



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие по математике

«Линейная алгебра»

Авторы
Рябых Г. Ю.,
Тукодова О. М.,
Ворович Е. И.,
Фролова Н. В.,
Пристинская О. В.

Ростов-на-Дону, 2020



Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов все направлений и всех форм обучения.

Авторы

канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Рябых Г.Ю.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ворович Е.И.,
канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Тукодова О.М.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пристинская О.В.



Оглавление

1. Линейная алгебра	4
1.1 Основные определения.....	4
1.2 Основные действия над матрицами	4
1.3 Операция умножения матриц	6
1.4 Свойства операции умножения матриц.....	7
2. Определители (детерминанты).....	10
2.1 Элементарные преобразования матрицы	13
2.2 Миноры.....	14
2.3 Алгебраические дополнения.....	14
2.4 Обратная матрица	15
2.4. Свойства обратных матриц	17
3. Базисный минор матрицы	19
3.1 Ранг матрицы.....	19
3.2 Теорема о базисном миноре.	21
3.3 Матричный метод решения систем линейных уравнений	21
3.4 Метод Крамера	24
3.5 Решение произвольных систем линейных уравнений.....	27
4. Элементарные преобразования систем.....	29
4.1 Теорема Кронекера – Капелли.....	29
4.2 Метод Гаусса	32
5. Примеры решения задач	34
Задачи для самостоятельного решения	46
Список литературы	53

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1 Основные определения

Определение. **Матрицей** размера $m \times n$, где m - число строк, n - число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij} , где i - номер строки, а j - номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.2 Основные действия над матрицами

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m=n$), то матрица называется **квадратной**.

Определение. Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется **единичной матрицей**.

Определение. Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.

Пример.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$
 - симметрическая матрица

Определение. Квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
 называется **диагональной** матрицей.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Определение. Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$C_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$$C = A + B = B + A.$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha (A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$

$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

найти $2A + B$.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

1.3 Операция умножения матриц

Определение. Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

1.4 Свойства операции умножения матриц

1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными**.

Самым характерным примером может служить [единичная](#) матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$$\mathbf{A \cdot E = E \cdot A = A}$$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$\mathbf{A \cdot O = O; O \cdot A = O,}$$

где O – **нулевая** матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна**, т.е. если определены произведения AB и $(AB)C$, то определены BC и $A(BC)$, и выполняется равенство:

$$\mathbf{(AB)C=A(BC).}$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения $A(B+C)$ и $(A+B)C$, то соответственно:

$$\mathbf{A(B + C) = AB + AC}$$

$$\mathbf{(A + B)C = AC + BC.}$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\mathbf{\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).}$$

5) Если определено произведение AB , то определено

произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$(AB)^T = B^T A^T$, где индексом T обозначается **транспонированная** матрица.

б) Заметим также, что для любых квадратных матриц $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Понятие \det (определитель, детерминант) будет рассмотрено ниже.

Определение. Матрицу B называют **транспонированной** матрицей A , а переход от A к B **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

В качестве следствия из предыдущего свойства (5) можно записать, что:

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T,$$

при условии, что определено произведение матриц ABC .

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и

$$B = (2 \quad 4 \quad 1).$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \quad 4 \quad 1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = (2 \quad 4 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (3+10 \quad 4+12) = (13 \quad 16).$$

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ (ДЕТЕРМИНАНТЫ)

Определение. Определителем квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется число, которое мо-

жет быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k},$$

где M_{1k} – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Для указанной матрицы A число M_{ik} называется **дополнительным минором** элемента матрицы a_{ik} . Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

Определение. Дополнительный минор произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Свойство 1. Важным свойством определителей является следующее соотношение: $\det A = \det A^T$;

Свойство 2. $\det (AB) = \det A \cdot \det B$

Свойство 3. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 4. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Определение. Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

Свойство 6. Если в матрице A строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Свойство 7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Свойство 9. Если для элементов какой-либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

$$= -5 + 18 + 6 = 19.$$

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти $\det(AB)$.

1-й способ: $\det A = 4 - 6 = -2$;

$$\det B = 15 - 2 = 13;$$

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = -26.$$

2-й способ: $AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$,

$$\det(AB) = 7 \cdot 18 - 8 \cdot 19 = 126 - 152 = -26.$$

2.1 Элементарные преобразования матрицы

Определение. Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие преобразования:

- 1) умножение строки на число, отличное от нуля;
- 2) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки;
- 3) перестановка строк;
- 4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);
- 5) транспонирование.

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

2.2 Миноры

Выше было использовано понятие дополнительного минора матрицы. Дадим определение минора матрицы.

Определение. Если в матрице A выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** матрицы A . Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s .

Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным.

Если вычеркнуть из исходной квадратной матрицы A выделенные строки и столбцы, то определитель полученной матрицы будет являться дополнительным минором.

2.3 Алгебраические дополнения

Определение. Алгебраическим дополнением минора матрицы называется его дополнительный минор, умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы.

В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его дополнительный минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Теорема Лапласа. Если выбрано s строк матрицы с номерами i_1, \dots, i_s , то определитель этой матрицы равен сумме произ-

ведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.

2.4 Обратная матрица

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

Определение. Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A , то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1} .

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.

Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$AX = E \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}, \quad i=(1,n), \quad j=(1,n),$$

$$e_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$e_{ij} = 1, \quad i = j.$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},$$

где M_{ji} — дополнительный минор элемента a_{ji} матрицы A .

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1} .

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$M_{11}=4; \quad M_{12}=3; \quad M_{21}=2; \quad M_{22}=1$$

$$x_{11}=-2; \quad x_{12}=1; \quad x_{21}=3/2; \quad x_{22}=-1/2$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

2.4. Свойства обратных матриц

Укажем следующие свойства обратных матриц:

- 1) $(A^{-1})^{-1} = A$;
- 2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- 3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^3 .

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ являются пе-

рестановочными.

Пример. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6 - 4) - 1(9 - 1) + 2(12 - 2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0 - 2) - 1(0 - 6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя: $-10 + 6 - 40 = -44$.

3. БАЗИСНЫЙ МИНОР МАТРИЦЫ

3.1 Ранг матрицы

Как было сказано выше, минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных s строк и s столбцов.

Определение. В матрице порядка $m \times n$ минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. r совпадает с меньшим из чисел m или n .

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными**.

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается $Rg A$.

Очень важным свойством [элементарных преобразований](#) матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

Определение. Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными**.

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эквивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

Теорема. *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.*

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}A = 2.$$

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удастся найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

3.2 Теорема о базисном миноре.

Теорема. В произвольной матрице A каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.

Таким образом, ранг произвольной матрицы A равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.

Если A - квадратная матрица и $\det A = 0$, то по крайней мере один из столбцов – линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк. Данное утверждение следует из свойства линейной зависимости при определителе равном нулю.

3.3 Матричный метод решения систем линейных уравнений

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Линейная алгебра

Составим матрицы:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Систему уравнений можно записать: $A \cdot X = B$.

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} .

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 \cdot 9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) =$$

$$= -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$a_{11}^{-1} = \frac{5}{30}; \quad a_{12}^{-1} = \frac{1}{30}; \quad a_{13}^{-1} = \frac{1}{30};$$

$$a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30}; \quad a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30}; \quad a_{23}^{-1} = \frac{16}{30};$$

$$a_{31}^{-1} = \frac{5}{30}; \quad a_{32}^{-1} = \frac{19}{30}; \quad a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30};$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку: $A \cdot A^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} \\
 = E.$$

Находим матрицу X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \\
 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

3.4 Метод Крамера

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Пример.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \Delta_1/\det A; \quad x_2 = \Delta_2/\det A; \quad x_3 = \Delta_3/\det A;$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = 3.$$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10; \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

Ответ: $x = 0$; $y = 0$; $z = -2$.

3.5 Решение произвольных систем линейных уравнений

Как было сказано выше, матричный метод и метод Крамера применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений. Далее рассмотрим произвольные системы линейных уравнений.

Определение. Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

Определение. Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.

Определение. Для системы линейных уравнений матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ называется матрицей системы,}$$

а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ называется расширенной}$$

матрицей системы

Определение. Если $b_1, b_2, \dots, b_m = 0$, то система называется **однородной**. однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ

К элементарным преобразованиям относятся:

1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2) Перестановка уравнений местами.

3) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x .

4.1 Теорема Кронекера – Капелли

(условие совместности системы)

(Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик)

Теорема: Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

$$\text{Rg}A = \text{Rg}A^*.$$

Очевидно, что система (1) может быть записана в виде:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Доказательство.

1) Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы A , а значит добавление этого столбца в матрицу, т.е. переход $A \rightarrow A^*$ не изменяют ранга.

2) Если $RgA = RgA^*$, то это означает, что они имеют один и тот же [базисный минор](#). Столбец свободных членов – линейная комбинация столбцов базисного минора, те верна запись, приведенная выше.

Пример. Определить [совместность](#) системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 - 6 = 5 \neq 0 \quad RgA = 2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rg}A^* = 3.$$

Система несовместна.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \quad \text{Rg}A = 2;$$

$$A^* \quad =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \quad \text{Rg}A^* = 2.$$

Система совместна. Решения: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$A^* =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases},$$

откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40, \text{ откуда получаем: } z = 3; y = 2; x = 1. \\ 6z = 18 \end{cases}$$

Полученный ответ совпадает с ответом, полученным для данной системы методом Крамера и матричным методом.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\{1, 2, 3, 4\}$.

5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

Разложив определитель по элементам 1-й строки, получим

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 3 \cdot (-34) + 2 \cdot (-17) = 68.$$

2. Вычислить тот же определитель на основании теоремы и линейной комбинации элементов строк (столбцов).

К элементам 1-й строки прибавим соответствующие

элементы 2-й строки, умноженные на 5, а к элементам 3-й строки—соответствующие элемент 2-ой строки, умноженные на 7:

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 2 & 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 & 0 & 17 & 34 \end{array} \right|$$

Разложив определитель по элементам 1-го столбца, получаем

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{array} \right| = 0 \cdot \left| \begin{array}{cc|cc} 2 & 4 \\ 17 & 34 \end{array} \right| + 1 \cdot \left| \begin{array}{cc|cc} 13 & 22 \\ 17 & 34 \end{array} \right| + 0 \cdot \left| \begin{array}{cc|cc} 13 & 22 \\ 2 & 4 \end{array} \right| = 13 \cdot 34 - 17 \cdot 22 = 68.$$

Правило Крамера

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x + 2y + z = 10, \\ 4x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

По формулам (1) находим

$$x = \frac{\left| \begin{array}{ccc|ccc} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{array} \right|} = \frac{8 \cdot \left| \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{array} \right| - 2 \cdot \left| \begin{array}{cc|cc} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{array} \right| + 1 \cdot \left| \begin{array}{cc|cc} 10 & 2 \\ 4 & 3 \end{array} \right|}{1 \cdot \left| \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{array} \right| - 2 \cdot \left| \begin{array}{cc|cc} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{array} \right| + 1 \cdot \left| \begin{array}{cc|cc} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{array} \right|} = \frac{14}{14} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{28}{14} = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{14} = \frac{42}{14} = 3.$$

4. Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 4x + y + z = 0, \\ x + 3y + z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Здесь $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Для вычисления этого определителя

к элементам 1-й строки прибавим элементы 3-й строки, умноженные на -4 , а к элементам 2-й строки—элементы 3-й строки, умноженные на -1 :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 17.$$

Так как $D \neq 0$, то система имеет только нулевое решение $x=y=z=0$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ x + 2y + 9z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Имеем

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -15 + 14 + 1 = 0.$$

Следовательно, система имеет решения, отличные от нулевого. Решаем систему первых двух уравнений (третье уравнение является их следствием):

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ x + 2y + 9z = 0. \end{cases}$$

Отсюда по формулам (2) п. 1 получаем

$$x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \cdot t = 20t, \quad - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \cdot t = -28t, \quad z = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t = 4t.$$

6. Найти сумму матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 3+1 & 5+2 & 7+4 \\ 2+2 & -1+3 & 0-2 \\ 4-1 & 3+0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Найти матрицу $2A+5B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad 5B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}, \quad 2A+5B = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}.$$

8. Найти произведения матриц AB и BA , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$AB =$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$BA =$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

9. Найти A^3 , если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+2 & 6+8 \\ 3+4 & 2+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33+14 & 22+56 \\ 21+18 & 14+72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

10. Найти значение матричного многочлена $2A^2 + 3A + 5E$

при $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, если E – единичная матрица третьего поряд-

ка.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad 2A^2 = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{pmatrix},$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad 5E = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad 2A^2 + 3A + 5E =$$

$$\begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}.$$

11. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

Вычисляем определитель матрицы A :

$$D_A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 24 = 5.$$

Находим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений

12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16, \end{cases}$$

Представив ее в виде матричного уравнения.

Перепишем систему в виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения имеет вид $X = A^{-1}B$.

Найдем A^{-1} . Имеем

$$D_A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 30 - 4 = -6.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, & A_{21} &= - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, & A_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13, \\ A_{12} &= - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, & A_{32} &= - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Откуда

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 126 + 70 - 208 \\ -90 - 56 + 128 \\ 18 + 14 + 16 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, $x = 2, y = 3, z = -2$.

13. Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Сложим соответствующие элементы 1-й и 3-й строк, а затем разделим на 4 элементы 1-й строки:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Из элементов 1-й строки вычтем соответствующие элементы 2-й строки, после чего вычеркнем 1-ю строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы равен 2, так как, например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, то ранг матрицы равен 3.

Метод Гаусса

14. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

Определим ранги матрицы и расширенной матрицы системы.

Выпишем расширенную матрицу

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right).$$

Вертикальной чертой мы отделим элементы матрицы системы (матрицы A) от свободных членов системы.

Прибавим к элементам 2-й строки соответствующие элементы 3-й строки, а затем разделим все элементы 2-й строки на 3:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & 6 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right).$$

Вычтем из элементов 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 & 4 \end{array} \right); A \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 16 & 13 & 2 & 2 \end{array} \right).$$

Нетрудно видеть, что $r(A) = 2$, $r(A_1) = 3$, т.е. $r(A) \neq r(A_1)$; следовательно, система несовместна.

15. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Расширенная матрица системы имеет вид

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Прибавим элементы 2-й строки к соответствующим элементам 1-й и 4-й строк, а затем разделим элементы 1-й строки на 4, а элементы 4-й строки на 5:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Вычтем из элементов 3-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 5-й строки вычтем элементы 4-й строки; после этого вычеркнем 3-ю и 5-ю строки:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right); A \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Найдем определитель последней матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Следовательно, $r(A) = 3$. Ранг расширенной матрицы также равен 3, так как найденный определитель является минором матрицы A_1 .

Итак, система совместна. Для ее решения возьмем, например, первое, третье и пятое уравнения:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Отсюда, легко находим, что $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

16. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Здесь

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Вычтем из 3-й строки 1-ю:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Разделим элементы 3-й строки на 2 и вычтем из полученной 3-й строки 2-ю, затем вычеркнем 3-ю строку:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Нетрудно видеть, что $r(A) = r(A_1) = 2$. Следовательно, си-

система совместна.

Возьмем первое и второе уравнения заданной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

За базисные неизвестные примем x_1 и x_2 . Это можно сделать, так как определитель $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ из коэффициентов при этих неизвестных отличен от нуля.

Свободными неизвестными служат x_3 и x_4 . Переписав систему в виде

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4, \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4. \end{cases}$$

Выразим x_1 и x_2 через x_3 и x_4 :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 4x_3 - 3x_4 & 5 \\ -2x_3 + x_4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{6}{11}x_3 - \frac{8}{11}x_4 - \frac{1}{11},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 2 & -2x_3 + x_4 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{6}{11}x_3 + \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}.$$

Полагая $x_3 = u$, $x_4 = v$, получим решение системы в виде

$$x_1 = -\frac{6}{11}u - \frac{8}{11}v - \frac{1}{11}, \quad x_2 = -\frac{6}{11}u + \frac{7}{11}v + \frac{2}{11},$$

$x_3 = u$, $x_4 = v$.

Придавая u и v различные числовые значения, будем получать различные решения данной системы уравнений.

17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

Преобразуем матрицу в эквивалентную:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 3 & 2 & -1 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 11 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array} \right)$$

(для упрощения вычислений мы поменяли местами первое и второе уравнения).

Вычитаем из остальных двух строк 1-ю строку, умноженную на 3 и на 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 9 & 3 & 7 \end{array} \right).$$

Изменив знаки во 2-й строке и умножив ее на 5, прибавляем к 3-й:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -11 & -22 & -33 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

(мы разделили на -11 последнюю строку).

Система уравнений приняла треугольный вид:

$$\begin{cases} x + y - z = 5, \\ y - 4z = -5, \\ z = 2. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение. Из последнего уравнения имеем $z=2$; подставляя это значение во второе уравнение, получаем $y=3$ и, наконец, из первого уравнения находим $x=-1$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислить определители

$$1) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \quad 4) \begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} \quad 6) \begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix} \quad 7) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$8) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 9) \begin{vmatrix} 1 + \cos \alpha & 1 + \sin \alpha & 1 \\ 1 - \sin \alpha & 1 + \cos \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Решить систему, используя правило Крамера

$$10) \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ x + 11y = 6 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5 \\ 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 = -3 \\ -4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

13) При каких a система имеет единственное решение?

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{cases}$$

14) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

15) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

16) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -196 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

17) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

18) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

19) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

20) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ & 3 & & & \\ & 1 & & & \\ & 5 & & & \\ & 2 & & & \end{pmatrix}$

21) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

22) $f(x) = 3x^2 - 4$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $f(A) = ?$

23) $f(x) = x^2 - 3x + 1$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $f(A) = ?$

24) $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$; $A^{-1} = ?$

25) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = ?$

26) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = ?$

3. Найти решение системы, используя: а) правило Крамера,

б) матричный метод, в) метод Гаусса, г) метод Жордана-Гаусса.

27)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

28)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases} \quad 30) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$31) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \quad 32) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

4. Исследовать систему с помощью теоремы Кронекера-Капелли. Найти ее решение (метод Гаусса)

$$33) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$34) \begin{cases} \sqrt{5}x - 5y = \sqrt{5} \\ x - \sqrt{5}y = 5 \end{cases}$$

$$35) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$36) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

$$37) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$38) \begin{cases} x - \sqrt{3}y = 1 \\ \sqrt{3}x - 3y = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$39) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

$$40) \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 9 & 6 \\ 8 & 7 & 12 & 8 \\ 4 & 3 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

$$41) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$42) \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases} \quad 43) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 2 \end{array} \right)$$

Задание 1. Заданы матрицы А и В. Вычислить матричный многочлен.

Вариант 1. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ вычислить матричный}$$

многочлен $A^2 - BA + 3A$.

Вариант 2. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \text{ вычислить матрич-}$$

ный многочлен $A^2 - 2BA + A$.

Вариант 3. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

вычислить матричный многочлен $2A^2 + BA + 3A$.

Вариант 4. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ вычислить мат-}$$

ричный многочлен $B^2 - BA + 4A$.

Вариант 5. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \text{ вычислить матрич-}$$

ный многочлен $A^2 + BA + 3B$.

Вариант 6. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ вычислить матрич-}$$

ный многочлен $A^2 - BA + 4B$.

Вариант 7. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

вычислить матричный многочлен $B^2 - BA + 3A$.

Вариант 8. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

вычислить матричный многочлен $A^2 + 3BA + 2B$.

Вариант 9. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ вычислить матричный}$$

многочлен $A^2 - BA + 3A$.

Вариант 10. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ вычислить матрич-}$$

ный многочлен $B^2 - BA + 2A$.

Задание 2. Решить системы уравнений методом Крамера, методом Гаусса, матричным способом.

Вариант 1

$$а) \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ 4x - y + 10z = 11. \\ 5x + 3y - 5z = 9 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 1. \\ 5x + y - 6z = 5 \end{cases}$$

Вариант 2

$$а) \begin{cases} x - 3z + 4t = -4 \\ 2x + y + 10z - 15t = 10 \\ 2y + 3z - 6t = 7 \\ 3x + 4y - z + 2t = 4 \end{cases}.$$

$$б) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 2 \end{cases}.$$

Вариант 3

$$а) \begin{cases} 2x - y + 5t = 6 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ -x + 2y + 4z + t = 10 \\ -y - z + 3t = 0 \end{cases}.$$

$$б) \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y - 3z = 3 \\ -x - 2y + 3z = 0 \end{cases}.$$

Вариант 4

$$а) \begin{cases} 4x + 4y - 5z = -2 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ x - y + 10z = 20 \end{cases}.$$

$$б) \begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + 4y - 3z = 7 \end{cases}.$$

Вариант 5

$$a) \begin{cases} 2x + 3y - 4z + 5t = 3 \\ -y - t = -1 \\ x - 3z + 8t = -1 \\ x + 2y - 4z + 3t = 0 \end{cases} .$$

$$б) \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 1 \\ 5x + y - 6z = 5 \\ 3x - y - 2z = 3 \end{cases} .$$

Вариант 6

$$a) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \end{cases} .$$

$$б) \begin{cases} x - 3y + 2z = 2 \\ x + y - 5z = 7 \\ 3x - y - 8z = 16 \end{cases} .$$

Вариант 7

$$a) \begin{cases} 7x - 2y + 4z = 13 \\ 2x + 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases} . \quad б) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 2 \end{cases} .$$

Вариант 8

$$a) \begin{cases} 2x - y + 5t = 6 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ -x + 2y + 4z + t = 10 \\ -y - z + 3t = 0 \end{cases} .$$

$$б) \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ x - y + 2z - 2t = -4 \\ 2y - z - t = 3 \end{cases} .$$

Вариант 9

$$a) \begin{cases} 2x + 3y - 4z + 5t = 3 \\ -y - t = -1 \\ x - 3z + 8t = -1 \\ x + 2y - 4z + 3t = 0 \end{cases} .$$

$$б) \begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ -2x + 4y + 2z = -4 \end{cases} .$$

Вариант 10

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 4. \\ x + z = 6 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x + y - 5z - t = 2 \\ x - 2y + 2t = 1 \\ -x + 3y - z - 3t = -1 \\ x - y - z + t = 1 \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра. - М.: Гелиос, 2003.
2. Баранов И.В., Стукопин В.А. Элементы линейной алгебры. - Ростов-на-Дону: РИО ДГТУ, 2007.
3. Болгаров В.А., Демидович Б.П., Ефименко В.А. Сборник задач по математике для вузов: Линейная алгебра и основы математического анализа. - М.: Мир, 1984.