ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

«Пределы»

по дисциплине

«Математика»

Авторы

Рябых Г. Ю.,

Ворович Е. И.,

Тукодова О. М.,

Фролова Н. В.,

Пристинская О. В.

Ростов-на-Дону, 2021

Аннотация

Учебное пособие предназначено для аудиторной и самостоятельной работы при различных видах обучения: очном, заочном и дистанционном. Для студентов всех направлений и специальностей.

Авторы

канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Рябых Г.Ю.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ворович Е.И.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Тукодова О.М.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пристинская О.В.

Оглавление

1. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение. Если каждому натуральному числу *n* поставлено в соответствие число a_n, то говорят, что задана бесконечная **числовая последовательность** $\{a_n\}$:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Иными словами, числовая последовательность – это функция натурального аргумента *n*: $a_n = f(n)$.

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами последовательности, а формула $a_n = f(n)$ – формулой общего члена данной последовательности.

Определение. Последовательность называется монотонно возрастающей, если для любого *n*

$$a_{n+1} > a_n,$$

монотонно убывающей, если

$$a_{n+1} < a_n.$$

Монотонно возрастающие и монотонно убывающие последовательности объединяют под общим названием монотонные последовательности.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число *A* > 0, что для любого *n* верно неравенство:

$$|a_n| < A$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку (–*A*, *A*).

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если для любого n существует такое число *A*, что

$$a_n \le A.$$

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если для любого *n* существует такое число *A*, что

$$a_n \ge A$$

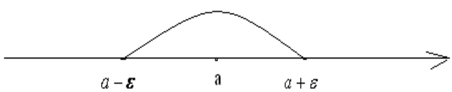
Определение. Число ***a*** называется **пределом** бесконечной числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер *N*, что для всех *n > N* выполняется условие:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Предел числовой последовательности обозначается

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ или } a_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Геометрически число *a* есть предел числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер *N*, начиная с которого (при *n > N*) все члены последовательности попадают в интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$



Числовая последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**, в противном случае – **расходящейся**.

Теорема. *Последовательность не может иметь более одного предела.*

Теорема. Если $a_n \to a$, то последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

Например,

последовательность $x_n = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{n}, \textit{при четном } n \\ 2-\dfrac{1}{n}, \textit{при нечетном } n \end{cases}$

не имеет предела, хотя $|x_n| \le 2$.

Теорема. *Любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Число *e*.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Доказано, что последовательность $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ – монотонно возрастающая и ограниченная сверху, а следовательно, имеет конечный предел. Этот предел принято обозначать буквой *e*.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Можно показать, что число е иррациональное и его значение равно 2,71828…

Аналогично можно показать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, расширив требования к х до любого действительного числа.

1.1 Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0 (т.е. в самой точке x_0 функция может быть определена, а может быть, и не определена).

Определение. Число y_0 называется **пределом** функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x таких, что

$$|x - x_0| < \delta$$

верно неравенство

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon .$$

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

Смысл определения предела функции $y = f(x)$ в точке x_0 состоит в том, что для всех значений x, достаточно близких к x_0, значения функции $y = f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа y_0 (по абсолютной величине).

Геометрически число y_0 есть предел функции $y = f(x)$

при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности соответствующие ординаты графика функции $y = f(x)$ будут заключены в полосе $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$, какой бы узкой эта полоса не была.

Определение. Число *b* называется **пределом** функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $N > 0$, что для всех x, $|x| > N$ выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция $y = f(x)$ определена в окрестности бесконечности.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

Различают пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

1.2 Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Предел постоянной равен самой постоянной.

$$\lim_{x \to x_0} C = C, \text{ где } C = const.$$

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \to x_0$.

Теорема 2. Предел суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Теорема 3. Предел произ- ведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x\to x_0} C\cdot f(x)=C\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$

Теорема 5. Пусть $f(x), g(x), \phi(x)$ – три функции, которые определены в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяют неравенству

$$\phi(x)<f(x)<g(x)$$

в каждой точке x этой окрестности.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to x_0}=b$.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется **ограниченной** на некотором множестве *M*, если существует такое число *C > 0*, что для всех $x\in M$ выполняется условие $|f(x)|<C$.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ имеет конечный предел при $x\to x_0$, то она ограничена в некоторой окрестности точки x_0.

1.3 Бесконечно малые и большие функции

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно**

малой при $x \to x_0$ или при $x \to \infty$, если ее предел равен нулю $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \alpha(x) = 0$.

Иными словами, функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x таких, что

$$|x - x_0| < \delta$$

верно неравенство

$$|f(x)| < \varepsilon .$$

Из определения бесконечно малой функции следует, что бесконечно малые функции при $x \to x_0$ являются функциями, ограниченными в некоторой окрестности точки x_0.

Свойства бесконечно малых функций

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$ тоже бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$ тоже бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = x_0$ является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$.

4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина

бесконечно малая.

<u>Определение.</u> Функция *f(x)* называется **бесконечно большой величиной** при $x \to x_0$, если для любого числа *M > 0* существует такое число *δ > 0* (зависящее от *M*),что для всех *x*, не равных x_0, и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ будет верно неравенство

$$|f(x)| > M.$$

Записывается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

<u>Теорема.</u> Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой. И наоборот, если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой.

Например, если $y = x^2$ при $x \to \infty$ является бесконечно большой величиной, то $y = \dfrac{1}{x^2}$ – величина бесконечно малая при $x \to \infty$.

1.4 Практическое вычисление пределов

<u>Примеры.</u> Найти: а) $\lim\limits_{x \to 0}(3x^2 + 5x + 1)$, б) $\lim\limits_{x \to 3}\frac{5}{x-3}$,в) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{e^x}$.

а) в силу непрерывности

$\lim\limits_{x\to 0}(3x^2+5x+1)=3\cdot 0+5\cdot 0+1=1.$

б) при x→3 x–3 стремится к 0, то $\lim\limits_{x\to 3}\frac{5}{x-3}=\frac{5}{0}=\infty.$

в) при x→∞ $e^x\to\infty$, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0.$

При вычислении пределов мы сталкиваемся с неопределенностями вида $[\frac{\infty}{\infty}]$, $[\frac{0}{0}],[\infty-\infty],[0\cdot\infty],[1^\infty],[0^0],[\infty^0]$.

Для раскрытия неопределенностей используются специальные приемы.

Правило I. Чтобы раскрыть неопределенность вида $[\frac{\infty}{\infty}]$, возникающую в пределах $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(X)}{Q(x)}$, где $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $Q(x)=b_0x^m+b_1x_{m-1}+\ldots+b_m$ – многочлены, надо и числитель и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень x.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots.+\frac{b_m}{x^m})}=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}$$

Итого:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0, & при \quad n<m\\ \frac{a_0}{b_0}, & при \quad n=m\\ \infty, & при \quad n>m\end{cases}$$

<u>Примеры.</u>

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x+8}{6x^5+8x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(5+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}{x^3\left(6+\frac{8}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{6x}=0$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2+8}{8x^3+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{8}{x^3}\right)}{x^3\left(8+\dfrac{1}{x^3}\right)}=\dfrac{3}{8}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{x+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot 3=\infty$

Правило II. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, возникающую в пределах $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} +\ldots+a_n$, $Q(x) = b_0x^m + b_1x_{m-1} +\ldots+b_m$ - многочлены, надо и в числителе и в знаменателе выделить множитель (x–a) и сократить дробь на него.

Примеры.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{x^2-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+8)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+8}{x+2}=\dfrac{5}{2}$

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-27}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{x^2+3x+9}=\dfrac{1}{27}$

Правило III. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, в которой числитель или знаменатель (или и числитель и знаменатель) иррациональны, следует и числитель и знаменатель домножить на выражение, сопряженное иррациональному, чтобы избавиться от иррациональности.

Примеры.

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}$$

$$\text{б)}\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)=24$$

2. ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Из первого замечательного предела несложно вывести следующие пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1.$$

Примеры.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{3x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}\cdot\frac{mx}{mx}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}$$

2.1 Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ или } \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

Часто если непосредственное нахождение предела какой-либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{m}-1}{x}=m.$$

<u>Примеры.</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{5}{x}\cdot x}=e^{5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{10}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{10}}\right)^{\frac{10}{x-2}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x}{x-2}}=e^{10}$$

2.2 Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

<u>Определение.</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция $\beta(x)$.

Пример.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x=0$. Поэтому x^2 – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\sin x$.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,\quad A\neq 0,\quad A=const$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка**.

Пример.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{5}{2}$, т.е. $tg5x$ и $\sin 2x$ – бесконечно малые одного порядка малости.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$ то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}=1.$$

Таким образом, при $x\to 0$

$$\sin x\sim x \qquad tgx\sim x \qquad \arcsin x\sim x$$

$$arctgx\sim x \qquad e^x-1\sim x \qquad \ln(1+x)\sim x.$$

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им бесконечно малых.

Пусть при $x \to a$ $\alpha(x), \alpha_1(x), \beta(x), \beta_1(x)$ – бесконечно малые функции, причем $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},\text{ если }\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\text{ существует.}$$

Следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Эта теорема дает новую технику, которую можно использовать при вычислении пределов.

Примеры.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{x\ln(1+x)}$

Так как sin5x ~ 5x и ln(1+x) ~ x при x → 0, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{x\ln(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot 5x}{x\cdot x}=25$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$

Так как $e^{2x}-1$ ~ 2x и ln(1–4x) ~ –4x при x → 0, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-4x}=-\frac{1}{2}$$

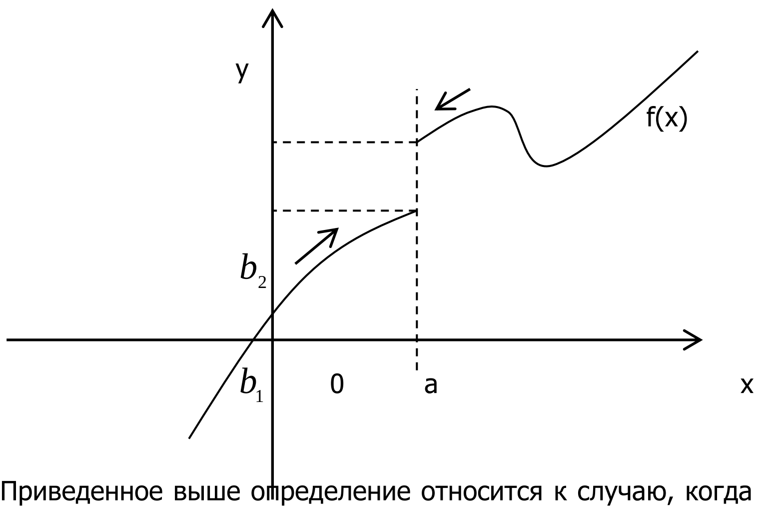
в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{x^2}$

Так как $\sin\dfrac{3x}{2}\sim\dfrac{3x}{2}$ при x → 0, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\dfrac{3x}{2}\cdot\dfrac{3x}{2}}{x^2}=\frac{9}{2}$$

2.3 Односторонние пределы

<u>Определение.</u> Если *f(x)* → b_1 при *x* → *a* только при *x* < *a*, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_1$ - называется **пределом** функции *f(x)* в точке *x* = *a* **слева**, а если *f(x)* → b_2 при *x* → *a* только при *x* > *a*, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2$ называется **пределом** функции *f(x)* в точке *x* = *a* **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция *f(x)* не определена в самой точке *x = a*, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы b_1 и b_2 называются также **односторонними пределами** функции *f(x)* в точке *x = a*.

Теорема. Если существуют оба односторонних предела функции $f(x)$ в точке а и они равны между собой $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$, то существует предел функции в точке а и но равен b $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

2.4 Примеры решения задач. Практическое вычисление пределов

Примеры. Найти а) $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2+5x+1)$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5}{x-3}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}$.

а) в силу непрерывности

$$\lim_{x\to 0}(3x^2+5x+1)=3\cdot 0+5\cdot 0+1=1.$$

б) при $x\to 3$ x–3 стремится к 0, то $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{5}{0}=\infty$.

в) при $x\to\infty$ $e^x\to\infty$, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

Примеры.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x+8}{6x^5+8x+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(5+\dfrac{2}{x}+\dfrac{8}{x^2}\right)}{x^3\left(6+\dfrac{8}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{6x}=0$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2+8}{8x^3+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{8}{x^3}\right)}{x^3\left(8+\dfrac{1}{x^3}\right)}=\dfrac{3}{8}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{x+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot 3=\infty$

<u>Примеры.</u>

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{x^2-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+8)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+8}{x+2}=\dfrac{5}{2}$

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-27}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{x^2+3x+9}=\dfrac{1}{27}$

<u>Примеры</u>.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{4}$

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)=24$

<u>Примеры.</u>

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}\cdot\dfrac{3x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}=3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}\cdot\frac{mx}{mx}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}$$

Примеры.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{5}{x}\cdot x}=e^{5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{10}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{10}}\right)^{\frac{10}{x-2}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x}{x-2}}=e^{10}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot x=0$. Поэтому x^2 – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\sin x$.

Пример.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{5}{2}$, т.е. $tg5x$ и $\sin 2x$ – бесконечно малые одного порядка малости.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}-1\right)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Таким образом, при $x\to 0$

$\sin x \sim x$ $\qquad tgx \sim x$ $\qquad \arcsin x \sim x$

$$arctgx \sim x \qquad e^x - 1 \sim x \qquad \ln(1+x) \sim x.$$

Примеры.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{x\ln(1+x)}$

Так как sin5x ~ 5x и ln(1+x) ~ x при x → 0, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{x\ln(1+x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot 5x}{x\cdot x} = 25$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$

Так как $e^{2x}-1$ ~ 2x и ln(1–4x) ~ –4x при x → 0, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{-4x} = -\frac{1}{2}$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}$

Так как $\sin\dfrac{3x}{2} \sim \dfrac{3x}{2}$ при x → 0, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}}{x^2} = \frac{9}{2}$$

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПО ТЕМЕ: «ПРЕДЕЛЫ»

$\frac{1}{\infty}=0$; $\frac{1}{0}=\infty$; $e^{\infty}=\infty$; $e^{-\infty}=0$; $\ln\infty=\infty$; $\ln 0=-\infty$

<u>Неопределенности:</u> $[\frac{\infty}{\infty}]$; $[\frac{0}{0}]$; $[\infty-\infty]$; $[0\infty]$; $[1^{\infty}]$

ТИП 1.Предел отношения двух многочленов при $x\to\infty$

$[\frac{\infty}{\infty}]$

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+x+3x^4}{x^4-2x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x+2}{2x^3+4x^2-5}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-3x^2-x^4}{x^3+x}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x+2}{x^4+3}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^5-2x+9}{2x^5+2x-3}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+5x^2-2x^3}{x^3+2x-6}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+7}{5x^2-2x+1}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2-6x+1}{2x^3-5x^2+8}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-7}{6x^2-3x+1}$
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+5}{3x-7}$
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-8}{4x+2}$
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+1}{2x-5}$

ТИП 2. Предел отношения двух многочленов при $x\to x_0$

$[\frac{0}{0}]$

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a) \qquad x^3\pm a^3=(x\pm a)(x^2\mp ax+a^2)$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

13. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \dfrac{6x^2 - x - 1}{3x + 1}$

14. $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{3x^2 + 17x - 6}{x^2 - 36}$

15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^4 - 1}$

16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

17. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 2x - 8}$

18. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 3x - 10}$

19. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$

20. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{6x^2 + 5x - 1}{5x^2 + 3x - 2}$

21. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 2x + 1}$

22. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

23. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$

24. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$

25. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 3x + 4}{x^3 + 1}$

ТИП 3. $[\infty - \infty]$; √

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - 2x + x^2} - (1 + x)}{x}$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{x}}$

28. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right)$

29. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$

30. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$

31. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 - 4x}\right)$

32. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{x - 8}$

33. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{6 + x} - 2}{x + 2}$

34. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$

35. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

36. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

37. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

38. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{x^2}{4-x^2}\right)$

39. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$

40. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$

41. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$

42. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$

43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-x^2}-3}{\sqrt{16-x^2}-4}$

45. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{5-\sqrt{2x+7}}$

ТИП 4. Первый замечательный предел. Пределы тригонометрических функций.

46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 10x}$

48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 5x}{\arcsin 2x}$

49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 4x}{\sin 2x}$

50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$

51. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$

52 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x\sin x}$

53. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$

54. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{1-\cos 6x}$

56. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 6x}$

57. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\arcsin x}$

58. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$ 59. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{arctg(x-2)}$

60. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x^2+5x}$ 61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$

62. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^3-3x+2}$ 63. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$

64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\frac{x}{2}}{x}$ 65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg5x}{\sin 3x\cos 4x}$

66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{4x^2}$ 67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtg2x}{1-\cos x}$

68. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$ 69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x^2-5x}$

ТИП 5. Второй замечательный предел

70. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x+1}$ 71. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{4x}}$

72. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{2x+1}\right)^{x+5}$ 73. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x-1}\right)^{4x+1}$

74. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{7x-2}\right)^{3x+5}$ 75. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$

76. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{3x}$ 77. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^{\frac{x}{2}}$

78. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$ 79. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$

80. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x)^{ctg 2x}$

81. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$

82. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x)}{1-x}$

83. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg\,\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$

3.1 Типовой расчет

Вариант 1.

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$
2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x+x^4}{3+2x^3-x^4}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^x$

Вариант 2.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+4}{x^3+3x^2-2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$

6. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2x^2}{9-x^2}\right)$

Вариант 3.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^3+8}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2+3x-1}{3x^2-x-5}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{x\sin x}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3(x-1)}}$

Вариант 4.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{x^2-1}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{1+3x^2+x^4}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+1}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)(\ln(x+3)-\ln x)$

Вариант 5.

1. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{6x^2-x-1}{3x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+x+3x^4}{x^4-2x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{x\sin x}$

6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(2-x)}{1-x}$

Вариант 6.

1. $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{3x^2+17x-6}{x^2-36}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x+2}{2x^3+4x^2-5}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{4x}}$

Вариант 7.

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-4x}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{x^2}{4-x^2}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-tg^2 x}{x^4}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{3x}$

Вариант 8.

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x+2}{x^4+3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2-x^4}{x^3+x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-tg^2x}{x^4}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$

Вариант 9.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+x)^2-(1+3x)}{x^2-x^5}$

2. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-2x+9}{2x^5+2x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^{\frac{x}{2}}$

Вариант 10.

1. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+2x-8}$

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+5x^2-2x^3}{x^3+2x-6}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg\,\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 1: Учебное пособие для втузов.— 13-е изд.— М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1985.— 432 с.

2. Сборник задач по математике. Под редакцией А.В.Ефимова, Б.П. Демидовича. М., 1993 г.

3. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. Изд. 3-е. — Ростов н/Д, 2006. — 640 с.