ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

«Ряды»

по дисциплине

«Математика»

Авторы

Рябых Г. Ю.,

Ворович Е. И.,

Тукодова О. М.,

Фролова Н. В.,

Пристинская О. В.

Ростов-на-Дону, 2020

Аннотация

Учебное пособие предназначено для бакалавров всех форм обучения по всем направлениям.

Авторы

к.ф.-м.н., доцент кафедры «Прикладная математика» Рябых Г.Ю.,
к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика» Ворович Е.И.,
к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика» Тукодова О.М.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пристинская О.В.

Оглавление

1. РЯДЫ

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называется **числовым рядом**

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

При этом числа $u_1, u_2, ...$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, ...$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, ..., S_n, ...$

Определение. Ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Определение. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

1.1 Необходимые и достаточные условия сходимости числовых рядов

Теорема. Необходимое условие сходимости. *Для того, чтобы ряд* $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *был сходящимся необходимо, чтобы общий член* u_n *стремился к нулю.*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится. Например, так называемый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

<u>Достаточные признаки сходимости для знакоположительных рядов</u>

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на –1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

<u>Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.</u>

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

<u>**Теорема 1.**</u> Если $u_n \leq v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

<u>**Теорема 2.**</u> *Если* $u_n > 0, \quad v_n > 0$ *и существует предел*

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=h$*, где h – число, отличное от нуля, то ряды* $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *ведут одинаково в смысле сходимости.*

Ряды для сравнения

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c$, c=const расходится

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, гармонический ряд расходится

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, обобщенный гармонический ряд сходится, если p>1, и расходится, если p≤1.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_0 q^n$ сходится, если $|q|<1$, и расходится, если $|q|\geq 1$.

Теорема 3. Признак Даламбера.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$*, то при l < 1 ряд сходится, а при l > 1 – расходится. Если l = 1, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.*

Теорема 4. Признак Коши. (радикальный признак)

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$*, то при l<1 ряд сходится, а при l>1 ряд расходится. Если l = 1, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.*

Теорема 4. Интегральный признак Коши

Если f(x) – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке $[1;\infty)$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *, где* $u_n = f(n)$*, сходится, если несобственный интеграл* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *сходится, и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится, если несобственный интеграл* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *расходится.*

1.2 Знакочередующиеся ряды

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$$

где $u_n > 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$

Признак Лейбница. *Если у знакочередующегося ряда* $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$

1) абсолютные величины u_i *убывают* $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ *и*

2) общий член стремится к нулю $u_n \to 0$*, т.е.* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

то ряд сходится.

Абсолютная и условная сходимость рядов. Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (2)$$

<u>Теорема.</u> *Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).*

<u>Определение.</u> Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

<u>Определение.</u> Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

Алгоритм исследования сходимости знакочередующихся рядов

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m u_n$ - знакопеременный

↓

Составляем ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

↙ ↘

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится

↓

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m u_n$ сходится абсолютно

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится

↓

1. Проверяем монотонность: $|u_1| > |u_2| > |u_3| > \ldots$2.
Проверяем $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится

да

нет

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Определение. Если членами ряда будут не числа, а функции от *x*, то ряд называется **функциональным**.

Исследование на сходимость функциональных рядов сложнее исследования числовых рядов. Один и тот же функциональный ряд может при одних значениях переменной *x* сходиться, а при других – расходиться. Поэтому вопрос сходимости функциональных рядов сводится к определению тех значений переменной *x*, при которых ряд сходится.

Определение. **Частными (частичными) суммами** функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются функции

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1,2,...$$

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **сходящимся** в точке ($x=x_0$), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности

$\{S_n(x_0)\}$ называется **суммой** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0.

Определение. Совокупность всех значений *x*, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **областью сходимости** ряда.

3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Функциональным рядом называется ряд вида

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{1}$$

где $n \in N$, $u_n = u_n(x)$, $x \in R$.

Функциональный ряд вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{2}$$

называется степенным по степеням $(x-x_0)$.

Тогда ряд вида

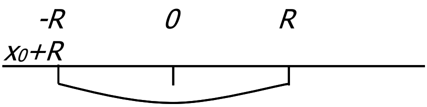
$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n \text{ –} \tag{3}$$

степенной ряд по степеням x.

Ряд (3) может быть получен из ряда (2) заменой $x-x_0=t$.

Множество значений x, при которых степенной ряд сходится, называется областью сходимости ряда. Для ряда (3) областью сходимости является интервал, симметричный относительно начала координат (рис. 3). Для ряда (2) область сходимости –

интервал, симметричный относительно точки $x = x_0$ (рис. 4).



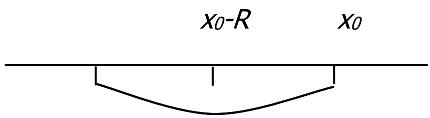


Рис. 3 Рис. 4

Число R – половина длины интервала сходимости – называется радиусом сходимости степенного ряда. В частности, если $R = 0$, то степенной ряд (3) сходится только в одной точке $x = 0$, а степенной ряд (2) сходится в точке $x = x_0$. При $R = \infty$ степенной ряд сходится на всей числовой оси. Для отыскания радиуса сходимости можно использовать признаки Даламбера и Коши:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}; \qquad (4)$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|a_n|}}; \qquad (5)$$

если этот предел (конечный или бесконечный) существует. На концах интервала сходимости степенной ряд может сходиться или расходиться, поэтому нужны дополнительные исследования.

4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$

Решение. Применим необходимый признак сходимости.

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = \infty \neq 0$, следовательно ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{5(n-2)^4}$

Решение. Исходный ряд сравним с "эталонным" рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Этот ряд сходится как ряд Дирихле, при $p > 1$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+1}{5(n-2)^4}\cdot\frac{n^2}{1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{5n^4\left(1-\frac{2}{n}\right)^4} = \frac{3}{5}$ - конечное число, отличное от 0, то в силу второго признака сравнения заключаем, что исходный ряд сходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 3^n}{(2n-1)!}$.

Решение. Применим признак Даламбера. Записываем *n*-ый член ряда:

$$u_n = \frac{n^3 \cdot 3^n}{(2n-1)!}$$

(n+1)-ый член получим, если в выражении u_n везде *n* заменим на *(n+1)*:

$$u_{n+1}=\frac{(n+1)^3 3^{n+1}}{(2(n+1)-1)!}=\frac{(n+1)^3 3^{n+1}}{(2n+1)!}.$$

Найдем предел отношения:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^3 3^{n+1}}{(2n+1)!}}{\dfrac{n^3 3^n}{(2n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3 3^{n+1}(2n-1)!}{n^3 3^n (2n+1)!}=3\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3 2n(2n+1)}=0<1\Rightarrow \textit{ряд}-\textit{сходится}$$

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2}\right)^{-n^3}$.

Решение. Здесь удобно применить радикальный признак Коши:

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{2n^2}\right)^{-n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{-n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{\frac{1}{2n^2}}\right]^{\frac{1(-n^2)}{2n^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}<1$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln^3 x}}$.

Она при x≥2 положительная, непрерывная и монотонно убывает.

(Заметим, что эта функция получается из выражения общего члена ряда при замене *n* на *x*). Можно применять интегральный признак. Исследуем сходимость несобственного интеграла:

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}=\int_2^{\infty}(\ln x)^{-3/2}\,d(\ln x)=\lim_{A\to\infty}\int_2^{A}(\ln x)^{-3/2}d(\ln x)=\lim_{A\to\infty}\left.\frac{(\ln x)^{-3/2+1}}{-3/2+1}\right|_2^{A}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\ln 2}}-\lim_{A\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\ln A}}=\frac{2}{\sqrt{\ln 2}}-0<\infty\Rightarrow\qquad \textit{интеграл}\qquad\textit{сходится.}$$

Из интегрального признака заключаем, поскольку несобственный интеграл сходится, то сходится и исследуемый ряд.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left[\pi(n-1/2)\right]\ tg\frac{\pi}{\sqrt{5n^2-1}}.$$

Решение. Данный ряд знакочередующийся, т.к.

$$\sin\left[\pi(n-1/2)\right]=\sin(\pi n-\frac{\pi}{2})=-\cos\pi n=(-1)^{n+1}.$$

Исходный ряд можно переписать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}tg\frac{\pi}{\sqrt{5n^2-1}}.$$

Рассмотрим сначала ряд, составленный из абсолютных величин исходного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{\sqrt{5n^2-1}}\qquad(\text{при}\quad n=1,2,\ldots\quad\text{все}\quad tg\frac{\pi}{\sqrt{5n^2-1}}>0).$$

Сравним его с гармоническим рядом $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, о котором известно, что он расходится. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{tg\frac{\pi}{\sqrt{5n^2-1}}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi n}{\sqrt{5n^2-1}}=\frac{\pi}{\sqrt{5}}$, то по второму признаку сравнения заключаем, что ряд из модулей расходится и, следовательно, исходный ряд абсолютно не сходится. Продолжим исследование с помощью признака Лейбница: члены исходного ряда удовлетворяют условиям: во-первых, монотонного убывания абсолютных величин членов ряда, во-вторых, общий член ряда стремится к нулю. В самом деле, в промежутке $[0, \frac{\pi}{2}]$ функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастает, а при $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства, а также необходимое условие:

$$\frac{\pi}{\sqrt{5n^2-1}}>\frac{\pi}{\sqrt{5(n+1)^2-1}}; \qquad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}tg\frac{\pi}{\sqrt{5n^2-1}}=tg0=0.$$

Окончательно заключаем, исходный ряд сходится условно.

Пример 7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2n+1}x^n$.

Решение. В развернутом виде ряд выглядит следующим образом:

$$1+\frac{3}{3}x+\frac{3^2}{5}x^2+\ldots+\frac{3^n}{2n+1}x^n+\ldots$$

Коэффициенты ряда: $a_n=\dfrac{3^n}{2n+1}$, $\qquad a_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}}{2n+3}$.

Найдем радиус сходимости

$$R=\frac{1}{L}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(2n+3)}{(2n+1)3^n}=\frac{1}{3}.$$

Заключаем, что интервал сходимости $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

Исследуем далее сходимость степенного ряда в граничных точках интервала:

а) при $x=\dfrac{1}{3}$ получим числовой положительный ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^n\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}.$$

Этот ряд расходится, что видно из сравнения его с гармоническим рядом.

б) при $x=-\dfrac{1}{3}$ получим знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2n+1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\equiv\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}.$$

Члены этого ряда удовлетворяют условиям теоремы Лейбница:

1). $$u_n = \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+3} = u_{n+1},$$

2) $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Знакочередующийся ряд сходится, т.е. при $X = -\frac{1}{3}$ степенной ряд сходится и окончательно область сходимости степенного ряда определяется неравенствами $-\frac{1}{3} \le X < \frac{1}{3}$.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{3n-1} + \ldots$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \ne 0$ - необходимый признак сходимости не выполняется, значит ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

$$u_n=\frac{n}{2^n};\quad u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}<1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

$$u_n=\frac{1}{n!};\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}<1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

4.1 Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2n+1},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}n}{5^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n+1)10^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{n\cdot 2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{4n}\right)^{3n+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^4+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2+n^3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)}{3^{n+1}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{5n+2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n^2+3}\right)^{\frac{n}{2}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-10}{n^3+3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{3n+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n+1}}{5^n(n+1)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^{2n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}(n-1)}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$$

2. Исследовать сходимость знакочередующихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n n}{5^{n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n-1}\cdot n}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2n+3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{3n-1}, \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}}{\sqrt{n}\cdot 5^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n-1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(n+1)!}$$

3. Найти интервалы сходимости степенных рядов и исследовать сходимость на концах интервалов.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n(x-3)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+3)^n}{n\cdot(n+3)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{5^n}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(x-4)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n+\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 5^n}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x-1)^n}{3^n\cdot(2n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}(x+4)^n}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2n\cdot\sqrt{n+1}}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+1)^n}{3^n\cdot n}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$$

4.2 Типовой расчет по теме «Ряды»

1 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)(n+2)(n-3)}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)^2}$

2 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n^4}}{n^2+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n+1)10^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}}{\sqrt{n}\cdot 5^n}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n n}{2^n}$

3 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{n\cdot 2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n-1}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n^5}$

4 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n+3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n!}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n^n}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}$

5 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(n+1)!}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n 2^n}{n+1}$

6 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n^2+3}\right)^{\frac{n}{2}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{3^n}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

7 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)(2n+2)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}(n-1)}{2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+1)n}$

8 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+3)^2}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)^2}$

9 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{n!}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(n+1)^2}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n n}{2^n}$

10 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n+1)(n+3)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3n}{(n+1)!}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3n^3}{(n+3)^3}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n3^n}$

11 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)3^n}{2^{2n}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{n^2}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

12 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-2}{n4^n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-4}\right)^n$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2n}{3n+2}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n 4^n}{n}$

13 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1)5^n}{3^n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-4}\right)^n$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+5)^n}{n^5}$

14 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^2+1}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n+5}{n+3}}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+3)^2}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{2n+1}$

15 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+7}{3n-2}\right)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)3^n}{2^{2n}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n^2}{(n+1)^2}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}$

16 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n-2}\right)^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (n+1)^2}{3^n}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)^2}$

17 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n+1)^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n^3+5n}{4n^2+n+13}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{5n+2}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n n}{2^n}$

18 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n+2)^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n+8}{6n^2-4n+3}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)n^2}{2^n}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n3^n}$

19 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{3n^2+4n+100}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{n^2+n+1}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

20 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)n}{n^3-2n+8}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+4}{\sqrt{n^4+1}}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n 4^n}{n}$

21 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n^3-5}{3n^3+1}\right)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5n^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-5}{5n^2-1}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n^5}$

22 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{2n-1}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{2n+1}$

23 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n!}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n}{n^{3}-1}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n}}{3^{n+1}}$

24 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^{3}}{(n+3)^{3}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{3^{n+1}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{\sqrt{n^{3}-2}}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{n}}{n\sqrt{n}}$

25 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^{2}}{3+n^{2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n}}{(n+1)^{5}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2}{3n^{2}+4}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$

26 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{50n+5}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)4^n}{n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3-2}}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+1)n}$

27 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n+2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n3^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{3n^2+4}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

28 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2n+3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{3^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+5}}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{2n+1}$

29 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0{,}5n^2}{n^2+0{,}5}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n^2+4}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n 4^n}{n}$

30 вариант

Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1000n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1}$

г) Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n3^n}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа в 3 т. Том 1: учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 703 с.
2. Демидович Б.П. СБОРНИК задач и упражнений по математическому анализу Учебное пособие для вузов АСР А> АСТ Астрель Москва. 2005.
3. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. - М.: Наука, 1973.