ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине «Математика»

«Неопределенные интегралы»

Авторы
Рябых Г.Ю.
Ворович Е.И.
Тукодова О.М.
Фролова Н.В.
Пристинская О.В.

Ростов-на-Дону, 2021

Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов всех направлений и форм обучения.

Авторы

доцент, канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Рябых Г.Ю.

доцент, канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ворович Е.И.

Фото

доцент, канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Тукодова О.М.

Фото

Старший преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.

Фото

Старший преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пристинская О.В.

Оглавление

1. Интегральное исчисление
1.1 Первообразная функция

Определение. Функция F(x) называется первообразной функцией функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

1.2 Неопределенный интеграл

Определение: Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

F(x) + C.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.

5. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

Пример:

$$\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int tgx dx$	-ln│cosx│+C	9	$\int e^x dx$	e^x + C
2	$\int ctgx dx$	ln│sinx│+ C	10	$\int \cos x dx$	sinx + C
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x dx$	-cosx + C
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	tgx + C

5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\| + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	-ctgx + C
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	ln $\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	arcsin $\frac{x}{a}$ + C
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\| + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$

2. Методы интегрирования

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

2.1 Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны

$\left(\ln(-x)\right)' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

2.2 Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ'(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл

$$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx.$$

Сделаем замену $t = \sin x,\ dt = \cos x dt$.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2}x + C.$$

Пример. Найти неопределенный интеграл

$$\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$$

Замена $t = x^2 + 1;\quad dt = 2xdx;\quad dx = \dfrac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

2.3 Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$(uv)' = u'v + v'u$

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: $d(uv) = udv + vdu$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример.

$$\int x^2 \sin xdx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin xdx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = \cos xdx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin xdx \right] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример.

$$\int e^{2x} \cos xdx = \left\{ \begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos xdx; & v = \sin x \end{matrix} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin xdx; & v = -\cos x; \end{matrix} \right\} = e^{2x} \sin x - 2\left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx \right] =$$

$$= e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4\int \cos xe^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos xdx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos xdx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

Пример.

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1=t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C =$$
$$= \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} =$$
$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример.

$$\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int \sin^{-3/2}x\cos xdx = \{\sin x = t; \quad dt = \cos xdx\} = \int t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2} + C =$$
$$= -2\sin^{-1/2}x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

Пример.

$$\int x^2 e^{5x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = e^{5x}dx; \\ du = 2xdx; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}; \end{matrix}\right\} = \frac{1}{5}e^{5x}x^2 - \int \frac{1}{5}e^{5x}2xdx = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = e^{5x}dx; \\ du = dx; & v = \dfrac{1}{5}e^{5x}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5}e^{5x}dx\right] = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25}\int e^{5x}dx =$$

$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25}\right).$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x - 1 + 9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9 - (x+1)^2}} = \{x + 1 = t\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x+1}{3} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = \dfrac{1}{x^3}dx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx; & v = -\dfrac{1}{2x^2}; \end{matrix}\right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Пример.

$$\int x\ln xdx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = xdx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx; & v = \dfrac{x^2}{2}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx =$$

$$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$$

Пример.

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx = \left\{t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x = -\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\right\} = -\int dt = -t + C =$$

$$= -e^{\cos^2 x} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{ \sqrt{x} = t; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \right\} = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 16} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{1}{16} arctg\left(\frac{x-3}{4}\right) + C.$$

3. Интегрирование элементарных дробей.

Определение: Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax+b}$;

III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$;

IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа ($m \geq 2$, $n \geq 2$) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой t = ax + b.

I.

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

II.

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot$$

$$\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Рассмотрим применение указанной выше формулы на примерах.

Пример.

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}dx = \left\{\begin{matrix} u=6x-5; \quad du=6dx; \\ x=\frac{u+5}{6}; \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{14u+70-24}{u^2+23}du = \frac{7}{3}\int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6}\ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}}arctg\frac{u}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right| + \frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C.$$

Вообще говоря, если у трехчлена $ax^2 + bx + c$ выражение $b^2 - 4ac > 0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

Пример.

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx = \left\{\begin{matrix} u=x+3; \quad du=dx; \\ x=u-3; \end{matrix}\right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49}du = 5\int \frac{udu}{u^2-49} -$$

$$-18\int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right| - \frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right| + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C.$$

Пример.

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx = \left\{\begin{matrix} u = x-3; & du = dx; \\ x = u+3; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du = 3\int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} +$$

$$+13\int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13\arcsin\frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2-6x} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C.$$

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай при M = 0, N = 1.

Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int \frac{du}{(u^2+s)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s}\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n}$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим: $\left\{\begin{matrix} dv_1 = \frac{udu}{(u^2+s)^n}; & u_1 = u; & du_1 = du; \\ v_1 = \int \frac{udu}{(u^2+s)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; & & \end{matrix}\right\}$

$$\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной.** Если применить ее n-1 раз, то получится табличный интеграл $\int \frac{du}{u^2+s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx = (4a)^n \int \frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx = \left\{ \begin{matrix} u=2ax+b; & du=2adx; \\ x=\frac{u-b}{2a}; & s=4ac-b^2; \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{\frac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}du = \frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int \frac{udu}{(u^2+s)^n} + \frac{2aN-Mb}{2a}\int \frac{du}{(u^2+s)^n}\right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$ приводится к табличному $\int \frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью *n*, а универсальность и общность подхода делает возможным очень простую реализацию этого метода на ЭВМ.

Пример:

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}dx = \left\{ \begin{matrix} u = x-2; & du = dx; \\ x = u+2; & \end{matrix} \right\} = \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}du =$$

$$= 3\int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \left\{ \begin{matrix} t = u^2+3; \\ dt = 2udu; \end{matrix} \right\} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2} + 11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{du}{u^2+3} \right] =$$

$$= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} arctg\frac{u}{\sqrt{3}} + C = -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

4. Интегрирование рациональных функций.

4.1 Интегрирование рациональных дробей.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема: Если $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель P(x) которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x) = (x - a)^{\alpha}\ldots(x - b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\lambda}\ldots(x^2 + rx + s)^{\mu}$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} +$$

$$+ \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \ldots + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \ldots + \frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях х.

Применение этого метода рассмотрим на конкретном примере.

Пример.

$$\int \frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx$$

Т.к. $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88$$

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$$
$$=9x^3-30x^2+28x-88.$$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 2A + 2B + 36 - 4A - 4B - 72 + 6A + 12B = 14 \\ 2A + B - 24 + 2A + 4B = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 4A + 5B = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 50 - 10B + 5B = 35 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ B = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ C = 1 \\ D = 2 \end{cases}$$

Итого:

$$\int \frac{5}{x-2}dx + \int \frac{3}{x-4}dx + \int \frac{x+2}{x^2+4}dx = 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4}dx + \int \frac{2}{x^2+4}dx =$$
$$= 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + arctg\frac{x}{2} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}dx$$

Т.к. дробь неправильная, то предварительно следует выделить у нее целую часть:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7 & 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 12x^2} & 2x^2 + 3 \\
-\;9x^3 + 8x^2 - 76x - 7 & \\
\underline{9x^3 - 12x^2 - 51x + 18} & \\
20x^2 - 25x - 25 &
\end{array}
$$

$$\int\left[2x^2+3+\frac{20x^2-25x-25}{3x^3-4x^2-17x+6}\right]dx=\int 2x^2dx+\int 3dx+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=\frac{2}{3}x^3+3x+$$

$$+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx$$

Разложим знаменатель полученной дроби на множители. Видно, что при x = 3 знаменатель дроби превращается в ноль. Тогда:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 & x - 3 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^3 - 9x^2} & 3x^2 + 5x - 2 \\
-\;5x^2 - 17x & \\
\underline{5x^2 - 15x} & \\
-\;\underline{-2x + 6} & \\
-2x + 6 & \\
0 &
\end{array}
$$

Таким образом $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x - 3)(3x^2 + 5x - 2) = (x - 3)(x + 2)(3x - 1)$. Тогда:

$$\frac{4x^2-5x-5}{(x-3)(x+2)(3x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{3x-1}$$

$$A(x+2)(3x-1)+B(x-3)(3x-1)+C(x-3)(x+2)=4x^2-5x-5$$

Для того, чтобы избежать при нахождении неопределенных коэффициентов раскрытия скобок, группировки и решения системы уравнений (которая в некоторых случаях может оказаться достаточно большой) применяют так называемый **метод произвольных значений**. Суть метода состоит в том, что в полученное выше выражение подставляются поочередно несколько (по числу неопределенных коэффициентов) произвольных значений х. Для упрощения вычислений принято в качестве произвольных значений принимать точки, при которых знаменатель дроби равен нулю, т.е. в нашем случае – 3, -2, 1/3. Получаем:

$$\begin{cases} 40A = 16 \\ 35B = 21 \\ C = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 2/5 \\ B = 3/5 \\ C = 1 \end{cases}$$

Окончательно получаем:

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx =$$

$$\frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\int \frac{dx}{x+2} + 2\int \frac{dx}{x-3} + 5\int \frac{dx}{3x-1} =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\ln|x+2| + 2\ln|x-3| + \frac{5}{3}\ln|3x-1| + C.$$

Пример.

$$\int \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2+2)^2} dx = \int \frac{A}{x+3} dx + \int \frac{Bx + C}{(x^2+2)^2} dx + \int \frac{Dx + E}{x^2+2} dx$$

Найдем неопределенные коэффициенты:

$$A(x^2+2)^2 + (Bx + C)(x+3) + (Dx + E)(x+3)(x^2+2) = 3x^4 + 14x^2 + 7x + 15$$

$$Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^2 + 3Bx + Cx + 3C + Dx^4 + 2Dx^2 + 3Dx^3 + 6Dx + Ex^3 + 2Ex + 3Ex^2 + 6E =$$

$$= (D + A)x^4 + (3D + E)x^3 + (A + B + 2D + 3E + 4A)x^2 + (3B + C + 6D + 2E)x + (2A + 3C + 6E + 4A)$$

$$\begin{cases} D + A = 3 \\ 3D + E = 0 \\ B + 2D + 3E + 4A = 14 \\ 3B + C + 6D + 2E = 7 \\ 3C + 6E + 4A = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 6 - 2A - 27 + 9A + 4A = 14 \\ 3B + C + 18 - 6A - 18 + 6A = 7 \\ 3C - 54 + 18A + 4A = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 11A = 35 \\ 3B + C = 7 \\ 3C + 22A = 69 \end{cases} \qquad \begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ 11A = 35 - B \\ C = 7 - 3B \\ 21 - 9B + 70 - 2B = 69 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = 0 \\ E = 0 \end{cases}$$

Тогда значение заданного интеграла:

$$3\int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{2x+1}{(x^2+2)^2}dx = 3\int \frac{dx}{x+3} + 2\int \frac{x}{(x^2+2)^2}dx + \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = 3\ln|x+3| - \frac{1}{x^2+2} +$$

$$+ \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

5. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Большинство из этих интегралов вообще нельзя вычислить аналитически, поэтому рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных sinx и cosx.

Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Тогда $x = 2arctgt;$ $\qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$

Таким образом:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

Пример.

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C.$$

Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с ее помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

Пример.

$$\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left[9 + \frac{8(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\right]} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 2t + 17} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2 + 16} =$$

$$= \frac{1}{2} arctg \frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2} arctg \frac{tg\frac{x}{2} + 1}{4} + C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *если функция R является нечетной относительно cosx.*

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку *t = sinx*.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int\frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}\cos xdx$$

Функция $\frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}$ может содержать cosx только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно sinx.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int r(\sin x)\cos xdx=\int r(t)dt.$$

Пример.

$$\int\frac{\cos^7 xdx}{\sin^4 x}=\left\{\begin{matrix}\sin x=t\\ dt=\cos xdx\\ \cos^2 x=1-\sin^2 x\end{matrix}\right\}=\int\frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt=\int\frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt=\int\frac{dt}{t^4}-3\int\frac{dt}{t^2}+$$

$$+3\int dt-\int t^2dt=-\frac{1}{3t^3}+\frac{3}{t}+3t-\frac{1}{3}t^3=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{3}{\sin x}+3\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

Интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$ *если*

функция R является нечетной относительно sinx.

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка *t = cosx.*

Тогда $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int r(\cos x)\sin xdx=-\int r(t)dt.$

Пример.

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \begin{Bmatrix} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{Bmatrix} = -\int \frac{1-t^2}{2+t}dt = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}dt = \int \left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]dt =$$

$$= \int \left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]dt = \int tdt + \int 2dt - 4\int \frac{tdt}{t+2} - 5\int \frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|-4\int \frac{t}{t+2}dt =$$

$$= \begin{Bmatrix} \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{A}{t+2}+B \\ A+Bt+2=t \\ B=1, \quad A=-2 \\ \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{-2}{t+2}+1 \end{Bmatrix} = \frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|+8\int \frac{dt}{t+2}-4\int dt = \frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|+8\ln|t+2|-4t =$$

$$= \frac{t^2}{2}-2t+3\ln|t+2|+C = \frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *функция R четная относительно sinx и cosx.*

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка

t = tgx.

Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x + 6tgx - 16}dx = \begin{Bmatrix} tgx = t; \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = d(tgx) = dt \end{Bmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+6t-16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2-25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx+3-5}{tgx+3+5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx-2}{tgx+8}\right| + C.$$

Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n}\right]$$

Пример.

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 9x dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$$

Пример.

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx = \int \sin 10x[\cos 7x \cos 4x]dx = \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 11x dx + \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 3x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin 21x dx - \frac{1}{4}\int \sin x dx + \frac{1}{4}\int \sin 13x dx + \frac{1}{4}\int \sin 7x dx = -\frac{1}{84}\cos 21x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{52}\cos 13x -$$

$$-\frac{1}{28}\cos 7x + C.$$

Иногда при интегрировании тригонометрических функций удобно использовать общеизвестные тригонометрические формулы для понижения порядка функций.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left\{\frac{dctg 2x}{dx} = \frac{-2}{\sin^2 x}\right\} = -2ctg 2x + C$$

Пример.

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} +$$

$$+ \frac{1}{8}\left[\int dx + \int \cos 4x dx\right] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

Иногда применяются некоторые нестандартные приемы.

Пример.

$$\int \cos(\ln x)dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & du = \frac{1}{x}dx; \\ x = e^u; & dx = e^u du; \end{matrix}\right\} = \int e^u \cos u du = \left\{\begin{matrix} p = \cos u; & dq = e^u du; \\ dp = -\sin u du; & q = e^u; \end{matrix}\right\} = e^u \cos u +$$

$$+ \int e^u \sin u du = \left\{\begin{matrix} p = \sin u; & dq = e^u du; \\ dp = \cos u du; & q = e^u; \end{matrix}\right\} = e^u \cos u + e^u \sin u - \int e^u \cos u du;$$

Итого $\int e^u \cos u du = e^u(\cos u + \sin u) - \int e^u \cos u du$

$$\int e^u \cos u du = \frac{e^u}{2}(\cos u + \sin u) + C$$

$$\int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$$

$$\int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right) + C;$$

6. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой может быть найден как известно всегда.

Рассмотрим некоторые приемы для интегрирования различных типов иррациональных функций.

Интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ *где n- натуральное число.*

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$ функция рационализируется.

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n; \qquad x=\frac{t^n-b}{a-ct^n}; \qquad dx=\left(\frac{t^n-b}{a-ct^n}\right)'dt;$$

Тогда

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{t^n-b}{a-ct^n},t\right)\left(\frac{t^n-b}{a-ct^n}\right)'dt=\int r(t)dt.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}=\left\{\sqrt[4]{1-2x}=t; \quad dt=\frac{-2dx}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3}=\frac{-dx}{2t^3};\right\}=\int\frac{-2t^3dt}{t^2-t}=-2\int\frac{t^2dt}{t-1}=$$

$$=-2\int\left(t+\frac{t}{t-1}\right)dt=-2\int tdt-2\int\frac{t}{t-1}dt=-t^2-2\int\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt=-t^2-2t-2\ln|t-1|+C=$$
$$=-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right|+C.$$

Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.

Проиллюстрируем это на примере.

Пример.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx = \left\{\begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1}=t; \quad x-1=t^{12}; \\ dx=12t^{11}dt; \end{array}\right\} = \int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}dt}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}dt =$$

$$=12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}dt + \int \frac{t^2}{t^2+1}dt\right) = 12\left(\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt + \int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\right) = 12\int tdt - 12\int \frac{tdt}{t^2+1} + 12\int dt -$$

$$-12\int \frac{dt}{1+t^2} = 6t^2+12t-6\ln(t^2+1)-12arctgt+C = 6\sqrt[6]{x-1}+12\sqrt[12]{x-1}-6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1)-$$

$$-12arctg\sqrt[12]{x-1}+C.$$

7. Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^2}{x^6+4}dx.$$

<u>Решение.</u>

$$\int \frac{x^2}{x^6+4}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^6+4}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{x^6+4} = \left|\begin{array}{l} x^3=t, \\ dt=3x^2dx \end{array}\right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C = \frac{1}{6}arctg\frac{x^3}{2}+C$$

Пример 2. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$$

<u>Решение.</u>

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int \frac{(x+1)-4}{\sqrt{4-(x+1)^2}}dx = \left|\begin{array}{l} x+1=t, \\ dx=dt \end{array}\right| = \int \frac{t-4}{\sqrt{4-t^2}}dt = \int \frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}} - 4\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} =$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{d\left(4-t^2\right)}{\sqrt{4-t^2}} - 4\arcsin\frac{t}{2}+C = -\sqrt{4-(x+1)^2} - 4\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$$

Пример 3. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx.$$

<u>Решение.</u>

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx = \left| \begin{matrix} u=\arcsin x, & du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}}, & v=2\sqrt{x+1} \end{matrix} \right| = 2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x - 2\int \sqrt{x+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x - 2\int \frac{\sqrt{x+1}dx}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = 2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x +$$

$$+2\int \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x + 4\sqrt{1-x}+C.$$

Пример 4. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$$

<u>Решение.</u> Выделяем сначала целую часть подынтегральной дроби:

$$\frac{x^3+1}{x^3-x^2} = \frac{x^3-x^2+x^2+1}{x^3-x^2} = 1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}.$$

Знаменатель правильной дроби имеет один простой корень $x=1$ и один кратный корень $x=0$.

Поэтому дробь заменим суммой простых дробей вида:

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}.$$

Неизвестные вначале коэффициенты находим следующим образом (метод неопределенных коэффициентов). Просуммируем дроби в правой части, приводя их к общему знаменателю. Сравнивая числители дробей, справа и слева, имеем тождество

$$Ax^2+B(x-1)+Cx(x-1)\equiv x^2+1.$$

Поочередно задавая удобные значения x, составим уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов. Пусть $x=0$, тогда $-B=1\Rightarrow\boxed{B=-1}$. Пусть $x=1$, тогда $\boxed{A=2}$. Пусть $x=-1$, тогда $A-2B+2C=2\Rightarrow\boxed{C=-1}$. Таким образом, $\dfrac{x^2+1}{x^3-x^2}=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$. Следовательно,

$$\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx=\int\left(1+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=x+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+\frac{1}{x}+C.$$

Пример 5. Вычислить неопределенный интеграл $\int\cos^4 xdx.$

Решение.

$$\int\cos^4 xdx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2dx=\int\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\int\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx=$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

Пример 6. Вычислить неопределенный интеграл $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}dx.$

Решение.

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}dx=\left|\begin{matrix}x=t^2,\\ dx=2tdt\end{matrix}\right|=\int\frac{2t^2}{t+5}dt=2\int\frac{t^2-25+25}{t+5}dt=2\int\left(\frac{(t-5)(t+5)}{t+5}+\frac{25}{t+5}\right)dt=$$

$$=2\int(t-5)dt+50\int\frac{dt}{t+5}=(t-5)^2+50\ln|t+5|+C=\left(\sqrt{x}-5\right)^2+50\ln\left(\sqrt{x}+5\right)+C.$$

1328. Найти интеграл $\int (2x^3-5x^2+7x-3)\,dx$.

△ Используя свойства 4° и 5°, получаем

$$\int (2x^3-5x^2+7x-3)\,dx=2\int x^3\,dx-5\int x^2\,dx+7\int x\,dx-3\int dx.$$

К первым трем интегралам правой части применим формулу II, а к четвертому интегралу — формулу I:

$$\int (2x^3-5x^2+7x-3)\,dx=2\cdot\frac{x^4}{4}-5\cdot\frac{x^3}{3}+7\cdot\frac{x^2}{2}-3x+C=$$
$$=\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-3x+C. \ ▲$$

1329. Найти интеграл $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx$.

$$△ \int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx=\int\left(x+2\cdot\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}}+\frac{1}{x^{2/3}}\right)dx=$$
$$=\int\left(x+2x^{1/6}+x^{-2/3}\right)dx=\int x\,dx+2\int x^{1/6}\,dx+\int x^{-2/3}\,dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}+2\cdot\frac{x^{7/6}}{7/6}+\frac{x^{1/3}}{1/3}+C=\frac{x^2}{2}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}+C. \ ▲$$

1330. Найти интеграл $\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}\,dx$.

$$△ \int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}\,dx=\int (2\cdot 3^2\cdot 5^3)^x\,dx=\int 2250^x\,dx=\frac{2250^x}{\ln 2250}+C. \ ▲$$

1331. Найти интеграл $\int (1+x^2)^{1/2}\,x\,dx$.

△ Этот интеграл можно привести к формуле II, преобразовав его так:

$$\int (1+x^2)^{1/2}\,x\,dx=\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{1/2}\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{1/2}\,d(1+x^2).$$

Теперь переменной интегрирования служит выражение $1+x^2$ и относительно этой переменной получается интеграл от степенной функции. Следовательно,

$$\int (1+x^2)^{1/2}\,x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{1/2+1}}{1/2+1}+C=\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+C. \ ▲$$

1332. Найти интеграл $\int (x^2-3x+1)^{10}(2x-3)\,dx$.

△ Здесь, поступая так же, как и в предыдущем примере, имеем

$$\int (x^2-3x+1)^{10}\,d(x^2-3x+1)=\frac{1}{11}(x^2-3x+1)^{11}+C. \ \blacktriangle$$

1333. Найти интеграл $\int (\ln t)^4 \frac{dt}{t}$.

△ Выражение $\frac{dt}{t}$ можно записать как $d(\ln t)$, поэтому

$$\int (\ln t)^4\,d(\ln t)=\frac{1}{5}(\ln t)^5+C. \ \blacktriangle$$

1334. Найти интеграл $\int e^{3\cos x}\sin x\,dx$.

△ Заданный интеграл можно представить так:

$$\int e^{3\cos x}\sin x\,dx=\frac{1}{3}\int e^{3\cos x}\cdot 3\sin x\,dx,$$

но $3\sin x\,dx=-d(3\cos x)$, а потому

$$\int e^{3\cos x}\sin x\,dx=-\frac{1}{3}\int e^{3\cos x}\,d(3\cos x),$$

т. е. переменной интегрирования является $3\cos x$. Следовательно, интеграл берется по формуле VI:

$$\int e^{3\cos x}\sin x\,dx=-\frac{1}{3}e^{3\cos x}+C. \ \blacktriangle$$

1335. Найти интеграл $\int (2\sin x+3\cos x)\,dx$.

△ Находим

$$\int (2\sin x+3\cos x)\,dx=2\int \sin x\,dx+3\int \cos x\,dx=-2\cos x+3\sin x+C$$

1336. Найти интеграл $\int (\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^2\, dx$.

△ Имеем

$$\int (\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^2\, dx=\int (\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{ctg} x \operatorname{tg} x+\operatorname{ctg}^2 x)\, dx=$$
$$=\int (\operatorname{tg}^2 x+1+1+\operatorname{ctg}^2 x)\, dx=\int (\operatorname{tg}^2 x+1)\, dx+\int (1+\operatorname{ctg}^2 x)\, dx=$$
$$=\int \sec^2 x\, dx+\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$$

1352. Найти интеграл $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$.

△ Произведем подстановку $t=\sqrt[3]{x}$, т. е. $x=t^3$. Эта подстановка приведет к тому, что под знаком синуса окажется переменная интегрирования, а не корень из нее. Найдем дифференциал $dx=3t^2\, dt$. Отсюда получаем

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx=\int \frac{3t^2 \sin t}{t^2}\, dt=3\int \sin t\, dt=-3\cos t+C.$$

Ответ должен быть выражен через старую переменную x. Подставляя в результат интегрирования $t=\sqrt[3]{x}$, получим

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx=-3\cos \sqrt[3]{x}+C. \blacktriangle$$

1353. Найти интеграл $\int (2x+1)^{20}\,dx$.

△ Этот интеграл можно найти и не производя замены переменной. Здесь достаточно развернуть выражение $(2x+1)^{20}$ по формуле бинома Ньютона и применить почленное интегрирование. Однако этот прием связан с большим количеством вычислений. С помощью замены переменной можно сразу свести данный интеграл к табличному.

Полагая $2x+1=t$, имеем $2dx=dt$, т. е. $dx=(1/2)\,dt$. Отсюда получаем

$$\int (2x+1)^{20}\,dx=\frac{1}{2}\int t^{20}\,dt=\underline{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}t^{21}+C}=\frac{1}{42}(2x+1)^{21}+C. \blacktriangle$$

Вообще, если интеграл $\int f(x)\,dx$ является табличным, то интеграл $\int f(ax+b)\,dx$ может быть легко найден с помощью подстановки $ax+b=t$.

Например, применим эту подстановку к интегралу $\int \sin(ax+b)\,dx$. Имеем $ax+b=t$, $a\,dx=dt$ и $dx=(1/a)\,dt$. Следовательно,

$$\int \sin(ax+b)\,dx=\int \sin t\cdot\frac{dt}{a}=\frac{1}{a}\int \sin t\,dt=-\frac{1}{a}\cos t+C.$$

Возвратившись к старой переменной, получаем

$$\int \sin(ax+b)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C.$$

Аналогично можно показать, что

$$\int \cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C,\quad \int e^{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}\cdot e^{ax+b}+C \text{ и т. д.}$$

При нахождении интеграла $\int f(ax+b)\,dx$ записи самой подстановки $ax+b=t$ можно фактически и не производить. Здесь достаточно принять во внимание, что $dx=\frac{1}{a}\,d(ax+b)$. Таким образом,

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C,$$

где F — первообразная для f.

1354. Найти интеграл $\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$.

△ Положим $\sqrt{x^3+5}=t$; тогда $x^3+5=t^2$. Дифференцируем обе части равенства: $3x^2\,dx=2t\,dt$. Отсюда $x^2\,dx=(2/3)\,t\,dt$ и, следовательно,

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx=\int\sqrt{x^3+5}\,x^2\,dx=\int t\cdot\frac{2}{3}\,t\,dt=\frac{2}{3}\int t^2\,dt=$$

$$=\frac{2}{9}t^3+C=\frac{2}{9}(\sqrt{x^3+5})^3+C=\frac{2}{9}(x^3+5)\sqrt{x^3+5}+C.$$

Данный интеграл можно найти и с помощью подстановки $x^3+5=t$. Эта подстановка сразу приводит интеграл к табличному вследствие того, что первый множитель подынтегрального выражения x^2 отличается от производной подкоренного выражения x^3+5 только постоянным множителем 1/3, т. е. $x^2=(1/3)\,(x^3+5)'$. ▲

1355. Найти интеграл $\int\frac{(2\ln x+3)^3}{x}\,dx$.

△ Перепишем данный интеграл в виде $\int(2\ln x+3)^3\frac{1}{x}\,dx$. Так как производная выражения $2\ln x+3$ равна $2/x$, а второй множитель $1/x$ отличается от этой производной только постоянным коэффициентом 2, то нужно применить подстановку $2\ln x+3=t$. Тогда $2\cdot\frac{dx}{x}=dt$, $\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\,dt$. Следовательно,

$$\int(2\ln x+3)^3\frac{dx}{x}=\int t^3\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int t^3\,dt=\frac{1}{8}t^4+C=\frac{1}{8}(2\ln x+3)^4+C.\ ▲$$

1360. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$.

△ Произведем подстановку $\sqrt{2x-9}=t$; тогда $2x-9=t^2$, $x=(t^2+9)/2$ и $dx=t\,dt$. Итак,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}=\int\frac{t\,dt}{\frac{t^2+9}{2}\cdot t}=2\int\frac{dt}{t^2+9}.$$

Применив формулу XVIII, получим

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}=\frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{3}+C=\frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2x-9}}{3}+C.\ ▲$$

1361. Найти интеграл $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$.

△ Произведем подстановку $\cos^2 x = t$; тогда $-2\cos x \sin x\,dx = dt$, т. е. $\sin 2x\,dx = -dt$. Теперь находим

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}\,dx = -\int \frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = -\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} + C = -\arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}} + C$$

1362. Найти интеграл $\int \left(2\sin\frac{x}{2} + 3\right)^2 \cos\frac{x}{2}\,dx$.

△ Применим подстановку $2\sin(x/2) + 3 = t$; тогда $\cos(x/2)\,dx = dt$ и

$$\int \left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^2 \cos\frac{x}{2}\,dx = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^3 + C. \blacktriangle$$

1363. Найти интеграл $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$.

△ Применим подстановку $x^5 = t$; тогда $5x^4\,dx = dt$, $x^4\,dx = (1/5)\,dt$ и

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}-2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2}} = \frac{1}{5}\ln\left|t + \sqrt{t^2-2}\right| + C$$

(см. формулу XXI). Итак,

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}-2}} = \frac{1}{5}\ln\left|x^5 + \sqrt{x^{10}-2}\right| + C. \blacktriangle$$

1364. Найти интеграл $\int \frac{x\,dx}{x^4+2x^2+5}$.

△ Преобразуя знаменатель дроби, получим $x^4+2x^2+5 = (x^2+1)^2+4$. Произведем подстановку $x^2+1 = t$; тогда $x\,dx = (1/2)\,dt$. Отсюда

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+2x^2+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C$$

(см. формулу XVIII). Таким образом,

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+2x^2+5} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{2} + C. \blacktriangle$$

1365. Найти интеграл $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}\,dx$.

△ Положим $e^{2x}=t$, тогда $e^{2x}\,dx=(1/2)\,dt$ и

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}-5}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right|+C$$

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}-5}=\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{e^{2x}-\sqrt{5}}{e^{2x}+\sqrt{5}}\right|+C. \ ▲$$

1385. Найти интеграл $\int \ln x\,dx$.

△ Положим $u=\ln x$, $dv=dx$; тогда $v=x$, $du=\frac{dx}{x}$. Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\ln x-\int dx=$$
$$=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C. \ ▲$$

1386. Найти интеграл $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

△ Пусть $u=\operatorname{arctg} x$, $dv=dx$, тогда $du=\frac{dx}{1+x^2}$, $v=x$. По формуле интегрирования по частям находим

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx=x\operatorname{arctg} x-\int \frac{x\,dx}{1+x^2}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C. \ ▲$$

1387. Найти интеграл $\int x \sin x \, dx$.

△ Положим $u=x$, $dv=\sin x\, dx$; тогда $du=dx$, $x=-\cos x$. Отсюда

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Если бы выражения u и dv мы выбрали иначе, например $u=\sin x$, $dv=x\,dx$, то получили бы $du=\cos x\, dx$, $v=(1/2)\,x^2$, откуда

$$\int x \sin x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \sin x - \int \frac{1}{2} x^2 \cos x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx,$$

и пришли бы к интегралу более сложному, чем исходный, так как степень сомножителя при тригонометрической функции повысилась на единицу. ▲

1388. Найти интеграл $\int x^2 e^x \, dx$.

△ Положим $u=x^2$, $dv=e^x\,dx$; тогда $du=2x\,dx$, $v=e^x$. Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx.$$

Мы добились понижения степени x на единицу. Чтобы найти $\int x e^x \, dx$, применим еще раз интегрирование по частям. Полагаем $u=x$, $dv=e^x\,dx$; тогда $du = dx$, $v=e^x$ и

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C. \ ▲$$

1389. Найти интеграл $I=\int e^x\sin x\,dx$.

$\triangle$ Пусть $u=e^x$, $dv=\sin x\,dx$; тогда $du=e^x\,dx$, $v=-\cos x$. Следовательно,

$$I=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx.$$

Создается впечатление, что интегрирование по частям не привело к цели, так как интеграл не упростился. Попробуем, однако, еще раз проинтегрировать по частям. Приняв $u=e^x$, $dv=\cos x\,dx$, откуда $du=e^x\,dx$, $v=\sin x$, получаем

$$I=-e^x\cos x+(e^x\sin x-I),\ \text{т. е. } I=-e^x\cos x+e^x\sin x-I.$$

Применив дважды операцию интегрирования по частям, мы в правой части снова получили исходный интеграл. Таким образом, приходим к уравнению с неизвестным интегралом I. Из этого уравнения находим

$$2I=-e^x\cos x+e^x\sin x,\ \text{т. е. } I=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C.$$

1403. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^2+6x+25}$.

$$\triangle\ \int\frac{dx}{x^2+6x+25}=\int\frac{dx}{(x+3)^2+16}=\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+16}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4}+C.\ \blacktriangle$$

1404. Найти интеграл $\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}$.

$$\triangle\ \int\frac{dx}{2x^2-2x+3}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{5}/2}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.\ \blacktriangle$$

1405. Найти интеграл $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx.$

$$\triangle \int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + 5\int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + 5\int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + C. \blacktriangle$$

1406. Найти интеграл $\int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}.$

$$\triangle \int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5} = \int \frac{\frac{1}{4}(4x+2)-\frac{1}{2}}{2x^2+2x+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+5}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+2x+5} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{2}} = \frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5) -$$

$$- \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3/2}\operatorname{arctg}\frac{x+1/2}{3/2} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5) - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3} + C. \blacktriangle$$

1419. Найти интеграл $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$.

△ Так как каждый из двухчленов $x-1$, $x-2$, $x-4$ входит в знаменатель в первой степени, то данная правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей I типа:

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$x^2+2x+6=A(x-2)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x-2). \qquad (*)$$

Следовательно,

$$x^2+2x+6=A(x^2-6x+8)+B(x^2-5x+4)+C(x^2-3x+2).$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$x^2+2x+6=(A+B+C)x^2+(-6A-5B-3C)x+(8A+4B+2C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B+C=1, \\ -6A-5B-3C=2, \\ 8A+4B+2C=6, \end{cases}$$

из которой найдем $A=3$, $B=-7$, $C=5$.

Итак, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}.$$

Неизвестные A, B, C в разложении можно было определить и иначе. После освобождения от знаменателя можно придать x столько частных значений, сколько содержится в системе неизвестных, в данном случае — три частных значения.

Особенно удобно придавать x значения, являющиеся действительными корнями знаменателя. Применим этот прием к решению данного примера. После освобождения от знаменателя мы получили равенство (*). Действительными корнями знаменателя являются числа 1, 2 и 4. Положим в этом равенстве $x=1$, тогда

$$1^2+2\cdot 1+6=A(1-2)(1-4)+B(1-1)(1-4)+C(1-1)(1-2),$$

откуда $9=3A$, т. е. $A=3$. Полагая $x=2$, получаем $14=-2B$, т. е. $B=-7$; полагая $x=4$, имеем $30=6C$, т. е. $C=5$. В результате получились те же значения, что и при первом способе определения неизвестных.

Таким образом,

$$\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx=3\int\frac{dx}{x-1}-7\int\frac{dx}{x-2}+5\int\frac{dx}{x-4}=$$

$$=3\ln|x-1|-7\ln|x-2|+5\ln|x-4|+C=\ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right|+C. \ \blacktriangle$$

1420. Найти интеграл $\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$.

△ Множителю $(x-1)^3$ соответствует сумма трех простейших дробей $\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$, а множителю $x+3$ — простейшая дробь $\frac{D}{x+3}$. Итак,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+3}.$$

Освободимся от знаменателя:

$$x^2+1=A(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)^2(x+3)+D(x-1)^3.$$

Действительными корнями знаменателя являются числа 1 и -3. Полагая $x=1$, получаем $2=4A$, т. е. $A=1/2$. При $x=-3$ имеем $10=-64D$, т. е. $D=-5/32$.

Сравним теперь коэффициенты при старшей степени x, т. е. при x^3. В левой части нет члена с x^3, т. е. коэффициент при x^3 равен 0. В правой части коэффициент при x^3 равен $C+D$. Итак, $C+D=0$, откуда $C=5/32$.

Остается определить коэффициент B. Для этого необходимо иметь еще одно уравнение. Это уравнение можно получить путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x (например, при x^2) или придав x какое-нибудь числовое значение. Удобнее взять такое значение, при котором вычислений будет возможно меньше. Полагая, например, $x=0$, получаем

$$1=3A-3B+3C-D, \quad \text{или} \quad 1=\frac{3}{2}-3B+\frac{15}{32}+\frac{5}{32}, \quad \text{т. е.} \quad B=\frac{3}{8}.$$

Окончательное разложение данной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{8(x-1)^2}+\frac{5}{32(x-1)}-\frac{5}{32(x+3)}.$$

Таким образом, получим

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x-3)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C. \ ▲$$

1421. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^5-x^2}$.

△ Разложим знаменатель на множители:

$$x^5-x^2=x^2(x^3-1)=x^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Тогда

$$\frac{1}{x^5-x^2}=\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$1=A(x-1)(x^2+x+1)+Bx(x-1)(x^2+x+1)+$$
$$+Cx^2(x^2+x+1)+(Dx+E)x^2(x-1).$$

Действительными корнями знаменателя являются числа 0 и 1. При $x=0$ имеем $1=-A$, т. е. $A=-1$; при $x=1$ имеем $1=3C$, т. е. $C=1/3$. Перепишем предыдущее равенство в виде

$$1=A(x^3-1)+B(x^4-x)+C(x^4+x^3+x^2)+Dx^4+Ex^3-Dx^3-Ex^2.$$

Сравнивая коэффициенты при x^4, x^3, x^2, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} B+C+D=0, \\ A+C+E-D=0, \\ C-E=0, \end{cases}$$

из которой найдем $B=0$, $D=-1/3$, $E=1/3$. Итак,

$$\frac{1}{x^5-x^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{x^5-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|(x-1)|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C. \blacktriangle$$

8. Задачи для самостоятельного решения

1. $\int xdx$
2. $\int\frac{dx}{x^7}$
3. $\int x^{15}dx$
4. $\int\frac{dx}{x^{10}}$
5. $\int x^3dx$
6. $\int\frac{dx}{x^2}$
7. $\int\frac{dx}{x}$
8. $\int\sqrt{x}dx$
9. $\int\sqrt[3]{x^2}dx$
10. $\int\sqrt[5]{x^3}dx$
11. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$
12. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}}$
13. $\int\frac{dx}{\sqrt[7]{x^3}}$
14. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$
15. $\int(5x^4-6x+7)dx$

16. $\int (3x^2 - 4x + 1)dx$
17. $\int (1 - 9x + 5x^5)dx$
18. $\int (3\sin x - 2ctgx + 1)dx$
19. $\int (2tgx - e^x + 3\cos x)dx$
20. $\int \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3} dx$
21. $\int \frac{2x^5 - 5x^3 + 2x + 7}{x^2} dx$
22. $\int \frac{\sqrt[3]{x} - x^2 + 5x}{\sqrt{x}} dx$
23. $\int \sin 5x dx$
24. $\int \cos 10x dx$
25. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$
26. $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$
27. $\int \cos 4x dx$
28. $\int \sin \frac{x}{3} dx$
29. $\int \cos \frac{x}{2} dx$
30. $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$
31. $\int \frac{dx}{\cos^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}$
32. $\int \frac{dx}{\sin^2 \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} \right)}$
33. $\int \frac{dx}{\sin 10x}$
34. $\int \frac{dx}{\cos 6x}$
35. $\int tg 4x dx$
36. $\int ctg 3x dx$
37. $\int \sin(5x + 1)dx$
38. $\int \cos(6x - 7)dx$
39. $\int tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right) dx$
40. $\int \frac{dx}{\sin^2 (1 - 6x)}$
41. $\int e^{-5x} dx$

42. $\int e^{10x}dx$

43. $\int e^{(5x+1)}dx$

44. $\int 2^{3-4x}dx$

45. $\int 4^{5x}dx$

46. $\int 3^{2x+3}dx$

47. $\int \frac{dx}{x+1}$

48. $\int \frac{dx}{3-x}$

49. $\int \frac{dx}{2x+1}$

50. $\int \frac{dx}{1-5x}$

51. $\int (3+2x)^5 dx$

52. $\int (1+x)^4 dx$

53. $\int (5-3x)^3 dx$

54. $\int \frac{dx}{(1+2x)^3}$

55. $\int \frac{dx}{(2-4x)^5}$

56. $\int \sqrt{2x+3}dx$

57. $\int \sqrt{1-3x}dx$

57. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+x}}$

58. $\int \sin^3 x\cos xdx$

59. $\int \cos^2 x\sin xdx$

60. $\int \frac{\cos xdx}{\sin^5 x}$

61. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos x}}$

62. $\int \sqrt[3]{\cos x}\sin xdx$

63. $\int \frac{tg^5 xdx}{\cos^2 x}$

64. $\int \frac{ctg^3 xdx}{\sin^2 x}$

65. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

66. $\int \frac{\ln^5 xdx}{x}$

67. $\int \frac{\sqrt{\ln x}dx}{x}$

68. $\int \frac{dx}{x\ln^5 x}$

69. $\int e^x\sqrt{e^x+1}dx$

70. $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$

71. $\int \frac{e^x dx}{(e^x+2)^3}$

72. $\int (x^2+1)^3 xdx$

73. $\int (3x^2-2)^5 xdx$

74. $\int (1-4x^2)^8 xdx$

75. $\int \frac{xdx}{(x^2+1)}$

76. $\int \frac{xdx}{(3-5x^2)}$

77. $\int \frac{xdx}{(2-3x^2)^7}$

78. $\int \sqrt{1-x^2}xdx$

79. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}}$

80. $\int \sin(x^2+1)xdx$

81. $\int \frac{dx}{x^2+9}$

82. $\int \frac{dx}{x^2-3}$

84. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

85. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$

Интегрирование некоторых тригонометрических выражений

104. $\int \sin^3 x\cos x^2 dx$

105. $\int \sin^4 x\cos^3 xdx$

106. $\int \sin^3 2xdx$

107. $\int \cos^2 2xdx$

108. $\int \sin^2 4xdx$

109. $\int \sin^2 x\cos^2 xdx$

110. $\int \sin 3x\cos xdx$

111. $\int \sin 2x\sin 5xdx$

112. $\int \cos 5x\cos xdx$

Интегрирование некоторых выражений, зависящих от радикалов

113. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$ 114. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$

115. $\int \frac{\sqrt{x}}{3+x}dx$ 116. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$

Интегрирование выражений, содержащий квадратный трёхчлен

1) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$ 2) $\int \frac{dx}{x^2-10x+24}$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ 4) $\int \frac{dx}{2x^2-8x+6}$

5) $\int \frac{dx}{16x^2+8x+5}$ 6) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

7) $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$ 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x+x^2}}$ 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ 12) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$ 14) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}$ 16) $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}dx$

17) $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$ 18) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

19) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-4x+7}}dx$

Интегрирование по частям

$$\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu}$$

20) $\int x\sin 2x dx$ 21) $\int x\cos 5x dx$

22) $\int xe^{-3x}dx$

23) $\int x3^{x}dx$

24) $\int x^2 sin3xdx$

25) $\int x^2 cosxdx$

26) $\int x^2 e^{-x}dx$

27) $\int x^2 5^{x}dx$

28) $\int xlnxdx$

29) $\int x^7 lnxdx$

30) $\int lnxdx$

31) $\int ln(x+1)dx$

32) $\int ln(x^2+1)dx$

33) $\int arctgxdx$

34) $\int arcsinxdx$

35) $\int xarctgxdx$

36) $\int e^{x}(2x-1)dx$

37) $\int e^{-x}sin3xdx$

38) $\int e^{-x}cosxdx$

39) $\int (x+3)e^{-5x}dx$

40) $\int (x^2+3x+2)lnxdx$

Интегрирование рациональных дробей

41) $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$

42) $\int \frac{xdx}{x^2+3x+2}$

43) $\int \frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}dx$

44) $\int \frac{7x-6}{2x^2-6x+4}dx$

45) $\int \frac{x^2-x+1}{x^3-5x^2+6x}dx$

46) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x-1)}$

47) $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+1)}$

48) $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx$

49) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$

50) $\int \frac{xdx}{x^3-8}$

51) $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$

52) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

53) $\int \frac{(x+6)dx}{(x+1)(x^2+9)}$

Интегрирование тригонометрических выражений

54) $\int sin^3xcos^2xdx$ 55) $\int cos^5x5xdx$

56) $\int sin^5xcos^6xdx$ 57) $\int cos^3xsin^4xdx$

58) $\int sin^3xdx$ 59) $\int cos^5x4xdx$

60) $\int sin^5x6xdx$ 61) $\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx$

62) $\int cos^7xdx$ 63) $\int sin^7xdx$

$$\boldsymbol{cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)} \qquad \boldsymbol{sin^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)}$$

64) $\int cos^2 2xdx$ 65) $\int sin^2 4xdx$

66) $\int cos^4xdx$ 67) $\int sin^4 3xdx$

68) $\int sin^3xcos^2xdx$

$$\boldsymbol{1 + tg^2x = \frac{1}{cos^2x}} \qquad \boldsymbol{1 + ctg^2x = \frac{1}{sin^2x}}$$

$$\boldsymbol{d(tgx) = \frac{dx}{cos^2x}} \qquad \boldsymbol{d(ctgx) = -\frac{dx}{sin^2x}}$$

69) $\int tg^2xdx$ 70) $\int tg^3 2xdx$

71) $\int tg^5xdx$ 72) $\int ctg^2xdx$

73) $\int ctg^5 2xdx$ 74) $\int \frac{dx}{sin^4x}$

75) $\int \frac{dx}{cos^4 2x}$ 76) $\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx$

77) $\int \frac{cos^2x}{sin^6x}dx$ 78) $\int \frac{sin^4 2x}{cos^6 2x}dx$

79) $\int \frac{sin^4 3x}{cos^6 3x}dx$

$$sin\alpha sin\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)]$$

$$cos\alpha cos\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta)]$$

$$sin\alpha cos\beta = \frac{1}{2}[sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)]$$

80) $\int sin3xcosxdx$ 81) $\int sin2xsin5xdx$

82) $\int cosxsin5xdx$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$$u = tg\frac{x}{2} \qquad sinx = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

83) $\int \frac{dx}{1+sinx}$ 84) $\int \frac{dx}{sinx+cosx}$

85) $\int \frac{dx}{3sinx+4cosx}$

8.1 Типовой расчет

Вариант 1.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{5x-2}}$; б) $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{2x^2+3}}$;

в) $\int (3x-2)e^{-x}dx$; г) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+15}{x^3+5x}dx$;

д) $\int 3^{\cos 2x}\sin 2xdx$; е) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$.

Вариант 2.

а) $\int \frac{\sin 2x}{e^{\cos^2 x}} dx$; б) $\int \frac{2x-3}{x^2-x+1} dx$;

в) $\int (x-2)\sin 2x dx$; г) $\int \frac{x+3}{(x+1)(x^2+x+1)} dx$;

д) $\int \cos x \sin 2x dx$; е) $\int \frac{1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}} dx$.

Вариант 3.

а) $\int \frac{\cos 2x}{(15+\sin 2x)} dx$; б) $\int \frac{x+3}{\sqrt{7x^2-1}} dx$;

в) $\int (9x-2)\ln x dx$; г) $\int \frac{x^3+5}{(x-1)(x^2+4)} dx$;

д) $\int \sin^4 \frac{x}{2} dx$; е) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}$.

Вариант 4.

а) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2 - 2x\cos x}{x} dx$; б) $\int \frac{4x-3}{\sqrt{2x^2+1}} dx$;

в) $\int (x^2-2)2^x dx$; г) $\int \frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2} dx$;

д) $\int \cos^4 x dx$; е) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}$.

Вариант 5.

а) $\int \frac{dx}{(2x-1)\ln(2x-1)}$; б) $\int \frac{x+5}{5x^2+3} dx$;

в) $\int x \sin x \cos x dx$; г) $\int \frac{x^2+2x-3}{x^3-2x^2-3x} dx$;

д) $\int \sin^6 \frac{x}{2} cos \frac{x}{2} dx$; е) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

Вариант 6.

а) $\int \sin\frac{2}{x}\frac{dx}{x^2}$;　　б) $\int \frac{8x-3}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx$;

в) $\int (x^2-1)\cos 2x dx$;　　г) $\int \frac{(3x^2+1)}{(x^4-1)}dx$;

д) $\int \cos^3 x dx$;　　е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$.

Вариант 7.

а) $\int \frac{\arcsin^3 x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$;　　б) $\int \frac{x+1}{\sqrt{8x-4x^2}}dx$;

в) $\int (2x-1)\sin x dx$;　　г) $\int \frac{x^2-x+6}{x^3+8}dx$;

д) $\int \sin^3 x dx$;　　е) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x}+1}dx$.

Вариант 8.

а) $\int \frac{ctg^5 x}{4\sin^2 x}dx$;　　б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$;

в) $\int (2x-4)\sin 3x dx$;　　г) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$;

д) $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$;　　е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}$.

Вариант 9.

а) $\int \frac{\sin x dx}{2\sqrt[3]{\cos^2 x}}$;　　б) $\int \frac{x dx}{2x^2-3x-2}$;

в) $\int x\,arctg x dx$;　　г) $\int \frac{x^2 dx}{x^4-16}$;

д) $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$; е) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$.

Вариант 10.

а) $\int \frac{4\cos 3x dx}{4+\sin 3x}$; б) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

в) $\int \arccos x dx$; г) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$;

д) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$; е) $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+6\right)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 1: Учебное пособие для втузов.— 13-е изд.— М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1985.— 432 с.

2. Сборник задач по математике. Под редакцией А.В.Ефимова, Б.П. Демидовича. М., 1993 г.

3. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. Изд. 3-е. — Ростов н/Д, 2006. — 640 с.