ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

# Учебное пособие

«Дифференциальные уравнения 1-ого порядка» по дисциплине

# «Математика»

Авторы
Рябых Г. Ю.,
Ворович Е. И.,
Тукодова О. М.,
Фролова Н. В.,
Пристинская О. В.

Ростов-на-Дону, 2021

## Аннотация

Учебное пособие предназначено для аудиторной и самостоятельной работы при различных видах обучения: очном, заочном и дистанционном. Для студентов всех направлений и специальностей.

## Авторы

канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Рябых Г.Ю.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ворович Е.И.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Тукодова О.М.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пристинская О.В.

# Оглавление

# 1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту ил иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение *a* является производной по времени *t* от скорости *V*, которая также является производной по времени *t* от перемещения *S*. Т.е.

$$V = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2};$$

Тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t) \cdot t}{2}$ - уравнение связывает функцию f(t) с независимой переменной t и производной второго порядка функции f(t).

<u>**Определение.**</u> **Дифференциальным уравнением** называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

<u>**Определение.**</u> Если дифференциальное уравнение имеет

одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

**Определение.** Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

**Пример.**

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\dfrac{d^2 y}{dx^2} + xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

**Определение.** **Общим решением** дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = $\varphi$(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

## 1.1 Свойства общего решения

1) Т.к. постоянная С – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

**Определение.** Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется **частным решением** дифференциального уравнения.

**Определение.** **Задачей Коши** (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

**Теорема Коши.** (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

*Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную* $y' = f(x, y)$*, то какова бы не была точка* $(x_0, y_0)$ *в области D, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y' = f(x, y)$*, определенное в некотором интервале, содержащем точку* $x_0$*, принимающее при* $x = x_0$ *значение* $\varphi(x_0) = y_0$*, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.*

**Определение.** **Интегралом** дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

**Пример.** Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом (учитывая, что $\frac{dy}{dx}=y'$):

$$x\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$xdy=-ydx$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем: $\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$

$$\ln y=-\ln x+C_0$$

$$\ln y+\ln x=C_0$$

$$\ln xy=C_0$$

$$xy=e^{C_0}=C$$

$y=\frac{C}{x}$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем

$$2=\frac{C}{1};\quad C=2;$$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши): $y=\frac{2}{x}$

**Определение.** **Интегральной кривой** называется график $y = \varphi(x)$ решения диффе- ренциального уравнения на плоскости XOY.

**<u>Определение.</u> Особым решением** дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной С.

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной С. Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Отметим, что не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

**<u>Пример.</u>** Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' + y = 0$. Найти особое решение, если оно существует.

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln y = -x + C$$

$$y = e^{-x} \cdot e^{C}$$

$$y = C_1 \cdot e^{-x}$$

Данное дифференци- альное уравнение имеет также особое решение $y = 0$. Это решение невозможно получить из общего, однако при подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение $y = 0$ можно получить из общего решения при $C_1 = 0$ ошибочно, ведь $C_1 = e^C \neq 0$.

Далее рассмотрим подробнее приемы и методы, которые используются при решении дифференциальных уравнений различных типов.

## 1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

**Определение.** **Дифференциальным уравнением первого порядка** называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx; \quad f(x, y)dx - dy = 0;$$

Функцию f(x,y) представим в виде: $f(x, y) = -\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad Q(x, y) \neq 0;$ тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

- это так называемая **дифференциальная форма** уравнения первого порядка.

Далее рассмотрим подробнее типы уравнений первого порядка и методы их решения.

# 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**Определение. Общим решением** дифференциального уравнения 1 – го порядка $F(x, y, y') = 0$ называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

## 2.1. Свойства общего решения

1) Т.к. постоянная C – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

**Определение.** Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется **частным решением** дифференциального уравнения.

**Определение. Задачей Коши** (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

**Теорема Коши.** (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

*Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную* $y' = f(x, y)$*, то какова бы не была точка* $(x_0, y_0)$ *в* *области D, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y' = f(x, y)$*, определенное в некотором интервале, содержащем точку* $x_0$*, принимающее при* $x = x_0$ *значение* $\varphi(x_0) = y_0$*, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.*

<u>**Определение.**</u> **Интегралом** дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

<u>**Пример.**</u> Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$xdy = ydx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$$\ln y = \ln x + C_0$$

$y = Cx$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения. Геометрически общее решение это бесконечное множество прямых, проходящих через начало координат. Если придать С конкретное значение , то получим частное решение. Геометрически частное решение это одна из прямых. Чтобы выделить конкретную прямую, нужно задать конкретную точку на плоскости $M_0(x_0, y_0)$, через которую она проходит. Это и есть начальные условия

$$x = x_0 \quad y = y_0 \text{ или } y(x_0) = y_0.$$

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем

$$2 = C * 1; \quad C = 2;$$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).

$$y = 2x$$

**<u>Определение.</u> Интегральной кривой** называется график y = φ(x) решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

**<u>Определение.</u> Особым решением** дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной С.

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной С. Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

## 2.2. Уравнения вида *y′ = f(x)*

Пусть функция f(x) – определена и непрерывна на некотором интервале

a < x < b. В таком случае все решения данного дифференциального уравнения находятся как $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия $x_0$ и $y_0$, то можно определить постоянную C.

## 2.3. Уравнения с разделяющимися переменными

**Определение.** Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Такое уравнение можно представить также в виде:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \text{ при } \beta(y) \neq 0;$$

Перейдем к новым обозначениям

$$\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y);$$

Получаем:

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0;$$

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина С, а, соответственно, и частное решение.

**Пример.** Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$

$$y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$y\cos y dy = -2x dx$$

$$\int y\cos y dy = -2\int x dx$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям:

$$\int y\cos y dy = \left\{ \begin{matrix} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{matrix} \right\} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$$

$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается **отличие** общего (частного) **интеграла** от общего (частного) **решения.**

Чтобы проверить правильность полученного ответа продифференцируем его по переменной х.

$$y'\sin y + yy'\cos y - y'\sin y + 2x = 0$$

$$yy' = -\frac{2x}{\cos y}$$ - верно

**Пример.** Найти решение дифференциального уравнения

$\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии

y(2) = 1.

$$\frac{ydx}{dy} = \ln y$$

$$dx = \frac{\ln ydy}{y}$$

$$\int dx = \int \frac{\ln ydy}{y}$$

$$x + C = \int \ln yd(\ln y)$$

$$x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$$

При y(2) = 1 получаем

$$2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}; \quad \Rightarrow \quad 2 + C = 0; \quad \Rightarrow \quad C = -2;$$

Итого: $2(x-2) = \ln^2 y;$ или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - частное решение;

<u>Проверка:</u> $y' = e^{\pm\sqrt{2x-4}} \cdot \frac{2}{\pm 2\sqrt{2x-4}}$, итого

$$\frac{y}{y'} = \frac{e^{\pm\sqrt{2x-4}}(\pm\sqrt{2x-4})}{e^{\pm\sqrt{2x-4}}} = \pm\sqrt{2x-4} = \ln y$$ - верно.

<u>**Пример.**</u> Решить уравнение $y' = y^{2/3}$.

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$$

$$y^{-2/3}dy = dx$$

$$\int y^{-2/3}dy = \int dx$$

$$3y^{1/3} = x + C$$

$27y = (x+C)^3$ - общий интеграл

$y = \frac{1}{27}(x+C)^3$ - общее решение

**Пример.** Решить уравнение $y' = x(y^2+1)$.

$$\frac{dy}{y^2+1} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx;$$

$$arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \qquad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

**Пример.** Решить уравнение $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$ при условии y(1)= 0.

$$\frac{ydy}{dx} + xe^y = 0$$

$$ydy + xe^y dx = 0; \qquad \frac{y}{e^y}dy = -xdx;$$

$$\int \frac{y}{e^y}dy = -\int xdx;$$

Интеграл, стоящий в левой части будем брать по частям.

$$\int ye^{-y}dy = \left\{\begin{matrix} u = y; & e^{-y}dy = dv; \\ du = dy; & v = -e^y; \end{matrix}\right\} = -e^y y - \int -e^y dy = -e^{-y}y - e^{-y} = -e^{-y}(y+1);$$

$$e^{-y}(y+1)=\frac{x^2}{2}+C_0;$$

$$2e^{-y}(y+1)=x^2+C$$

Если y(1) = 0,то

$$2e^0(0+1)=1+C;\quad\Rightarrow\quad 2=1+C;\quad\Rightarrow\quad C=1;$$

Итого, частный интеграл: $2e^{-y}(y+1)=x^2+1$.

**Пример.** Решить уравнение $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$.

$$y'+\sin(x+y)-\sin(x-y)=0$$

$$y'-2\sin\frac{x-y-x-y}{2}\cos\frac{x-y+x+y}{2}=0$$

$$y'-2\sin(-y)\cos x=0$$

$$y'+2\sin y\cos x=0$$

$$\frac{dy}{\sin y}=-2\cos x dx;\qquad \int\frac{dy}{\sin y}=-2\int\cos x dx;$$

Получаем общий интеграл:

$$\ln\left|tg\frac{y}{2}\right|=-2\sin x+C$$

**Пример.** Решить уравнение $2xe^{-x^2}+\frac{y'}{y}=0$

Преобразуем заданное уравнение:

$$2xe^{-x^2}+\frac{dy}{ydx}=0$$

$$2xe^{-x^2}dx+\frac{dy}{y}=0$$

$$\int 2xe^{-x^2}dx+\int\frac{dy}{y}=C$$

$$-e^{-x^2}+\ln|y|=C$$

Получили общий интеграл данного дифференциального уравнения. Если из этого соотношения выразить искомую функцию y, то получим общее решение.

<u>При**мер.**</u> Решить уравнение $y'=x(y^2+1)$.

$$\frac{dy}{dx}=x(y^2+1)$$

$$\frac{dy}{y^2+1}=xdx$$

$$\int\frac{dy}{y^2+1}=\int xdx; \qquad arctgy=\frac{x^2}{2}+C;$$

$$y=tg\left(\frac{x^2}{2}+C\right)$$

Допустим, заданы некоторые начальные условия $x_0$ и $y_0$. Тогда:

$$arctgy_0=\frac{x_0^2}{2}+C_0; \quad\Rightarrow\quad C_0=arctgy_0-\frac{x_0^2}{2};$$

Получаем частное решение $y=tg\left(\frac{x^2}{2}+arctgy_0-\frac{x_0^2}{2}\right)$.

## 2.4. Однородные уравнения

**Определение.** Функция f(x, y) называется **однородной n – го измерения** относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

**Пример.** Является ли однородной функция

$f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$?

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 x^3 + 3t^3 x^2 y = t^3 (x^3 + 3x^2 y) = t^3 f(x, y)$$

Таким образом, функция f(x, y) является однородной 3- го порядка.

**Определение.** Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y' = f(x, y)$.

Т.к. функция f(x, y) – однородная нулевого измерения, то можно записать:

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Т.к. параметр t вообще говоря произвольный, предположим, что $t = \dfrac{1}{x}$. Получаем:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u = \dfrac{y}{x}$, т.е.

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$$

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде:

$$y' = \varphi(u)$$

Далее заменяем $y = ux$, $y' = u'x + ux'$.

$$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u.

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

**Пример.** Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}\left(\ln \dfrac{y}{x} + 1\right)$.

Введем вспомогательную функцию *u*.

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u.$$

Отметим, что введенная нами функция *u* всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u = \ln\frac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u\ln u + u; \quad u'x = u\ln u;$$

Разделяем переменные: $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}$; $\int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x}$;

Интегрируя, получаем:

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx};$$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции у, получаем общее решение:

$$y = xe^{Cx}.$$

## 2.5. Уравнения, приводящиеся к однородным

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут приведены к однородным.

Это уравнения вида $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$.

Если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, то переменные могут быть разделены подстановкой

$$x = u + \alpha; \qquad y = v + \beta;$$

где $\alpha$ и $\beta$ - решения системы уравнений

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$$

**<u>Пример.</u>** Решить уравнение

$(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0.$

Получаем

$$(x-2y+3)\frac{dy}{dx}=-2x-y+1; \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y+1}{x-2y+3};$$

Находим значение определителя

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4+1=5\neq 0.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} -2x-y+1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=1-2x \\ x-2+4x+3=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=-1/5 \\ y=7/5 \end{cases};$$

Применяем подстановку $x=u-1/5; \quad y=v+7/5;$ в исходное уравнение:

$$(u-1/5-2v-14/5+3)dv+(2u-2/5+v+7/5-1)du=0;$$

$$(u-2v)dv+(2u+v)du=0;$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{2u+v}{2v-u}=\frac{2+v/u}{2v/u-1};$$

Заменяем переменную $\dfrac{v}{u}=t; \quad v=ut; \quad v'=t'u+t;$ при подстановке в выражение, записанное выше, имеем:

$$t'u+t=\frac{2+t}{2t-1}$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dt}{du}u = \frac{2+t}{2t-1} - t = \frac{2+t-2t^2+t}{2t-1} = \frac{2(1+t-t^2)}{2t-1};$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}dt; \qquad \int\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\int\frac{(1-2t)dt}{1+t-t^2};$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+t-t^2\right| = \ln|u| + \ln C_1$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right| = -2\ln|C_1 u|$$

Переходим теперь к первоначальной функции y и переменной x.

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y-7/5}{x+1/5} = \frac{5y-7}{5x+1}; \quad u = x+1/5;$$

$$1+\frac{5y-7}{5x+1} - \left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2 = \frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$

$$(5x+1)^2 + (5y-7)(5x+1) - (5y-7)^2 = 25C_2$$

$$25x^2 + 10x + 1 + 25xy + 5y - 35x - 7 - 25y^2 + 70y - 49 = 25C_2$$

$$25x^2 - 25x + 25xy + 75y - 25y^2 = 25C_2 + 49 - 1 + 7$$

$$x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C_2 + \frac{55}{25} = C;$$

Итого, выражение $x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C$ является общим интегралом исходного дифференциального уравнения.

В случае если в исходном уравнении вида $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, то переменные могут быть разделены подстановкой

$$ax + by = t.$$

**Пример.** Решить уравнение

$$2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0.$$

Получаем

$$2(x + y)\frac{dy}{dx} = -3x - 3y + 1; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-3x - 3y + 1}{2x + 2y} = -\frac{3x + 3y - 1}{2x + 2y};$$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0;$

Применяем подстановку $3x + 3y = t.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t'}{3} - 1;$$

Подставляем это выражение в исходное уравнение:

$$\frac{t'}{3} - 1 = -\frac{3(t-1)}{2t}; \quad 2t(t' - 3) = -9t + 9; \quad 2tt' = 6t - 9t + 9; \quad 2tt' = -3t + 9;$$

Разделяем переменные:

$$\frac{2t}{-3t + 9}dt = dx; \qquad \frac{t}{t-3}dt = -\frac{3}{2}dx;$$

$$\int\left(1 + \frac{3}{t-3}\right)dt = -\frac{3}{2}\int dx;$$

$$t + 3\ln|t - 3| = -\frac{3}{2}x + C_1$$

Далее возвращаемся к первоначальной функции y и переменной x.

$$2x + 2y + 2\ln|3(x + y - 1)| = -x + C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln 3 + 2\ln|x + y - 1| = C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln|x + y - 1| = C;$$

таким образом, мы получили общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

## 2.6. Линейные уравнения

**Определение.** Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

*P(x)* и *Q(x)*- функции непрерывные на некотором промежутке a < x < b.

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1 \cdot 2x^2$; $y = 2 \cdot x^2$; $y = 2x \cdot x$; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$.

Таким образом, возможно получить функцию *u*, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \qquad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \qquad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \qquad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции *v* подставим поученное выражение для функции *u* в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x); \qquad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию *v*:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1;$$

$$v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y = uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)}$$ ,$C_2$ - произвольный коэффициент.

**Пример.** $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$.

Уравнение линейное, решение ищем в виде *y=uv*. Тогда $y' = u'v + v'u$. После подстановки *y* и $y'$ в уравнение, получаем $u'v + v'u - \frac{2uv}{x} = 2x^3 \quad \rightarrow \quad u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3$

Подберем функцию *v(x)* так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю, т.е. решим уравнение $v' - \frac{2v}{x} = 0$

$v' = \frac{2v}{x}$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции *v(x)*. Решая его, получаем

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}, \ \ln|v| = 2\ln|x| \rightarrow v = x^2.$$

Замечание. Здесь $v = x^2$ является частным решением уравнения при *C=0*, т.к. мы искали любую функцию, которая бы обращала левую часть в ноль, а не все множество его решений.

Далее подставим $v = x^2$ в уравнение , получим $u'x^2 = 2x^3 \rightarrow u' = 2x$. Это уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции *u(x)*. Решая его, получим *du=2xdx*. $u=\int 2xdx=x^2+C$.

Функции *u(x)* и *v(x)* найдены.

$Y=u(x)v(x)=(x^2+C)x^2$ – общее решение.

**Уравнение вида** $y'+p(x)y=q(x)y^n$ называется **уравнением Бернулли**. Для решения уравнений Бернулли применим тот же метод, что и для решения линейных уравнений.

**<u>Пример.</u>** Решить уравнение $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$.

Разделим обе части уравнения на $x\sqrt{y}$.

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}\sqrt{y}=x.$$

Полагаем $z=\sqrt{y};\quad z'=\frac{1}{2\sqrt{y}}y';\quad y'=2\sqrt{y}z';$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}2\sqrt{y}z'-\frac{4}{x}z=x;\quad \frac{dz}{dx}-\frac{2z}{x}=\frac{x}{2};$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Рассмотрим соответствующее ему линейное однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2z}{x}=0;\quad \frac{dz}{dx}=\frac{2z}{x};\quad \frac{dz}{z}=\frac{2dx}{x};$$

$$\int\frac{dz}{z}=2\int\frac{dx}{x}+C_1;\quad \ln z=2\ln x+\ln C;\quad z=Cx^2;$$

Полагаем C = C(x) и подставляем полученный результат в линейное неоднородное уравнение, с учетом того, что:

$$\frac{dz}{dx} = 2xC(x) + x^2\frac{dC(x)}{dx};$$

$$2xC(x) + x^2\frac{dC(x)}{dx} - \frac{2x^2C(x)}{x} = \frac{x}{2};$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2x}; \qquad C(x) = \frac{1}{2}\ln x + C_2;$$

Получаем: $z = x^2\left(C_2 + \frac{1}{2}\ln x\right);$

Применяя обратную подстановку, получаем окончательный ответ:

$$y = x^4\left(C_2 + \frac{1}{2}\ln x\right)^2;$$

## 2.7. Уравнения в полных дифференциалах

__Определение.__ Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = F(x, y)$.

Интегрирование такого уравнения сводится к нахождению функции *u*, после чего решение легко находится в виде: $du = 0; \quad u = C.$

Таким образом, для решения надо определить:

1) в каком случае левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал функции *u*;

2) как найти эту функцию.

Если дифференциальная форма $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции *u*, то можно записать:

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Т.е. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$.

Найдем смешанные производные второго порядка, продифференцировав первое уравнение по *y*, а второе – по *x*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем **необходимое и достаточное условие** того, что левая часть дифференциального уравнения является полным дифференциалом.

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении собственно функции *u.*

Проинтегрируем равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$:

$$u = \int M(x,y)dx + C(y).$$

Вследствие интегрирования получаем не постоянную величину С, а некоторую функцию С(у), т.к. при интегрировании переменная $y$ полагается постоянным параметром.

Определим функцию С(у).

Продифференцируем полученное равенство по $y$.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+C'(y).$$

Откуда получаем: $C'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$

Для нахождения функции С(у) необходимо проинтегрировать приведенное выше равенство. Однако, перед интегрированием надо доказать, что функция С(у) не зависит от $x$. Это условие будет выполнено, если производная этой функции по $x$ равна нулю.

$$[C'(y)]'_x=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right)=$$
$$=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=0.$$

Теперь определяем функцию С(у):

$$C(y)=\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy+C$$

Подставляя этот результат в выражение для функции $u$, получаем:

$$u=\int M(x,y)dx+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy+C.$$

Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$\boxed{\int M(x,y)dx+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy=C.}$$

Следует отметить, что при решении уравнений в полных дифференциалах не обязательно использовать полученную формулу. Решение может получиться более компактным, если просто следовать методу, которым формула была получена.

**Пример.** Решить уравнение

$$(3x^2+10xy)dx+(5x^2-1)dy=0$$

Проверим условие: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial(3x^2+10xy)}{\partial y}=10x;$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial(5x^2-1)}{\partial x}=10x.$$

Условие выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Определим функцию *u*.

$$u=\int M(x,y)dx+C(y)=\int(3x^2+10xy)dx+C(y)=x^3+5x^2y+C(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=5x^2+C'(y)=N(x,y)=5x^2-1;$$

$$C'(y)=-1;\quad C(y)=\int(-1)dy=-y+C_1;$$

Итого, $u=x^3+5x^2y-y+C_1.$

Находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$u = x^3 + 5x^2 y - y + C_1 = C_2;.$$

$$x^3 + 5x^2 y - y = C.$$

# 3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

<u>Дифференциальные уравнения первого порядка</u>

В таблице представлены примеры определения типа дифференциального уравнения первого порядка. Далее приведены решения первых десяти уравнений

| Уравнения | Тип уравнения |
|---|---|
| 1) $xy' + y = y^2$ | $y' = \dfrac{y^2 - y}{x}$ – уравнение с разделяющимися переменными, $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_2(y)=y^2-y$ |
| 2) $y' = 10^{x+y}$ | $y' = 10^{x+y}$ – уравнение с разделяющимися переменными $f_1(x) = 10^x$, $f_2(x) = 10^y$ |
| 3) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$ | Уравнение однородное. Правая часть $f(\dfrac{y}{x})=(\dfrac{y}{x})^2-2$ |

4) $xy' - 2y = 2x^4$

Разделим обе части уравнения на *x*, получим $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ – уравнение линейное, $p(x) = -\frac{2}{x}$, $q(x)=2x^3$

5) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

Уравнение однородное. Правая часть $f(\frac{y}{x})=(\frac{y}{x})^{-1}+\frac{y}{x}$

6) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

Уравнение однородное. Разделим обе части уравнения на *x*. Получим $y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$,

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}.$$

7) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

Уравнение линейное, $p(x)=2x$, $q(x) = 2xe^{-x^2}$

8) $yy' = \frac{1-2x}{y}$

Уравнение с разделяющимися переменными, $y' = \frac{1-2x}{y^2}$, $f_1(x)=1-2x$,

$$f_2(y) = \frac{1}{y^2}$$

9) $y'tgx - y = a$ Уравнение с разделяющимися переменными $y' = \frac{y+a}{tgx}$,

$f_1(x) = \frac{1}{tgx}$, $f_2(y)=y+a$

10) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ Уравнение в полных дифференциалах, $M(x,y) = e^y$,

$N(x,y) = xe^y - 2y$,

$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = e^y$,

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

11) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$ Уравнение линейное, $p(x)=cosx$, $q(x)=sinxcosx$

12) $y' = \frac{x+y}{x-y}$ Уравнение однородное. Правую часть его можно представить в виде $f(x,y) = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$

13) $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0$ Уравнение в полных дифференциалах. $M(x,) = yx^{y-1}$,

$$N(x, y) = x^y \ln x,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} = x^{y-1} + yx^{y-}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

**РЕШЕНИЯ**

1) $xy' + y = y^2$. Уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, приведем его к виду $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - y}{x}$.

Разделим переменные: $dy = \dfrac{y^2 - y}{x} dx$, $\dfrac{dy}{y^2 - y} = \dfrac{dx}{x}$. Переменные разделены, проинтегрируем теперь обе части последнего уравнения:

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \frac{dy}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| \\ a = \frac{1}{2} \end{array} \right\} = \ln\left|\frac{y - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\right| = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right|$$

Получим в итоге $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + \ln C$ – общее решение (вариант №1), произвольная постоянная здесь обозначена *lnC*.

Получим более простую форму записи общего решения

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln xC \to \frac{y-1}{y} = Cx \to y = \frac{1}{1 - Cx}$$ – общее решение (вариант№2).

2) $y' = 10^{x+y}$. Уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, приведем его к виду $\frac{dy}{dx} = 10^x 10^y$,

$$dy = 10^x 10^y dx, \quad \frac{dy}{10^y} = 10^x dx.$$

Переменные разделены, интегрируем

$$\int \frac{dy}{10^y} = \int 10^x dx, \qquad \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a},$$

$$\int \frac{dy}{10^y} = -\int 10^{-y} d(-y) = -\frac{10^{-y}}{\ln 10}$$

$$-\frac{10^{-y}}{\ln 10}=\frac{10^{x}}{\ln 10}+\frac{C}{\ln 10}$$ (произвольную постоянную С обозначили $\frac{C}{\ln 10}$).

$10^{x}+10^{-y}+C=0$ – общее решение.

3) $y'=\frac{y^2}{x^2}-2$ Уравнение однородное. Вводим новую переменную $t=\frac{y}{x}$ $\rightarrow$ $y'=t'x+t$. После подстановки уравнение имеет вид $t'x+t=t^2-2$, $t'=\frac{t^2-t-2}{x}$.

Относительно новой неизвестной функции *t(x)* получили уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получаем

$$\frac{dt}{dx}=\frac{t^2-t-2}{x}, \qquad \frac{dt}{t^2-t-2}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dt}{t^2-t-2}=\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}=\left\{\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|, a=\frac{3}{2}\right\}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-2}{t+1}\right|$$

$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-2}{t+1}\right|=\ln|x|+\ln C$ общее решение (вариант №1).

Упрощаем

$\frac{t-2}{t+1}=cx^3$ $\rightarrow$ $t=\frac{Cx^3+2}{1-Cx^3}$. Делаем обратную замену

$t=\dfrac{y}{x}$, откуда $y=\dfrac{Cx^4+2x}{1-Cx^3}$ – общее решение (вариант №2).

4) $y'-\dfrac{2}{x}y=2x^3$. Уравнение линейное, решение ищем в виде *y=uv*. Тогда $y'=u'v+v'u$. После подстановки *y* и $y'$ в уравнение, получаем $u'v+v'u-\dfrac{2uv}{x}=2x^3$ $\rightarrow$

$$u'v+u\left(v'-\frac{2v}{x}\right)=2x^3 \qquad (13)$$

Подберем функцию *v(x)* так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю, т.е. решим уравнение $v'-\dfrac{2v}{x}=0$ (14)

$v'=\dfrac{2v}{x}$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции *v(x)*. Решая его, получаем $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{2v}{x}$, $\dfrac{dv}{v}=\dfrac{2dx}{x}$, $\ln|v|=2\ln|x| \rightarrow v=x^2$.

**Замечание.** Здесь $v=x^2$ является частным решением уравнения (14) при *C=0*, т.к. мы искали любую функцию, которая бы обращала левую часть (14) в ноль, а не все множество его решений.

Далее подставим $v=x^2$ в уравнение (13), получим $u'x^2=2x^3 \rightarrow u'=2x$. Это уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции *u(x)*. Решая его, получим *du=2xdx*. $u=\int 2xdx=x^2+C$.

Функции *u(x)* и *v(x)* найдены.

$Y=u(x)v(x)=(x^2+C)x^2$ –общее решение.

5) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$. Уравнение однородное, после введения новой переменной $t(x)=\dfrac{y}{x}$ приобретает вид

$t'x+t=\dfrac{1}{t}+t$, $t'=\dfrac{1}{tx}$. Получено уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции *t(x)*. Решая его, получаем $tdt=\dfrac{dx}{x}$, $\dfrac{t^2}{2}=\ln|x|+\ln C$ → $t^2=2\ln Cx$,

$t=\pm\sqrt{2\ln Cx}$, $y=\pm x\sqrt{2\ln Cx}$ – общее решение.

6) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$. Уравнение однородное (смотри таблицу), приводится к виду $t'x+t=t+\sqrt{1+t^2}$ или $t'=\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{x}$ – уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим $\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{dx}{x}$. После интегрирования $\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|=\ln|x|+\ln C$ – общее решение (вариант №1).

Упрощая его вид $t+\sqrt{1+t^2}=Cx$, $\sqrt{1+t^2}=Cx-t$,

$t^2+1=C^2x^2-2Cxt+t^2 \rightarrow t=\dfrac{C^2x^2-1}{2Cx} \rightarrow y=\dfrac{C^2x^2-1}{2C}$ – общее решение. (вариант №2).

7) $y'+2xy=2xe^{-x^2}$. Уравнение линейное. Проводя замену $y=u(x)v(x)$, получим $u'v+v'u+uv2x=2xe^{-x^2}$,

$$u'v+u(v'+2vx)=2xe^{-x^2} \qquad (15)$$

Функцию $v(x)$ получим из уравнения $v'+2vx=0$.Это уравнение с разделяющимися переменными . Его решение: d$v= -2vxdx$, $\dfrac{dv}{v}=-2xdx$,

$\ln v= -x^2$, $v=e^{-x^2}$. Подставим найденную $v(x)$ в (15), получим второе уравнение с разделяющимися переменными относительно $u(x)$: $u'e^{-x^2}=2xe^{-x^2}$, $u=x^2+C$; $y=uv=(x^2+C)e^{-x^2}$ – общее решение.

8) $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$. Уравнение с разделяющимися переменными (смотри таблицу). Запишем его в виде $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-2x}{y^2}$. После разделения переменных получим $dyy^2=(1-2x)dx$. После интегрирования

получаем $\dfrac{y^3}{3}=x-x^2+C \rightarrow y=\sqrt[3]{3x-3x^2+C}$ – общее решение.

9) $y'tgx - y = a$ .Это уравнение с разделяющимися переменными, приводим его к виду $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+a}{tgx}$, $\dfrac{dy}{y+a} = \dfrac{dx}{tgx}$.

Переменные разделены $\int \dfrac{dy}{y+a} = \int \dfrac{dx}{tgx}$, $\int \dfrac{dy}{y+a} = \ln|y+a|$,

$\int \dfrac{dx}{tgx} = \int ctgxdx = \ln|\sin x|$, $\ln|y+a| = \ln|\sin x| + \ln C$ – общее решение (вариант №1). Упрощая, получаем *y+a=Csinx* → *y=Csinx-a* – общее решение (вариант №2).

10) Условие (11) дает $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^y$ → $u = \int e^y dx = e^y x + C(y)$. Здесь $C(y)$ – любая функция, не зависящая от *x*. Но в нашем случае ее необходимо определить так, чтобы выполнялось условие (12), т.е. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xe^y + C'(y) = xe^y - 2y$, откуда $C'(y) = -2y$, а $C(y) = -\int ydy = -y^2$. Таким образом, $u = e^y x - y^2$, а решение уравнения записывается в виде $xe^y - y^2 = C$.

## 4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

*Дифференциальные уравнения 1-го порядка*

*1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными*

$1)\ y'x^3 = 2y \quad 2)\ xy' - y = 0 \quad 3)\ xy' + y = 0 \quad 4)\ yy' + = 0$

$5)\ y' - y = 0 \quad 6)\ y'(x^2 - 4) = 2xy \ \ y(0) = 1 \quad 7)\ 2y'\sqrt{x} = y \ \ y(4) = 1$

$8)\ y' = y\ \sin x \ \ y(0) = 1$

$9)\ y' - \dfrac{e^x}{y^2} = 0 \ \ y(0) = 2 \quad 10)\ 2y' + 3\cos x\ (y - 1) = 0 \ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \quad 11)\ y'(x^2 + 4) = 3xy$

$12)\ x^2y' + y = 0 \ \ y(1) = 1 \quad 13)\ x^2y' + y^2 = 0 \ \ y(-1) = 1 \quad 14)\ x^2y' - e^y = 0$

*1. Однородные дифференциальные уравнения*

$15)\ x^2 + y^2 - 2xyy' = 0 \quad 16)\ y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0 \ \ y(1) = 0 \quad 17)\ xy' - y = x\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$

$18)\ xy' = y - xe^{y/x} \ \ y(1) = 1 \quad 19)\ y' = \dfrac{xy + y^2}{2x^2 + xy} \ \ y(1) = 1 \quad 20)\ xy' + 2\sqrt{xy} = y$

$21)\ xy' + xe^{y/x} - y = 0 \quad 22)\ xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right) \ \ y(1) = e$

$23)\ y' = -\dfrac{x - y}{x + y}$

*2. Линейные уравнения , уравнения Бернулли*

$24)\ x^2y' = 2xy - 3 \ \ y(-1) = 1 \quad 25)\ y' - y\ tgx = ctgx \quad 26)\ xy' + y - e^x = 0$

$27)\ (1 + x^2)y' + xy = 1 \quad 28)\ y\sin x + y'\cos x = 1 \quad 29)\ y' = 3\dfrac{y}{x} - \dfrac{2}{x}$

$30)\ y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$

$31)\ y' - y\ tgx = \dfrac{1}{\cos x} \quad 32)\ xy' + y = \ln x + 1 \quad 33)\ y' - y = x \quad 34)\ (1 - x^2)y' - xy = xy^2$

$35)\ xy' + 2y = x^5y^2 \quad 36)\ y' = \dfrac{4}{x}y + x\sqrt{y} \quad 37)\ y' - xy = -y^3e^{-x^2}$

*3. Уравнения в полных дифференциалах*

38) $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$

39) $(2x^3-xy^2)dx+(2y^3-x^2y)dy=0$

40) $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$

41) $2x\cos^2 y\,dx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$

42) $(3x^2y-4xy^2)dx+(x^3-4x^2y+12y^3)dy=0$

43) $(3x^2y-2x^3+y^3)dx-(2y^3-3xy^2-x^3)dy=0$

44) $e^{-y}\,dx+(1-xe^{-y})dy=0$

# 5. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

**по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»**

1. а) $y'x^3=2y$ б) $y'x-y=xtg\dfrac{y}{x}$ в) $y'-ytgx=ctgx$

2. а) $y'x-y=0$ б) $y'x=y-xe^{\frac{y}{x}}$ $y(1)=1$

   в) $y'x+y-e^x=0$

3. а) $y'x+y=0$ б) $y'x=y\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right)$ $y(1)=e$

   в) $y'x^2=2xy-3$

4. а) $y'y+x=0$ б) $x^2+y^2-2xyy'=0$

   в) $y'-ytgx=\dfrac{1}{\cos x}$

5. а) $y'(x^2+4)=3xy$ б) $y'x^2=y^2+xy$

   в) $y'=3\dfrac{y}{x}-\dfrac{2}{x}$

6. а) $y'x^2 + y = 0$ б) $y + \sqrt{x^2 + y^2} - y'x = 0$

в) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$

7. а) $2y'\sqrt{x} = y$ б) $y'x + 2\sqrt{xy} = y$

в) $y' - \dfrac{1}{x}y = -\dfrac{2}{x^2}$

8. а) $y'x^2 + y^2 = 0$ б) $y' = \dfrac{x+6y-7}{8x-y-7}$

в) $y'x - 2y = 2x^4$

9. а) $y'(x^2 - 4) = 2xy$ б) $y' = \dfrac{x+y-4}{x-2}$

в) $y'x + y = \ln x + 1$

10. а) $y' = y\sin x$ б) $xy' + xe^{\frac{y}{x}} - y = 0$

в) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$

11. а) $y' - \dfrac{e^x}{y^2} = 0$ б) $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$

в) $y\sin x + y'\cos x = 1$

12. а) $2y' + 3(y-1)\cos x = 0$ б) $y' = \dfrac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$

в) $y' - y/x = x^2$

13. а) $y'(x+1)+y^2=0$ б) $xy'=\dfrac{3y^3+10yx^2}{2y^2+5x^2}$

в) $y'-y\operatorname{ctg}x=2x\sin x$

14. а) $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0.$

б) $2y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+8$ в) $y'+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$

15. а) $\left(1+e^x\right)y'=ye^x$ б) $xy'=3\sqrt{x^2+y^2}+y.$

в) $y'+y\operatorname{tg}x=\cos^2 x,$

16. а) $\left(3+e^x\right)yy'=e^x$ б) $y'=\dfrac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$

в) $y'-\dfrac{y}{x+2}=x^2+2x,$

17. а) $y\ln y+xy'=0$ б) $xy'=\dfrac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}$

в) $y'-\dfrac{1}{x+1}y=e^x\left(x+1\right)$

18. а) $y\left(1+\ln y\right)+xy'=0.$ б) $y'=\dfrac{y^2}{x^2}+6\dfrac{y}{x}+6$

в) $y'-\dfrac{y}{x}=x\sin x$

19. а) $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}\,yy'=0$ б) $xy'=\sqrt{2x^2+y^2}+y.$

в) $y' + \frac{y}{x} = \sin x$

20. а) $\left(3 + e^x\right) yy' = e^x$ б) $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$

в) $y' + \frac{y}{2x} = x^2$

21. а) $\sqrt{5 + y^2} + y'y\sqrt{1 - x^2} = 0$ б) $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$

в) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$

22. а) $y\left(4 + e^x\right) dy - e^x\, dx = 0$ б) $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$

в) $y' + \frac{y}{x} = 3x$

23. а) $y'y\sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - y^2}} + 1 = 0$ б) $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$

в) $y' + \frac{1 - 2x}{x^2} y = 1$

24. а) $3\left(x^2 y + y\right) dy + \sqrt{2 + y^2}\, dx = 0$ б) $y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$

в) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$

25. а) $\left(1 + e^x\right) yy' = e^x$ б) $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$.

в) $y' + 2xy = -2x^3$

26\. а) $y(1+\ln y) + xy' = 0$ б) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$

в) $y' + xy = -x^3$

27\. а) $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$ б) $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$

в) $y' - 4xy = -4x^3$

28\. а) $(e^x+8)\,dy - y e^x\,dx = 0$ б) $y' = \frac{x+y}{x-y}$

в) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}$

29\. а) $y(4+e^x)\,dy - e^x\,dx = 0$ б) $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$

в) $y' - y/x = -2/x^2$

30\. а) $\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$ б) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$

в) $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 1: Учебное пособие для втузов.— 13-е изд.— М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1985.— 432 с.

2. Сборник задач по математике. Под редакцией А.В.Ефимова, Б.П. Демидовича. М., 1993 г.

3. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. Изд. 3-е. — Ростов н/Д, 2006. — 640 с.