ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

«Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка» по дисциплине

«Математика»

Авторы
Рябых Г. Ю.,
Ворович Е. И.,
Тукодова О. М.,
Фролова Н. В.,
Пристинская О. В.

Ростов-на-Дону, 2021

Аннотация

Учебное пособие предназначено для аудиторной и самостоятельной работы при различных видах обучения: очном, заочном и дистанционном. Для студентов всех направлений и специальностей.

Авторы

канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Рябых Г.Ю.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ворович Е.И.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Тукодова О.М.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пристинская О.В.

Оглавление

1. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ

Общий вид:

$$F(x,y,y',y'')=0 \qquad (1)$$

Если уравнение разрешено относительно y''

$$y''=f(x,y,y') \qquad (2)$$

Для записи общего решения дифференциального уравнения второго порядка требуется две произвольные постоянные (теорема о количестве произвольных постоянных в записи общего решения дифференциального уравнения). Это иллюстрирует пример 1, где y' и y определялись подбором.

Пример 1:

$$y''=x$$

$$y'=\frac{x^2}{2}+C$$

$$y=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$$

Итак, дифференциальное уравнение второго порядка имеет бесчисленное множество решений, которые выражаются формулой $y=\varphi(x,C_1,C_2)$, содержащей две произвольные постоянные. Эта совокупность решений называется <u>общим решением.</u>

Для отыскания частных решений задаются начальные условия:

$$\begin{cases} y(x_0)=x_0 \\ y'(x_0)=y^* \end{cases} \qquad (3)$$

Начальные условия (3) означают, что в некоторой точке x_0 задается значение неизвестной функции y_0 и её производной y^*

Пример (продолжение примера 1)

Найдем частное решение дифференциального уравнения из примера 1, соответствующее начальным условиям

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

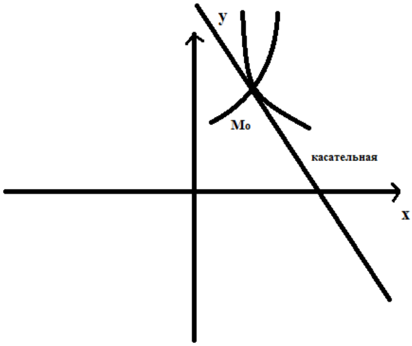
При подстановке y' и y в равенства начальных условий получим C_2=0, C_1=1. Таким образом, $y_ч = \frac{x^3}{6} + x$

1.1 Геометрический смысл начальных условий дифференциального уравнения второго порядка

Уравнения интегральных кривых уравнения (1) имеют вид $y = \varphi(x, C_1, C_2)$. Их бесчисленное множество. Первое из начальных условий (3) задает точку $M_0(x_0, y_0)$ на плоскости XOY и с его помощью определяется одна из произвольных постоянных, например C_2 .

Уравнения интегральных кривых, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$, $y = \varphi(x, C_1)$, их тоже бесчисленное множество

Второе из начальных условий (3) задает угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в точке M_0 ($y'(x_0) = k_{кас}$-угловой коэффициент касательной) ,то есть выделяет единственную интегральную кривую, которая является графиком частного решения дифференциального уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям (3)



1.2 Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения второго порядка

Если в уравнении $y''=f(x,y,y')$ функция $f(x,y,y')$ непрерывна при значениях x_0, y_0, y^* ,то существует решение $y=\varphi(x)$, такое что $y(x_0)=y_0$, $y'(x)=y^*$

Если, кроме того, непрерывны так же и частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial y'}$,то такое решение единственно.

Замечание: является ли функция $y=\frac{2^3}{6}+C_1x-C_2\left(x-\frac{1}{C_2}\right)$ общим решением дифференциального уравнения $y''=x$?

$$y'=\frac{x^2}{2}+C_1-C_2$$

$y''=x \rightarrow y$ является решением уравнения

Но

$$y=\frac{x^3}{6}+C_1x-C_2x+1=\frac{x^3}{6}+x(C_1-C_2)+1=\{\text{обозначим } C_1-C_2=C\}=\frac{x^3}{6}+C_1x+1$$

,то есть y фактически содержит только одну произвольную постоянную и общим решением не является

Вывод: функция $y=\varphi(x, C_1, C_2)$ является общим решением для дифференциального уравнения (1), если

1)она удовлетворяет уравнению

2)содержит фактически две произвольные постоянные

3)любое частное решение, соответствующее заданным начальным условиям вида (3),можно получить из неё при конкретных значениях C_1 и C_2

2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Уравнение вида $y''+py'+qy=f(x)$ (1),

где p и q – постоянные величины, называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если $f(x)\neq 0$, уравнение называется неоднородным, если $f(x)\equiv 0$ – однородным.

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (1), имеет вид

$$y''+py'+qy=0 \qquad (2).$$

Введем обозначения: $y_н$ – общее решение уравнения (1), $y_о$ – общее решение уравнения (2), $\overline{y}$ – какое-либо, любое частное решение уравнения (1).

Можно доказать, что $y_н$ можно получить следующим образом:

$$y_н = y_о + \overline{y} \qquad (3)$$

Таким образом, поиск $y_н$ разбился на две части:

1) определение $y_о$;

2) определение $\overline{y}$.

3. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ (4) называется характеристическим уравнением уравнения (2).

(4) – квадратное уравнение и, следовательно, имеет 2 корня, обозначим их k_1 и k_2. Дискриминант уравнения (4) обозначим D.

$$D = p^2 - 4q$$

Здесь возможны три случая:

1) k_1 и k_2 – действительные и $k_1 \neq k_2$ (при этом $D > 0$)

2) k_1 и k_2 – действительные и $k_1 = k_2$ (при этом $D = 0$)

3) k_1 и k_2 – комплексно-сопряженные, то есть $k = \alpha \pm i\beta$ (при этом $D < 0$)

Для каждого случая выведена формула для определения общего решения линейного однородного уравнения $y_о$.

1) $k_1 \neq k_2$ $\qquad y_о = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ $\qquad$ (5)

2) $k_1 = k_2 = k \quad y_o = e^{kx}(C_1 x + C_2)$ (6)

3) $k = \alpha \pm i\beta \quad y_o = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$ (7)

<u>Примеры</u>. Найти общее решение линейного однородного уравнения

1) $y'' - 7y' + 12y = 0$

Шаг 1: составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 7k + 12 = 0$$

Шаг 2: находим корни характеристического уравнения:

k_1 =3, k_2 =4. Здесь $k_1 \neq k_2$, случай 1,

Шаг 3: выписываем решение, формула (5).

$$y_o = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$$

2) $y'' + 10y' + 25y = 0$

$$k^2 + 10k + 25 = 0 \qquad k = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = -5$$

Здесь $D = 0$, $k_1 = k_2$ = -5, случай 2, y_o находим по формуле (6)

$$y_o = e^{-5x}(C_1 x + C_2)$$

3) $y'' - 3y' + 3y = 0$

$$k^2 - 3k + 3 = 0$$

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Здесь случай 3, $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, для y_o выбираем формулу (7)

$$y_o = e^{\frac{3}{2}x}(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

4) $y'' - 4y' = 0$

$k^2 - 4k = 0 \qquad k(k-4) = 0$

k_1=0, k_2=4, $k_1 \neq k_2$, случай 1), формула (5).

$y_o = C_1 e^0 + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}$

5) $y'' - 4y = 0$

$k^2 - 4 = 0$

k_1=2, k_2= -2, $k_1 \neq k_2$, случай 1), формула (5).

$y_o = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

6) $y'' + 4y = 0$

$k^2 + 4 = 0 \qquad k^2 = -4,\ k = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

Здесь случай 3, $\alpha = 0$, $\beta = 2$, формула (7)

$$y_o = e^0 (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Определение $\bar{y}$. Метод неопределенных коэффициентов

Отметим, что $\bar{y}$ – любое частное решение уравнения (1). Это означает, что в качестве $\bar{y}$ можно взять любую функцию $y(x)$, такую, что при подстановке ее и ее производных в уравнение (1) последнее превращается в тождество.

Метод неопределенных коэффициентов – метод подбора $\bar{y}$. Он разработан для тех уравнений вида (1), у которых правая часть имеет спе- циальный вид.

Введем обозначения

$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ – многочлен степени n.

Например: $3x^4 - 2x^2 + 1$ обозначим $P_4(x)$,

$1 - x^2$ – $P_2(x)$,

$3x + 1$ – $P_1(x)$,

Постоянные будем обозначать $P_0(x)$, считая их многочленами нулевой степени. Например, числа 3 или -2 обозначим $P_0(x)$.

Рассмотрим 3 типа правых частей уравнения (1), для которых выведены формулы подбора $\overline{y}$.

Сводная таблица вида частного решения для различных типов правых частей.

<u>Таблица</u> 1.

$f(x)$	Вид частного решения уравнения (1) $\overline{y}$
1) $f(x) = e^{\mu x} P_n(x)$	$\bar{y} = x^l e^{\mu x} Q_n(x)$ (8) $l = \begin{cases} 0, \textit{если } \mu \neq k_1 \textit{ и } \mu \neq k_2, \textit{ то есть } \mu - \textit{не корень уравнения } (4) \\ 1, \quad \textit{если } \mu = k_1 \textit{ или } \mu = k_2, k_1 \neq k_2 \\ 2, \quad \textit{если } \mu = k_1 = k_2 \end{cases}$ $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

Замечание 1. $f(x)=P_n(x)$ – частный случай $f(x)$ первого типа при $\mu=0$. $f(x)=Ae^{\mu x}$ (А – постоянная величина) – частный случай $f(x)$ первого типа, здесь $P_n(x)$ =A – многочлен нулевой степени. Замечание 2. Как записывается $Q_n(x)$. Обозначим неопределенные коэффициенты A, B, C, … Тогда $Q_0(x)=A$, $Q_1(x)=Ax+B$, $Q_2(x)=Ax^2+Bx+C$, $Q_3(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$,…	
2) $f(x)=e^{\mu x}(M\cos\gamma x+N\sin\gamma x)$, где M и N – постоянные.	$\bar{y}=x^l e^{\mu x}(A\cos\gamma x+B\sin\gamma x)$ (9) $l=\begin{cases}0, & \text{если } \mu+i\gamma \text{ – не является корнем характеристического уравнения } (4)\\ 1, & \text{если } \mu+i\gamma \text{ – корень характеристического уравнения } (4)\end{cases}$ А и В–неопределенные коэффициенты.

3) $f(x)=e^{\mu x}(P_n(x)\cos\gamma x+R_m(x)\sin\gamma x)$ Здесь $R_m(x)-$ многочлен степени m,	$\bar{y}=x^l e^{\mu x}(Q_k(x)\cos\gamma x+L_k(x)\sin\gamma x)$ (10) $l=\begin{cases}0, & \textit{если } \mu+i\gamma - \textit{не является корнем} \\ & \textit{характеристического уравнения } (4) \\ 1, & \textit{если } \mu+i\gamma - \textit{корень} \\ & \textit{характеристического уравнения } (4)\end{cases}$ $Q_k(x)$ и $L_k(x)$ – многочлены степени k с неопределенными коэффициентами $k=\max(n,m)$

Конкретные значения неопределенных коэффициентов A,B,C, … находятся из того условия, что $\bar{y}$ должно удовлетворять уравнению (1).

Для их определения подставляем $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в исходное уравнение (1) и подбираем A,B,C,… так, чтобы уравнение превратилось в равенство.

Алгоритм определения $\bar{y}$ – частного решения неоднородного уравнения (1).

1) Находим корни k_1 и k_2 характеристического уравнения (4).

2) Анализируем правую часть $f(x)$, определяем ее тип и выписываем $\bar{y}$ с неопределенными коэффициентами по соответствующей формуле (таблица 1).

3) Подставляем $\bar{y}$ и ее производные в исходное уравнение и составляем систему уравнений для определения не-

определенных коэффициентов. Решаем систему, находим конкретные значения коэффициентов.

4) Подставляем найденные значения коэффициентов в формулу для $\overline{y}$.

<u>Алгоритм определения $y_н$ – общего решения неоднородного уравнения (1).</u>

1) Находим y_o – общее решения соответствующего однородного уравнения (1) (формулы (5)-(7)).

2) Находим $\overline{y}$ (таблица 1, формулы (8)-(10)).

3) Составляем $y_н = y_o + \overline{y}$.

<u>Замечание</u>. Принцип суперпозиции. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x)$ представляет из себя сумму нескольких функций

$$f(x) = f_1(x) + \ldots + f_k(x).$$

Тогда частное решение уравнения (1) можно искать в виде

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \ldots + \bar{y}_k \quad (11),$$

где $\bar{y}_i$ – частное решение уравнения (1), соответствующее правой части $f_i(x)$.

<u>Примеры</u>

1) Найти общее решение уравнения

$y'' + 3y' + 2y = x\sin x$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 3k + 2 = 0$, его корни $k_1 = -1$, $k_2 = -2$. Здесь $k_1 \neq k_2$, случай 1, решение однородного уравнения выписывается по формуле (5): $y_o = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

$f(x) = x\sin x$ – правая часть третьего типа, $\overline{y}$ определяется формулой (10).

Здесь $\mu = 0$ и $\gamma = 1$, $\mu + i\gamma = i$ не является корнем характеристического уравнения $\rightarrow\ l = 0$.

$R_m(x) = x$ – многочлен первой степени (m=1).

$P_n(x) = 0$ – многочлен нулевой степени (n=1).

В формуле (10) $k = \max(0,1) = 1 \rightarrow$ $Q_k(x) = Q_1(x) = A_1 x + A_2$ $L_k(x) = L_1(x) = B_1 x + B_2$

$$\overline{y} = (A_1 x + A_2)\cos x + (B_1 x + B_2)\sin x\,,$$

$$\overline{y}' = (A_1 + B_2 + B_1 x)\cos x + (B_1 - A_2 - A_1 x)\sin x\,,$$

$$\overline{y}'' = (2B_1 x - A_2 - A_1 x)\cos x - (2A_1 + B_2 + B_1 x)\sin x\,.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, будем иметь

$$(2B_1 - A_2 - A_1 x)\cos x - (2A_1 + B_2 + B_1 x)\sin x +$$

$$3(A_1 + B_2 + B_1 x)\cos x + 3(B_1 - A_2 - A_1 x)\sin x +$$

$$+ 2(A_1 x + A_2)\cos x + (B_1 x + B_2)\sin x = x\sin x$$

$$[(A_1 + 3B_1)x + 3A_1 + A_2 + 2B_1 + 3B_2]\cos x + [(-3A_1 + B_1)x - 2A_1 - 3A_2$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно A_1, A_2, B_1, B_2

$$\begin{cases} A_1 + 3B_1 = 0 \\ 3A_1 + A_2 + 2B_1 + 3B_2 = 0 \\ -3A_1 + B_1 = 1 \\ 2A_1 - 3A_2 + 3B_1 + B_2 = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A_1 = -\frac{3}{10}$, $A_2 = \frac{17}{50}$, $B_1 = \frac{1}{10}$, $B_2 = \frac{3}{25}$ и частное решение $\bar{y}$ запишется так:

$$\bar{y} = \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{13}{25}\right)\sin x.$$

Общее решение данного уравнения

$$y_н(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} +$$

$$\left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{13}{25}\right)\sin x.$$

2) Проинтегрировать уравнение $y'' + 4 \cdot y' + 20 \cdot y = 34 \cdot e^{-x}$.

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 4y' + 20y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\mathrm{k}^2 + 4k + 20 = 0$ имеет корни

$$k_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{-4 \pm 8i}{2} \quad k_1 = -2 + 4i, \quad k_2 = -2 - 4i$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется формулой

$$y_o = e^{-2\cdot x}\cdot\left(C_1\cdot\cos 4x + C_2\cdot\sin 4x\right).$$

Переходим к отысканию частного решения исходного уравнения.

Так как в данном случае $\varphi(x) = 34e^{-x}$ (т.е. имеет вид $f(x) = ae^{mx}$, где $a = 34$, $m = -1$) и $m = -1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y_1 = Ae^{-x}.$$

Найдя производные этой функции

$$y'_1 = -Ae^{-x} \text{ и } y''_1 = Ae^{-x},$$

и подставляя выражения для $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y'_1}$ $\boldsymbol{y''_1}$ в исходное уравнение, получаем

$$Ae^{-x} - 4Ae^{-x} + 20Ae^{-x} = 34e^{-x}.$$

Так как y_1 - решение уравнения, то последнее равенство выполняется для всех x, т.е. является тождеством:

$$17Ae^{-x} = 34\cdot e^{-x}$$

откуда $17A = 34$, $A = 2$. Следовательно, частное решение имеет вид

$$y = 2\cdot e^{-x}.$$

Соответственно, общее решение

$$y = e^{-2\cdot x}\cdot\left(C_1\cdot\cos 4x + C_2\cdot\sin 4x\right) + 2\cdot e^{-x}.$$

3) Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 3e^{x}$.

Составим характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$k^2-2k+1-0; \qquad k_1=k_2=1;$$

Общее решение однородного уравнения: $y=C_1e^x+C_2xe^x$.

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y=x^re^{\alpha x}Q(x)$$

$$\alpha=1; \quad r=2; \quad Q(x)=C;$$

$$y=Cx^2e^x.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$$y'=2Cxe^x+Cx^2e^x; \qquad y''=2Ce^x+2Cxe^x+2Cxe^x+Cx^2e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$2Ce^x+4Cxe^x+Cx^2e^x-4Cxe^x-2Cx^2e^x+Cx^2e^x=3e^x.$$

$$2C=3; \qquad C=\frac{3}{2}.$$

Частное решение имеет вид: $y=\frac{3}{2}x^2e^x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения: $y=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{3}{2}x^2e^x$.

4) Решить уравнение $y''+y=x-\sin 2x$.

Правую часть дифференциального уравнения представим в виде суммы двух функций $f_1(x)+f_2(x)=x+(-\sin x)$.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$k^2 + 1 = 0; \qquad k_{1,2} = \pm i;$

1. Для функции $f_1(x)$ решение ищем в виде $y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

Получаем: $\alpha = 0, \quad r = 0, Q(x) = Ax + B;$ Т.е. $y_1 = Ax + B;$

$$y_1' = A; \qquad y_1'' = 0;$$
$$Ax + B = x; \quad A = 1; \quad B = 0;$$

Итого: $y_1 = x;$

2. Для функции $f_2(x)$ решение ищем в виде: $y_2 = x^r e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$.

Анализируя функцию $f_2(x)$, получаем: $P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = -1; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 2; \quad r = 0;$

Таким образом, $y_2 = C\cos 2x + D\sin 2x;$

$$y_2' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x;$$
$$y_2'' = -4C2\cos x - 4D\sin 2x;$$
$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x;$$
$$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x$$

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{3};$$

Итого: $y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x;$

Т.е. искомое частное решение имеет вид: $y = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x + x;$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

y''+py'+qy=f(x) , где ***p и q – const***

f(x) $\neq 0$ неоднородное, y_H – общее решение неоднородного

f(x)=0 однородное y_0 ***– общее решение*** соответствующего однородного

$y_H = y_0 + \bar{y}$ где $\bar{y}$ – любое решение неоднородного уравнения

Общее решение однородного уравнения

y''+py'+qy=0

$k^2 + pk + q = 0$ – характеристическое уравнение

1) $k_1 \neq k_2$ $(D > 0)$ $\quad y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

2) $k_1 = k_2 = k$ $(D = 0)$ $\quad y_0 = e^{kx}(C_1 x + C_2)$

3)k= $\alpha \pm \beta i$ $(D < 0)$ $\quad y_0 = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

Примеры. Найти общее решение линейного однородного уравнения

1) $y'' - 7y' + 12y = 0$

Шаг 1: составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 7k + 12 = 0$$

Шаг 2: находим корни характеристического уравнения:

k_1 =3, k_2 =4. Здесь $k_1 \neq k_2$, случай 1,

Шаг 3: выписываем решение, формула (5).

$$y_o = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$$

2) $y'' + 10y' + 25y = 0$

$$k^2 + 10k + 25 = 0 \qquad k = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = -5$$

Здесь $D = 0$, $k_1 = k_2$ = -5, случай 2, y_o находим по формуле (6)

$$y_o = e^{-5x}(C_1 x + C_2)$$

3) $y'' - 3y' + 3y = 0$

$$k^2 - 3k + 3 = 0$$

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Здесь случай 3, $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, для y_o выбираем формулу (7)

$$y_o = e^{\frac{3}{2}x}(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

4) $y'' - 4y' = 0$

$$k^2 - 4k = 0 \qquad k(k - 4) = 0$$

k_1 =0, k_2 =4, $k_1 \neq k_2$, случай 1), формула (5).

$$y_o = C_1 e^0 + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}$$

5) $y'' - 4y = 0$

$k^2 - 4 = 0$

k_1 =2, k_2 = -2, $k_1 \neq k_2$, случай 1), формула (5).

$y_o = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

6) $y'' + 4y = 0$

$k^2 + 4 = 0 \qquad k^2 = -4,\ k = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

Здесь случай 3, $\alpha = 0$, $\beta = 2$, формула (7)

$y_o = e^0 (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

Метод неопределенных коэффициентов

определения $\bar{y}$.

1)***f(x)=***$e^{Mx} Pn(x) \rightarrow \bar{y} = x^l e^{Mx} Qn(x)$

l=

$$\begin{cases} 0, M \neq k_1 \text{ и } M \neq k_2 \text{, т. е. } M \text{ не является корнем характ.уравнения} \\ 1, M = k_1 \neq k_2 \text{ или } M = k_2 \neq k_1 \text{, т. е. } M - \text{однократный корень} \\ 2, M = k_1 = k_2 \text{, т. е. } M - \text{двухкратный корень характ.уравнение} \end{cases}$$

$Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

2)***f(x)=***
$e^{Mx}(M \cos Vx + N \sin Vx) \rightarrow \bar{y} = x^l e^{Mx}(A \cos Vx + B \sin Vx)$

l= $\begin{cases} 0, M + iV \text{ не корень характ уравнения} \\ 1, M + iV \text{ корень характ уравнения} \end{cases}$

Замечание 1. $f(x) = P_n(x)$ – частный случай $f(x)$ первого типа при $\mu = 0$.

$f(x) = Ae^{\mu x}$ (А – постоянная величина) – частный случай $f(x)$ первого типа, здесь $P_n(x)$ =А – многочлен нулевой степени.

Замечание 2. Как записывается $Q_n(x)$.

Обозначим неопределенные коэффициенты A, B, C, … Тогда $Q_0(x) = A$, $Q_1(x) = Ax + B$,

$$Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C,\ Q_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \ldots$$

7) а) Найти общее решение уравнения $y''-2y'=e^x(x^2-x-3)$

1.Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-2y'=0.$

$$k^2-2k=0 \quad k(k-2)=0 \quad k_1=0 \;\; k_2=2$$

$$y_{одн}=C_1e^0+C_2e^{2x}=C_1+C_2e^{2x}$$

2. Анализируем правую часть уравнения и выписываем $\bar{y}$ с неопределенными коэффициентами в соответствии с формулами (8)

$$f(x)=e^x(x^2-x-3),\ \mu=1\neq k_1\neq k_2 \to l=0.$$

$$x^2-x-3=P_2(x)\to Q_2(x)$$

$$\bar{y}=x^0e^xQ_2(x)=e^x(Ax^2+Bx+C).$$

$$\bar{y}'=e^x(Ax^2+Bx+C)+e^x(2Ax+B)=e^x(Ax^2+Bx+C+2Ax+B)$$

$$\bar{y}''=e^x(Ax^2+Bx+C+2Ax+B)+e^x(2Ax+B+2A)=e^x(Ax^2+Bx+C+4Ax+2B+2A)$$

Подставляем $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$ в левую часть исходного уравнения, общий множитель e^x выносим за скобки

$$e^x(Ax^2+Bx+C+4Ax+2B+2A-2Ax^2-2Bx-2C-4Ax-2B)=e^x(x^2-x-3)$$

Многочлен в левой части распишем по степеням x

$x^2(A-2A)+x(B+4A-2B-4A)+C+2B+2A-2C-2B=x^2-x-3$

Два многочлена могут быть равны тогда и только тогда, когда у них равны коэффициенты при одинаковых степенях *x.* Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x* в правой и левой части, получаем систему линейных уравнений для определения A, B и C

$$\begin{cases} -A = 1 \to A = -1 \\ -B = -1 \to B = 1 \\ 2A - C = -3 \quad C = 2A + 3 = 1 \end{cases}$$

Итак, $\bar{y}=e^x(-x^2+x+1)$

$y_{неод}=y_{одн}+\bar{y}=C_1+C_2e^{2x}+e^x(-x^2+x+1).$

б)Найти частное решение исходного уравнения $y_{частн}$, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$y(0)=2 \to C_1+C_2+1=2 \to C_1+C_2=1$

$y'_{неодн}=2C_2e^{2x}+e^x(-x^2+x+1)+e^x(-2x+1)$

$y'(0)=2 \to 2C_2+1+1=2 \to 2C_2=0 \to C_2=0 \quad C_1=1;$

$$y_{частн}=1+e^x(-x^2+x+1)$$

Примеры.

1)Найти общее решение уравнения $y''-4y'+4y=3e^{2x}$

1.Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-4y'+4y=0.$

$$k^2-4k+4=0 \quad k_1=k_2=2 \quad y_{одн}=(C_1x+C_2)e^{2x}$$

2. Анализируем правую часть уравнения и выписываем $\bar{y}$ с неопределенными коэффициентами в соответствии с

формулами (8)

$$f(x)=3e^{2x},\ \mu=2=k_1=k_2\rightarrow l=2$$

$$3=P_0(x)\rightarrow Q_0(x)=A$$

$$\bar{y}=Ax^2e^{2x}$$

$$\bar{y}'=2e^{2x}Ax^2+2Axe^{2x}=e^{2x}(2Ax^2+2Ax)$$

$$\bar{y}''=2e^{2x}(2Ax^2+2Ax)+e^{2x}(4Ax+2A)=e^{2x}(4Ax^2+8Ax+$$
$$+2A)$$

Подставляем $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$ в левую часть исходного уравнения, общий множитель e^{2x} выносим за скобки

$$e^{2x}(4Ax^2+8Ax+2A-8Ax^2-8Ax+4Ax^2)=3e^{2x}$$

Многочлен в левой части распишем по степеням x

$$x^2(4A-8A+4A)+x(8A-8A)+2A=3\rightarrow 2A=3,\ A=1.5$$

Итак, $\bar{y}=1.5x^2e^{2x}$;

$$y_{неод}=y_{одн}+\bar{y}=(C_1x+C_2)e^{2x}+1.5x^2e^{2x}$$

2) Найти общее решение уравнения $y''-4y'+8y=\sin 2x$

1.Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-4y'+8y=0.$

$$k^2-4k+8=0$$

$$k=\frac{4\pm\sqrt{16-32}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{4\pm 4i}{2}=2\pm 2i,\qquad \alpha=2,$$

$\beta=2$, $y_{одн}=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{2x}$

2. Анализируем правую часть уравнения и выписываем $\bar{y}$ с неопределенными коэффициентами в соответствии с формулами (9)

f(x)=sin 2x , μ **=0** ν **=2,** μ **+i**ν **=2i**$\neq k_1 \neq k_2 \to$ **l=0**

$\bar{y}= x^0(A\cos 2x+B\sin 2x)= A\cos 2x+B\sin 2x,$

$\bar{y}'= -2A\sin 2x+2B\cos 2x\,,\quad \bar{y}''= -4A\cos 2x-4B\sin 2x,$

Подставляем $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$ в левую часть исходного уравнения

-4Acos2x-4Bsin2x+8Asin2x-8Bcos2x+8Acos2x+8Bsin2x=sin2x

Cos2x(4A-8B)+sin2x(8A+4B)=sin2x

Равенства вида M$\cos\alpha$x+N$\sin\alpha$x= P$\cos\alpha$x+Q$\sin\alpha$x имеют место тогда и только тогда, когда коэффициенты при $\cos\alpha$x и $\sin\alpha$x слева и справа соответственно равны, то есть

$$\begin{cases} M = P \\ N = Q \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты A и B – решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4A-8B=0 \\ 8A+4B=1 \end{cases}$$

A=0.1, B=0.05

$y_{неод}=y_{одн}+\bar{y}=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{2x}+0.1\cos 2x+0.05\sin 2x$

3) $y''-2y'=e^x(x^2-x-3)$ $\quad \begin{cases} y(0)=2 \\ y'(0)=2 \end{cases}$

$y''-2y'=0 \qquad k^2-2k=0 \qquad k(k-2)=0 \qquad k_1=0 \quad k_2=2$

$y_{одн}=C_1e^0+C_2 2e^{2x}=C_1+C_2 2e^{2x}$

$f(x)=e^x(x^2-x-3)$ $M=1\neq k_1\neq k_2\to l=0$

$P_2(x)\to Q_2(x)$

$\bar{y}"=x^0e^xQ_2(x)=e^x(Ax^2+Bx+C)$

$\bar{y}'=e^x$

$(Ax^2+Bx+C)+e^x(2Ax+B)=e^x\ (Ax^2+Bx+C+2Ax+B)$

$\bar{y}"=e^x$

$(Ax^2+Bx+C+2Ax+B)+e^x(2Ax+B+2A)=e^x(Ax^2+Bx+C+4Ax$

$+2B+2A)$

$e^x(Ax^2+Bx+C+4Ax+2B+2A-2Ax^2-2Bx-2C-4Ax-$

$2B)=e^x(x^2-x-3)$

$x^2(A-2A)+x(B+4A-2B-4A)+C+2B+2A-2C-2B=x^2-x-3$

$$\begin{cases}-A=1\to A=-1\\ -B=-1\to B=1\\ 2A-C=-3\quad C=2A+3=1\end{cases}$$

$\bar{y}=e^x(-x^2+x+1)$ $y_{неод}=y_{одн}+\bar{y}=C_1+C_2 2e^{2x}+e^x$ (-

$x^2+x+1)$

$y(0)=2\to=C_1+C_2+1\to C_1+C_2=1$

$y'_{неодн}=2C_2e^{2x}+e^x(-x^2+x+1)+e^x(-2x+1)$

$y'(0)=2\to 2=2C_2+1+1\to 2C_2=0\to C_2=0$ $C_1=1$

$y_{частн}=1+e^x(-x^2+x+1)$

4) $y''+9y=37e^{-x}\cos 3x$

$k^2+9=0$ $k^2=-9$ $k_{1,2}=\pm 3$

$y_{одн}=y^0(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$

f(x)= 37$e^{-x}\cos 3x$ M=-1 V=3

M+iV=-1+3i$\neq k_1 \neq k_2$ →l=0

$\bar{y}=x^0\ e^{-x}$(Acos3x+Bsin3x)= e^{-x}(Acos3x+Bsin3x)= e^{-x}(Acos3x+Bsin3x)

$\bar{y}$'=-e^{-x}(-Acos3x-Bsin3x-3Asin3x+3Bcos3x)+ e^{-x}(3Asin3x-3Bcos3x-9Acos3x-9Bsin3x)=-9Acos3x-9Bsin3x)e^{-x}(-8Acos3x-8Bsin3x+6Asin3x-6Bcos3x+9Acos3x+9Bsin3x)= 37$e^{-x}\cos 3x$

cos3x(A-6B)+sin3x(B+6A)= 37$e^{-x}\cos 3x$

$$\begin{cases} A-6B=37 \\ B+6A=0 \rightarrow B-6A \quad A+36A=37 \quad 37A=37 \end{cases}$$

A=1 B=-6

$\bar{y}$=-e^{-x}(cos3x-6sin3x)

$y_{неодн}$=$y_{одн}$+$\bar{y}$=C_1cos3x+C_2sin3x+e^{-x}(cos3x-6sin3x)

5) Найти общее решение уравнения

$$y''+3y'+2y = x\sin x$$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2+3k+2=0$, его корни k_1= -1, k_2= -2. Здесь $k_1 \neq k_2$, случай 1, решение однородного уравнения выписывается по формуле (5): $y_o = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$

$f(x) = x\sin x$ – правая часть третьего типа, $\bar{y}$ определяется формулой (10).

Здесь $\mu = 0$ и $\gamma = 1$, $\mu + i\gamma = i$ не является корнем характеристического уравнения $\to\ l=0$.

$R_m(x)=x$ – многочлен первой степени (m=1).

$P_n(x)=0$ – многочлен нулевой степени (n=1).

В формуле (10)

$k=\max(0,1)=1 \to Q_k(x)=Q_1(x)=A_1x+A_2$

$L_k(x)=L_1(x)=B_1x+B_2$

$$\bar{y}=(A_1x+A_2)\cos x+(B_1x+B_2)\sin x\,,$$

$$\bar{y}'=(A_1+B_2+B_1x)\cos x+(B_1-A_2-A_1x)\sin x\,,$$

$$\bar{y}''=(2B_1x-A_2-A_1x)\cos x-(2A_1+B_2+B_1x)\sin x\,.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, будем иметь

$$(2B_1-A_2-A_1x)\cos x-(2A_1+B_2+B_1x)\sin x+$$
$$3(A_1+B_2+B_1x)\cos x+3(B_1-A_2-A_1x)\sin x+$$
$$+2(A_1x+A_2)\cos x+(B_1x+B_2)\sin x=x\sin x$$

$$[(A_1+3B_1)x+3A_1+A_2+2B_1+3B_2]\cos x+[(-3A_1+B_1)x-2A_1-3A_2+3B_1+B_2]\sin x=x\sin x$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно A_1, A_2, B_1, B_2

$$\begin{cases} A_1+3B_1=0 \\ 3A_1+A_2+2B_1+3B_2=0 \\ -3A_1+B_1=1 \\ 2A_1-3A_2+3B_1+B_2=0 \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A_1=-\dfrac{3}{10}$, $A_2=\dfrac{17}{50}$,

$B_1 = \frac{1}{10}$, $B_2 = \frac{3}{25}$ и частное решение $\bar{y}$ запишется так:

$$\bar{y} = \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{13}{25}\right)\sin x.$$

Общее решение данного уравнения:

$$y_н(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} +$$

$$\left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{13}{25}\right)\sin x.$$

6) Проинтегрировать уравнение $y'' + 4 \cdot y' + 20 \cdot y = 34 \cdot e^{-x}$.

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 4y' + 20y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 20 = 0$ имеет корни

$$k_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{-4 \pm 8i}{2} \quad k_1 = -2 + 4i, \quad k_2 = -2 - 4i$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется формулой

$$y_o = e^{-2 \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \cos 4x + C_2 \cdot \sin 4x).$$

Переходим к отысканию частного решения исходного уравнения.

Так как в данном случае $\varphi(x) = 34e^{-x}$ (т.е. имеет вид

$f(x)=ae^{mx}$, где $a=34$, $m=-1$) и $m=-1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y_1 = Ae^{-x}.$$

Найдя производные этой функции

$$y'_1=-Ae^{-x} \quad \text{и} \quad y''_1=Ae^{-x},$$

и подставляя выражения для y_1, y'_1 y''_1 в исходное уравнение, получаем

$$Ae^{-x}-4Ae^{-x}+20Ae^{-x}=34e^{-x}.$$

Так как y_1 - решение уравнения, то последнее равенство выполняется для всех x, т.е. является тождеством:

$$17Ae^{-x}=34\cdot e^{-x}$$

откуда $17A=34$, $A=2$. Следовательно, частное решение имеет вид

$$y=2\cdot e^{-x}.$$

Соответственно, общее решение

$$y=e^{-2\cdot x}\cdot(C_1\cdot\cos 4x+C_2\cdot\sin 4x)+2\cdot e^{-x}.$$

7) Решить уравнение $y''-2y'+y=3e^x$.

Составим характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$k^2-2k+1-0; \qquad k_1=k_2=1;$$

Общее решение однородного уравнения: $y=C_1e^x+C_2xe^x$.

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

$$\alpha = 1; \quad r = 2; \quad Q(x) = C;$$

$$y = Cx^2 e^x.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$$y' = 2Cxe^x + Cx^2 e^x; \qquad y'' = 2Ce^x + 2Cxe^x + 2Cxe^x + Cx^2 e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$2Ce^x + 4Cxe^x + Cx^2 e^x - 4Cxe^x - 2Cx^2 e^x + Cx^2 e^x = 3e^x.$$

$$2C = 3; \qquad C = \frac{3}{2}.$$

Частное решение имеет вид: $y = \frac{3}{2} x^2 e^x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y = C_1 e^x + C_2 xe^x + \frac{3}{2} x^2 e^x.$$

8) Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x$.

Правую часть дифференциального уравнения представим в виде суммы двух функций $f_1(x) + f_2(x) = x + (-\sin x)$.

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0; \qquad k_{1,2} = \pm i;$

3. Для функции $f_1(x)$ решение ищем в виде $y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

Получаем: $\alpha = 0, \quad r = 0, Q(x) = Ax + B;$

Т.е. $y_1 = Ax + B;$

$$y_1' = A; \qquad y_1'' = 0;$$

$$Ax + B = x; \quad A = 1; \quad B = 0;$$

Итого: $y_1 = x;$

4. Для функции $f_2(x)$ решение ищем в виде: $y_2 = x^r e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$.

Анализируя функцию $f_2(x)$, получаем: $P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = -1; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 2; \quad r = 0;$

Таким образом, $y_2 = C\cos 2x + D\sin 2x;$

$$y_2' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x;$$

$$y_2'' = -4C2\cos x - 4D\sin 2x;$$

$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x;$$

$$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x$$

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{3};$$

Итого: $y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x;$

Т.е. искомое частное решение имеет вид: $y = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x + x;$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;$$

4.1 Примеры для самостоятельного решения

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

45) $y'' - 3y' + 2y = 0$ 46) $y'' + 4y' + 4y = 0$

47) $y'' + 5y' + 7y = 0$ 48) $y'' + 3y' = 0$

49) $y'' + 4y = 0$ 50) $y'' + y = 0$

51) $y'' + 7y' + 10y = 0$ 52) $y'' + 3y' - 4y = 0$

53) $y'' - 9y' + 14y = 0$ 54) $y'' - 6y' + 9y = 0$

55) $y'' - 10y' + 25y = 0$ 56) $y'' + 4y' + 5y = 0$

57) $y'' - 6y' + 11y = 0$ 58) $y'' - 9y' = 0$

59) $y'' + 7y' = 0$ 60) $y'' - 3y = 0$

61) $y'' + 16y = 0$ 62) $y'' + 8y = 0$

63) $y'' - 3y' + 2y = f(x)$

а) $f(x) = 10e^{-x}$ б) $f(x) = 3e^{2x}$

в) $f(x) = 2x^3 - 30$ г) $f(x) = 2\sin x$

д) $f(x) = e^x(3 - 4x)$ е) $f(x) = 2e^x \cos\frac{x}{2}$

ё) $f(x) = xe^{-2x} + 1$

64) $y'' + y = f(x)$

а) $f(x) = 2x^3 - x + 2$ б) $f(x) = -5\cos 9x$

в) $f(x) = 10\sin x$ г) $f(x) = -8\cos 3x$ д) $f(x) = \cos x$

е) $f(x) = \sin x - 2e^{-x}$

65) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

66) $y'' - 2y' - 10y = 10x^2 + 18x + 6$

$y(0) = 1$ $y'(0) = 32$

67) $y'' - y = 2\cos x$ 68) $y'' - y' = 3e^{2x}$

69) $y'' - 4y = 8x^2$ 70) $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$

71) $y'' - 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 8x$

72) $y'' + 4y' + 3y = 4e^{-x}(1 - x)$ 73) $y'' - 5y' = \sin 5x$

4.2 Типовой расчет

по теме «Дифференциальные уравнения второго порядка»

1. A) $y'' + 2y' - 15y = 0$

B) $y'' + 10y' + 25y = 4x - 5$

C) $y'' + y' = 4sinx$

2. A) $y'' - 4y' + 3y = 0$

B) $y'' - 4y = 8x^2$

C) $y'' + y = \cos x$

3. A) $y'' - 4y' + 4y = 0$

B) $y'' + 3y' = 9x$

C) $y'' - 3y' + 3y = 2sinx - cosx$

4. A) $y'' - 4y' + 13y = 0$

B) $y'' + y' - 2y = 6x^2$

C) $y'' - 2y' + 3y = cos6x$

5. A) $y'' - 4y = 0$

B) $y'' - 4y' + 20y = 5x$

C) $y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x$

6. A) $y'' + 4y' = 0$

B) $y'' - 6y' + 9y = 2x - 1$

C) $y'' - 3y' + 2y = \sin 3x$

7. A) $y'' + 3y' + 2y = 0$

B) $y'' + 9y = 3x^2$

C) $y'' - 8y' + 5y = 2sin5x$

8. A) $y'' + 2y' + 5y = 0$

B) $y'' - 3y' + 3y = 3x^2 - x$

C) $y'' - 2y' + 3y = sin6x$

9. A) $y'' - 5y' + 6y = 0$

B) $y'' + 4y' = 7x$

C) $y'' + y = \cos 3x$

10. A) $y'' - 9y = 0$

B) $y'' - 4y' + 3y = 7x - 8$

C) $y'' - 3y' + 3y = cos7x$

11. A) $y'' - y' = 0$

B) $y'' + 3y' + 2y = 9x - 1$

C) $y'' - 6y' + 10y = sin7x$

12. A) $y'' - 2y' + 2y = 0$

B) $y'' + 9y = 6x - 7$

C) $y'' + y = \sin 5x$

13. A) $y'' + y = 0$

B) $y'' - 5y' + 6y = 9x^2$

C) $y'' + 10y' + 25y = sin4x$

14. A) $y'' + 2y' + y = 0$

B) $y'' - 4y = 3x^2 - 1$

C) $y'' + y' = 4cosx$

15. A) $y'' - 4y' + 2y = 0$

B) $y'' - 3y' + 3y = 11x - 2$

C) $y'' - 2y' + 3y = 2sin3x + cos3x$

16. A) $y'' - 2y' + 10y = 0$

B) $y'' - 4y' + 3y = 2x^2$

C) $y'' + y = \sin 2x + \cos 2x$

17. A) $y'' - 6y' + 9y = 0$

B) $y'' + 3y' + 2y = 18x + 3$

C) $y'' - 3y' + 3y = 6sinx - cosx$

18. A) $y'' - 6y' - 15y = 0$

B) $y'' - 3y' + 3y = 12x + 4$

C) $y'' + y = \sin 3x$

19. A) $y'' + 2y' - 3y = 0$

B) $y'' - 4y = 6x + 9$

C) $y'' - 6y' + 10y = 8sin3x$

20. A) $y'' - y' + 4y = 0$

B) $y'' - 5y' + 6y = 3x + 1$

C) $y'' + 10y' + 25y = cos6x$

21. A) $y'' + 6y' + 13y = 0$

B) $y'' - 4y' + 3y = 6x^2 - 1$

C) $y'' - 3y' + 3y = cos8x$

22. A $y'' + 9y = 0$

B) $y'' - 3y' + 3y = 2x - 6$

C) $y'' + 10y' + 25y = 5cos3x$

23. A) $y'' + 6y' - y = 0$

B) $y'' + 3y' + 2y = 4x - 9$

C) $y'' - 2y' + 3y = 9cosx$

24. A) $y'' - 6y' + 10y = 0$

B) $y'' - 4y = 3x - 7$

C) $y'' - 6y' + 10y = sin2x - cos2x$

25. A) $15y'' - 11y' + 2y = 0$

B) $y'' + 9y = 3x^2 + 1$

C) $y'' - 3y' + 3y = 11sin5x$

26. A) $2y'' + 2y' - 5y = 0$

B) $y'' - 4y' + 3y = x - 8$

C) $y'' + y' = sin2x$

27. A) $y'' + 5y' - 6y = 0$

B) $y'' - 3y' + 3y = 13x$

C) $y'' + y = 6\cos 3x$

28. A) $y'' - 2y' + 3y = 0$

B) $y'' + 3y' + 2y = 3x + 7$

C) $y'' - 2y' + 3y = -9sin9x$

29. A) $9y'' - 12y' + 4y = 0$

B) $y'' + 9y = x^2 - 3$

C) $y'' - 3y' + 3y = sin7x + 2cos7x$

30. A) $y'' - 3y' + 3y = 0$

B) $y'' - 4y' + 3y = 5x$

C) $y'' - 6y' + 10y = -13cosx$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 1: Учебное пособие для втузов.— 13-е изд.— М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1985.— 432 с.

2. Сборник задач по математике. Под редакцией А.В.Ефимова, Б.П. Демидовича. М., 1993 г.

3. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. Изд. 3-е. — Ростов н/Д, 2006. — 640 с.