусть $f: X\to Y$ и $X_1\subset X$. Сужением отображения f на подмножество X_1 называется отображение $f_1: X_1\to Y$ определяемое по правилу $\forall x\in X_1 \quad f_1(x):=f(x)$.

Обозначение. $f\big|_{X_1}:=f_1$.

Пр.

§ 3.2 Числовые последовательности и ряды.

Опр. Выражение вида $\{a_n\}:=a_1, a_2, ..., a_n, ...$ где числа $a_1, a_2, ...\in\mathbb{R}$, называется числовой последовательностью.

Пр.

Опр. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, сверху (ограниченной снизу), если она имеет верхнюю грань: $\exists C\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N} \quad a_n\leq C$ (нижнюю грань: $\exists C\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N} \quad a_n\geq C$). Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу. В противном случае она называется неограниченной.

Пр.

Опр. Последовательность $\{a_n\}$ называется монотонно возрастающей (неубывающей), если $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n < a_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n \le a_{n+1})$. Аналогично определяется монотонно убывающая (невозрастающая) последовательность.
Пр.

Опр. Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{a_n\}$ при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \ \forall n > N(\varepsilon)\ \ |a_n - a| < \varepsilon$. (слово limit $\Leftarrow$ limis – *лат*. межа, Ньютон, 1670)
Пр.

Опр. Последовательность $\{a_n\}$ стремится к (плюс, минус) бесконечности при $n \to \infty$, если $\forall M > 0\ \ \forall n > N(M)\ \ |a_n| > M\ \ \ (a_n > M,\ a_n < -M)$.
Обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty)$ (обозначение – Люилье, 1786).
Пр.

Опр. Последовательность, для которой существует конечный предел, называется сходящейся. В противном случае она называется расходящейся.
Обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} a_n := a$.
ТЕОРЕМА 3.1 (*свойства сходящихся последовательностей*)
1) (*критерий Коши сходимости последовательности*) Последовательность $\{a_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальная:
$$\varepsilon > 0\ \ n > N(\varepsilon)\ \ \forall p \in \mathbb{N}\ \ \left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon .$$
2) Если предел последовательности существует, то он единственен.
3) Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то для любой подпоследовательности $\{a_{n_k}\} = a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$ данной последовательности $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.
4) Сходящаяся последовательность ограничена.
5) Если последовательность не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу), то она является сходящейся.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, причем $a, b \in (-\infty, \infty)$. Тогда справедливы следующие утверждения.
6) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$. 7) Если $\forall n. > N\ \ a_n \le b_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
8) Пусть $\forall n\ \ a_n \ne 0$, Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$.
9) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \ne 0 \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$. 10) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha a_n + \beta b_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
11) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и последовательность $\{b_n\}$ ограничена, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

12) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 13) Если $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Опр. Верхним (нижним) пределом последовательности $\{a_n\}$ называется такое число $a \in \mathbb{R}$ $(b \in \mathbb{R})$, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{x_{n_k}\} \subset (x_n) \ \forall n, k > N(\varepsilon) \quad a_n < b + \varepsilon, \quad a_{n_k} > b - \varepsilon$,

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{x_{n_k}\} \subset (x_n) \ \forall n, k > N(\varepsilon) \quad a_n > a - \varepsilon, \quad a_{n_k} < a + \varepsilon\right)$$

Обозначение $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n := b$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n := a$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует тогда и только тогда, когда $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

3) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n y_n \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n y_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$.

4) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует и $\neq 0, \infty$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n y_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} x_n \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$.

Опр. Числовым рядом называется выражение вида $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$.

Опр. Геометрический ряд $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.

Опр. Обобщенный гармонический ряд $1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$ (Броункер).

Опр. N-ой частичной суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сумма $S_N := a_1 + \ldots + a_N$, $N = 1, 2, \ldots$.

Опр. Числовой ряд называется сходящимся, если существует конечный предел $S := \lim\limits_{N\to\infty} S_N$. Этот предел S называется суммой ряда.

Обозначение. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пр. Гармонический ряд расходится (Орем,1350).

Опр. Числовой ряд называется расходящимся, если $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$ равен ∞ или не существует

Пр.

ТЕОРЕМА 3.2 (*свойства сходящихся рядов*)

1) (*необходимый признак сходимости*) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2) (*признак Даламбера, 1768*) Пусть $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n \geq 0,\quad \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$. Если $q < 1$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если $q > 1$, то ряд расходится; если $q = 1$, то нужны дополнительные исследования.

§ 3.3 Предел функции. Непрерывные функции.

Опр. Пусть $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Отображение $f : X \to Y$ называется функцией одной переменной.
ЗАМЕЧАНИЕ Функция может быть задана тремя способами: таблично, аналитически (формулой) и графически.
Пр.

Опр. Функция $f(x)$ называется монотонно возрастающей (неубывающей) на $X \subseteq \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Опр. Функция $f(x)$ называется монотонно убывающей (не возрастающей) на X, если $\forall x_1, x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$).
ЗАМЕЧАНИЕ Если функция $f(x)$ монотонна (то есть монотонно убывает или монотонно возрастает) на X, то на множестве значений Y_f существует обратная функции $f^{-1} : Y_f \to X$, которая также является монотонной. Обратное ,вообще говоря, неверно.
ЗАМЕЧАНИЕ Монотонный от *греч.* $\mu o \nu o \zeta$ - натяжение + *греч.* $\tau o \nu o \zeta$ - тон (К.Нейман).

Опр. Следующие 5 классов функций называются основными элементарными:

1) Степенные $y = x^{\alpha},\ X = (0, +\infty),\ \alpha \in \mathbb{R}$.
2) Показательные $y = a^x,\ X = (-\infty, +\infty),\ a > 0,\ a \neq 1$.
3) Логарифмические $y = \log_a x,\ X = (0, +\infty),\ a > 0,\ a \neq 1$.
4) Тригонометрические $y = \sin x,\ y = \cos x,\ X = (-\infty, +\infty)$.
5) Обратные тригонометрические $y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ X = [-1,1]$.

Опр. Функция называется элементарной, если она получена из основных элементарных с помощью конечного числа, операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и композиции.
Пр.

Опр. Точка x_0 называется предельной точкой множества X, если в каждой ε-окрестности x_0 существуют точки из X, отличные от x_0.

Опр. Пусть функция $y = f(x)$ определена на X и x_0 - предельная точка множества X. Говорят, что $f(x)$ стремится к числу b (имеет пределом число b), когда переменная x стремится к числу x_0, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(x_0, \delta) \bigcap X \quad f(x) \in D(b, \varepsilon)$.

Обозначение. $\lim_{x\to x_0} {}_X\, f(x)=b$ или $\lim_{x\to x_0} f(x)=b$, если $f(x)$ определена на некоторой проколотой окрестности точки x_0.
Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Если $f(x)$ определена на множестве $\mathbb{N}$ и $x_0=+\infty$, то данное определение предела совпадет с определением предела последовательности

$$\{f(n)\}:\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall n>\frac{1}{\delta}\quad |f(n)-b|<\varepsilon.$$

Опр. Пусть функция $y=f(x)$ определена на X и x_0 - предельная точка множества X. Говорят что функция $f(x)$ имеет предел b справа (слева) в точке x_0, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D(x_0,\delta)\bigcap X,\ x>x_0\ (x<x_0)\quad f(x)\in D(b,\varepsilon).$$

Обозначение. $\lim_{x\to x_0+0} {}_X\, f(x)=b$ ($\lim_{x\to x_0-0} {}_X\, f(x)=b$) или $\lim_{x\to x_0+0} f(x)=b$ ($\lim_{x\to x_0-0} f(x)=b$).

Опр. Функция $f(x)$ ограничена сверху (снизу) на множестве X, если $\exists C\in\mathbb{R}\ \forall x\in X\ \ f(x)\le C\ \ (f(x)\ge C)$. Функция $f(x)$ ограничена на X, если она ограничена на нем и сверху и снизу. Функция $f(x)$ ограничена при $x\to x_0$, если она ограничена на некоторой окрестности x_0 (то есть $\forall\delta>0\ \exists M>0\ \forall x\in D(x_0,\delta)\ \ |f(x)|\le M$).
ЗАМЕЧАНИЕ Ограниченная на множестве функция будет ограниченной при $x\to x_0$. Обратное, вообще говоря, неверно.
Кпр.

ТЕОРЕМА 3.3 (*свойства предела функции*)
1) (*лемма Гейне*) $\lim_{x\to x_0} f(x)=b \Leftrightarrow ((\forall\{x_n\}\subset X)\wedge(\lim_{n\to\infty} x_n=x_0)\Rightarrow(\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b))$.
2) Если существует $\lim_{x\to x_0} f(x)$, то он единственный.
3) Если $f(x)$ монотонна и ограничена на X, то существует конечный предел $\lim_{x\to x_0} f(x)$.
4) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существуют пределы функции справа и слева в этой точке и они равны.

Пусть существуют конечные пределы $\lim_{x\to x_0} f_1(x),\ \lim_{x\to x_0} f_2(x)$. Тогда:

5) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \ \lim_{x\to x_0}\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)=\alpha\lim_{x\to x_0} f_1(x)+\beta\lim_{x\to x_0} f_2(x)$.
6) $\lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot f_2(x)=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot\lim_{x\to x_0} f_2(x)$.
7) $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim_{x\to x_0} f_2(x)}$, если $\lim_{x\to x_0} f_2(x)\ne 0$.
8) Если $f_1(x)\le f_2(x)$, то $\lim_{x\to x_0} f_1(x)\le\lim_{x\to x_0} f_2(x)$.

Опр. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой (БМ) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.
Обозначение $f(x) = o(1)$.
Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad (f(x) - b)$ - БМ.
2) Если $f_1((x), f_2(x)$ БМ, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$ есть БМ.
3) Если $f_1(x)$ - БМ, а $f_2(x)$ ограниченная функция при $x \to x_0$, то $f_1(x) f_2(x)$ есть БМ.
4) Если $f_1(x)$ - БМ, а $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x) = b \neq 0$, то $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ - БМ при $x \to x_0$.

Опр. Бесконечно малая $f_1(x)$ имеют порядок убывания не выше (выше), чем бесконечно малая $f_2(x)$, если функция $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ограничена при $x \to x_0$ ($\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$).
Обозначения $f_1(x) = O(f_2(x))$ ($f_1(x) = o(f_2(x))$).
Пр.

Опр. Бесконечно малые $f_1(x), f_2(x)$ называется эквивалентными при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1.$$

Обозначение $f_1(x) \sim f_2(x)$.
Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Под знаком предела бесконечно малые множители можно заменять на эквивалентные, а бесконечно малые слагаемые, вообще говоря, нельзя.
Кпр.

Опр. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой (ББ) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = \infty$
ЗАМЕЧАНИЕ Функция $f(x)$ есть ББ при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда функция $\dfrac{1}{f(x)}$ есть БМ при $x \to x_0$.

Опр. Функцией эн-факториал называется функция, определенная на множестве целых неотрицательных чисел по правилу $0! := 1,\ n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Пусть $m, n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $m \leq n$.
Числом сочетаний из m по n называется величина $C_n^m = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.
Пр.

ТЕОРЕМА 3.4 (*бином Ньютона*) $\forall n\in\mathbb{N}\ \ \forall a,b\in\mathbb{R}\ \ (a+b)^n=a^n+C_n^1\cdot a^{n-1}\cdot b+\ldots+C_n^{n-1}a\cdot b^{n-1}+b^n$

Пр.

СЛЕДСТВИЕ Последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ имеет конечный предел.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Можно доказать, что число $2{,}718281828\ldots:=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ иррациональное. Его обозначают буквой e.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Существует $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, который называется вторым замечательным пределом.

Опр. Натуральным логарифмом числа a называется число $\ln a:=\log_e a$.

СЛЕДСТВИЕ 1 $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$. СЛЕДСТВИЕ 2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

СЛЕДСТВИЕ 3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Опр. Пусть функция $y=f(x)$ определена на X, $x_0\in X$ и является предельной точкой X. Говорят, что $f(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ и он равен $f(x_0)$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to x_0}\Delta f=0,$ где $\Delta f:=f(x)-f(x_0)$ - приращение функции $f(x)$ в точке x_0.

Опр. Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Элементарная функция непрерывна на каждом интервале, на котором она определена.

Опр. Точка множества X, в которой $f(x)$ достигает своего наибольшего (наименьшего) значения, называется точкой максимума (минимума) функции. При этом значение функции в этой точке называется максимумом (минимумом) функции. Точки максимума и минимума называются точками экстремума, а максимум или минимум – экстремумом функции.

Обозначение. $\max\limits_{x\in X}f(x):=f(x_1),\quad \arg\max\limits_{x\in X}f(x):=x_1,\quad \min\limits_{x\in X}f(x):=f(x_2),\quad \arg\min\limits_{x\in X}f(x):=x_2$.

ТЕОРЕМА 3.5 (*свойства непрерывных функций*)
1) Линейная комбинация непрерывных функций есть функция непрерывная.
2) Произведение непрерывных функций есть функция непрерывная.
3) Частное непрерывных функций есть функция непрерывная в точках, где знаменатель не равен 0. 4) Композиция непрерывных функций есть функция непрерывная.
5) Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция достигает на нём своих наибольшего и наименьшего значений.
6) Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)<0<f(b)$, то $\exists c\in(a,b)\ \ f(c)=0$

СЛЕДСТВИЕ Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то

$$\forall C\in[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)] \quad \exists\xi\in[a,b] \quad C=f(\xi).$$

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть $f(x)$ монотонно возрастает (убывает) на $[a,b]$. $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда $Y_f=[f(a),f(b)]$ ($Y_f=[f(b),f(a)]$).

Опр. $f(x)$ называется равномерно непрерывной на X, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x_1,x_2\in X,\ |x_1-x_2|<\delta, \ \Rightarrow\ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1) Равномерно непрерывная на X функция будет непрерывной на X. Обратное, вообще говоря, не верно.
2) Если $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$, то она равномерно непрерывна на нем.

Опр. Методы решения нелинейного уравнения $f(x)=0$, где функция $f(x)$ непрерывна, называются методами нулевого порядка (методами одномерной оптимизации).
АЛГОРИТМ (*метода деления отрезка пополам*)

Пр.

Опр. Пусть $x_0\in X$ и является предельной точкой. x_0 называется точкой устранимого разрыва, если существует конечный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и он $\neq f(x_0)$.

Пр.

Опр. x_0 называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные пределы справа и слева, но они различны.
Пр.

Опр. Точки множества X, не являющиеся точками непрерывности, устранимого разрыва и разрыва первого рода, называются точками разрыва второго рода функции.
Пр.

ГЛАВА 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 4.1 Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Опр. Пусть функция $y = f(x)$ определена на X, $x_0 \in X$ и является предельной точкой. Если существует конечный предел $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) := \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, то он называется производной функцией $f(x)$ в точке x_0 (термин *производная* в русский язык ввел Висковатов В.И., 1810; обозначение $f'(x)$ - Лагранж, 1760).

ЗАМЕЧАНИЕ Лейбниц называл производную «дифференциальным отношением» ($\frac{df}{dx}$ - 1684). Ньютон – «флюксия». Термин «производная» (- *фр*. derivee) ввел Лагранж (1797). Термин «differentia» (*лат*. разность) употреблялся Лейбницем и И.Бернулли в смысле «приращение». Последний ввел обозначение Δ.Слово «differential» означало у Лейбница «бесконечно малая разность» и обозначалось dx, dy . Иога́нн Берну́лли (1667 -1748) - швейцарский математик и механик, самый знаменитый представитель семейства Бернулли, младший брат Якоба Бернулли, отец Даниила Бернулли. Один из первых разработчиков математического анализа, после смерти Ньютона - лидер европейских математиков.

Таблица производных (впервые, 1881г.)

f	f'	f	f'	f	f'	f	f'
c	0	$\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$	$\frac{1}{x\ln a}$	$tg\,x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\sin x$	$\cos x$	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
$a^x\ \ a>0,\ a\neq 1$	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Если функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке. Обратное, вообще говоря, неверно.

Опр. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=:k$, то говорят, что график функции $f(x)$ имеет касательную в точке $(x_0,f(x_0))$. Уравнение $Y=k(X-x_0)+f(x_0)$ называется уравнением касательной, а число k - угловым коэффициентом касательной.

ЗАМЕЧАНИЕ Касательная в смысле данного определения удовлетворяет соотношению $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\rho(M,l)}{M_0M}$ из общего определения касательной.

СЛЕДСТВИЕ (*геометрический смысл производной*) График функции $f(x)$ имеет касательную в точке $(x_0,f(x_0))$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ имеет производную в x_0. В этом случае угловой коэффициент касательной $k=f'(x_0)$.

Опр. Если график функции имеет касательную в точке $(x_0,f(x_0))$, то прямая l проходящая через эту точку и перпендикулярная к касательной, называется нормалью к графику в $(x_0,f(x_0))$.

ЗАМЕЧАНИЕ Так как вектор нормали к касательной $\overline{n}:=\{f'\{x_0\},-1\}$ перпендикулярен вектору $\{\dfrac{1}{f'\{x_0\}},1\}$, то уравнение нормали можно записать в виде $Y=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(X-x_0)+f(x_0)$

Опр. Правой (левой) производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется конечный предел $f'_x(x_0+0):=\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ $\left(f'_x(x_0-0):=\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\right)$, если он существует.

ТЕОРЕМА 3.6 (*правила дифференцирования*) 1) $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$.

2) $(f\cdot g)'=f'g+f\,g'$. 3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-f\,g'}{g^2}$ в тех точках, где знаменатель не равен нулю.

4) Пусть $y=f(x)$ монотонна, непрерывна в окрестности x_0 и дифференцируема в x_0 и $f'(x_0)\neq 0$, $y_0:=f(x_0)$. Тогда обратная функция $x=f^{-1}(y)$ монотонна, непрерывна в окрестности точки y_0, дифференцируема в y_0 и $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

5) (*производная сложной функции*) Пусть функция $y=g(x)$ определена в окрестнос ти x_0 и дифференцируема в x_0; пусть $z=f(y)$ определена в окрестности $y_0:=g(x_0)$ и дифференцируема в y_0. Тогда функция $z=f(g(x))$ дифференцируема в x_0 и

$$(f\circ g)'(x_0)=f'_y(y_0)\cdot g'(x_0).$$

Опр. Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0. Говорят, что $f(x)$ - дифференцируема (расчленима) в точке x_0 если $\exists A \in \mathbb{R}$ $\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x)$, где $\dfrac{\alpha(x)}{\Delta x}$ есть БМ при $x \to x_0$. Если $f(x)$ дифференцируема в x_0, то слагаемое $A\,\Delta x$ называется дифференциалом функции $f(x)$ (да Кунья, 1790).

Обозначение. $df := A\Delta x$.

ТЕОРЕМА 3.7 (*свойства дифференциала*). 1) Функция $f(x)$ дифференцируема в x_0 тогда и только тогда, когда она имеет производную в x_0. При этом $A = f'(x_0)$.

2) $d(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot df + \beta \cdot dg$. 3) $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$. 4) $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$.

5) (*инвариантность дифференциала при замене*) Если функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а $z = f(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $z = f(g(x))$ дифференцируема в x_0 и $df = d(f \circ g)$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Ввиду первого утверждения теоремы термины "дифференцируемая функция" и "функция, имеющая производную" взаимозаменяемы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 (*геометрический смысл дифференциала*) Так как уравнение касате льной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид $y = f_x'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, то дифференциал $dy := f_x'(x_0)\Delta x$ в точке x_0 совпадает, очевидно, с приращением $y - f(x_0)$ координаты касательной, проведенной в этой точке.

ЗАМЕЧАНИЕ 3 При условии $f'(x_0) \neq 0$ имеет место приближенное равенство $f(x) - f(x_0) = df + \alpha(x) \approx df$, которое используется для приближенного вычисления значений функции.

Пр.

Опр. Производной нулевого порядка функции в точке называется ее значение в этой точке. Пусть существует производная $(n-1)$- го порядка $f^{(n-1)}(x)$ в каждой точке некоторой окрестности точки x_0. Если существует конечный предел

$$f^{(n)}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0},$$

то он называется производной n-го порядка функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение. $f^{(n)}(x_0) = \dfrac{d^n f}{dx^n}(x_0) := (f^{(n-1)}(x))_x'(x_0)$. Исторически закрепились обозначения

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{iv}(x),\ f^{(5)}(x),\ f^{(6)}(x), \ldots.$$

Пр.

Опр. (*физический смысл производной*). Пусть материальная точка движется вдоль оси OX по закону $x = x(t)$. Средней скоростью движения на промежутке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ называется величина $v_{cp} := \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. Мгновенной скоростью движения в момент времени t_0 называется величина $v(t) := \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} =: x'(t_0)$.

Опр. Средним ускорением на промежутке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ называется величина $W_{cp} := \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$. Мгновенным ускорением в момент времени t_0 называется

$$w(t_0) := \lim_{\Delta t} w_{cp} = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} =: v'(t_0) =: x''(t_0).$$

Опр. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой на множестве X, если она имеет производную в каждой точке $x \in X$.

ТЕОРЕМА 3.8 (*основные теоремы анализа*) Пусть функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b) и $\forall x \in (a,b)$ $g'(x) \neq 0$. Тогда:

1) (*теорема Ролля*, 1861) если $f(a) = f(b) = 0$, то $\exists\, c \in (a,b)$ $f'(c) = 0$.

2) (*теорема Коши*) $\exists\, c \in (a,b)$ $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

3) (*правило Лопиталя*, 1696) Если $f(a) = g(a) = 0$ и существует конечный предел $A := \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и он равен A.

СЛЕДСТВИЕ (*формула Лагранжа*) Теорема Коши при $g(x) := x$ принимает вид

$$\exists c \in (a,b) \;\; f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

ЗАМЕЧАНИЕ Если функции $f(x), g(x)$ дифференцируемы на (a,b) и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ или ∞, то из $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \;\; \Rightarrow \;\; \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Пр.

Опр. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если $\exists \varepsilon > 0$ $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \bigcap X$ $\;\; f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$. Точки локальных максимумов и минимумов называются точками локального экстремума.

ТЕОРЕМА 3.9

1) Если $f(x)$ не возрастает (не убывает) и дифференцируема на (a, b), то

$$\forall\; x \in (a, b) \;\; f'(x) \ge 0.$$

2) Если $\forall x \in (a,b)$ $f'(x) > 0$ (< 0), то $f(x)$ возрастает (убывает) на (a, b).

3) (*теорема Ферма*) Если x_0 - точка локального экстремума функции $f(x)$, и $f(x)$

дифференцируема в x_0, то $f'(x_0)=0$.

4) (*первое достаточное условие локального экстремума*). Пусть $f(x)$ дифференцируема на (a,b), $x_0 \in (a,b)$, $f'(x_0)=0$. Если $\forall x \in (a,x_0)$ $f'(x)>0$ (<0) и $\forall x \in (x_0,b)$ $f'(x)<0$ (>0), то x_0 - точка максимума (минимума) на (a,b).

5) (*второе достаточное условие локального экстремума*). Пусть $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x_0)$ и $f'(x_0)=0$. Если $f''(x_0)<0$ (>0), то x_0 - точка локального максимума (минимума).

Пр.

Опр. Пусть функция $y=f(x)$ определена на (a,b), и ее график имеет касательную в каждой точке $(x, f(x))$. Говорят, что эта кривая выпукла (вогнута) на (a,b), если она лежит выше (ниже) любой своей касательной. Иногда говорят: выпукла вверх (выпукла вниз).

Опр. Точка $(c, f(c))$, $c \in (a,b)$, называется точкой перегиба кривой, если эта кривая выпукла (вогнута) на (a,c) и вогнута (выпукла) на (c,b).

ТЕОРЕМА 3.10 (*о выпуклости и точке перегиба*)

Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на (a,b).

1) (*необходимые условия выпуклости*) Если кривая выпукла (вогнута) на (a,b), то $f'(x)$ не убывает (не возрастает) на (a,b) и $\forall\, x \in (a,b)$ $f''(x) \ge 0$ $(f''(x) \le 0)$.

2) (*достаточные условия выпуклости*) Если $f'(x)$ монотонно возрастает (убывает) на (a,b) или $\forall\, x \in (a,b)$ $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$, то кривая выпукла (вогнута) на (a,b).

3) (*необходимые условия точки перегиба*). Если c - точка перегиба кривой, то $f''(c)=0$.

Пр.

Важной характеристикой гладкой кривой и одновременно мерой ее выпуклости является понятие кривизны.

Опр. Пусть дана гладкая кривая $l:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, $t \in [0,1]$, то есть функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,1]$ и все ее точки неособые. Обозначим $\theta(t)$ угол наклона касательной в точке $(x(t), y(t))$ кривой, а $s(t, t+\Delta t)$ - длину дуги между точками $(x(t), y(t))$, $(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t))$ этой кривой. Предел $k(t_0) := \lim\limits_{\Delta t \to +0} \dfrac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{s(t_0, t_0+\Delta t)}$ отношения приращения угла наклона касательной к длине соответствующей дуги, если он существует, называется кривизной кривой в точке $(x(t_0), y(t_0))$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Если функции $x(t)$, $y(t)$ дважды дифференцируемы, то кривизна кривой в точке $(x(t), y(t))$ вычисляется по формуле $k(t) := \dfrac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}$.

СЛЕДСТВИЕ Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $k(x) = \dfrac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ Из этой формулы и предыдущей теоремы следует, что положительное значение кривизны означает выпуклость, а отрицательное значение - вогнутость кривой в соответствующей точке. Кривыми с нулевой кривизной $k(x) \equiv 0$ являются прямые и только они.

Опр. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ и имеет на нем производные до $(n+1)$-го порядка включительно. Многочлен степени $\le n$ $p_n(x) := f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ называется многочленом Тейлора. Разность $R_n(x) := f(x) - p_n(x)$ - остаточным членом. Формула $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$ - формула Тейлора.

ТЕОРЕМА 3.11 (*свойства формулы Тейлора*) 1) Многочлен Тейлора является единственным многочленом степени $\le n$, который удовлетворяет равенствам:

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p(x_0) = f'(x_0), \ \ldots \ , \ p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

2) Остаточный член $R_n(x)$ можно представить в форме Лагранжа $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$,

где число ξ находится между x_0 и x (Лагранж, 1979).

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 В теореме остаточный член можно записать менее точно, в форме Пеано

$$R_n(x) = (x - x_0)^n \, o(1) = o((x - x_0)^n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2 При $n = 0$ формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$ совпадает с формулой Лагранжа. При $n = 1$ формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано совпадает с формулой дифференциала.

СЛЕДСТВИЕ Пусть функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум) в точке x_0 и вторую производную в окрестности этой точки. Тогда $f''(x_0) \le 0$ $\left(f''(x_0) \ge 0\right)$. Пусть для определенности x_0 есть точка максимума. Тогда по формуле Тейлора

$$\Delta f = \frac{f''(\xi)}{2}\Delta x^2 \quad \Rightarrow \quad f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f''(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta f}{\Delta x^2} \le \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Брук Те́йлор (1685-1731) - английский математик. Общая формула была опубликована Тейлором в 1715. Выражение «ряд Тейлора» ввел Люилье в 1786г. Остаточный член в форме Лагранжа (1797). Статьи по разнообразным вопросам: о полёте снарядов, о взаимодей ствии магнитов, о капиллярных явлениях, о сцеплении между жидко стями и твёрдыми телами, по теории качения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3 Для $h>0$ положим $M_k(h):=\max\limits_{|x-x_0|\le h} |f^{(k)}(x)|$. Тогда

$$\forall\, x\in[x_0-h,\, x_0+h] \qquad \left|f(x)-p_n(x)\right|=\left|R_n(x)\right|\le\frac{1}{(n+1)\,!}M_{n+1}(h)\cdot h^{n+1}=:\omega(n,h).$$

Формула Тейлора позволяет решать следующие три задачи.

1) По заданным степени n многочлена и длине отрезка $2h$ оценить в терминах $\omega(n,h)$ величину отклонения $p_n(x)$ от $f(x)$ на $[x_0-h,\, x_0+h]$
2) При заданным длине отрезка $2h$ и точности ω определить степень n многочлена $p_n(x)$,отклонение которого от $f(x)$ на $[x_0-h,\, x_0+h]$ не превышает ω.
3) По заданным степени многочлена n и точности ω определить максимальную длину $2h$ отрезка $[x_0-h,\, x_0+h]$, на котором $p_n(x)$ отклоняется от $f(x)$ не более, чем на ω.

Пр.

_____

Два случая расположения асимптот неограниченной кривой.

1) Асимптота $l:\ x=a$ вертикальная. В этом случае расстояние от переменной точки $M=(x,f(x))$ кривой до асимптоты $\rho(M,l)=\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-f(x))^2}=\left|x-a\right|\to 0$, когда $M=(x,f(x))$ стремится к бесконечности. Отсюда необходимо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.
2) Асимптота $l: y=kx+b,\ k\ne\infty$ наклонная. По определению асимптоты

$$0=\lim_{x\to+\infty}\rho(M,l)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|kx-f(x)+b\right|}{\sqrt{k^2+1}} \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Пр.

_____

Опр. Пусть функции $f_1(x), f_2(x),\ldots$ определены на непустом множестве X , являющемся общей частью их областей определения. Выражение вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ называется функционально ным рядом. Множество точек $X_0\subseteq X$, в каждой из которых соответствующий число вой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится, называется множеством сходимости функционально го ряда.

ЗАМЕЧАНИЕ Если существует $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=:\dfrac{1}{R}$, то в силу признака Даламбера степенной ряд абсолютно сходится во всех точках интервала $(x_0-R,\, x_0+R)$ и расходится во всех точках вне отрезка $[x_0-R,\, x_0+R]$. $(x_0-R,\, x_0+R)$ называется интервалом сходимости, а число R - радиусом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Опр. Функция $S(x):=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x):=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$, определенная на множестве X_0, называется суммой функционального ряда.

ЗАМЕЧАНИЕ Для степенного ряда удобно обозначать $S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$.

Опр. Если функция $f(x)$ имеет производные любого порядка в точке x_0, то степенной ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется рядом Тейлора функции $f(x)$. В случае $x_0 = 0$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ - ряд Маклорена $f(x)$ (формула -Тейлор, 1715. Термин -Люильe, 1786).

Опр. Пусть функция $f(x)$ имеет производные любого порядка в точке x_0 и пусть R - радиус сходимости ее ряда Тейлора. Если на $(x_0 - R, x_0 + R)$ $f(x)$ совпадает с суммой $S(x)$ этого ряда, то $f(x)$ называется аналитической функцией на $(x_0 - R, x_0 + R)$

Кпр.

ТЕОРЕМА 3.12 (*о рядах Тейлора функций*)

) Функция e^x аналитическая на $(-\infty, \infty)$ и $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$;

2) функция $\sin x$ аналитическая на $(-\infty, \infty)$ и $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$;

3) функция $\cos x$ аналитическая на $(-\infty, \infty)$ и $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$;

4) функция $(1+x)^m$ аналитическая на $(-1, 1)$ и $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m...(m-k+1)}{k!} x^k$;

5) функция $\ln(1+x)$ аналитическая на $(-1,1)$ и $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

Пр.

§ 4.2 Интегральное исчисление функций одной переменной.

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a,b). Дифференцируемая на (a,b) функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, если $\forall x \in (a,b)$ $F'(x) = f(x)$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$ на (a,b), то любая другая первообразная имеет вид $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная.

Опр. Множество всех первообразных функции называется неопределенным интегралом этой функции (Лейбниц, 1694).

СЛЕДСТВИЕ Два интеграла совпадают тогда и только тогда, когда они имеют общую функцию.

Опр. Проинтегрировать функцию это значит ее первообразную.
Обозначение $\int f(x)dx := F(x)+C$.

Имеет место такая таблица первообразных от элементарных функций (начало XX в.).

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	C	$a^x,\ a>0,$ $a\neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}},$ $a\neq 0$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2+a}\right\|$
$x^\alpha,$ $\alpha\neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctg\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg\, x$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$\sin x$	$-\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\|$

ТЕОРЕМА 4.1 (*свойства неопределенного интеграла*)

1) (*свойство линейности интеграла*) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $\int(\alpha f(x)+\beta g(x)dx = \alpha\cdot\int f(x)dx+\beta\cdot\int g(x)dx$, если хотя бы два из трех интегралов существуют.
2) (*формула замены переменных*) Если $\int f(x)dx := F(x)+C$ и функция $\varphi(t):(\alpha,\beta)\to(a,b)$ непрерывно дифференцируема на (α,β), то на (α,β) существует интеграл функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ и он вычисляется по формуле $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt := F(\varphi(t))+C$.
3) (*формула интегрирования по частям*) Если функции $u(x), v(x)$ дифференцируемы на (a,b), и существует один из интегралов $\int u(x)\cdot v'(x)dx,\ \int v(x)\cdot u'(x)dx$, то существует второй интеграл и имеет место равенство $\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx$.

Пр.

Опр. Пусть функция $f(x)$ имеет производную порядка s в точке x_0. x_0 называется нулем кратности s функции $f(x)$ (корнем кратности s уравнения $f(x)=0$), если

$$f(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(s-1)}(x_0)=0,\quad f^{(s)}(x_0)\neq 0.$$

Пр.

ТЕОРЕМА 4.2 (*Гаусс*) Многочлен n-ой степени $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,\ a_0\neq 0$, имеет ровно n корней, если учитывать кратность каждого корня и все комплексные корни. Если $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ его корни, то имеет место представление $p(x)=a_0\cdot(x-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_n)$.

СЛЕДСТВИЕ Многочлен с действительными коэффициентами единственным образом представим в виде произведения степеней двучленов $(x-\lambda)^k$, $\lambda\in\mathbb{R}$ и квадратных трехчленов с действительными коэффициентами $(x^2+px+q)^l$, имеющих сопряженные комплексные нули.

Опр. Рациональная функция $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ называется правильной дробью, если $\deg p<\deg q$.

ЗАМЕЧАНИЕ Неправильную рациональную функцию с помощью деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции.

Пр.

Опр. Рациональные функции с вещественными коэффициентами вида $\dfrac{a}{(x-\lambda)^k}$ или вида $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$, $k\in\mathbb{N}$, где квадратный трехчлен имеет комплексные сопряженные нули, называются простейшими дробями.

ЗАМЕЧАНИЕ (*Эйлер*) Каждая правильная дробь единственным образом представима в виде суммы простейших дробей. Алгоритм представления называется методом неопределенных коэффициентов.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Пусть $r(x,y)=\dfrac{p(x,y)}{q(x,y)}$ - рациональная функция двух переменных, а $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ - дробно-линейная функция. Тогда интеграл вида $\int r\left(x,\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ сводится к интегралу от рациональной функции с помощью замены переменной $t^m:=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Интеграл вида $\int r(\sin x,\cos x)dx$ приводится к интегралу о рациональной функции с помощью универсальной подстановки $t=tg\dfrac{x}{2}$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 3 Следующие интегралы специального вида приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью соответствующих замен

$\int r(\sin^2 x,\cos^2 x)dx \;\Rightarrow\; t=tgx,\quad \int r(\sin x)\cos x dx \;\Rightarrow\; t=\sin x,\quad \int r(\cos x)\sin x dx \;\Rightarrow\; t=\cos x$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 4 К интегралам от рациональных функций с помощью двух последова тельных замен приводятся и такие интегралы $\int r(x,\sqrt{1-x^2})dx \;\Rightarrow\; x:=\sin t,\; u:=tg\dfrac{t}{2}$;

$\int r(x,\sqrt{1+x^2})dx \quad \Rightarrow \quad x:=tg\,t,\ u:=tg\frac{t}{2};$ $\qquad \int r(x,\sqrt{x^2-1})dx \quad \Rightarrow \quad x:=\frac{1}{\sin t},\ u:=tg\frac{t}{2}.$

Опр. Разобьем отрезок $[a,b]$ точками $a=:x_0<...<x_{\overline{n:}}:=b$ на n попарно непересекающихся отрезков, и обозначим это разбиение $T:=\{x_k\}$. Длина наибольшего из отрезков $d(T):=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$, где $\Delta x_k:=x_k-x_{k-1}$, называется диаметром разбиения T отрезка $[a,b]$.
ЗАМЕЧАНИЕ При $d(T)\to 0$ число n отрезков разбиения стремится к бесконечности, а длины всех этих отрезков равномерно стремятся к нулю.

Опр. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция. Произведем разбиение $[a,b]$, и выберем на k-ом отрезке разбиения точку ξ_k, $k\le n$. Обозначим $E:=\{\xi_k\}$. Сумма вида

$$S_f(T,E):=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

называется интегральной суммой. Если существует конечный предел $s:=\lim\limits_{d(T)\to 0} S_f(T,E)$, равномерный относительно выбора точек E:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall d(T)<\delta\ \forall E=E(T)\quad |S_f(T,E)-s|<\varepsilon,$$

то он называется определенным интегралом (Римана) функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а $f(x)$ - интегрируемой по Риману функцией.

Обозначение. $\int\limits_a^b f(x)dx:=s$.

Пр.

Джон Валлис (1616-1703) - английский математик впервые ввел понятие определенного интеграла для равных отрезков разбиения (1656) (был арифметизирован предельный переход), и в современной терминологии вычислил несколько определенных интегралов для степенной функции и близких к ней функций (термин интеграл ввел И.Бернулли (1690). Обозначение дал Лейбниц (1686)).
Ввел термин интерполирование и знак ∞.

Бернгард Риман (1826-1866) – выдающийся немецкий математик.
В 1854 г. определил процедуру интегрирования, которую впоследствии назвали его именем.
Обобщая геометрию Евклида и Лобачевского, развил теорию обобщенных римановых пространств. Прорывные результаты в теории чисел, теории функций комплексного переменного, теории уравнений в частных производных, теории тригонометрических рядов.

Опр. Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы две функции $g(x) \le f(x)$. Множество точек $D_{g,f}(a,b) := \left\{(x,y) \in \tilde{\mathbb{R}}^2 : a \le x \le b,\ \ g(x) \le y \le f(x)\right\}$ называется криволинейной трапецией .

Опр. Если существует определенный интеграл $\int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx := \lim\limits_{d(T)\to 0} S_{f-g}(T,E)$,

то он называется площадью криволинейной трапеции.

Пр.

Опр. Функция $f(x)$ называется кусочно непрерывной на $[a,b]$, если она непрерывна на $[a,b]$ за исключением конечного числа точек разрыва первого рода.

ЗАМЕЧАНИЕ Кусочно непрерывная функция ограничена на $[a,b]$.

Опр. Функция $f(x)$ называется кусочно монотонной на $[a,b]$, если она ограничена и для некоторого разбиения $T := \{x_k\}$ $f(x)$ не убывает или не возрастает на каждом интервале (x_{k-1}, x_k) (термины ввел К.Нейман).

Пр.

ТЕОРЕМА 4.3 (*существования интеграла Римана*) 1) Если $f(x)$ кусочно непрерывна или кусочно монотонна на $[a,b]$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует.

2) Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует, то $f(x)$ ограничена на $[a,b]$.

ТЕОРЕМА 4.4 (*свойства определенного интеграла*)

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx + \beta\int\limits_a^b g(x)dx$, если хотя бы два из этих интегралов существуют $\exists \alpha, \beta,\ \alpha\beta \ne 0$.

2) Если $\forall x \in [a,b]$ $g(x) \le f(x)$, то $\int\limits_a^b g(x)dx \le \int\limits_a^b f(x)dx$.

3) Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$m := \inf_{x\in[a,b]} f(x),\ M := \sup_{x\in[a,b]} f(x), \text{ то } m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

4) (*теорема о среднем*) Если $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ знакопостоянна на $[a,b]$, то $\exists \xi \in (a,b)$ $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(\xi)\cdot\int\limits_a^b g(x)dx$ при условии существования интегралов.

5) $\forall c \in [a,b]$ $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Если при определении определенного интеграла разбиение отрезка $[a,b]$ проводить убывающей последовательностью точек $a =: x_n < x_{n-1} < ... < x_0 := b$, то

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{d(T)\to 0} S_f(T[b,a],E) = -\lim_{d(T)\to 0} S_f(T[a,b],E) = -\int_a^b f(x)dx.$$

Это согласуется с равенством $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Кроме знания факта существования интеграла и его свойств необходим еще алгоритм вычисления определенного интеграла.

Опр. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Можно оказать, что она интегрируема на каждом $[a,x]$, $x \in [a,b]$. Функция $\Phi(x) := \int_a^x f(t)dt$ называется интегралом с переменным верхним пределом.

ТЕОРЕМА 4.5 (*правила вычисления определенного интеграла*)

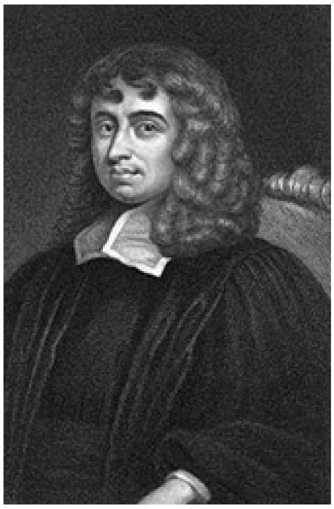
1) Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то функция $\Phi(x) := \int_a^x f(t)dt$ является ее первообразной

2) (*формула Ньютона-Лейбница*) Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $F(x)$ какая-либо ее первообразная, то $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

3) (*формула замены переменной*) Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta]$ и $\forall t \in [\alpha,\beta]$ $\varphi(t) \in [a,b]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

4) (*формула интегрирования по частям*) Если функции $u(x), v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, то $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\,|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$, где $u(x)v(x)\,|_a^b := u(b)v(b) - u(a)v(a)$.



Исаак Барроу (1630-1677) - английский математик, физик, богослов. Читал лекции по математике второкурснику И.Ньютону. Впоследствии были изданы книгой, и куплены Лейбницем в 1673 г Книга посвящена одному-единственному принципу: между задачами о касательных и задачами о площадях имеется двойственность. Но приверженность геометрическому подходу (180 рис.) в изложении и отсутствие изложения в терминах переменной и функции не позволили большинству читателей оценить значение этой связи.

В книге регулярно используется формула замены переменных в

определенном интеграле, интегрирование дифференциальных уравнений с разделяющи мися переменными. Ньютон даже никогда не оспаривал приоритет Барроу в открытии формулы Ньютона-Лейбница и метода решения уравнений разделением переменных.
ЗАМЕЧАНИЕ Если функция $f(x)$ интегрируемая и четная (нечетная) на отрезке $[-a,a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx \quad \left(\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0\right)$.

Пр.

———

ЗАМЕЧАНИЕ Если $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a,b]$, то для любого разбиения T этого отрезка по формуле Лагранжа найдется последовательность точек E со свойством $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b)-F(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} F(x_k)-F(x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = S(T,E)$, то есть определенный интеграл совпадает с некоторой интегральной суммой функции.

Опр. Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]$. Сумма вида $S(A,E) := \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})\cdot A_k^{(n)}$, где $a \le x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \le b,\ A := \{A_k^{(n)}\} \subset \mathbb{R}$, называется квадратурной формулой, числа $x_k^{(n)}$ - узлами квадратурной формулы, а числа $A_k^{(n)}$ - коэффициентами. Число $R_f(A,E) := \int\limits_{a}^{b} f(x)dx - S(A,E)$ называется остаточным членом квадратурной формулы.

Из многочисленных приближенных формул вычисления интеграла приведем формулу прямоугольников.

ЗАМЕЧАНИЕ Разобьем $[a,b]$ равноотстоящими точками $x_k := a+hk,\ h := \dfrac{b-a}{n},\ k \ge 0$, на n отрезков одинаковой длины. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную произ водную второго порядка на $[a,b]$, то квадратурная формула прямоугольников имеет вид

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k')\cdot h + R_f(A,E),\ \text{где}\ x_k' := \frac{x_k + x_{k-1}}{2}\ \text{ и }\ \exists \eta \in [a,b]\ \ R_f(A,E) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta)$$

Пр.

———

Опр. Пусть кривая l задана параметрическим уравнением $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t \in [\alpha,\beta]$. Фикси руем разбиение $T = \{t_k\}$ и выберем точки кривой $M_k := (x(t_k), y(t_k)) \in l,\ k = 0,1,\ldots,n$. Так как длина отрезка $M_{k-1}M_k,\ k = 1,\ldots,n$ равна $s_k := \sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}$, то длина ломаной l_T, составленной из этих отрезков и вписанной в l, равна $s(l_T) := \sum\limits_{k=1}^{n} s_k$. Если существует конечный $\sup\limits_{T} s(l_T) =: s(l)$, то он называется длиной кривой l, а сама кривая

называется спрямляемой.
Кпр.

Опр. Кривая l называется кусочно гладкой, если ее можно разбить на конечное число гладких кусков.

ТЕОРЕМА 4.6 (*геометрические приложения определенного интеграла*)

1) (*вычисление длины дуги*) Если кривая l кусочно гладкая, то она спрямляемая. Ее длина вычисляется по формуле $s(l)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$.

В случае задания l функцией $y=f(x),\ x\in[a,b]$, $s(l)=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$. В случае задания l в полярной системе координат: $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$, $s(l)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi$.

2) (*вычисление площади*) Пусть дан криволинейный сектор $D:=\{(\rho,\varphi):\varphi\in[\alpha,\beta],\ 0\le\rho\le\rho(\varphi)\}$, где функция $\rho=\rho(\varphi),\ \varphi\in[\alpha,\beta]$, непрерывна. Тогда площадь сектора существует и вычисляется по формуле $s(D)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$.

3) (*вычисление объема*) Пусть функция $y=f(x),\ x\in[a,b]$ непрерывна и неотрицательна. Тогда объем тела, получаемого вращением криволинейной трапеции $D:=\{(x,y):x\in[a,b],\ 0\le y\le f(x)\}$ вокруг отрезка $[a,b]$ оси OX, существует и вычисляется по формуле $v(G):=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)dx$.

4) (*вычисление площади поверхности*) Пусть функция $y=f(x), x\in[a,b]$, кусочно гладкая и неотрицательна. Тогда площадь боковой поверхности $\mathcal{L}$ тела, получаемого вращением криволинейной трапеции $D:=\{(x,y):x\in[a,b],\ 0\le y\le f(x)\}$ вокруг отрезка $[a,b]$ оси OX, существует и вычисляется по формуле $s(\mathcal{L})=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$.

Пр.

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена на $\overline{[a,\infty)}$ и интегрируема на каждом отрезке $[a,R],\ R>a$. Если существует конечный предел $\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx=:\int_a^{\infty}f(x)dx$, то он называется несобственным интегралом функции $f(x)$ на промежутке $[a,\infty)$. В этом случае говорят, что несобственный интеграл сходится (термин – Штуди, 1901).

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Аналогично определяется несобственный интеграл

$\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{a} f(x)dx =: \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$. Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$, при условии, что несобственные интегралы в правой части существуют при некотором $a \in \mathbb{R}$.
Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 (*признаки сходимости несобственного интеграла*)
1) Пусть $\forall x \geq a \;\; 0 \leq g(x) \leq f(x)$, $g(x)$ интегрируема на каждом отрезке $[a,R]$ и сходится интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$. Тогда сходится интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)dx$.
2) Пусть $\forall x \geq a \;\; 0 \leq g(x) \leq f(x)$, $g(x), f(x)$ интегрируемы на каждом отрезке $[a,R]$ и интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)dx$ расходится. Тогда расходится интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$.
3) Пусть $\forall x \geq a \;\; g(x), f(x) > 0$, $g(x), f(x)$ интегрируемы на каждом отрезке $[a,R]$ и существует конечный положительный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Тогда интегралы $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx,\; \int\limits_{a}^{\infty} g(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a,b)$, не ограничена в окрестности точки b и интегрируема на каждом $[a,b-\varepsilon],\, \varepsilon > 0$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx =: \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$, то он называется несобственным интегралом от неограниченной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. В этом случае говорят, что несобственный интеграл сходится.
Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Аналогично определяется несобственный интеграл $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx =: \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$. Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ за исключением точки $c \in (a,b)$, в окрестности которой она не ограничена. Несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx := \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx$ при условии, что несобственные интегралы в правой части существуют.
ЗАМЕЧАНИЕ 2 Аналогичные признаки сходимости имеют место для несобственного интеграла на конечном отрезке.
Пр.

ИСТОЧНИКИ

Опорный конспект лекций на сайте skif@donstu.ru $\Rightarrow$ *библиотека электронных ресурсов ДГТУ* $\Rightarrow$ *факультет ИВТ* $\Rightarrow$ *кафедра прикладной математики*

Учебники:

Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Аналитическая геометрия. Т.1.

Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2.

Задачники:

Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии

Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.

Решебники:

Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1,2.

Взять на абонементе или скачать на сайте *www. techlibrary*

СПИСОК ВОПРОСОВ К ПЕРВОМУ РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ

1. Опр. высказывания, логической формулы и булевой функции. Пр. 2. Опр. обрат ной, противоположной теорем и метода доказательства от противного. Пр. 3. Опр. предиката и кванторов общности и существования. Пр.

4. Опр. СЛАУ, совместной и определенной СЛАУ. Пр. 5. Опр. матрицы, транспониро ванной матрицы и алгебраического дополнения элемента матрицы. Пр. 6. Опр. суммы матриц, произведения матрицы на число и произведения матриц.

7. Опр. векторного пространства (ВП). 8. 5 примеров векторных пространств. 9. Опр. декартова произведения множеств и векторных пространств. Пр. 10. Опр. линейной комбинации элементов, линейно независимых элементов и базиса в ВП. 11. Опр. скалярного произведения и нормы в векторном пространстве. Пр. 12. Опр. отображения множеств, линейного и полилинейного отображений ВП. Пр. 13. Опр. n-мерных евклидова векторного и евклидова (точечного) пространств. 14. Опр. ДСК и полярной системы координат. 15. Опр. символа Кронекера, ортонормированного базиса и прямоугольной ДСК. 16. Опр. компонент элемента, радиуса-вектора и координат точки. 17. Опр. сферической и цилиндрической систем координат.

18. Опр. проекции вектора на ось и ее свойства. 19. Опр. правой тройки и векторного произ ведения. 20. Физические смыслы скалярного, векторного произведений. 21. Опр. смешанного произведения и геом. смыслы модулей векторного и смешанного произве дений.

22. Опр. плоскости и три аналитических способа ее задания. 23. Опр. прямой и три способа ее задания в пространстве. 24. Опр. кривой второго порядка и эллипса. Уравне ние. 25. Опр. гиперболы и параболы. Уравнение. 26. Опр. и рисунки эллипсоида, одно- и двуполостных гиперболоидов. 27. Опр. и рисунки эллиптического, гиперболического параболоидов и конуса. 28. Опр. и свойства ортогональной и симметричной матриц.

29. Опр. квадратичной формы, канонической и эквивалентных квадратичных форм. Пр. 30. Опр. характеристического многочлена и характеристического числа матрицы, собственного числа и собственного вектора оператора. 31. Опр. движения и элементар ные движения. 32. Опр. матрицы оператора, изоморфизма ВП и критерий изоморфизма.

СПИСОК ВОПРОСОВ КО ВТОРОМУ РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ

1. Опр. числовой последовательности, ограниченной сверху и монотонно убывающей числовых последовательностей. Пр. 2. Опр. предела последовательности и последова тельности, стремящейся к бесконечности. 3. Опр. числового ряда, частичной суммы и сходящегося числового ряда. Пр 4. Опр. геометрического и гармонического рядов. Признаки сходимости. Пр.

5. Опр. множества, разбиения и разности множеств. Пр. 6. Опр. ограниченных множеств, верхней и нижней граней множества. Пр. 7. Опр. Равномощных множеств, счетного множества и множества мощности континуум. Пр. 8. Опр. инъективного, сюръективного и биективного отображений. Пр. 9. Опр. композиции отображений и сужения отображения. Пр. 10. Опр. обратных отображений и связь с биективностью. Пр.

11. Опр. основных элементарных и элементарных функций. 12. Опр. гиперболи ческих, рациональной функций и функции Дирихле. Пр. 13. Опр. ε - окрестности, предельной точки и предела функции. Пр. 14. Опр. бесконечно малой (БМ), эквива лентных БМ, и БМ более вы сокого порядка. Пр. 15. Опр. первого, второго замечательных пределов, числа e и натурального логарифма. Пр. 16. Опр. непре рывности в точке, на множестве. Пр. 17. Опр. устранимой точки разрыва, пределов слева и справа. Пр. 18. Опр. точек разрыва первого, второго рода. Пр.

19.Опр. производной и связь с непрерывностью. Пр. 20. Геометрический и физический смыслы производной. Пр. 21. Опр. дифференциала. Связь с производной. Формула вычисления. Пр. 22. Опр. производной n-ого порядка и числа сочетаний. Формула Лейбница. 23. Опр. кривой и параметрического задания. Гладкая кривая. Пр. 24. Опр. локального максимума. Необходимое и достаточное условия максимума. Пр. 25. Опр. выпуклой кривой. Необходимое и достаточное условия выпуклости. Пр. 26. Опр. многочлена Тейлора, формула Тейлора и остаточного члена в форме Лагранжа.

27. Опр. первообразной, неопределенного интеграла и Замечание. 28.Опр. кратности нуля функции, теорема Гаусса. Пр. 29. Опр. простейших дробей и метод неопределен. коэффициентов на примере. 30. Опр диаметра разбиения, интегральной суммы и определенного интеграла. 31. Опр. кусочно непрерывных и кусочно монотонных функций. Пр. Теорема существования определенного интеграла. 32. Опр. криволинейной трапеции, гребешка Дирихле. Геометрический смысл определенного интеграла.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПЕРВОГО СЕМЕСТРА

1* Опр. СЛАУ, совместной и определенной СЛАУ. Пр. **2*** Опр. суммы матриц, произведения матрицы на число и произведения матриц. Пр.

3. Опр. векторного пространства (ВП). Пр. **4.** Опр. декартова произведения множеств и ВП. Пр. **5.** Опр. линейной комбинации элементов, линейно независимых элементов и базиса в ВП. Пр. **6.** Опр. скалярного произведения и нормы в ВП. Пр. **7.** Опр. отображе ния множеств, линейного и полилинейного отображений ВП. Пр. **8*** Опр. n-мерных евклидова векторного и евклидова (точечного) пространств. Пр. **9.** Опр. ДСК, полярной системы координат. **10**. Опр. символа Кронекера, ортонормированного базиса и ПДСК. Пр. **11**. Опр. компонент элемента, радиуса-вектора и координат точки. **12*** Опр. правой тройки и векторного произведения. Пр. **13**. Физические смыслы скалярного, векторного произведений. **14.** Опр. смешанного произведения и геом. смыслы модулей векторного и смешанного произведений.

15* Опр. плоскости и прямой в пространстве. Два способа их задания. **16*** Опр. кривой второго порядка и эллипса. Уравнение и график. **17**. Опр. гиперболы и параболы. Уравнение и график. **18*** Опр. характеристического уравнения, собственных чисел и собственных векторов матрицы.

19. Опр. числовой последовательности и ее предела. Пр. **20*** Опр. числового ряда, частичной суммы и суммы ряда. Пр. **21*** Опр. объединения, пересечения и разности множеств. Пр. **22**. Опр. ограниченных множеств, верхней и нижней граней множества. Пр. **23**.Опр. инъективного, сюръективного и биективного отображений. Пр. **24**. Опр. композиции отображений и сужения отображения. Пр. **25**. Опр. 5 классов основных элементарных и элементарных функций. Пр. **26**. Опр. гиперболических, рациональной функций и функции Дирихле. Пр. **27*** Опр. числа сочетаний, числа e и натурального логарифма. Пр. **28**. Опр. $\varepsilon-$окрестности, предельной точки и предела функции. Пр. **29*** Опр. непрерывности в точке, на множестве и примеры. **30**. Опр. устранимой точки разрыва, пределов слева и справа. **31**. Опр. точек разрыва первого, второго рода и примеры.

32* Опр. асимптоты и касательной. **33***Опр. производной и её геометрический смысл. **34**. Опр. дифференциала. Формула вычисления. Пр. **35*** Опр. кривой и параметриче ского задания. Пр. **36**. Опр. локальных экстремумов. Пр. **36**. Опр. выпуклых (вниз), вогнутых Выпуклых вверх) кривых и точки перегиба. **38**. Опр. многочлена Тейлора, остаточного члена, формула Тейлора.

39* Опр. первообразной, неопределенного интеграла и замечание. **40*** Опр. кратности нуля функции и теорема Гаусса. Пр. **41**. Опр. разбиения, диаметра разбиения. Пр. **42*** Опр. интегральной суммы и определенного интеграла. **43**. Опр. криволинейной трапеции, функции и гребешка Дирихле. **44**. Опр. кусочно непрерывных и кусочно монотонных функций. Пр. Теорема существования. **45*** Опр несобственного интеграла на отрезке бесконечной длины. Пр.

СПИСОК ТЕОРЕМ К ЭКЗАМЕНУ ПЕРВОГО СЕМЕСТРА

1) Т.2.1 о свойствах определителя. 2) Т.2.2 о разрешимости СЛАУ.
3) Т.2.4 о свойствах проекции. 4) Т.2.6 о свойствах векторного приведения.
5) Т.2.8 о свойствах плоскости. 6) Т.2.10 о свойствах эллипса.
7) Т.3.3 о свойствах пределов функций. 8) Т.3.5 о свойствах непрерывных функций.
9) Т.3.6 о правилах дифференцирования. 10) Т.3.9 о локальном экстремуме.
11) Т.3.10 о выпуклости и точке перегиба. 12) Т.4.1 о свойствах неопределен. интеграла.
13) Т.4.4 о свойствах опред. интеграла. 14) Т.4.5 о правилах вычисления опред. интеграла

СПИСОК ТИПОВ ЗАДАЧ К ЭКЗАМЕНУ ПЕРВОГО СЕМЕСТРА

1) Перемножить матрицы. **2**) Найти ранг матрицы. **3**) Найти обратную матрицу.
4) Вычислить определитель. **5**) Решить СЛАУ по формуле Крамера.
6) Найти общее решение СЛАУ.
7) Вычислить скалярное, векторное, смешанное произведения векторов.
8) Найти уравнение прямой, проходящей через точку и $\perp$ или $\parallel$ плоскости.
9) Найти объем тетраэдра и площадь треугольника, построенных на векторах как на сторонах.
10) Найти расстояния: а) от точки до прямой, б) между двумя прямыми.
11) Определить взаиморасположение прямых (и, или) плоскостей.
12) Найти пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
13) Найти точки разрыва функции $y = f(x)$ и определить их характер.
14). Найти промежутки монотонности и экстремальные значения функции на отрезке $[a,b]$.
15) Найти промежутки выпуклости-вогнутости и точки перегиба функции $y = f(x)$.
16) Найти вертикальные и горизонтальные асимптоты функции $y = f(x)$.
17) Вычислить неопределен. интеграл. **18**) Вычислить площадь криволинейной трапеции.