ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Практикум
по дисциплине

«Исследование операций и теория игр»

Автор
Нурутдинова И. Н.

Ростов-на-Дону, 2020

Аннотация

Практикум предназначен для студентов очной формы обучения направления бакалавриата 01.03.04 «Прикладная математика».

.

Автор

к.ф.-м.н, доцент кафедры «Прикладная математика» Нурутдинова И.Н.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Освоение дисциплины «Исследования операций и теории игр» – важнейший элемент профессиональной подготовки бакалавров направления 01.03.04 Прикладная математика. Целью изучения данной дисциплины является приобретение и систематизация знаний в области исследования операций и теории игр и приобретение навыков их применения при создании и анализе математических моделей процессов и систем, как необходимых для формирования общепрофессиональных компетенций.

Практикум предназначен для использования на практических занятиях, он содержит варианты заданий для практических работ, необходимые для их выполнения теоретические сведения и образцы выполнения заданий.

Практикум также будет полезен обучающимся других направлений, изучающих данные разделы прикладной математики.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Практическая работа № 1

Задача 1. Оптимизировать целевую функцию

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to *$$

при ограничениях: $\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \quad (i = 1, 2, 3), \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$

Решить поставленную задачу ЛП двумя методами:

а) геометрически;

б) симплекс-методом.

Значения параметров c_j, a_{ij}, b_i даны в табл. 1.

Таблица 1

№ вар.	c_1	c_2	*	a_{11}	a_{12}	b_1	a_{21}	a_{22}	b_2	a_{31}	a_{32}	b_3
1	2	3	max	1	1	4	1	2	7	2	1	7
2	1	-3	min	4	5	20	-2	1	2	1	-1	3
3	1	2	max	1	1	4	1	2	6	2	1	7

4	1	4	max	1	1	4	1	2	6	3	1	10
5	-1	3	min	-2	1	2	6	5	30	1	-1	3
6	-2	1	min	3	2	24	1	-1	4	0	1	8
7	2	4	max	1	1	3	1	2	5	2	1	5
8	5	1	max	1	1	5	1	4	14	2	1	9
9	2	-3	min	-1	1	2	1	-1	4	1	-2	2
10	3	5	max	-2	3	6	0	1	4	1	0	7
11	1	1	max	1	2	11	1	3	15	2	1	16
12	-8	1	min	1	5	23	1	2	11	1	0	7
13	1	9	max	2	3	22	-4	1	4	2	1	18
14	-1	2	max	1	1	8	1	-1	3	-1	1	4
15	3	-4	min	8	3	24	-4	1	4	3	-2	6
16	1	-2	min	3	4	12	-1	1	1	1	0	3
17	4	1	max	1	1	4	1	3	10	3	1	10
18	3	-4	min	-4	3	12	1	-1	3	4	-3	12
19	-1	1	min	3	6	18	-1	1	2	4	-3	12
20	1	3	max	1	1	5	1	2	8	2	1	8

Справочный материал и образец выполнения практической работы № 1

а) Чтобы решить задачу геометрически, необходимо:

— построить множество R допустимых планов задачи, определяемых системой ограничений;

— на множестве R найти оптимальное решение — вершину многоугольника, если решение единственно, или целый отрезок, совпадающий со стороной многоугольника, если задача имеет бесконечное множество оптимальных решений.

Применим изложенный метод к решению задачи ЛП.

Задача 1. Найти максимальное значение функции

$$f(x) = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \qquad (1.1)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 - x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Построим множество допустимых планов R задачи (1.1)–(1.2). Для этого заменим в (1.2) неравенства на точные равенства. Изобразим полученные прямые и штриховкой отметим те полуплоскости, которые определяются системой (1.2).

Построим прямую (1) с уравнением $-x_1 + 3x_2 = 9$ по двум точкам: например, $(0; 3)$, $(-3; 2)$. Чтобы определить нужную полуплоскость, определяемую неравенством $-x_1 + 3x_2 \le 9$, возьмём любую точку, не лежащую на прямой (1), например $(0; 0)$. Подставим её координаты в неравенство и получим $0 \le 9$. Неравенство справедливо, следовательно, точка $(0; 0)$ принадлежит полуплоскости, определяемой неравенством $-x_1 + 3x_2 \le 9$; эту полуплоскость отмечаем штриховкой (рис. 1).

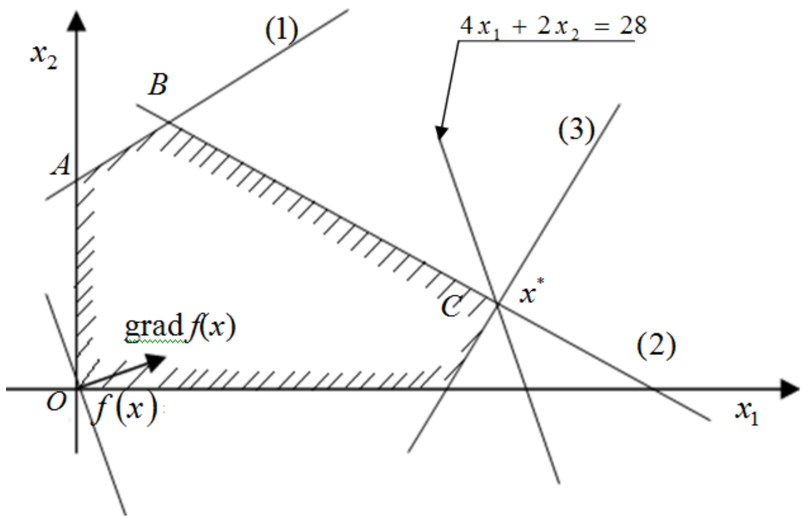


Рис. 1

Аналогично строим прямые (2): $2x_1+3x_2=18$ и (3): $2x_1-x_2=10$, отмечаем штриховкой соответствующие полуплоскости, определяемые неравенствами:

$$2x_1+3x_2\le 18,$$
$$2x_1-x_2\le 10.$$

Неравенство $x_1\ge 0$ определяет правую, а неравенство $x_2\ge 0$ — верхнюю полуплоскость плоскости $(x_1;\,x_2)$. Следовательно, множество допустимых планов (R) есть пятиугольник OABCD (рис. 1).

Найдём теперь в пятиугольнике OABCD вершину (или вершины), в которой целевая функция $f(x)=4x_1+2x_2$ принимает максимальное значение. С этой целью рассмотрим множество точек, в которых эта линейная функция принимает одинаковые значения, т.е. постоянна. Это множество образует прямую, которая называется *линией уровня* целевой функции. Уравнение имеет вид: $4x_1+2x_2=\text{const}$. Если const придавать всевозможные различные значения, то получается бесконечное семейство параллельных прямых. Для решения задачи выберем из этого семейства та кую прямую, которая имеет общие точки с множеством R и значение const при этом наибольшее. Построим одну из линий уровня, имеющих общие точки с OABCD, например (рис.1), прямую $4x_1+2x_2=0$ и будем параллельным переносом перемещать эту прямую в направлении вектора

$\operatorname{grad} f(x)=\left(f'_{x_1},\,f'_{x_2}\right)=(4;\,2)$ — градиента функции $f(x)$, поскольку известно, что именно в этом направлении скорость возрастания функции f будет наибольшей. Перемещаем прямую до тех пор, пока линия уровня будет иметь хотя бы одну общую точку с множеством R. Полученную предельную прямую называют *опорной* для множества R. Точки R, лежащие на этой опорной прямой, будут решениями задачи. Из рис.1 видно, что опорной прямой является линия уровня, проходящая через вершину C, и, следовательно, оптимальной вершиной будет точка C. Определим координаты этой точки, решив систему уравнений прямых (2) и (3), проходящих через эту точку:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 18 \\ 2x_1 - x_2 &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = 2 \cdot$$

Следовательно, оптимальным планом задачи (1.1)–(1.2) является план $x^* = (6; 2)$ и $\max f(x^*) = 4 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 28$.

Если ищем минимальное значение функции $f(x) = (c, x)$ на допустимом множестве R, то линию уровня

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = \text{const}$$

передвигаем в направлении, противоположном вектору $\operatorname{grad} f(x)$.

б) Задачу (1.1)–(1.2) запишем в каноническом виде, введя три дополнительные переменные $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$ и заменив неравенства равенствами:

$$f(x) = 4x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 18, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 10, \\ x_j \geq 0,\ (j = \overline{1,5}). \end{cases} \tag{1.5}$$

Столбцы матрицы ограничений

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

линейно независимы, так как определитель, составленный из элементов столбцов

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \cdot$$

Переменные x_3, x_4, x_5, соответствующие этим столбцам, — *базисные* переменные, x_1, x_2 — *независимые* или *свободные* переменные. Полагаем свободные переменные равными нулю, т.е. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Из системы (1.5) получаем $x_3 = 9$, $x_4 = 18$, $x_5 = 10$. Первое опорное решение $x^1 = (0, 0, 9, 18, 10)$. Для перехода к следующему опорному решению систему (1.5) запишем в виде:

$$A_3 x_3 + A_4 x_4 + A_5 x_5 + A_1 x_1 + A_2 x_2 = b.$$

И составим симплекс-таблицу (с.-т.) 1.1.

Симплекс-таблица 1.1

		4	2		
		x_1	x_2		
0	x_3	-1	3	=	9
0	x_4	2	3	=	18
0	x_5	$\boxed{2}$	-1	=	10
Δ, f		-4	-2	=	0

Относительные оценки вычислены по формуле:

$$\Delta_j = c_\sigma \cdot A_j - c_j \geq 0 \quad \forall\ j = \overline{1, n}. \qquad (1.6)$$

Целевая функция $f(x) = 4x_1 + 2x_2$ не содержит переменных x_3, x_4, x_5, поэтому вектор $c_\sigma = (0, 0, 0)$, $c_1 = 4$, $c_2 = 2$. Имеем:

$$\Delta_1 = (0, 0, 0) \cdot (-1, 2, 2)^T - 4 = -4,$$

$$\Delta_2 = (0, 0, 0) \cdot (3, 3, -1)^T - 2 = -2.$$

Относительные оценки базисных переменных Δ_3, Δ_4, Δ_5 равны нулю. Значение целевой функции на первом опорном плане также равно нулю: $f(x^1) = 0$.

Так как среди относительных оценок Δ_j $(j = \overline{1,5})$ есть отрицательные ($\Delta_1 = -4 < 0, \Delta_2 = -2 < 0$), то план x^1 не является оптимальным. Этот план можно улучшить, так как среди элементов столбцов A_1 и A_2 есть положительные. Выбираем разрешающий столбец и разрешающую строку с.-т. 1.1, используя схему 1.

Так как $\Delta_1 = -4 < 0$, то разрешающий столбец — первый. Для выбора разрешающей строки определим $\min\left\{\frac{18}{2}, \frac{10}{2}\right\} = \frac{10}{2} = 5$, т.е. разрешающая строка — третья. Элемент $a_{31} = 2$, стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, называется *разрешающим* элементом (в с.-т. 1.1 он отмечен квадратиком).

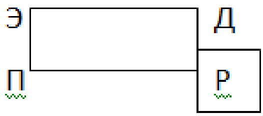
Преобразуем с.-т. 1.1 методом жордановых преобразований с выбранным разрешающим элементом по следующим правилам (схема 2 или МЖИ — метод жордановых исключений):

1) разрешающий элемент P заменяется обратной величиной $P' = 1/P$;

2) остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент: $Э' = Э/P$;

3) остальные элементы разрешающего столбца меняют знаки на противоположные и делятся на разрешающий элемент: $Э' = -Э/P$;

4) оставшиеся элементы с.-т. преобразуются по правилу прямоугольника $Э' = (Э \cdot P - П \cdot Д)/P$:



где $Э$ — преобразуемый, P— разрешающий элементы, образующие главную диагональ, а элементы P и $Д$ — побочную диагональ символического прямоугольника. Символом $(')$ отмечены преобразованные элементы с.-т. По схеме МЖИ с разрешающим элементом $a_{31} = 2$ получаем:

1) $a'_{31} = \frac{1}{2}$; 2) $a'_{32} = -\frac{1}{2}$; $b_3 = \frac{10}{2} = 5$;

3) $a'_{21} = -\dfrac{2}{2} = -1$; $a'_{11} = -\dfrac{-1}{2} = \dfrac{1}{2}$; $\Delta'_4 = -\dfrac{-4}{2} = 2$;

4) $a'_{12} = \dfrac{3 \cdot 2 - (-1)(-1)}{2} = \dfrac{6-1}{2} = \dfrac{5}{2}$; $b'_1 = \dfrac{9 \cdot 2 - (-1) \cdot 10}{2} = 14$;

$a'_{22} = \dfrac{3 \cdot 2 - 2(-1)}{2} = 4$; $b'_2 = \dfrac{18 \cdot 2 - 2 \cdot 10}{2} = 8$;

$\Delta'_2 = \dfrac{(-2) \cdot 2 - (-1) \cdot (-4)}{2} = -4$; $f' = \dfrac{0 \cdot 2 - (-4) \cdot 10}{2} = 20$.

Результаты запишем в с.-т. 1.2 и учтем, что переменная x_1, соответствующая разрешающему столбцу, стала базисной переменной, а переменная x_5, соответствующая разрешающей строке, стала свободной переменной.

Симплекс-таблица 1.2

		0	2		
		x_5	x_2		
0	x_3	1/2	5/2	=	14
0	x_4	-1	$\boxed{4}$	=	8
4	x_1	1/2	-1/2	=	5
Δ, f		2	-4	=	20

Полагая свободные переменные $x_5 = 0$, $x_2 = 0$, получим новое опорное решение $x^2 = (5, 0, 14, 8, 0)$, при этом целевая функция $f(x^2) = 20 \geq f(x^1) = 0$. Так как $\Delta_2 = -4 < 0$ и во втором столбце есть положительные элементы, то полученный план можно улучшить, переходя к новой симплекс- таблице.

Разрешающий столбец — второй, $\min\left\{14:\frac{5}{2},\frac{8}{4}\right\}=2$, следовательно, разрешающая строка — вторая, разрешающий элемент $a_{22}=4$.

Симплекс-таблица 1.3

		0	0		
		x_5	x_4		
0	x_3	9/8	-5/8	=	9
2	x_2	-1/4	1/4	=	2
4	x_1	3/8	1/8	=	6
Δ, f		1	1	=	28

Новый опорный план $x^3=(6,2,9,0,0)$, и так как все $\Delta_j>0$, то полученный опорный план является оптимальным, $x^*=(6,2)$, $f\left(x^*\right)=28$.

Оптимальное решение задачи (1.1)–(1.2), полученное симплекс-методом, совпадает с решением, полученным графически. Исходный опорный план x^1 соответствует точке $O(0,0)$ пятиугольника R (рис. 1), x^2 — вершина *D*, x^3 — вершина *C*, в которой достигается максимум.

Практическая работа № 2

Задача 2. Дана задача ЛП:

$$f(x)=3ax_1+11x_2+5bx_3+x_4\to\min,$$

$$\begin{cases}-3x_1+x_2+(2+b)x_3-x_4\ge c,\\(2+a)x_1+3x_2-5x_3-3x_4\ge 7,\\x_j\ge 0\ \left(j=\overline{1,4}\right)\end{cases}$$

Требуется:

1) сформулировать двойственную задачу;

2) решить двойственную задачу графически и симплекс-методом;

3) найти оптимальный план прямой задачи, используя теоремы двойственности;

4) проверить найденные решения пары двойственных задач на оптимальность.

Значения параметров a, b, c даны в табл. 2.

Таблица 2

№ вар.	a	b	c	№ вар.	a	b	c
1	1	1	4	11	3	1	3
2	1	2	1	12	3	2	2
3	1	3	3	13	3	3	4
4	1	4	2	14	3	4	1
5	1	5	4	15	3	5	3
6	2	1	1	16	4	1	2
7	2	2	3	17	4	2	4
8	2	3	2	18	4	3	1
9	2	4	4	19	4	4	3
10	2	5	1	20	4	5	2

Справочный материал и образец выполнения практической работы № 2

Задача 2. Дана задача ЛП:

$$f(x)=6x_1+11x_2+5x_3+x_4\to\min, \qquad (2.1)$$

$$\begin{cases} -3x_1+x_2+3x_3-x_4\ge 3, \\ 4x_1+3x_2-5x_3-3x_4\ge 7, \\ x_j\ge 0 \ \left(j=\overline{1,4}\right) \end{cases} \qquad (2.2)$$

Сформулируем задачу, двойственную к задаче (2.1)–(2.2).

Прямая задача:

$$f(x)=(c,x)=6x_1+11x_2+5x_3+x_4\to\min,$$

$$A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\ge\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad x_j\ge 0 \ \left(j=\overline{1,4}\right).$$

Двойственная задача, по определению, будет иметь вид:

$g(y) = (b^T, y) = 3y_1 + 7y_2 \to \max$,

$$A^T y = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 3 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.$$

Окончательно, в скалярной форме, задача, двойственная к задаче (2.1)–(2.2), имеет вид:

$g(y) = (b^T, y) = 3y_1 + 7y_2 \to \max$,

$$\begin{cases} -3y_1 + 4y_2 \le 6, \\ y_1 + 3y_2 \le 11, \\ 3y_1 - 5y_2 \le 5, \\ -y_1 - 3y_2 \le 1, \\ y_1 \ge 0, \ \ y_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Полученная задача имеет две переменные y_1, y_2, поэтому можно найти её решение геометрически. Построим многоугольник допустимых решений R, определяемых системой неравенств (2.3) (рис. 2).

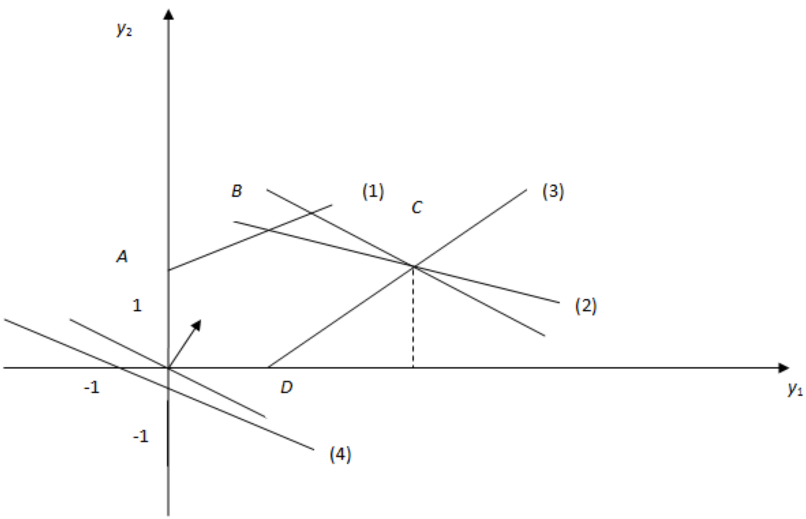


Рис. 2

Множество R — пятиугольник $OABCD$. Строим линии уровня целевой функции $g(y)=3y_1+7y_2$ = const
и перемещаем их в направлении вектора grad $g(y)=(3;7)$. Оптимальной вершиной является точка C, координаты которой определим из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 = 11, \\ 3y_1 - 5y_2 = 5, \end{cases} \rightarrow C(5;2).$$

Итак, $y^*_1=5$; $y^*_2=2$; $\max g(y) = g(y^*) = 3\cdot5+7\cdot2 = 29$.

Зная оптимальный план двойственной задачи, найдём оптимальный план исходной задачи x^*, используя теоремы двойственности.

Согласно первой теореме двойственности прямая задача (2.1) – (2.2) имеет оптимальный план x^*, на котором целевая функция принимает значение $f(x^*)=g(y^*)=29$. Сам оптимальный план x^* получим из условий второй теоремы двойственности:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) = 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right),$$

(2.4)

Так как $y^*=(5;2)$ имеет две положительных компоненты, то соответствующие им ограничения прямой задачи (2.2) на оптимальном плане $x^*=(x^*_1, x^*_2, x^*_3, x^*_4)$ обращаются в равенства:

$$\begin{cases} -3x_1^* + x_2^* + 3x_3^* - x_4^* = 3, \\ 4x_1^* + 3x_2^* - 5x_3^* - 3x_4^* = 7. \end{cases}$$

При этом $x^*_1=0$ и $x^*_4=0$, так как первое и четвёртое ограничения системы (2.3) на плане y^* обращаются в строгие неравенства.

Система уравнений $\begin{cases} x_2^* + 3x_3^* = 3, \\ 3x_2^* - 5x_3^* = 7 \end{cases}$

имеет решение $x^*_2 = 18/7$, $x^*_3 = 1/7$. Следовательно, оптимальный план исходной задачи $x^* = (0;\ 18/7;\ 1/7;\ 0)$; на нём целевая функция принимает значение

$$f(x^*)= 6\cdot 0 + 11\cdot\frac{18}{7} + 5\cdot\frac{1}{7} + 0 = \frac{203}{7} = 29 = g(y^*).$$

Решим теперь задачу (2.3) симплекс-методом. Для этого запишем её в канонической форме, введя дополнительные переменные $y_3 \geq 0, \ y_4 \geq 0, \ y_5 \geq 0, \ y_6 \geq 0$:

$g(y) = 3y_1 + 7y_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} -3y_1 + 4y_2 + y_3 = 6, \\ y_1 + 3y_2 + y_4 = 11, \\ 3y_1 - 5y_2 + y_5 = 5, \\ -y_1 - 3y_2 + y_6 = 1, \\ y_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,6}\right) \end{cases} \qquad (2.5)$$

Составим с.-т.:

Симплекс – таблица 2.1

		3	7		
		y_1	y_2		
0	y_3	-3	4	=	6
0	y_4	1	3	=	11
0	y_5	3	-5	=	5
0	y_6	-1	-3	=	1
Δ, g		-3	-7		0

Первый опорный план y^1 = (0; 0; 6; 11; 5; 1), $g(y^1)$ = 0. По стандартной схеме выбираем разрешающий столбец первый, разрешающую строку – третью, разрешающий элемент 3 и проводим один шаг жордановых преобразований, результаты внесем в симплекс таблицу 2.2.

Второй опорный план $y^2=(\frac{5}{3};0;11;\frac{28}{3};0;\frac{8}{3})$, $g(y^2)=5$. План не оптимальный, так как имеется отрицательный коэффициент в строке Δ. Второй столбец — разрешающий, первая строка — разрешающая, разрешающий элемент 14/3 и проводим один шаг жордановых преобразований, результаты внесем в симплекс таблицу 2.3.

Симплекс – таблица 2.2

		0	7		
		y_5	y_2		
0	y_3	1	-1	=	11
0	y_4	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{14}{3}}$	=	$\frac{28}{3}$
3	y_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	=	$\frac{5}{3}$
0	y_6	$\frac{1}{3}$	$-\frac{14}{3}$	=	$\frac{8}{3}$
Δ, g		1	-12	=	5

Симплекс – таблица 2.3

		0	0		
		y_5	y_4		
0	y_3	$\frac{13}{14}$	$\frac{3}{14}$	=	13
7	y_2	$-\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	=	2
3	y_1	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{14}$	=	5
0	y_6	0	1	=	12
Δ, g		$\frac{1}{7}$	$\frac{18}{7}$	=	29

Третий опорный план y^3 = (5; 2; 13; 0; 0; 12) является оптимальным, коэффициенты Δ-строки положительны. Отбрасывая дополнительные переменные, получаем оптимальный план задачи

$y^* = (5;2)$, max $g(y) = g(y^*) = 29$.

Оптимальный план x^* задачи (2.1)–(2.2) определим, используя последнюю с.-т. 2.3. Воспользуемся формулой для вычисления относительных оценок через оптимальный план двойственной задачи, вытекающей из второй теоремы двойственности:

$$\Delta_j = \left(x^*, A^T{}_j\right) - b_j \quad \left(j = \overline{1,6}\right). \tag{2.6}$$

При этом, если y^*_j — базисная переменная, т.е. $y^*_j > 0$, то $\Delta_j = 0$, иначе Δ_j находится в Δ-строке табл. 2.3. Матрица ограничений задачи (2.5) содержит четыре единичных столбца A_3, A_4, A_5, A_6, поэтому

$$\left(x^*, A^T{}_3\right) = \left(x_1^* x_2^* x_3^* x_4^*\right) \cdot (1\,0\,0\,0)^T = x_1^*,$$
$$\left(x^*, A^T{}_4\right) = x_2^*,$$
$$\left(x^*, A^T{}_5\right) = x_3^*,$$
$$\left(x^*, A^T{}_6\right) = x_4^*.$$

Условия (2.6) примут вид:

$$\Delta_k = x_k^* - b_k \quad \left(k = \overline{1,4}\right),$$
$$x_k^* = \Delta_k + b_k \quad \left(k = \overline{1,4}\right).$$

Имеем $\Delta = \left(0,0,0,\dfrac{18}{7},\dfrac{1}{7},0\right)$, $\quad b = (3,7,0,0,0,0)^T$.

$$x_1^* = \Delta_3 + b_3 = 0 + 0 = 0,$$
$$x_2^* = \Delta_4 + b_4 = \frac{18}{7} + 0 = \frac{18}{7},$$
$$x_3^* = \Delta_5 + b_5 = \frac{1}{7} + 0 = \frac{1}{7},$$
$$x_4^* = \Delta_6 + b_6 = 0 + 0 = 0,$$
$$x^* = \left(0,\frac{18}{7},\frac{1}{7},0\right), \quad f\left(x^*\right) = 6\cdot 0 + 11\cdot\frac{18}{7} + 5\cdot\frac{1}{7} + 1\cdot 0 = 29.$$

Практическая работа № 3

Задача 3 (об оптимальном планировании производства). Предприятие может производить продукцию двух видов P_1, P_2 из трёх видов сырья S_1, S_2, S_3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемые на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемой от реализации единицы продукции, приведены в табл.3.

Таблица 3

иды сырья	Количество единиц сырья, необходимых для изготовления единицы продукции		Запасы сырья
	P_1 $(j=1)$	P_2 $(j=2)$	
S_1 $(i=1)$			$\sum S_1 = \overline{S_1} =$
S_2 $(i=2)$	$a_{ij} =$		$\sum S_2 = \overline{S_2} =$
S_3 $(i=3)$			$\sum S_3 = \overline{S_3} =$
Прибыль от реализации единицы продукции	$r_1 =$	$r_2 =$	

Требуется составить такой план производства, который обеспечил бы максимальную прибыль от реализации всей продукции и минимальную оценку всего используемого сырья.

Для решения задачи необходимо:

1) составить математическую модель задачи планирования производства и оценки используемого сырья;

2) решить полученную задачу графически и симплекс-методом;

3) найти такой вектор оценок ресурсов производства $y = (y_1, y_2, y_3)$, чтобы оценка всего используемого была минимальной, а суммарная оценка сырья, используемого на производство продукции каждого вида, была не меньше цены единицы продукции

4) истолковать полученный результат с экономической точки зрения.

Значения коэффициентов a_{ij} $(i=1, 2, 3;\ j=1, 2)$, S_1, S_2,

S_3, r_1, r_2 для табл. 3 студент выбирает из табл. 4 согласно номеру варианта.

Таблица 4

№ вар.	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	r_1	r_2	$\overline{S_1}$	$\overline{S_2}$	$\overline{S_3}$
1	2	1	4	5	2	3	5	6	10	30	18
2	2	1	3	7	3	8	6	4	10	32	40
3	3	1	2	5	7	2	8	3	15	25	42
4	1	2	3	8	9	3	5	3	10	28	54
5	4	5	1	6	9	1	4	8	20	18	50
6	5	8	1	2	3	2	7	6	40	10	15
7	7	8	2	3	5	7	5	6	60	30	45
8	5	2	3	1	8	9	8	3	20	12	70
9	4	2	5	7	9	8	5	7	22	32	72
10	3	2	4	8	8	4	5	9	15	42	42
11	5	2	3	8	1	4	3	7	15	32	20
12	3	1	4	2	1	3	5	4	16	12	8
13	2	6	1	7	2	4	1	3	21	14	18
14	1	7	4	3	2	1	5	7	15	18	9
15	2	1	2	2	3	1	2	3	9	8	10
16	1	3	6	5	1	2	3	7	12	30	10
17	2	1	1	2	3	2	4	7	12	15	20
18	3	7	5	3	2	1	8	6	32	18	10
19	1	2	4	1	3	3	3	2	10	13	15
20	1	2	3	3	2	1	4	7	11	18	12

Справочный материал и образец выполнения практической работы № 3

Задача 3. Согласно условию внесем в таблицу 5 следующие данные:

a_{11}=12, a_{12}-=4, a_{21}=4, a_{22}=4, a_{31}=3, a_{32}=12, r_1=30, r_2=40, $\overline{S_1}$ =300, $\overline{S_2}$ =120, $\overline{S_3}$ =252 и получим таблицу 5.

Таблица5

Виды сырья	Количество единиц сырья, необходимых для изготовления единицы продукции		Запасы сырья
	P_1 ($j=1$)	P_2 ($j=2$)	
S_1 ($i=1$)	12	4	300
S_2 ($i=2$)	4	4	120
S_3 ($i=3$)	3	12	252
Прибыль от реализации единицы продукции	30	40	

Составим такой план производства, который обеспечил бы максимальную прибыль от реализации всей продукции.

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_1 — количество продукции P_1, выпускаемое предприятием, x_2 — количество продукции P_2, выпускаемое предприятием. Умножая удельные запасы ресурса S_1 (12 или 4) на соответствующие объемы x_1 и x_2 продукции P_1 и P_2, получим:

$12x_1$ — затраты ресурса S_1 на весь выпуск продукции P_1,

$4x_2$ — затраты ресурса S_1 на весь выпуск продукции P_2.

Тогда $12x_1+4x_2$ — суммарные затраты ресурса S_1 на весь выпуск продукции P_1 и P_2. Так как суммарные затраты ресурса не должны превышать его запасов, равных 300 единицам, то получим ограничение, имитирующее использование ресурса S_1:

$12x_1 + 4x_2 \le 300$.

Аналогично получим ограничения, имитирующие использование ресурсов S_2 и S_3:

$4x_1 + 4x_2 \le 120,$

$3x_1 + 12x_2 \le 252.$

На переменные x_1 и x_2 следует наложить естественные ограничения $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Через $f(x)$ обозначим прибыль, полученную предприятием от реализации всей продукции. Так как известны прибыли от реализации единицы продукции каждого вида (30 и 40), то $f(x) = 30x_1 + 40x_2$.

Окончательно математическая модель задачи имеет вид:

$$f(x) = 30x_1 + 40x_2 \to \max \tag{3.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Очевидно, что задача минимизации стоимости использованного сырья является двойственной к построенной задаче. Используя правила построения двойственной задачи (см. задачу 2), получим:

$$g(y) = (b^T, y) = 300y_1 + 120y_2 + 252y_3 \to \min, \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} 12y_1 + 4y_2 + 3y_3 \ge 30, \\ 4y_1 + 4y_2 + 12y_3 \ge 40, \\ y_1 \ge 0,\ \ y_2 \ge 0,\ \ y_3 \ge 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Полученная прямая задача (3.1)– (3.2) является стандартной задачей ЛП, имеющая две переменные x_1 и x_2. Для её решения воспользуемся ранее описанными методами — графическим и симплекс-методом, обратив при этом внимание на экономический смысл полученных решений.

Построим на плоскости многоугольник R — область допустимых решений задачи (3.1)– (3.2) (рис.3): R — пятиугольник OABCD. Перемещая линию уровня $30x_1 + 40x_2 = 0$ в направлении вектора $\text{grad } f = (30; 40)$, видим, что предельной общей её точкой с многоугольником решений R является точка B.

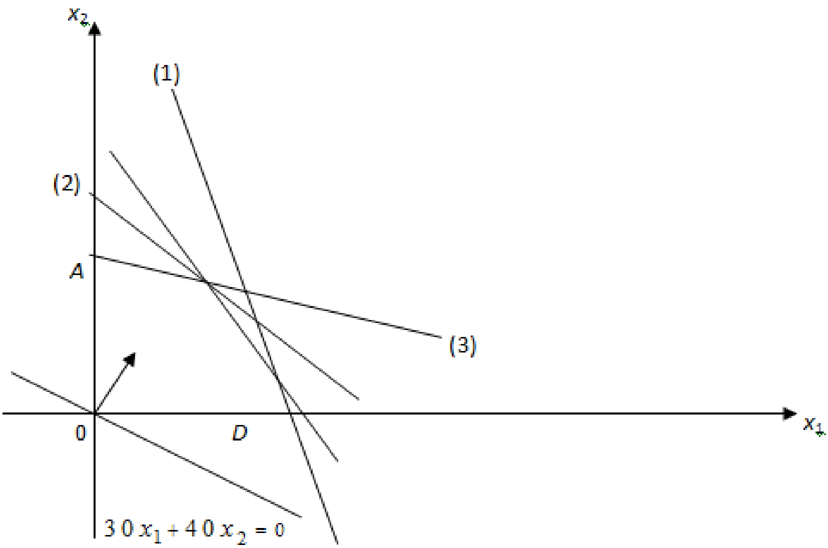


Рис. 3

Координаты точки B как точки пересечения прямых (2) и (3) найдём, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120 \\ 3x_1 + 12x_2 = 252 \end{cases} \Rightarrow B(12, 18)$$

Оптимальный план $x^* = (12, 18)$, $f(x^*) = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080$ (денежных единиц). Следовательно, если предприятие изготовит $x_1^* = 12$ единиц продукции вида P_1 и $x_2^* = 18$ единиц продукции вида P_2, то прибыль будет максимальной и составит 1080 денежных единиц. При этом будут полностью израсходованы запасы сырья S_2 и S_3 и останутся не использованными запасы сырья S_1, так как

$$12 \cdot 12 + 4 \cdot 18 = 144 + 72 = 216 < 300.$$

Задачу (3.1) – (3.2.) ре- шим также симплекс-методом, для этого запишем ее в каноническом виде, введя дополнительные переменные $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$:

$$f(x) = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow \max \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 + x_3 = 300, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 + x_5 = 252, \\ x_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,5}\right) \end{cases} \tag{3.6}$$

При любых допустимых объемах x_1 и x_2 выпускаемой продукции P_1 и P_2 дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 можно интерпретировать как остатки ресурсов S_1, S_2, S_3 соответственно.

Симплекс-таблица 3.1

		x_1	x_2		
		30	40		
0	x_3	12	4	=	300
0	x_4	4	4	=	120
0	x_5	3	$\boxed{12}$	=	252
Δ, f		-30	-40	=	0

Полагая свободные переменные $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, получим первое опорное решение $x^1 = (0; 0; 300; 120; 252)$, $f(x^1) = 0$, т.е. если предприятие не выпускает продукцию ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$), то остатки сырья равны его запасам ($x_3 = 300$, $x_4 = 120$, $x_5 = 252$) и прибыль предприятия $f(x^1) = 0$. План не оптимальный, т.к. Δ-строка содержит отрицательные элементы.

По схеме 1 выбираем разрешающий столбец (второй), разрешающую строку (третью) и проводим один шаг жордановых преобразований по схеме 2. Получим:

Симплекс-таблица 3.2

		30	0		
		x_1	x_5		
0	x_3	11	$-\frac{1}{3}$	=	216
0	x_4	$\boxed{3}$	$-\frac{1}{3}$	=	36
40	x_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	=	21
Δ, f		-20	$\frac{10}{3}$	=	840

Опорный план, соответствующий с.-т. 2.2. — x^2 = (0; 21; 216; 36; 0), $f(x^2)$=840, т.е. если предприятие не будет производить продукцию вида P_1 (x_1=0) и изготовит 21 единицу продукции вида P_2 (x_2=21), то прибыль составит $f(x^2)$=840 денежных единиц, при этом останется неизрасходованным 216 единиц сырья S_1 и 36 единиц сырья S_2, сырье S_3 будет израсходовано полностью (x_5=0).

Полученный опорный план x^2 не является оптимальным, проводим ещё одно преобразование.

Симплекс-таблица 3.3

		0	0		
		x_4	x_5		
0	x_3	$-\frac{11}{3}$	$\frac{8}{9}$	=	84
30	x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	=	12
40	x_2	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	=	18
Δ, f		$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{9}$	=	1080

Опорный план, соответствующий с.-т. 2.3, (x^3 = (12; 18; 84; 0; 0), $f(x^3)$= 1080), является оптимальным, так как Δ - строка не содержит отрицательных элементов.

Для нахождения решения задачи (3.3) – (3.4) воспользуемся формулой для вычисления относительных оценок через оптимальный план двойственной задачи, вытекающей из второй теоремы двойственности (2.6).

При этом, если x^*_j — базисная переменная, т.е. $x^*_j > 0$, то $\Delta_j = 0$, иначе Δ_j находится в Δ-строке табл. 3.3. Матрица ограничений задачи (3.6) содержит три единичных столбца A_3, A_4, A_5, поэтому

$$\left(y^*, A_3\right) = \left(y_1^* y_2^* y_3^*\right) \cdot (1\,0\,0)^T = y_1^*,$$

$$\left(y^*, A_4\right) = y_2^*, \quad \left(y^*, A_5\right) = y_3^*.$$

Условия (2.6) примут вид:

$$\Delta_k = y_k^* - c_k \quad \left(k = \overline{1,3}\right),$$

$$y_k^* = c_k + b_k \quad \left(k = \overline{1,3}\right).$$

Имеем $\Delta = \left(0, 0, 0, \dfrac{20}{3}, \dfrac{10}{9}\right), \quad c = (30, 40, 0, 0, 0)^T$.

$$y_1^* = \Delta_3 + c_3 = 0 + 0 = 0,$$

$$y_2^* = \Delta_4 + c_4 = \frac{20}{3} + 0 = \frac{20}{3},$$

$$y_3^* = \Delta_5 + c_5 = \frac{10}{9} + 0 = \frac{10}{9}.$$

$$y^* = \left(0, \frac{20}{3}, \frac{10}{9}\right), \quad g\left(y^*\right) = 300 \cdot 0 + 120 \cdot \frac{20}{3} + 252 \cdot \frac{10}{9} = 1080.$$

Вывод: если предприятие изготовит x_1= 12 единиц продукции P_1 и x_2=18 единиц продукции P_2, то прибыль его будет максимальной $f(x^*)$= 1080 денежных единиц, при этом запасы ресурсов S_2 и S_3 будут полностью исчерпаны (x_4=0 и x_5=0) , остаток ресурса S_1 - x_3 = 84 единицы. Вектор оценок ресурсов производства $y^* = \left(0, \dfrac{20}{3}, \dfrac{10}{9}\right)$, при котором оценка всего используемого сырья минимальна.

Практическая работа № 4

Задача 4 (о диете). При откорме животных используют два вида корма P_1, P_2, каждый из которых содержит три вида питательных веществ S_1, S_2, S_3. Дневной рацион должен быть составлен таким образом, чтобы питательных веществ типа S_1 было не менее M_1, S_2 — не менее M_2, S_3 — не менее M_3. Количество единиц a_{ij} питательного вещества S_i в единице каждого вида корма P_j $(i=1, 2, 3;\ j=1, 2)$ и стоимость r_j единицы корма P_j даны в табл. 4 практической работы № 3, при этом принять $\overline{S_1}=M_1$, $\overline{S_2}=M_2$, $\overline{S_3}=M_3$. Требуется составить дневной рацион нужной питательности так, чтобы затраты на него были минимальными. Для решения задачи необходимо:
1) составить математическую модель задачи;
2) для полученной задачи, составить двойственную задачу ЛП;
3) решить двойственную задачу симплекс-методом;
4) найти оптимальное решение прямой задачи на основе теорем двойственности.

Справочный материал и образец выполнения практической работы № 4

Задача 4. Согласно условию внесем в таблицу 6 следующие данные: a_{11}=12, a_{12}-=4, a_{21}=4, a_{22}=4, a_{31}=3, a_{32}=12, r_1=30, r_2=40, $\overline{S_1}$ =300, $\overline{S_2}$ =120, $\overline{S_3}$ =252 и получим таблицу 6.

Таблица 6

Виды питательных веществ	Количество единиц питательных веществ в единице корма		Минимальная суточная потребность в питат. веществах
	P_1 $(j=1)$	P_2 $(j=2)$	
S_1 $(i=1)$	12	4	300
S_2 $(i=2)$	4	4	120
S_3 $(i=3)$	3	12	252
Цена единицы корма	30	40	

Требуется составить дневной рацион нужной питательности так, чтобы затраты на него были минимальными.

Математическая модель задачи.

Обозначим:

x_1 — количество корма P_1 в дневном рационе животного,
x_2 — количество корма P_2 в дневном рационе животного,

Очевидно, что $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Умножив удельные нормы питательного вещества S_1 в кормах P_1 и P_2 (12 и 4) на соответствующие объёмы кормов x_1 и x_2 в дневном рационе, получим:

$12\,x_1$ — количество питательного вещества S_1, содержащегося в корме P_1;
$4\,x_2$ — количество питательного вещества S_1, содержащегося в корме P_2;
$12x_1+4x_2$ — количество питательного вещества S_1 в дневном рационе животного.

Так как количество вещества S_1 в дневном рационе должно быть не меньше минимальной суточной потребности животного в этом веществе, то

$12x_1+4x_2 \geq 300$.

Аналогично:

$4x_1+4x_2 \geq 120$,

$3x_1+12x_2 \geq 252$.

Обозначим через $f(x)$ стоимость дневного рациона животного. Очевидно, что

$f(x)=30x_1+40x_2$.

Окончательно задачу можно сформулировать так:

$f(x)=30x_1+40x_2 \rightarrow \min$,

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \geq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \geq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \geq 252, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Требуется определить такие объёмы кормов x_1 и x_2 в дневном рационе животного, чтобы удовлетворить его потребности во всех питательных веществах (ограничения (4.1)) и стоимость рациона при этом была минимальной.

Составим двойственную задачу. Вводим двойственные переменные y_1, y_2, y_3, их число равно числу ограничений исходной задачи Получим:

$$g(x)=300y_1+120y_2+252y_3 \rightarrow \max, \qquad (4.2)$$

$$\begin{cases} 12y_1 + 4y_2 + 3y_3 \le 30, \\ 4y_1 + 4y_2 + 12y_3 \le 40, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases} \qquad (4.3)$$

Задача (4.2)–(4.3) получена в стандартном виде. Введём дополнительные переменные $y_4 \ge 0$ и $y_5 \ge 0$ и запишем задачу в каноническом виде:

$$g(x)=300y_1+120y_2+252y_3 \to \max, \qquad (4.4)$$

$$\begin{cases} 12y_1 + 4y_2 + 3y_3 + y_4 = 30, \\ 4y_1 + 4y_2 + 12y_3 + y_5 = 40, \\ y_i \ge 0, \ \left(i = \overline{1,5}\right) \end{cases} \qquad (4.5)$$

Задачу (4.4) – (4.5) решим симплекс-методом.

Симплекс-таблица 4.1

		300	120	252		
		y_1	y_2	y_3	=	
0	y_4	$\boxed{12}$	4	3	=	30
0	y_5	4	4	12	=	40
Δ, g		-300	-120	-252	=	0

Полагая свободные переменные равными нулю, получим первый опорный план y^1 = (0; 0; 0; 30; 40), $g(y^1)$=0. Полученный план не является оптимальным, т.к. в строке Δ имеются отрицательные коэффициенты; по схеме 1 выбираем разрешающий столбец (первый) и разрешающую строку (первая) и проводим один шаг метода жордановых исключений (схема 2):

Симплекс-таблица 4.2

		0	120	252		
		y_4	y_2	y_3		
300	Y_1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	=	$\frac{5}{2}$
0	Y_5	$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\boxed{11}$	=	30
Δ, g		25	-20	-177	=	750

Второй опорный план $y^2 = (\frac{5}{2}; 0; 0; 0; 30)$, $g(y^2)=750$. План не является оптимальным. Совершим еще один шаг МЖИ:

Симплекс-таблица 4.3

		0	120	0		
		y_4	y_2	y_5		
300	y_1	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$	$-\frac{1}{44}$	=	$\frac{20}{11}$
252	y_3	$-\frac{1}{33}$	$\frac{8}{33}$	$\frac{1}{11}$	=	$\frac{30}{11}$
Δ, g		$\frac{216}{11}$	$\frac{252}{11}$	$\frac{177}{11}$	=	$\frac{13560}{11}$

$y^3 = (\frac{20}{11};0;\frac{30}{11};0;0)$; так как в строке относительных оценок Δ все коэффициенты положительны, то полученный план является оптимальным, $y^*=(\frac{20}{11};0;\frac{30}{11};0;0)$, $g(y^*)=\frac{13560}{11}$.

Решение исходной задачи получим, используя теоремы двойственности

Согласно первой теореме двойственности исходная задача также разрешима и имеет некоторый оптимальный план $x^*=(x^*_1, x^*_2)$ такой, что $f(x^*)=g(y^*) = \frac{13560}{11}$. Т.к. $y_1^* = \frac{20}{11} > 0$, $y_3^* = \frac{30}{11} > 0$, то по второй теореме двойственности соответствующие ограничения (4.1) на оптимальном плане x^* обращаются в равенства:

$$\begin{cases} 12x_1^* + 4x_2^* = 300, \\ 3x_1^* + 12x_2^* = 252. \end{cases}$$

Решение системы $x^* = \left(\frac{216}{11}; \frac{177}{11}\right)$, при этом $f(x^*) = \frac{13560}{11}$.

Таким образом, оптимальный дневной рацион животного должен содержать 216/11=19,64 единиц корма P_1 и 177/11 = 16,09 единиц корма P_2; при этом будут полностью удовлетворены потребности животного в питательных веществах и стоимость рациона будет минимальной, равной 13560/11 = 1232,73 денежных единиц.

Практическая работа № 5

Задача 5 (транспортная). Однородный груз необходимо доставить от поставщиков A_i к потребителям B_j. Запасы груза у поставщиков, потребности потребителей, тарифы транспортных расходов при перевозке единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю даны в табл. 7. Требуется составить такой план перевозки грузов от поставщиков к потребителям, чтобы суммарная стоимость перевозки была минимальной.

Правила выбора данных для задачи 5:

— если номер варианта нечётный, то принять: поставщиков четыре (A_1, A_2, A_3, A_4), а потребителей пять $(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$;

— если номер варианта чётный, то принять: поставщиков пять $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$, а потребителей четыре (B_1, B_2, B_3, B_4);

a — число десятков в номере варианта;

b — число единиц в номере варианта.

Требуется:

1) сформулировать задачу, выбрав нужные значения параметров;
2) убедиться, что получена открытая модель транспортной задачи, и свести её к закрытой модели;
3) построить исходный опорный план;
4) решить задачу методом потенциалов.

Таблица 7

Потребители и их потребности / Поставщики и их запасы		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		$10+a$	$25+b$	$40-a$	$15+b$	$60-2b$
A_1	$20+b$	$10-a$	$2+a$	$5+b$	8	$7+b$
A_2	$30-a$	7	$10-b$	4	$12-a$	$12-b$
A_3	$50-b$	$3+a$	5	$7+b$	$4+a$	$2+a$
A_4	$10+a$	$13-b$	$15-a$	$3+a$	$5+b$	2
A_5	40	$4+a$	6	$2+b$	4	$5+b$

Справочный материал и образец выполнения практической работы № 5

Классическая модель транспортной задачи формулируется следующим образом.

Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у m поставщиков A_i в количестве a_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ единиц соответственно, необходимо доставить к потребителям B_j в количестве b_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю. Необходимо составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы, полностью удовлетворить потребности и имеющий минимальную стоимость.

Решим задачу для условного случая, когда фамилия студента записана в журнале группы под № 42. Исходные данные выбираем из табл. 7. Так как 42 число чётное, то принимаем число поставщиков равным пяти $\left(A_i, i=\overline{1,5}\right)$, а число потребителей B_j, равным четырём $\left(j=\overline{1,4}\right)$. При этом число десятков в номере a = 4, а число единиц b = 2. Подставив эти значения в табл. 7, получим исходные данные задачи. a_i, b_j, c_{ij}:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	6	7	8	22
A_2	7	8	4	8	26
A_3	7	5	9	8	48
A_4	11	11	7	7	14
A_5	8	6	4	4	40
b_j	14	27	36	17	

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю. Тогда математическую модель задачи можно записать следующим образом. Найти такую матрицу $X=(x_{ij})$ $\left(i=\overline{1,5};\ j=\overline{1,4}\right)$, чтобы функция

$$f\left(x\right)=6x_{11}+6x_{12}+7x_{13}+8x_{14}+7x_{21}+8x_{22}+4x_{23}+$$
$$+8x_{24}+7x_{31}+5x_{32}+9x_{33}+8x_{34}+11x_{41}+11x_{42}+ \qquad (5.1)$$
$$+7x_{43}+7x_{44}+8x_{51}+6x_{52}+4x_{53}+4x_{54}\to\min$$

— общая стоимость перевозок достигала наименьшего значения при ограничениях:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=22, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=26, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=48, \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=14, \\ x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}=40, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=14, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=27, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=36, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=17, \\ x_{ij}\ge 0 \quad \left(i=\overline{1,5};\ j=\overline{1,4}\right) \end{cases} \qquad (5.2)$$

Так как минимизируемая функция $f(x)$ есть линейная относительно переменных x_{ij} и ограничения задачи (5.2) также линейны, то сформулированная задача является задачей ЛП. Коротко её можно записать так:

$$f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min, \qquad (5.3)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad \left(i=\overline{1,5}\right), \\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \quad \left(j=\overline{1,4}\right), \\ x_{ij}\ge 0 \quad \left(i=\overline{1,5};\ j=\overline{1,4}\right). \end{cases} \qquad (5.4)$$

Транспортная задача называется *закрытой*, если выполняется условие равенства суммарного объёма запасов $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i$ и суммарного объёма потребностей $\sum_{j=1}^{n} b_j$, (т.е. если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$) и называется *открытой* в противном случае (т.е. если $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$).

Справедлива следующая

Теорема. *Любая закрытая транспортная задача имеет решение*.

Задача (5.1) – (5.4) является открытой задачей, так как

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 22+26+48+14+40=150 \neq \sum_{j=1}^{n} b_j = 14+27+36+17=94.$$

Сведём задачу к закрытой, введя фиктивного $B_5=D_ф$ потребителя с потребностью $b_5 = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = 150-94=56$ единиц продукции. При этом стоимость перевозок от любого из поставщиков A_i к потребителю B_5 полагаем равными нулю, т.е. $c_{i5}=0$, $\left(i=\overline{1,5}\right)$. Согласно теореме такая задача разрешима. Новая задача запишется так:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{5.5}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i=\overline{1,5}\right), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j=\overline{1,5}\right), \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

Исходные данные «новой» задачи запишем в табл. 8, указывая запасы a_i=$\left(i=\overline{1,5}\right)$, потребности b_j=$\left(j=\overline{1,5}\right)$ и в левом верхнем углу клетки c_{ij} — стоимости перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю $\left(i=\overline{1,5},\ j=\overline{1,5}\right)$.

Применим для решения задачи метод потенциалов. Это итерационный метод, основными этапами которого являются следующие:

1) построение первоначального опорного плана;

2) проверка построенного плана на оптимальность; если план оптимальный, то задача решена, если нет, то — шаг 3;
3) построение нового плана (с использованием системы потенциалов), на котором значение функции стоимости перевозок будет меньше, чем на предыдущем.

Для построения первоначального опорного плана применим метод «северо-западного угла». Начинаем распределять продукцию с клетки (1.1) (таблица 8).

Таблица 8

A_i	B_j / v_j \ u_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
		6	6	2	1	-7	
A_1	0	6 14	6 8	7	8	0	22
A_2	2	**1** 7	8 19	4 7	8	0	26
A_3	7	**6** 7	**8** 5	9 29	8 17	0 2	48
A_4	7	**2** 11	**2** 11	**2** 7	**1** 7	0 14	14
A_5	7	**5** 8	**7** 6	**5** 4	**4** 4	0 40	40
b_j		14	27	36	17	56	

Поместим в клетку (1.1) наименьшее из чисел a_1 и b_1, т.е. x_{11}=min (a_1, b_1)=min (22,14)=14 (запишем его в левый нижний угол клетки). Тогда запрос первого потребителя B_1 будет полностью удовлетворен, и первый столбец исключается из рассмотрения. Двигаемся далее по первой строке вправо. В клетку (1.2) запишем x_{12}=min(a_1-b_1, b_2)=min(22-14,27)=8, исключаем из рассмотрения первую строку, так как все запасы поставщика A_1 использованы.

Переходим ко второй строке. В клетку (2.2) запишем x_{22}=min(a_2, b_2-x_{12})=min(26,27-8)=19 единиц продукции из запасов поставщика A_2, тогда запрос потребителя B_2 будет удовлетворен, а остаток продукции у поставщика A_2 , равный 26–19=7 единицам, помещаем в клетку (2.3) (x_{23} = =7). Исключаем из рассмотрения вторую строку и второй столбец. Двигаясь по третьему столбцу вниз, полагаем x_{33}=29, тогда удовлетворен полностью запрос потребителя B_3, остаток продукта у A_3, равный 48–29=19, распределяем между клетками (3.4) (x_{34}=17) и (3.5) (x_{35}=2). При этом полностью удовлетворены потребности потребителя B_4. Остальную продукцию распределим, положив x_{45}=14 и x_{55}=40. Остальные x_{ij} полагаем равными нулю, им соответствуют свободные клетки табл. 8. Построенный таким образом план является допустимым, так как позволяет удовлетворить запросы всех потребителей (сумма x_{ij} по столбцам равна b_j) и использовать запасы всех поставщиков $\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,5}\right)$.

При этом переменные $x_{ij}>0$, соответствующие занятым клеткам, являются базисными, а переменные $x_{ij}=0$, соответствующие пустым клеткам таблицы, — свободными. Напомним, что допустимый план транспортной задачи (ТЗ) называется невырожденным, если число базисных переменных x_{ij} равно рангу $m+n$-1 матрицы ограничений (5.6). При m=5, n=5 число базисных переменных должно быть равно 5+5-1=9. Таким образом, построенный план x_{11} =14, x_{12} =8, x_{22} =19, x_{23} =7, x_{33} =29, x_{34} =17, x_{35} =2, x_{45}=14, x_{55} =40 является невырожденным.

Отметим, что если план получился вырожденным, т.е. число базисных переменных x_{ij} меньше $m+n$-1, то в соответствующие свободные клетки записывают нулевые значения x_{ij} и эти клетки считаются занятыми, т.е. базисными.

Вычислим значение целевой функции $f(x)$ на первом опорном плане:
$f(x^1)$=14·6+8·6+19·8+7·4+29·9+17·8=709 (единиц стоимости).

Переходим ко второму этапу итерационного метода, т.е. построенный план проверим на оптимальность. Для этого каждой строке таблицы 8 поставим в соответствие переменную u_i $\left(i = \overline{1,5}\right)$, называемую *потенциалом строки* (или *потенциалом поставщика*) и каждому столбцу — переменную v_j $\left(j = \overline{1,5}\right)$ — *потенциал столбца* (или *потребителя*). Потенциалы u_i и v_j — это двойственные переменные к переменным x_{ij} задачи (5.5), (5.6). Справедлива

Теорема (критерий оптимальности опорного плана теоремы 3). *Если для некоторого опорного плана* $x^*=(x_{ij})$ $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$ *ТЗ существуют такие числа* u_i *и* v_j *, что* $u_i + v_j = c_{ij}$ *для* $x^*_{ij} > 0$ *и* $u_i + v_j \le c_{ij}$ *для* $x^*_{ij} = 0$ *для всех* $i = \overline{1,m}$ *и* $j = \overline{1,n}$, *то* $x^*=(x_{ij})$ *— оптимальный план ТЗ.*

Теорема позволяет проверить первый опорный план на оптимальность. Определим сначала потенциалы строк и столбцов таблицы 8, используя условие $u_i + v_j = c_{ij}$ для всех базисных клеток таблицы. Получаем систему уравнений:

$$u_1+v_1=6,\quad u_1+v_2=6,\quad u_2+v_2=8,$$
$$u_2+v_3=4,\quad u_3+v_3=9,\quad u_3+v_4=8,$$
$$u_3+v_5=0,\quad u_4+v_5=0,\quad u_5+v_5=0.$$

Система состоит из девяти уравнений с десятью неизвестными, поэтому положим $u_1=0$, а остальные неизвестные определим последовательно, рассматривая уравнения системы:

$$v_1=6,\ v_2=6,\ u_2=2,\ v_3=2,\ u_3=7,\ v_4=1,\ v_5=-7,\ u_4=7,\ u_5=7.$$

Полученные значения потенциалов запишем в табл. 8 в одной строке с потребителями и в одном столбце с поставщиками.

Далее для каждой свободной клетки табл. 8, т.е. для всех $x_{ij}=0$, определим числа $\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$:

$$\Delta_{13}=u_1+v_3-c_{13}-0+2-7=-5;$$
$$\Delta_{14}=u_1+v_4-c_{14}=0+1-8=-7;$$
$$\Delta_{15}=u_1+v_5-c_{15}=0-7-0=-7;$$
$$\Delta_{21}=u_2+v_1-c_{21}=2+6-7=1;$$
$$\Delta_{24}=u_2+v_4-c_{24}=2+1-8=-5;$$
$$\Delta_{25}=u_2+v_5-c_{25}=2-7-0=-5;$$
$$\Delta_{31}=u_3+v_1-c_{31}=7+6-7=6;$$
$$\Delta_{32}=u_3+v_2-c_{32}=7+6-5=8;$$
$$\Delta_{41}=u_4+v_1-c_{41}=7+6-11=2;$$
$$\Delta_{42}=u_4+v_2-c_{42}=7+6-11=2;$$
$$\Delta_{43}=u_4+v_3-c_{43}=7+2-7=2;$$
$$\Delta_{44}=u_4+v_4-c_{44}=7+1-7=1;$$
$$\Delta_{51}=u_5+v_1-c_{51}=7+6-8=5;$$
$$\Delta_{52}=u_5+v_2-c_{52}=7+6-6=7;$$
$$\Delta_{53}=u_5+v_3-c_{53}=7+2-4=5;$$
$$\Delta_{54}=u_5+v_4-c_{54}=7+1-4=4.$$

По теореме для оптимального плана все числа Δ_{ij} должны быть неположительны $(\Delta_{ij} \le 0)$. Среди чисел Δ_{ij}, вычисленных по таблице 8, есть положительные, следовательно, первый опорный план x^1 не является оптимальным. Значения $\Delta_{ij} > 0$ также внесены в табл. в левом верхнем углу клетки помечены красным.

Напомним, что сумму потенциалов свободной клетки $u_i + v_j$ называют *фиктивной стоимостью* перевозки единицы продукции от i-го поставщика к j-му потребителю. По известному критерию, если фиктивная стоимость меньше или равна реальной стоимости для всех свободных клеток, то план оптимальный.

Переходим к третьему этапу метода потенциалов — построим новый опорный план, улучшающий значение целевой функции. Для этого среди чисел $\Delta_{ij} > 0$ выбираем наибольшее $(\Delta_{32} = 8)$ и свободную переменную x_{32} введём в число базисных переменных, т.е. перераспределим перевозки так, чтобы клетка (3.2) стала базисной, а одна из занятых клеток — свободной, но при этом не нарушился баланс запасов и заявок. Построим цикл, содержащий клетку (3.2). Напомним прежде, что *циклом* в табл. ТЗ называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья — вдоль строк и столбцов, причём в каждой вершине цикла встречаются ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое в столбце. Для пустой клетки (3.2) существует единственный цикл из занятых клеток (3.3), (2.3), (2.2), включающих эту пустую клетку (рис. 4 а)

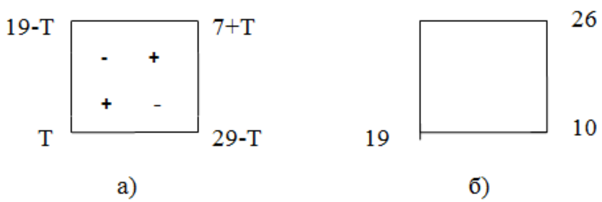


Рис. 4

Производим перераспределение объёмов поставок грузов по данному циклу так, чтобы клетка (3.2) стала занятой, и при этом сохранился баланс объёмов грузов по строкам и столбцам. Для этого присвоим знак «+» клетке (3.2), а остальным клеткам цикла поочерёдно знаки минус и плюс. Знак «+» означает, что объем поставок в эту клетку будет увеличен на $T>0$ единиц груза , «-»

— объём будет уменьшаться на T единиц. Максимальный объём груза T, который можно переместить по циклу пустой клетки, равен наименьшему объему поставок в клетках цикла, отмеченных знаком «-», т.е. T=min(29.19)=19.

В результате получим новый преобразованный цикл клетки (3.2) (рис. 4 б). Заменяя в таблице 8 исходный цикл преобразованным, получим новый опорный план (таблица. 9).

Таблица 9

v_j / u_i	6	6	10	9	1	a_i
0	6 14	6 8	3 7	1 8	1 0	22
-6	7	8	4 26	8	0	26
-1	7	5 19	9 10 -	8 17	0 2 +	48
-1	11	 11	2 7	1 7	0 14	14
-1	8	 6	5 4 +	4 4	0 40 -	40
b_j	14	27	36	17	56	

Для новой таблицы проверим, равна ли сумма элементов i-ой строки числу a_i, а сумма элементов j-го столбца — b_j. Вычислим значение целевой функции на новом опорном плане:

$$f(x^2)=14\cdot6+8\cdot6+26\cdot4+19\cdot5+10\cdot9+17\cdot8=557 \text{ (ед)}.$$

Стоимость перевозок уменьшилась на величину $\Delta z = \Delta_{32} \cdot T = 8 \cdot 19 = 152$ (ед). Новый опорный план следует проверить на оптимальность; для этого вычислим потенциалы строк и столбцов табл. 9, по занятым клеткам из условия $u_i + v_j = c_{ij}$. Результаты записываем в таблицу. Для свободных клеток вычисляем числа $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ и положительные значения Δ_{ij} записываем в левом верхнем углу клетки и обводим рамкой. Так как среди последних есть положительные, то план x^2 не является оптимальным. Наибольшим из положительных чисел Δ_{ij} является

$\Delta_{53} = 5$. Строим цикл для клетки (5.3), в табл. 9 он отмечен сплошной линией, вершинам цикла приписываем знаки «+» и «-». Объем перевозок $T = \min(10;40) = 10$.

Новый опорный план и соответствующие ему данные занесены в табл. 10.

Таблица 10

u_i \ v_j	6	6	5	9	1	a_i
0	6 14	6 8	7	1 8	1 0	22
-1	7	8	4 26	8	0	26
-1	7	5 19	9	8 17 -	0 12 +	48
-1	11	11	7	1 7	0 14	14
-1	8	6	4 10	4 4 +	0 30 -	40
b_j	14	27	36	17	56	

Новое значение целевой функции

$$f\left(x^3\right) = 14 \cdot 6 + 8 \cdot 6 + 26 \cdot 4 + 19 \cdot 5 + 17 \cdot 8 + 10 \cdot 4 = 507;$$

$$f\left(x^3\right) < f\left(x^2\right) = 557.$$

Проверим построенный план на оптимальность, вычисляя новые значения потенциалов строк и столбцов и новые значения Δ_{ij} для незанятых клеток таблицы. Среди чисел Δ_{ij} есть положительные, следовательно, план x^3 не оптимальный. Наибольшее из положительных чисел Δ_{ij} равно $\Delta_{54} = 4$, строим цикл для клетки (5.4), $T = \min(17;30) = 17$.

Новый опорный план заносим в табл. 11 и вычисляем соответствующее значение целевой функции:

Таблица 11

u_i \ v_j	6	6	5	5	1	a_i
0	6 14	6 8 –	7	8	1 0	22
-1	7	8	4 26	8	0	26
-1	7	5 19+	9	8	0 29–	48
-1	11	11	7	7	0 14	14
-1	8	6	4 10	4 17	0 13	40
b_j	14	27	36	17	56	

$$f\left(x^4\right)=14\cdot6+8\cdot6+26\cdot4+19\cdot5+10\cdot4+17\cdot4=439;$$

$$f\left(x^4\right)<f\left(x^3\right)=507.$$

Вычисляем потенциалы строк и столбцов табл. 11, а также числа Δ_{ij}. Среди них есть положительное, поэтому план не оптимальный. Строим цикл для клетки (1,5) при $T=\min(8;29)=8$ и получаем таблицу 12.

$$f\left(x^5\right)=14\cdot6+26\cdot4+27\cdot5+10\cdot4+17\cdot4=431;$$

$$f\left(x^5\right)<f\left(x^4\right)=439.$$

Вычисляем потенциалы строк и столбцов табл. 12, Δ_{ij}. Так как для таблицы 12 все числа $\Delta_{ij}\le0$, то план x^5 — оптимальный, при этом оптимальная стоимость перевозок равна 431 денежной единице.

Таблица 12

u_i \ v_j	6	5	4	4	0	a_i
0	6 14	6	7	8	0 8	22
0	7	8	4 26	8	0	26
0	7	5 27	9	8	0 21	48
0	11	11	7	7	0 14	14
0	8	6	4 10	4 17	0 13	40
b_j	14	27	36	17	56	

Для поставленной ТЗ рассчитаем первоначальный опорный план x^1 методом «минимальной стоимости».

Согласно этому методу в таблице стоимостей c_{ij} находим минимальный элемент (без учёта фиктивных перевозок) c_{23}=4 и все запасы поставщика A_2 — 26 единиц груза — перевозим к потребителю B_3. Строку вторую вычёркиваем. Из оставшихся берём наименьшее c_{ij} (c_{53}=4) и, чтобы удовлетворить запрос B_3, перебрасываем 10 единиц груза от A_5 к B_3. Столбец третий вычёркиваем. Так как c_{54}=4, то запрос потребителя B_4 удовлетворим за счет A_5, столбец четвёртый вычёркиваем. Из оставшихся — наименьшее значение c_{32}=5, поэтому 27 единиц груза перевозим от A_3 к B_2, вычёркиваем столбец второй и неудовлетворенный запрос первого потребителя — 14 единиц — удовлетворим за счёт A_1 с минимальной стоимостью перевозок c_{11}=6 денежных единиц. Таким образом, удовлетворены запросы всех действительных потребителей, а остатки продукции поставщиков A_1 (8 единиц), A_3 (21 единица), A_4 (14) и A_5 (13) можно направить фиктивному потребителю. Получим оптимальный план (таблица 13), совпадающий с полученным ранее в табл. 12.

Таблица 13

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	6 14	6	7	8	0 8	22
A_2	7	8	4 26	8	0	26
A_3	7	5 27	9	8	0 21	48
A_4	11	11	7	7	0 14	14
A_5	8	6	4 10	4 17	0 13	40
b_j	14	27	36	17	56	

Следует иметь в виду, что далеко не всегда метод минимальной стоимости позволяет получить опорный план, являющийся сразу оптимальным, как в данной задаче. Однако иногда этот метод позволяет существенно сократить число итераций в методе потенциалов при решении транспортной задачи.

ТЕОРИЯ ИГР

Практическая работа № 6

Задание 6 (антагонистическая игра в случае непрерывной функции платежей)**.** Найти седловую точку и цену игры:

А) $F(x,y) = sx^{2v-1} + y^{2t-1} + u;\ \ X = Y = [-u, v].$

В) $F(x,y) = sy^2 - tx^2 + 4ux + 6vy;\ \ \ X = Y = (-\infty, +\infty).$

Значения параметров s, t, u, v взять из таблицы 14.

Таблица 14

№ вар	s	t	u	v	№ вар	s	t	u	v	№ вар	s	t	u	v
1	1	1	1	1	8	1	2	2	1	15	2	3	3	2
2	1	1	2	2	9	1	2	3	3	16	2	1	1	1
3	1	1	3	2	10	1	2	1	3	17	2	1	2	2
4	1	1	1	3	11	2	3	2	3	18	2	1	3	1
5	1	1	2	3	12	2	3	3	1	19	2	1	1	3
6	1	2	3	1	13	2	3	1	1	20	2	1	2	3
7	1	2	1	2	14	2	3	2	2					

Справочный материал и образец выполнения практической работы № 6

А) Подставляя значения параметров s=5; t=5; u=5; v=5 и получаем:

$$F(x,y)=5x^9+y^9+5; X=Y=[-5;5].$$

Находим сначала нижнюю цену игры $\underline{\nu}=\max\limits_{x\in X}\left[\min\limits_{y\in Y}F(x,y)\right]$.

Найдём $\varphi(x)=\min\limits_{y\in Y}F(x,y)$. Поскольку функция платежей представляет собой многочлен только с нечётными степенями переменных x, y и коэффициенты при этих степенях положительны, она является функцией монотонно возрастающей по каждой переменной. Следовательно, минимальное значение по каждой переменной достигается при минимально возможном значении переменной, максимальное – при максимально возможном. Получаем $\varphi(x)=F(x,-5)=5x^9-1953120$.

$\underline{\nu}=\max\limits_{x\in X}[\varphi(x)]=5\cdot 5^9-1953120=7812505=F(5;-5)$.

Затем находим верхнюю цену игры $\overline{\nu}=\min\limits_{y\in Y}\left[\max\limits_{x\in X}F(x,y)\right]$.

Найдём $\psi(y)=\max\limits_{x\in X}F(x,y)$. Исходя из указанных соображений о поведении функции платежей, получается $\psi(y)=F(5;y)=5\cdot 5^9+y^9+5=y^9+9765630$. Верхняя цена игры

$\overline{\nu} = \min\limits_{y \in Y}[\psi(y)] = (-5)^9 + 9765630 = 7812505 = F(5;-5)$. Получили: $\underline{\nu} = \overline{\nu} = F(5;-5) = 7812505$. Следовательно, $(5;-5)$ - седловая точка игры, $\nu = 7812505$ - цена игры.

В) Подставляя значения параметров, указанные в пункте А), получаем:

$$F(x;y) = 5x^2 - 5y^2 + 20x + 30y; X = Y = (-\infty;+\infty).$$

Поскольку функция платежей представляет собой многочлен с чётными и нечётными степенями переменных x, y, исследование на экстремум по каждой переменной проводится с использованием второго достаточного признака существования экстремума функции одной переменной.

$$\varphi(x) = \min\limits_{y} F(x;y).$$

$F_y^{/} = 10y + 30; \Rightarrow 10y_0 + 30 = 0; y_0 = -3$. Поскольку $F_{yy}^{//} = 10 > 0; \Rightarrow y_0 = -3$ - точка $\min$ и $\varphi(x) = 5(-3)^2 - 5x^2 + 20x + 30(-3) = -5x^2 + 20x - 45$.

Нижняя цена игры

$$\underline{\nu} = \max\limits_{x} \varphi(x) = \max\limits_{x}(-5x^2 + 20x - 45).$$

$\varphi^{/} = -10x + 20; \Rightarrow -10x_0 + 20 = 0; x_0 = 2$.

$\varphi^{//} = -10 < 0; x_0 = 2$ - точка $\max$.

$$\underline{\nu} = \varphi(2) = F(2;-3) = -5 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 - 45 = -25.$$

$$\psi(y) = \max\limits_{x} F(x;y).$$

$F_x^{/} = -10x + 20; \Rightarrow -10x_0 + 20 = 0; x_0 = 2$. Поскольку $F_{xx}^{//} = -10 < 0; \Rightarrow x = 2$ - точка $\max$ и $\psi(y) = 5y^2 - 5 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 + 30y = 5y^2 + 30y + 20$. Верхняя цена игры

$$\overline{\nu} = \min\limits_{y} \psi(y) = \min\limits_{y}(5y^2 + 30y + 20).$$

$$\psi^{/} = 10y + 30; \Rightarrow 10y_0 + 30 = 0; y_0 = -3.$$

$\psi^{//} = 10 > 0; y_0 = -3$ - точка $\min$.

$$\overline{\nu} = \psi(-3) = F(2;-3) = 5\cdot(-3)^2 + 30\cdot(-3) + 20 = -25.$$

Получили:

$\underline{\nu} = \overline{\nu} = F(2;-3) = -25$. Следовательно, $(2;-3)$ - седловая точка игры, $v = -25$ - цена игры.

Практическая работа № 7

Задание 7 (матричная игра). Задана платёжная матрица (таблица 15). Проверить, существует ли седловая точка в игре. Если нет, найти оптимальные смешанные стратегии игроков.

Таблица 15

№ вар	Матрица А	№ вар	Матрица А
1	$\left\{\begin{matrix} -1 & -2 & 7 \\ 5 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{matrix}\right\}$	11	$\left\{\begin{matrix} 6 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \end{matrix}\right\}$
2	$\left\{\begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{matrix}\right\}$	12	$\left\{\begin{matrix} 10 & 5 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \\ -10 & 0 & 4 \end{matrix}\right\}$
3	$\left\{\begin{matrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -3 \end{matrix}\right\}$	13	$\left\{\begin{matrix} 7 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{matrix}\right\}$
4	$\left\{\begin{matrix} 2 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 6 & -2 & 4 \end{matrix}\right\}$	14	$\left\{\begin{matrix} 6 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & 7 \end{matrix}\right\}$
5	$\left\{\begin{matrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{matrix}\right\}$	15	$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ -4 & 6 & 8 \end{matrix}\right\}$
6	$\left\{\begin{matrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{matrix}\right\}$	16	$\left\{\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -8 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{matrix}\right\}$

7	$\begin{Bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 6 \end{Bmatrix}$	17	$\begin{Bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{Bmatrix}$
8	$\begin{Bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{Bmatrix}$	18	$\begin{Bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{Bmatrix}$
9	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 5 & -1 & 6 \end{Bmatrix}$	19	$\begin{Bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 6 \end{Bmatrix}$
10	$\begin{Bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{Bmatrix}$	20	$\begin{Bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ -5 & 7 & 5 \end{Bmatrix}$

Справочный материал и образец выполнения практической работы № 7

Задана платёжная матрица. **A=** $\begin{Bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{Bmatrix}$.

Проверить, существует ли седловая точка в игре. Если нет, найти оптимальные смешанные стратегии игроков.

Запишем элементы заданной матрицы в расширенную таблицу с обрамлением (табл. 16):

Таблица 16

i \ j	1	2	3	$\min_j a_{ij}$
1	-2	-1	5	-2
2	1	-2	3	-2
3	3	1	-4	-4
$\max_i a_{ij}$	3	1	5	

Нижняя цена игры $\underline{\nu} = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = -2$; верхняя цена игры $\overline{\nu} = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right) = 1$.

Поскольку $\underline{\nu} \neq \overline{\nu}$, седловой точки игры не существует и игру следует решать в смешанных стратегиях.

Как известно, решение в смешанных стратегиях сводится к решению пары двойственных задач линейного программирования (ЛП). Для данной задачи получается следующая задача ЛП:

$$\begin{cases} \beta_1 = -2(-\alpha_1) - 1(-\alpha_2) + 5(-\alpha_3) + 1 \geq 0 \\ \beta_2 = 1(-\alpha_1) - 2(-\alpha_2) + 3(-\alpha_3) + 1 \geq 0 \\ \beta_3 = 3(-\alpha_1) + 1(-\alpha_2) - 4(-\alpha_3) + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$z = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \Rightarrow \max .$$

Исходная таблица заданной задачи ЛП (табл. 17):

Таблица 17

	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$	1
$\beta_1 =$	-2	-1	5	1
$\beta_2 =$	1	-2	3	1
$\beta_3 =$	3	**<u>1</u>**	-4	1
$z =$	-1	-1	-1	1

Поскольку в столбце «под 1» все элементы b_i положительны, опорное решение задачи уже получено: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Но поскольку в строке «напротив z» есть отрицательные элементы, оптимальное решение ещё не найдено. Как известно, разрешающий элемент a_{rs} находится в столбцах с отрицательными элементами в «строке z» из условия:

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \max_j \left(\min_i \frac{b_i}{a_{ij}} > 0 \right).$$

Этому условию соответствует элемент, выделенный жирным шрифтом с подчёркиванием. Выполняя шаг модифицированных жордановых исключений с указанным разрешающим элементом, получаем таблицу 18:

Таблица 18

	$-\alpha_1$	$-\beta_3$	$-\alpha_3$	1
$\beta_1 =$	1	1	**<u>1</u>**	2
$\beta_2 =$	7	2	-5	3
$\alpha_2 =$	3	1	-4	1
$z =$	2	1	-5	1

Оптимальное решение ещё не получено, поскольку в «строке z» есть отрицательный элемент в третьем столбце. Разрешающий элемент также помечен жирным шрифтом с подчёркиванием. Выполняя шаг модифицированных жордановых исключений с данным разрешающим элементом, получим таблицу 19.

Таблица 19

	$-\alpha_1$	$-\beta_3$	$-\beta_1$	1
$\alpha_3 =$	1	1	1	2
$\beta_2 =$	12	17	5	13
$\alpha_2 =$	7	5	4	9
$z =$	3	6	5	11

Все элементы в «строке z» неотрицательны, следовательно, таблица № 2 представляет оптимальное решение задачи ЛП. Как известно, цена игры $v = \frac{1}{z} = \frac{1}{11}$. Вектор вероятностей выбора стратегий для первого игрока определяется в виде: $\bar{x} = \frac{\bar{\beta}}{z} = \left\{\frac{5}{11}; 0; \frac{6}{11}\right\}$.

Вектор вероятностей выбора стратегий второго игрока определяется в виде:

$$\bar{y} = \frac{\bar{\alpha}}{z} = \left\{0; \frac{9}{11}; \frac{2}{11}\right\}.$$

Практическая работа № 8

Задание 8 («игра с природой»). Для заданных значений s, t, u, v из табл. 20 сформировать численную матрицу и найти стратегии игрока, оптимальные в смысле критериев Лапласа, Вальда, Гурвица (при $\alpha = 0.2$) и математического ожидания (при $\bar{y} = \{0.6;0.1;0.2;0.1\}$).

Таблица 20

s+5	t+6	u+7	v+8
t	v	s	u+20
u	t+15	v+15	s+15
u+15	s	v	t

Справочный материал и образец выполнения практической работы № 8

Подставляя численные значения параметров s, t, u, v в таблицу, записываем получаемые числа a_{ij} в левую часть расширенной таблицы с обрамлениями (таблица 21):

Таблица 21

j / i	1	2	3	4	*L(i)*	*V(i)*	*G(i)*	*M(i)*
1	10	11	12	13	11,5	10	12,4	10,8
2	5	5	5	25	10	5	21	7
3	5	20	20	20	16,25	5	17	11
4	20	5	5	5	8,75	5	17	14
Номер наилучшей стратегии $N = \max_i Kp(i)$.					3	1	2	4

Значения критериев по каждой из строк рассчитываются по формулам:

критерий Лапласа $L(i) = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} a_{ij}$

критерий Вальда $V(i) = \min_j a_{ij}$;

критерий Гурвица при $\alpha = 0,2$ $G(i) = 0,2\min_j a_{ij} + 0,8\max_j a_{ij}$;

критерий математического ожидания при $\bar{y} = \{0.6; 0.1; 0.2; 0.1\}$

$$M(i) = 0{,}6a_{1i} + 0{,}1a_{2i} + 0{,}2a_{3i} + 0{,}1a_{4i}.$$

Значения критериев записываются в правую часть расширенной таблицы. После чего находится номер строки с максимальным значением каждого критерия и записывается в качестве номера наилучшей стратегии в правой части нижней строки расширенной таблицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.С. Адамчук, С.Р. Амироков, А.М. Кравцов «Математические методы и модели исследования операций (краткий курс)»: Учеб. пособие- Ставрополь: СКФУ, 2014. -163 с.
2. Б.А. Гладких, Н.И.Шидловская «Методы оптимизации и исследование операций для бакалавров информатики»: Учеб. пособие- Томск: Изд-во «НТЛ», 2012.-281с.
3. Д.Г. Ловянников, И.Ю. Глазкова «Исследование операций»: Учеб. пособие- Ставрополь: СКФУ, 2017.-110с.
4. А.И. Полисмаков «Математические методы и модели в экономике»: Учеб. пособие- Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2014. - 150с.