ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

Авторы
Гусева И. А.
Баранов И. В.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения направления бакалавриата 01.03.04 «Прикладная математика».

Авторы

Доцент кафедры «Прикладная математика»
Гусева И.А.

Доцент кафедры «Прикладная математика»
Баранов И.В.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Настоящее пособие предназначено для студентов дневной и заочной формы обучения, изучающих дисциплину «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Пособие включает в себя основные теоретические сведения по темам курса.

Кроме того, в пособии изложены контрольные вопросы по основным темам, разобраны примеры решений стандартных задач. Пособие может быть использовано студентами различных форм обучения для подготовки к экзамену.

Учебное пособие дополняет курс лекций по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» и будет полезно студентам в самостоятельной работе и при подготовке к текущему, рубежному и итоговому контролю знаний по данной дисциплине в различных формах, в том числе в форме интернет-экзамена, а также при изучении различных смежных дисциплин математического и естественнонаучного цикла.

Часть 1. Матрицы, определители, СЛАУ.

§1. Матрицы и определители.

Определение. Матрицей размера m на n (пишут: $m \times n$) называют таблицу, содержащую m строк и n столбцов.

При записи таблицы ее заключают в круглые скобки.

Матрицы принято обозначать большими латинскими буквами. Для обозначения элемента матрицы, расположенного в i - той строке и j - том столбце принято использовать одноименную малую букву с индексами, причем первый индекс указывает номер строки, а второй – номер столбца, в которых расположен этот элемент. Например $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ матрица размера 2×3, элемент $a_{21} = 3$.

Числа можно рассматривать как частный случай матриц размера 1×1.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрицу называют квадратной.

Пусть A – квадратная матрица размера $n\times n$. Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, называемое её определителем. Порядком определителя называют число его строк (столбцов).

Определение. Определителем (первого порядка, $n=1$) числа a называется само это число.

Определение. Определителем второго порядка $(n=2)$ называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определение. Определителем третьего порядка $(n=3)$ называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Определение. Определителем n-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}M_{1n},$$

где M_{1j} – определитель порядка $n-1$, который получается из исходного вычеркиванием первой строки и j-того столбца.

Определитель M_{ij} получающийся из исходного определителя вычеркиванием i-той строки и j-того столбца называется *дополнительным минором* элемента a_{ij}.

Число $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij}.

С помощью понятия алгебраического дополнения определитель n-го порядка можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} =$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

Последняя формула называется разложением определителя по элементам первой строки.

Определитель матрицы A коротко обозначают: $|A|$ или $\det A$.

Теорема Лапласа.

Если A – квадратная матрица размера $n\times n$, то ее определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$ (разложение

определителя по i-той строке, $1\le i\le n$).

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$ (разложение определителя по j-тому столбцу, $1 \le j \le n$).

Пример1. Вычислим определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ разложением по элементам первой строки:

$$\det A = 9 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \cdot (5 \cdot 1 - 6 \cdot 2) - 8 \cdot (4 \cdot 1 - 6 \cdot 3) + 7 \cdot (4 \cdot 2 - 5 \cdot 3) = 0.$$

Вычислим этот же определитель разложением по элементам второго столбца:

$$\det A = -8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -8 \cdot (4 - 18) + 5 \cdot (9 - 21) - 2 \cdot (36 - 28) = 0.$$

Свойства определителей.

1. Определитель не изменит своего значения, если поменять в нем местами строки и столбцы, т.е. транспонировать матрицу определителя.
2. При перестановке двух строк определитель изменит знак на противоположный.
3. Если определитель содержит две одинаковые строки, то он равен нулю.
4. Определитель, который содержит нулевую строку равен нулю.
5. Общий для всех элементов строки множитель можно выносить за знак определителя.

6. Определитель, который содержит пропорциональные строчки равен нулю.
7. Если к какой либо строке определителя прибавить поэлементно другую его строку, умноженную на произвольное число, то значение определителя не изменится.

Свойство 1 означает, что все утверждения, справедливые для строк определителя автоматически справедливы и для его столбцов. Свойство 7 удобно использовать для вычисления определителей порядка $n \geq 4$. При этом сначала (пользуясь свойством 7) стремятся получить в какой либо строке (или столбце) определителя как можно больше нулей, а затем, пользуясь теоремой Лапласа, раскладывают определитель по этой строке (столбцу).

Пример2. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 9 \\ -2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

Вычислим определитель, используя свойство 7:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 9 \\ -2 & 4 & 16 \end{vmatrix} \underset{C_3 - C_1}{\overset{C_2 - C_1}{=}} \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \overset{C_3 - C_2}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение матрицы размера m на n. Какая матрица называется квадратной?
2. Дайте определение определителя первого, второго и третьего порядка. Что называют порядком определителя?
3. Дайте определение определителя n- порядка.

4. Что называют дополнительным минором элемента?
5. Что называется алгебраическим дополнением элемента?
6. Сформулируйте теорему Лапласа.
7. Сформулируйте свойства определителей.
8. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

   [10].

9. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ разложением а) по первой строке, б) по второй строке, в) по первому столбцу, г) по третьему столбцу. Убедитесь, что результаты во всех случаях совпали. В каком случае потребовалось меньше вычислений?

   [18, б)].

10. Квадратная матрица A размера $n \times n$ называется диагональной, если $a_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$. Вычислите определитель диагональной матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

    [-6].

11. Покажите, что определитель всякой диагональной матрицы равен произведению ее диагональных ($i = j$) элементов.
12. Квадратная матрица A размера $n \times n$ называется верхнетреугольной, если $a_{ij} = 0$ для всех $i > j$. Вычислите определитель верхнетреугольной матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **[-6].**
13. Покажите, что определитель всякой верхнетреугольной матри-

цы равен произведению ее диагональных ($i = j$) элементов.

14. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. Указание: поменяйте местами строки 2 и 3 и воспользуйтесь свойством 2 и результатом предыдущего пункта.

[-3].

15. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

а) разложением по теореме Лапласа, б) пользуясь свойством 7). Убедитесь, что во втором случае потребовалось меньше вычислений.

[48].

16. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

[160].

17. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

[394].

§2. Системы линейных алгебраических уравнений.

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) размера m на n называют систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(2.1)

где $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ – коэффициенты системы (заданные числа), $b_1, \ldots, b_m$ – правая часть (известные числа), а $x_1, x_2, \ldots x_n$ – неизвестные величины, которые требуется найти.

Решением системы (2.1) называют всякий набор величин $x_1, x_2, \ldots x_n$, который при подстановке *в каждое* из уравнений системы обращает его в верное равенство. Можно показать, что в линейных системах возможны лишь следующие три случая:

1. Система вообще не имеет решений.
2. Система имеет единственное решение.
3. Система имеет бесконечное число решений.

Если система уравнений не имеет ни одного решения, то ее называют *несовместной*. Систему, которая имеет решения называют *совместной*. Совместную систему, которая имеет единственное решение называют *определенной*. Совместную систему, которая имеет бесконечно много решений называют *неопределенной*.

Матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ размера $m \times n$, составленную из коэффициентов a_{ij} $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ системы (2.1) называют матрицей системы. Матрицу $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ размера $m\times 1$ называют арифметическим вектором правой части.

Матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называют *расширенной матрицей системы*.

Если вектор правой части нулевой $b=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, то систему называют *однородной*, в противном случае система называется *неоднородной*. Вполне очевидно, что однородная система всегда имеет нулевое решение $x_1=0$, $x_2=0$, … , $x_n=0$, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой в однородную систему. Это решение однородной системы называют *нулевым* или *тривиальным* решением. Таким образом в однородных системах реализуются только случаи 2 и 3 из перечисленных выше, причем если однородная система имеет единственное решение, то оно нулевое.

§2.1. Теорема (формулы Крамера).

Пусть система с квадратной матрицей размера $n\times n$ является определенной. Тогда ее решение можно найти по формулам: $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, … , $x_n=\dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, где $\Delta=\det A$ – определитель матрицы системы, а определитель Δ_j $(j=\overline{1,n})$ получается из определителя Δ, если в нем заменить столбец с номером j на вектор правой части b.

Следствие: Система с квадратной матрицей матрицей размера $n\times n$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы отличен от нуля. Это решение может быть найдено по формулам Крамера.

Пример 1. Решить по формулам Крамера систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$$

Решение. Определитель матрицы системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$ отличен от нуля, система имеет единственное решение.

Определитель Δ_1 получается из Δ заменой первого столбца на вектор правой части системы: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 8$, тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{8}{-2} = -4$. Определитель $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -9$ получается из Δ заменой второго столбца на вектор правой части. $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-9}{-2} = \dfrac{9}{2}$.

Проверка. Подставим найденные значения $x_1 = -4$ и $x_2 = \dfrac{9}{2}$ в каждое из уравнений системы: $\begin{cases} -4 + 2 \cdot \dfrac{9}{2} = 5 \\ 3 \cdot (-4) + 4 \cdot \dfrac{9}{2} = 6 \end{cases}$ верные равенства.

Ответ: $x_1 = -4$ и $x_2 = \dfrac{9}{2}$.

§2.2. Метод Гаусса.

Решения системы линейных уравнений (2.1) не изменятся, если

1. Поменять местами любые два уравнения системы.
2. Выбрать в системе два уравнения, умножить каждое из них на произвольное число и сложить полученные уравнения. При этом одно из уравнений следует оставить без изменений, а на место другого –

записать результат сложения.

Перечисленные выше преобразования, не меняющие решений системы, называют *элементарными преобразованиями* (ЭП) системы.

Системы уравнений называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковое множество решений. ЭП приводят к эквивалентной системе уравнений. Идея метода Гаусса (который еще называют *методом исключения неизвестных*) состоит в приведении исходной системы к эквивалентной системе столь простого вида, чтобы решение выписывалось очевидным образом. Это делается с помощью последовательного исключения неизвестных из уравнений системы. На первом шаге метода Гаусса исключим неизвестную x_1 из всех уравнений кроме первого, используя ЭП, т.е. умножая уравнения на подходящие коэффициенты и складывая их. На втором шаге исключим неизвестную x_2 из всех уравнений кроме второго, и т.д. Проиллюстрируем метод исключения на примере.

Пример 1: Решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение. Будем использовать следующие обозначения для ЭП: запись $\alpha\tilde{N}_1 + \beta\tilde{N}_2 \to \tilde{N}_3$ означает, что первое уравнение (строка $\tilde{N}_1$) умножается на число α, складывается со вторым уравнением $\tilde{N}_2$, умноженным на β, и результат записывается ($\to$) в строку $\tilde{N}_3$.

Вычисления удобно выполнять, кода система записана в форме расширенной матрицы:

$\sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 10 & 1 & 10 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 10 \end{array}\right)$	поменяем местами уравнения 1 и 3. (пишут: $\tilde{N}_1 \leftrightarrow \tilde{N}_3$). Переход к эквивалентной системе обозначают знаком "~"
$\sim \left(\begin{array}{ccc\|c} \underline{\underline{1}} & 3 & -2 & 10 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 1 & 10 \end{array}\right)$	Исключим неизвестную x_1 во втором и третьем уравнениях, для этого: первое уравнение перепишем неизменным, $-2\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 \to \tilde{N}_2$, $-3\tilde{N}_1 + \tilde{N}_3 \to \tilde{N}_3$.
$\sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 3 & -2 & 10 \\ 0 & \underline{\underline{1}} & 7 & -20 \\ 0 & 1 & 7 & -20 \end{array}\right)$	Исключим неизвестную x_2 в первом и третьем уравнениях, для этого: второе уравнение перепишем неизменным, $-3\tilde{N}_2 + \tilde{N}_1 \to \tilde{N}_1$ $\tilde{N}_2 - \tilde{N}_3 \to \tilde{N}_3$
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & -23 & 70 \\ 0 & 1 & 7 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	Последнее уравнение 0=0 выполняется тождественно и его можно вычеркнуть из системы.

В результате ЭП получили эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1 - 23x_3 = 70 \\ x_2 + 7x_3 = -20 \end{cases}$$

Следовательно, система имеет бесконечное число решений

$x_1 = 23x_3 + 70$, $x_2 = -7x_3 - 20$, $x_3 = \alpha$, где α – любое число.

§2.3. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.

Рассмотрим произвольную матрицу A. Выделим некоторое число k строк этой матрицы и такое же число столбцов. Элементы матрицы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка. Определитель этой матрицы называется *минором k-го порядка матрицы A.* Если не все числа a_{ij} матрицы *A* равны нулю, то всегда можно указать число r, такое, что у матрицы *A* имеется минор r-го порядка, отличный от нуля, а всякий минор, имеющий порядок $r+1$ и выше, равен нулю.

Число r, обладающее отмеченным свойством, называется *рангом матрицы A* и обозначается *rang* A. Если все элементы a_{ij} равны нулю, то ранг матрицы принимается равным нулю. Практический способ вычисления ранга основан на следующей теореме:

Теорема. Элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.

Метод Гаусса вычисления ранга заключается в том, чтобы привести исходную матрицу A при помощи ЭП к матрице “ступенчатого” вида

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} \end{pmatrix}$$

Очевидно, что для такой матрицы порядок самого старшего отличного от нуля минора (т.е. ее ранг) будет равен числу ненулевых строк. Учитывая , что ранг не меняется при ЭП имеем, что $rangC = rangA$.

Пример : Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Решение. Приведем матрицу к ступенчатому виду методом Гаусса:

$\begin{pmatrix} \underline{\underline{1}} & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\sim$	$C_1 + C_2 \to C_2$ $2C_1 + C_3 \to C_3$ $3C_1 + C_4 \to C_4$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\sim$	$C_3 \leftrightarrow C_4$
$\sim$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{-2}} & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$C_2 - C_3 \to C_3$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	

В матрице ступенчатого вида три ненулевые строки, следовательно $rangA = 3$.

В терминах ранга матрицы формулируется *критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений*:

Теорема (Кронекер-Капелли). Для того, чтобы система линейных уравнений (2.1) была совместна необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.

Контрольные вопросы

1. Может ли система линейных алгебраических уравнений иметь а) ровно одно решение, б) ровно два различных решения?

[а) да, б) нет].

2. В каком случае линейная система с квадратной матрицей имеет единственное решение? **[тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы отличен от нуля]**.
3. Какая система называется совместной?

4. Какая система называется однородной, неоднородной?
5. Может ли однородная система быть несовместной? **[нет]**
6. Решите по формулам Крамера систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

[$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2$ **]**

7. Вычислите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$.

   [2]
8. Решите методом Гаусса систему.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

[система решений не имеет]

Чему равен ранг матрицы системы? Ранг расширенной матрицы? **[2, 3]**

9. Сформулируйте критерий совместности системы линейных уравнений.

Часть 2. Аналитическая геометрия.

ГЛАВА 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1 Основные понятия

Опр.: ***Вектором*** называется направленный отрезок, т. е. отрезок, у которого ограничивающие его точки берутся в определенном порядке; при этом первая точка обычно называется ***началом вектора***, а вторая - его ***концом***. Если начало вектора находится в точке *A*, а конец в точке *B*, то он обозначается $\overline{AB}$ (буква *A* - начало вектора - всегда пишется первой). На чертежах (рис. 1.1) векторы изображаются стрелками. Векторы также часто удобно обозначать одной буквой, например $\overline{a}$, $\overline{b}$, ... ***Нулевой*** вектор обозначают знаком $\overline{0}$. В этом случае начало и конец вектора совпадают. Очевидно, что для нулевого вектора понятие направления не имеет смысла.

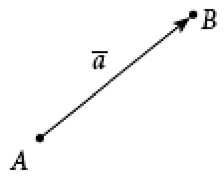
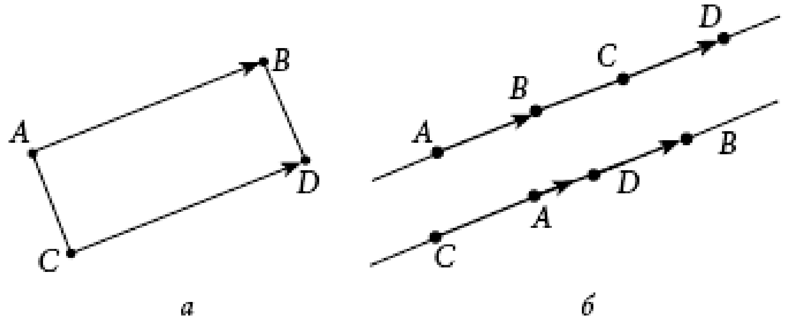


Рис. 1.1. Вектор

Длиной вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка *AB* или расстояние между точками *A* и *B*. Длина вектора обозначается так: $|\overline{AB}|$, или $|\overline{a}|$. Очевидно, $|\overline{0}| = 0$.

Два вектора называются ***равными***, если один из них может быть получен параллельным переносом другого.

Очевидно, что если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны и не лежат на одной прямой, то четырехугольник *ABDC* является параллелограммом (рис. 1.2, а). На рисунке 1.2, б показаны случаи расположения равных векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, лежащих на одной прямой.



1.2. Равные векторы

Непосредственно из определения равенства векторов вытекают следующие предложения:

1. Если A' - произвольная точка и $\overline{AB}$ - данный вектор, то существует и притом единственный вектор $\overline{A'B'}$, равный вектору $\overline{AB}$.

Другими словами, всегда можно построить единственный вектор $\overline{A'B'}$ с началом в произвольной точке *A*', равный заданному вектору $\overline{AB}$.

2. Если $\overline{a} = \overline{b}$, то $\overline{b} = \overline{a}$.

3. Если $\overline{a} = \overline{b}$, $\overline{b} = \overline{c}$, то $\overline{a} = \overline{c}$.

Векторы, расположенные на параллельных прямых или на одной прямой, называются ***коллинеарными***.

Векторы, расположенные на прямых, параллельных одной и той же плоскости или лежащие в этой плоскости, называются ***компланарными***.

Два ненулевых вектора называются ***одинаково (противоположно) направленными***, если они коллинеарны и у равных им векторов, имеющих общее начало, концы располагаются по одну (по разные) стороны от начала.

Условимся считать, что: а) нулевой вектор коллинеарен любому вектору; б) нулевой вектор и любые два других вектора компланарны; в) нулевой вектор одновременно считается одинаково и противоположно направленным любому другому вектору.

§2 Действия с векторами

Сложение векторов. ***Суммой двух векторов*** $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, который строится следующим образом: от произвольной точки *М* откладываем вектор $\overline{MN}$, равный $\bar{a}$ (рис. 1.3.), и затем строим вектор $\overline{NP}$, равный $\bar{b}$. Полагаем $\bar{c} = \overline{MP}$; вектор $\bar{c}$ обычно обозначается $\bar{a} + \bar{b}$. Легко доказывается, что сумма векторов не зависит от выбора точки *М*, т. е. если в качестве начальной точки взять любую другую точку М' и построить сумму векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то получим вектор $\overline{M'P'}$, равный вектору $\overline{MP}$.

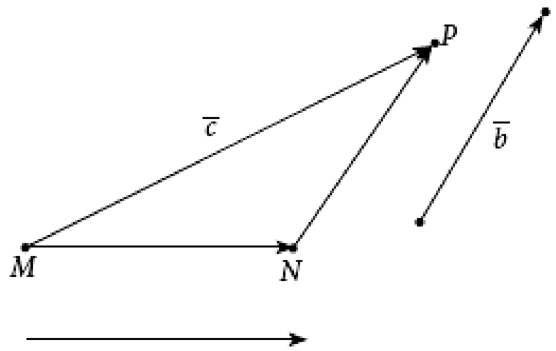


Рис. 1.3. Сложение векторов по правилу треугольника

Из определения суммы векторов следует, что для любого вектора $\bar{a}$: $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.

Условимся обозначать далее одной и той же буквой равные между собой векторы, начала которых могут быть и различны. Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$ - произвольные неколлинеарные векторы и *М* – произвольная точка. Тогда $\bar{a} + \bar{b} = \overline{MP}$, где *МР* – диагональ параллелограмма, «сторонами» которого являются векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, отложенные от точки *М* (рис. 1.4). Это геометрическое построение суммы векторов обычно называют правилом параллелограмма.

Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – коллинеарные векторы, то вектор $\bar{a}$ + $\bar{b}$ коллинеарен $\bar{a}$ и $\bar{b}$, причем он одинаково направлен с большим по длине вектором. Длина вектора $\bar{a}$ + $\bar{b}$ равна $|\bar{a}|$ + $|\bar{b}|$, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одинаково направлены, или $||\bar{a}| - |\bar{b}||$, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ противоположно направлены.

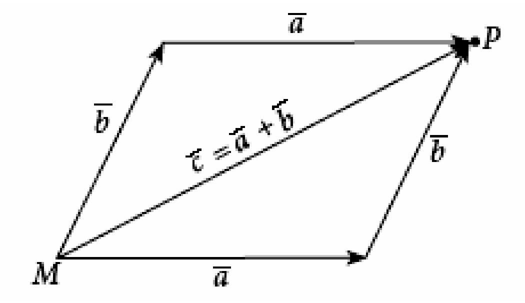


Рис. 1.4. Сложение векторов по правилу параллелограмма

Умножение вектора на число. Произведением вектора $\bar{a}$ на число λ называется такой вектор $\bar{b}$, что: 1) $|\bar{b}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$; 2) $\bar{b}$ коллинеарен $\bar{a}$, причем $\bar{b}$ и $\bar{a}$ направлены одинаково, если λ > 0, и направлены противоположно, если λ < 0.

Из первого условия получаем, что $\bar{b} = \bar{0}$, если λ = 0 или $\bar{a} = \bar{0}$. Условия 1) и 2) однозначно определяют вектор $\bar{b}$, если заданы число λ и вектор $\bar{a}$. В дальнейшем произведение вектора $\bar{a}$ на число λ будем обозначать $\lambda\bar{a}$.

Из определения вектора $\lambda\bar{a}$ вытекает, что для любого вектора $\bar{a}$ вектор $(-1)\bar{a}$ равен вектору, противоположному вектору $\bar{a}$, т. е. $(-1)\bar{a} = -\bar{a}$. Очевидно, что для любых двух коллинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $(\bar{a} \neq \bar{0})$ существует единственное число λ, такое, что $\bar{b} = \lambda\bar{a}$. Действительно,

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}, & \text{если } \bar{a} \text{ и } \bar{b} \text{ направлены одинаково.} \\ -\dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}, & \text{если } \bar{a} \text{ и } \bar{b} \text{ противоположно направлены.} \end{cases}$$

§ 3 Скалярное произведение

Скалярным произведением ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ нулевой, то скалярное произведение этих векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение обычно обозначается так: $(\bar{a}, \bar{b})$. В этих обозначениях имеем:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \angle \bar{a}, \bar{b}. \quad (1.1.)$$

Отметим ряд простейших ***свойств скалярного произведения***.

1. Для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$.

Если хотя бы один из векторов $\bar{a}$ или $\bar{b}$ нулевой, то $(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{0}$ и $(\bar{b}, \bar{a}) = \bar{0}$, поэтому $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$.

Для ненулевых векторов имеем:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \angle \bar{a}, \bar{b} = |\bar{b}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos \angle \bar{b}, \bar{a} = (\bar{b}, \bar{a}).$$

2. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ортогональными, если $(\bar{a}$ и $\bar{b}) = 0$, Для того чтобы векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы один из этих векторов был нулевым или $\angle \bar{a}, \bar{b} = \dfrac{\pi}{2}$.

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из определения скалярного произведения векторов.

3. Скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату

его длины:

$$(\bar{a},\bar{a}) = |\bar{a}|^2.$$

Действительно, для $\bar{a} \neq \bar{0}$

$$(\bar{a},\bar{a}) = |a| \cdot |a| \cos 0 = |\bar{a}|^2.$$

Если же $\bar{a} = \bar{0}$, то $|a| = 0$ и

$$(\bar{a},\bar{a}) = 0 = |\bar{a}|^2.$$

4. Пусть $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ - орты координатных осей декартовой системы координат. Тогда из свойств 1 – 3 вытекает:

$$(\bar{i}, \bar{i}) = |\bar{i}|^2 = 1, (\bar{j}, \bar{j}) = |\bar{j}|^2 = 1, (\bar{k}, \bar{k}) = |\bar{k}|^2 = 1,$$

$$(\bar{i}, \bar{j}) = (\bar{j}, \bar{k}) = (\bar{k}, \bar{i}) = 0.$$

Формула скалярного произведения в декартовой системе координат. Пусть в пространстве фиксирована произвольная декартова система координат.

Пусть далее $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – произвольные неколлинеарные векторы. Не нарушая общности, можно считать, что эти векторы имеют общее начало.

Тогда (рис. 1.5) из теоремы косинусов имеем:

$$|\bar{b} - \bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos \angle \bar{a}, \bar{b} = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2(\bar{a}, \bar{b}).$$

(1.2)

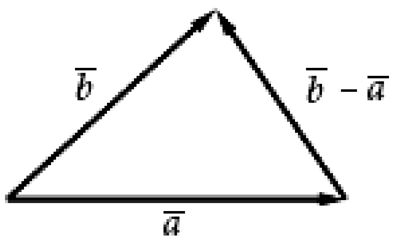


Рис. 1.5. Произвольные векторы

Пусть теперь векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ относительно фиксированной выше системы декартовых координат имеют компоненты $\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\{x_2, y_2, z_2\}$. Тогда вектор $\bar{b} - \bar{a}$ имеет относительно той же системы компоненты

$\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$. Так как $|\bar{b} - \bar{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, $|\bar{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, $|\bar{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$, то

$$|\bar{b} - \bar{a}|^2 = (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2) + (z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2) =$$

$$= |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$

(1.3)

Из (1.2) и (1.3) получаем:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad (1.4)$$

§4 Векторное произведение

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c}$, что:

1) $\bar{c}$ ортогонален векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$,

2) $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\angle\bar{a}, \bar{b}$,

(1.5)

3) упорядоченная тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ является правой.

В этом определении предполагается, что $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$.

Если хотя бы один из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен нулю, то по определению $\bar{c} = \bar{0}$.

Для векторного произведения будут использоваться две формы записи: $[\bar{a}, \bar{b}]$ или $\bar{a} \times \bar{b}$.

Свойства векторного произведения.

1^0. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны, то число $|\bar{a} \times \bar{b}|$ равно площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 1.6).

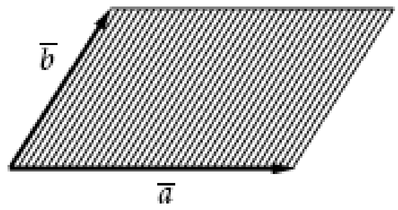


Рис. 1.6. Векторное произведение

Действительно, из школьного курса геометрии известно, что площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна произведению длин его сторон на синус угла между ними. Следовательно,

$$S = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin \angle \bar{a}, \bar{b} = |\bar{a} \times \bar{b}|.$$

2^0. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$. Действительно, угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в этом случае равен 0 или π. Поэтому $\sin \angle \bar{a}, \bar{b} = 0$. Отсюда $|\bar{a} \times \bar{b}| = 0$ и, следовательно, $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

Обратно, если $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, то из соотношения

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin \angle \bar{a}, \bar{b} = 0$$

вытекает, что либо один из векторов равен нулю, либо угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 0 или π. Во всех этих случаях векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

Выражение векторного произведения через компоненты векторов в декартовой системе координат. Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в произвольно взятой декартовой системе координат имеют соответственно компоненты $\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\{x_2, y_2, z_2\}$. Тогда

$$\bar{a} = x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k},\ \bar{b} = x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j} + z_2 \bar{k}.$$

Из свойств векторного произведения получим:

$$\bar{a} \times \bar{b} = x_1x_2(\bar{i} \times \bar{i}) + y_1x_2(\bar{j} \times \bar{i}) + z_1x_2(\bar{k} \times \bar{i}) + x_1y_2(\bar{i} \times \bar{j}) +$$
$$+ y_1y_2(\bar{j} \times \bar{j}) + z_1y_2(\bar{k} \times \bar{j}) + x_1z_2(\bar{i} \times \bar{k}) + y_1z_2(\bar{j} \times \bar{k}) + z_1z_2(\bar{k} \times \bar{k}) =$$
$$= -y_1x_2\bar{k} + z_1x_2\bar{j} + x_1y_2\bar{k} - z_1y_2\bar{i} - x_1z_2\bar{j} + y_1z_2\bar{i}.$$

После объединения слагаемых, содержащих одинаковые орты, получим:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (y_1z_2 - z_1y_2)\,\bar{\boldsymbol{i}} - (x_1z_2 - z_1x_2)\,\bar{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\,\bar{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{\boldsymbol{i}} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \bar{k}$$

или

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (1.6)$$

§5 Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ на вектор $\bar{c}$.

Для смешанного произведения ниже употребляется обозначение $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$. Согласно сказанному выше,

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}). \qquad (1.7)$$

Геометрическая интерпретация смешанного произведения. Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку (рис. 1.7). Обозначим через V объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Тогда $V = S \cdot h$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а h – длина отрезка CD, перпендикулярного плоскости этого параллелограмма.

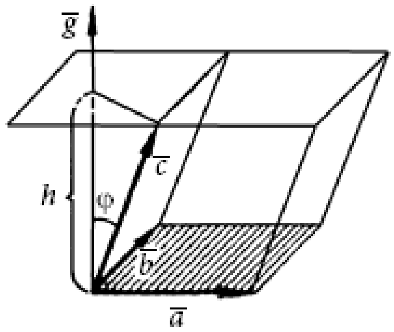


Рис. 1.7. Смешанное произведение

Положим $\bar{g} = \bar{a} \times \bar{b}$; тогда по определению векторного произведения имеем: $|\bar{g}| = S$; вектор $\bar{g}$ перпендикулярен плоскости α, проходящей через векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, и, наконец, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{g}$ образуют правую тройку. Отсюда следует, что векторы $\bar{c}$ и $\bar{g}$ имеют общее начало и расположены по одну сторону от плоскости α. Так как $\bar{g}$ перпендикулярен плоскости α, то угол φ между векторами $\bar{g}$ и $\bar{c}$ не больше $\frac{\pi}{2}$, т. е. $\cos\varphi \geq 0$.

Поэтому

$$h = |\bar{c}| \cos\varphi \text{ и } (\bar{g}, \bar{c}) = |\bar{g}|\,|\bar{c}| \cos\varphi = S \cdot h = V.$$

с другой стороны,

$$(\bar{g}, \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}).$$

Поэтому

$$V = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}).$$

Итак, если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правую тройку, то их смешанное произведение равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Выражение смешанного произведения через компоненты векторов в декартовой системе координат. Пусть даны разложения векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ относительно произвольно выбранной декартовой системы координат:

$$\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k},$$

$$\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k},$$

$$\bar{c} = x_3\bar{i} + y_3\bar{j} + z_3\bar{k},$$

Тогда

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\bar{k}$$

и поэтому

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Итак, окончательная формула такова:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Контрольные вопросы по теме: «Векторная алгебра»

1. Какие векторы называются коллинеарными, а какие компланарными?
2. Как на чертеже можно показать вектор $\bar{c} = \lambda\bar{a}$, если: а) λ > 1; б) λ < - 1
3. Что называется скалярным произведением векторов?
4. К каком случае скалярное произведение векторов равно нулю?
5. Изменится ли скалярное произведение двух векторов, если к одному из них добавить вектор, перпендикулярный к одному из сомножи-

телей.

6. Что называется векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$?

7. Изменится ли векторное произведение, если к одному из сомножителей прибавить вектор, коллинеарный другому сомножителю?

8. Дайте определение смешанному произведению векторов.

9. Когда смешанное произведение векторов равняется 0?

10. В пространстве заданы координатами четыре точки. В каком случае они будут лежать в одной плоскости?

ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

§1. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки

Как известно, через две не совпадающие точки проходит единственная прямая. Найдем уравнение этой прямой, если известны декартовы координаты заданных на плоскости точек M_1 и M_2.

Пусть точки M_1 и M_2 имеют координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 соответственно. Через x, y обозначаем координаты произвольной точки M на рассматриваемой прямой l. Точка $M(x;\ y)$ лежит на прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1\}$ и $\overline{M_1M} = \{x - x_1,\ y - y_1\}$ коллинеарны (рис. 2.1), т. е. когда справедливо равенство

$$\overline{M_1M} = \lambda \cdot \overline{M_1M_2}. \qquad (2.1)$$

Здесь λ – некоторое число. Из векторного равенства (2.1) следуют равенства одноименных координат

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) \text{ и } y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1),$$

откуда

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (2.2)$$

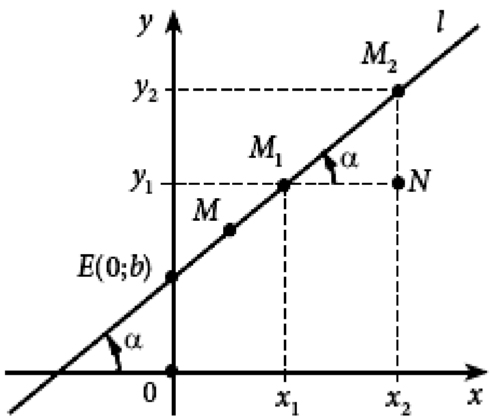


Рис. 2.1. Прямая, определяемая точками M_1 и M_2

Это уравнение называется уравнением прямой, проходящей через две заданные точки. Уравнение (2.2) справедливо, когда $x_2 - x_1 \neq 0$ и $y_2 - y_1 \neq 0$. Если же, например, $x_2 - x_1 = 0$, т. е. прямая l параллельна оси Oy, то ее уравнение принимает вид:

$$x - x_1 = 0, \text{ или } x = x_1,$$

а координата y при этом произвольна.

Рассмотрим частный случай, когда точки M_1 и M_2, задающие прямую l, лежат на координатных осях Ox и Oy. Пусть для определенности точка $M_1(a;0)$ лежит на оси Ox, а точка $M_2(0;\ b)$ лежит на оси Oy (рис. 2.2). В этом случае уравнение прямой (2.2) примет вид:

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0},$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{2.3}$$

Это уравнение называется уравнением прямой в отрезках, так как числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

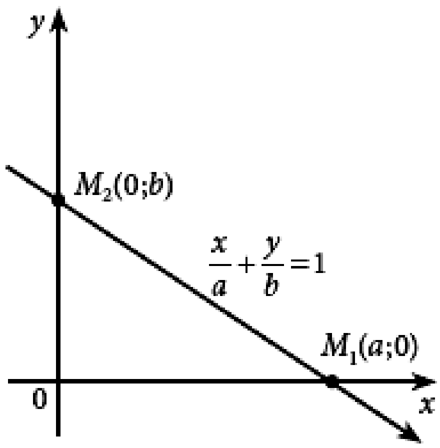


Рис. 2.2. Уравнение прямой в отрезках

При выводе углового коэффициента для наклонной прямой (когда $x_2 \neq x_1$) запишем уравнение (2.2) в виде

$$y_2 - y_1 = k(x - x_1),$$

(2.4)

где

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (2.5)$$

Из треугольника M_1M_2N находим (см. рис. 2.1), что коэффициент k равен $tg\alpha$, где α – угол, на который надо повернуть против часовой стрелки ось Ox до совпадения с прямой l. Этот угол называется углом наклона прямой, а коэффициент k называется угловым коэффициентом прямой. Уравнение (2.4) называется уравнением прямой, проходящей через заданную точку $M_1(x_1; y_1)$ с заданным угловым коэффициентом k.

§2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на плоскости фиксирована декартова система координат с началом O и координатными осями x и y, а l – произвольная прямая на плоскости, пересекающая ось x в точке K (рис. 2.3). Угол φ, который получается при вращении оси x вокруг точки K против хода часовой стрелки до совпадения ее с прямой l $(0 < \varphi < \pi)$, называется углом между прямой l и осью x. Если прямая l параллельна оси x, то угол ее, наклона к оси x считается равным нулю.

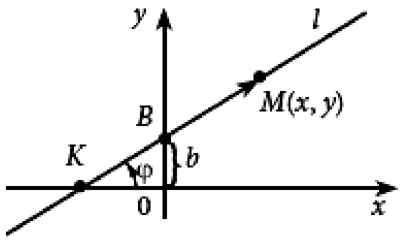


Рис. 2.3. Прямая на плоскости

Рассмотрим сначала случай, когда $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$. Прямая l будет однозначно определена на плоскости; если известны угол φ между l и осью x и ордината b точки пересечения l с осью y (рис. 2.3). Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка l. Тогда вектор $\overline{BM} = x\bar{i} + (y - b)\bar{j}$ лежит на l, и поскольку $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то по определению тангенса имеем:

$$tg\varphi = \frac{y-b}{x}.$$

Отсюда

$$y = tg\varphi \cdot x + b. \qquad (2.5)$$

Положим $k = tg\varphi$. Тогда (2.5) запишется так:

$$y = kx + b. \qquad (2.6)$$

Итак, координаты произвольных точки M прямой l удовлетворяют уравнению (2.6).

Уравнение (2.2) определяет на плоскости линию первого порядка m. Из наших рассмотрений следует, что $l \subseteq m$. Отметим, что точка $B(0, b)$ принадлежит l, а, следовательно, и m.

§3. *Общий вид уравнения прямой на плоскости*

Различные формы записи уравнения прямой, рассмотренные в предыдущих пунктах, имеют в принципе один и тот же вид:

$$Ax + By + C = 0, \qquad (2.7)$$

где A, B, C – некоторые числа. Уравнение (2.7) называется общим уравнением прямой.

Легко видеть, что если прямая задана общим уравнением (2.7), то нормальным вектором этой прямой является вектор $\overline{N} = \{A, B\}$ (и любой вектор $\lambda\overline{N} = \{\lambda A, \lambda B\}$, где λ – некоторое число), а направляющим вектором этой прямой будет вектор $\bar{t} = \{-B, A\}$.

В случае $C = 0$ прямая (2.7) проходит через начало координат, в случае $B = 0$ прямая параллельна оси Oy, а в случае $A = 0$ параллельна оси Ox.

Теорема. Всякая линия первого порядка на плоскости есть прямая.

Доказательство. Пусть линия первого порядка m определяется уравнением

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0 \tag{2.7}$$

Возможны два случая:

а) $B = 0$, тогда $A \neq 0$, и уравнение (2.7) эквивалентно уравнению

$$x = -\frac{C}{A}$$

В этом случае m является прямой, параллельной оси y.

б) $B \neq 0$, тогда уравнение (2.7) эквивалентно уравнению

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \tag{2.8}$$

Положим $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$. Тогда (2.8) перепишется так:

$$y = kx + b.$$

Отсюда следует, что m является прямой, образующей угол $\varphi = \mathrm{arctg}(-\frac{A}{B})$ с осью x и проходящей через точку $(0, -\frac{C}{B})$.

Теорема доказана.

§4. Некоторые задачи на плоскости

Пусть даны две непараллельные оси y прямые l_1 и l_2, заданные соответственно уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Выведем формулу для нахождения угла между l_1 и l_2. На данных прямых возьмем векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$; пусть θ угол, отсчитываемый от $\overline{a_1}$ к $\overline{a_2}$ против хода часовой стрелки (рис. 2.4). Тогда $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$, и потому

$$tg\theta = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 tg\varphi_2}.$$

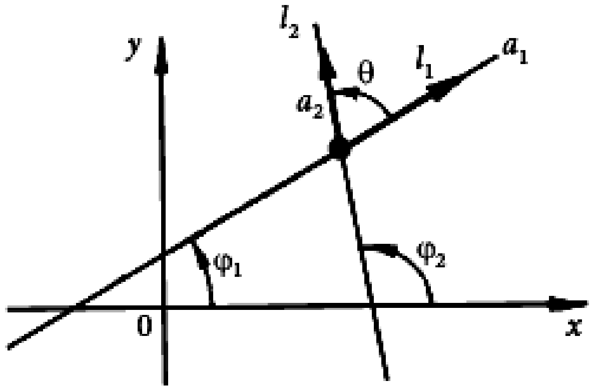


Рис. 2.4. Угол между прямыми

Но так как $tg\varphi_1 = k_1$, $tg\varphi_2 = k_2$, то

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (2.9)$$

Если теперь поменять ролями прямые l_1 и l_2, то угол θ заменится углом $\theta_1 = \pi - \theta$, и поскольку $tg\theta_1 = -tg\,\theta$, получим формулу

$$tg\theta_1 = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}. \qquad (2.10)$$

Если при решении конкретных задач требуется знание обоих углов, то формулы (2.9) и (2.10) объединяются в одну:

$$tg\theta = \pm\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

В зависимости от знака $tg\theta$ получаем острый или тупой угол между l_1 и l_2.

Из формулы (2.9) легко получаем условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то $tg\theta = 0$ и, следовательно, $k_2 - k_1 = 0$. Поэтому условие параллельности l_1 и l_2 имеет вид

$$k_2 = k_1.$$

Если l_1 и l_2 перпендикулярны, то

$$ctg\theta = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}$$

и условие перпендикулярности l_1 и l_2 таково:

$$1 + k_1 k_2 = 0, \text{ или } k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Расстояние от данной точки до прямой. Пусть прямая l задана уравнением $Ax + By + C = 0$. Расстояние d от некоторой точки плоскости $M(x_M;\ y_M)$ до прямой l равно абсолютной величине проекции вектора $\overline{M_1M} = \{x_M - x_1;\ y_M - y_1\}$, где $M_1(x_1;\ y_1)$ – точка прямой l, на направление нормального вектора $\overline{N} = \{A;\ B\}$ (рис: 2.5). Поскольку $\overline{N} \cdot \overline{M_1M} = |\overline{N}||\overline{M_1M}|cos\varphi = |\overline{N}| \cdot \text{пр}_{\overline{N}}\overline{M_1M}$, то искомое расстояние d вычисляется по формуле

$$d = |\text{пр}_{\overline{N}}\overline{M_1M}| =$$

$$= \frac{|\overline{N} \cdot \overline{M_1M}|}{|\overline{N}|} = \frac{|A \cdot (x_M - x_1) + B(y_M - y_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_M + By_M - (Ax_1 + By_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

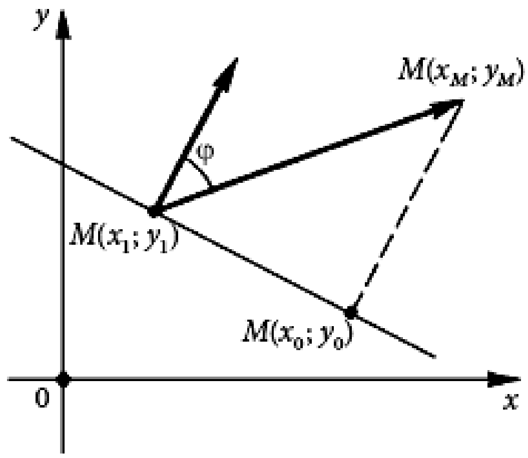


Рис. 2.5. Расстояние от точки до прямой

Так как точка $M_1(x_1;\ y_1)$ принадлежит прямой l, то $Ax_1 + By_1 = -C$. Следовательно,

$$d = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (2.11)$$

Контрольные вопросы по теме: «Аналитическая геометрия на плоскости. Прямая»

1. Как вычислить расстояние между двумя точками $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$.
2. Если известны координаты точки в полярной системе, как получить ее координаты в прямоугольной системе?
3. Напишите уравнения прямой с угловым коэффициентом и прямой, проходящей через две точки. Раскройте смысл всех параметров.
4. Каковы условия параллельности и перпендикулярности прямых?
5. По какой формуле вычисляется расстояние от заданной точки плоскости до прямой?
6. В каких случаях общее уравнение прямой задает прямую:

а) проходящую через начало координат;

б) параллельную оси абсцисс;

в) параллельную оси ординат.

7. Как записывается уравнение прямой, проходящей через заданную точку в данном направлении?

8. Если заданы длины a и b отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях от начала системы координат, то как будет выглядеть уравнение этой прямой?

9. Как определить угол между прямой, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и осью абсцисс?

10. Как определяется угол между двумя произвольными прямыми?

ГЛАВА 3. УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§1. Уравнение окружности

Ранее было показано, что если на плоскости имеется декартова система координат, то любое уравнение первого порядка с двумя переменными, т. е. уравнение вида

$$Ax + By + C = 0,$$

где коэффициенты A и B не могут быть равными нулю одновременно, является уравнением прямой. И, наоборот, любая прямая задается некоторым уравнением первого порядка с двумя переменными. Поэтому прямую иногда называют линией первого порядка.

Теперь мы будем рассматривать уравнения второго порядка с двумя переменными. Кривые, которые описываются этими уравнениями, называются кривыми второго порядка. Простейшей кривой второго порядка является окружность. Напомним, что окружностью радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию (рис. 3.1)

$$M_0M = R. \tag{3.1}$$

Пусть точка M_0 в некоторой декартовой системе координат Oxy имеет координаты x_0, y_0. Тогда из условия (3.1) получаем уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{3.2}$$

Это уравнение второго порядка с двумя переменными является уравнением окружности радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$.

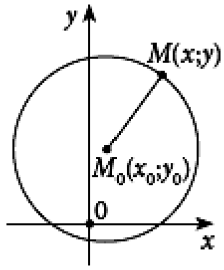


Рис.3.1. Окружность

§2. Каноническое уравнение эллипса

Эллипсом называется множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух заданных точек той же плоскости постоянна и больше расстояния между этими точками. Заданные точки называются фокусами эллипса, а расстояние между ними – фокальным расстоянием. Выведем уравнение эллипса. Для этого расположим систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокусы эллипса F_1 и F_2 (рис.3.2). Обозначим фокальное расстояние, т. е. длину отрезка F_1F_2, через $2c$. Ось ординат проведем через середину отрезка F_1F_2 перпендикулярно ему. Обозначим постоянную для всех точек эллипса $M(x;\ y)$ сумму длин отрезков F_1M и F_2M через $2a$. Тогда координаты точек эллипса удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \qquad (3.3)$$

Уединяя один из радикалов, возводим обе части уравнения в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

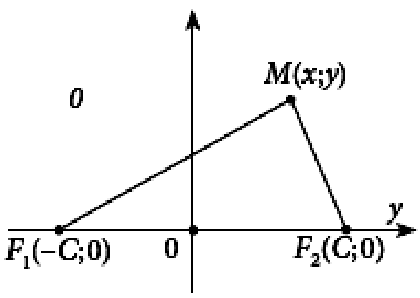


Рис. 3.2. Основное свойство эллипса

После упрощений получим:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{cx}{a}.$$

Снова возведем обе части уравнения в квадрат и приведем подобные члены:

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2.$$

По определению эллипса $a > c$, поэтому ($a^2 - c^2$) – положительное число. Обозначим его через b^2, т. е. положим $b^2 = a^2 - c^2$. После деления на b^2 уравнение примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3.4)$$

Это уравнение называется каноническим уравнением эллипса.

Исследуем форму эллипса. Из уравнения (3.4) видно, что эллипс симметричен относительно осей *Oy* и *Ox* и начала координат. Действительно, если некоторая точка $M_0(x_0;\ y_0)$ принадлежит эллипсу, то ему принадлежат и точки $M_1(-x_0;\ y_0)$, $M_2(x_0;\ -y_0)$, $M_3(-x_0;\ -y_0)$. Эллипс пересекает оси координат в точках $A(a;\ 0)$, $C(-a;\ 0)$ (это точки пересечения с осью *Ox*), $B(0;\ b)$ и $D(0;\ -b)$ (это точки пересечения с осью *Oy*). Точки *A, B, C, D* называются вершинами эллипса. Отрезок *AC* называется большой осью эллипса, отрезок *BD* – малой осью. Фокусы F_1, F_2 эллипса лежат на большой оси. Длина большой оси равна $2a$, длина малой оси равна $2b$. Числа a и b называют полуосями эллипса. Эллипс (3.4) может быть получен из окружности, уравнение которой есть

$$x^2+y^2=a^2, \text{ или } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

(3.5)

с помощью сжатия к оси Ox, при котором ординаты точек уменьшаются в $\frac{b}{a}$ раз. Действительно, если точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит окружности (3.5), т. е. удовлетворяет уравнению $x_0^2 + y_0^2 = a^2$, то координаты точки $M_1(x_0; y_1)$, где $y_1 = \frac{by_0}{a}$, удовлетворяют уравнению эллипса (3.4). Общий вид эллипса и окружности, из которой он. может быть получен сжатием к оси Ox, показан на рисунке 3.3.

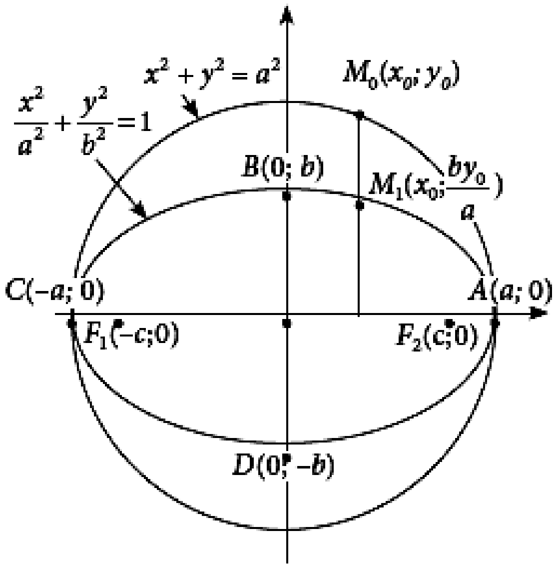


Рис. 3.3 Эллипс, полученный сжатием окружности

§3. Каноническое уравнение гиперболы

Гиперболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек плоскости постоянен и меньше расстояния между этими точками. Данные точки называются фокусами гиперболы, а расстояние между ними – фокальным расстоянием. Выведем уравнение гиперболы. Для этого расположим систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокусы гиперболы F_1 и F_2 (см. рис. 3.4). Обозначим фокальное расстояние, т. е. длину отрезка F_1F_2, через $2c$. Ось ординат прове- дем через середину отрезка F_1F_2

перпендикулярно ему. Обозначим постоянный для всех точек гиперболы модуль разности длин отрезков F_1M и F_2M через $2a$. Тогда координаты точек гиперболы удовлетворяют уравнению

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a,\text{ или}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a,$$

где знак «плюс» соответствует случаю, когда левая часть уравнения положительна, а знак «минус» соответствует противоположному случаю. Уединяя один из радикалов, возводим обе части уравнения в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

После упрощений получим:

$$\frac{cx}{a}-a=\pm\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Снова возведем обе части уравнения в квадрат и приведем подобные члены:

$$\frac{c^2-a^2}{a^2}x^2-y^2=c^2-a^2.$$

По определению гиперболы $a < c$($2a < 2c$ – разность длин сторон F_1M и F_2M в треугольнике F_1MF_2 на рисунке 3.4 по абсолютной величине меньше длины стороны F_1F_2), поэтому $(c^2 - a^2)$ – положительное число. Обозначим его через b^2, т. е. положим $b^2 = c^2 - a^2$. После деления на b^2 уравнение принимает вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1. \qquad (3.6)$$

Уравнение (3.6) называется каноническим уравнением гиперболы.

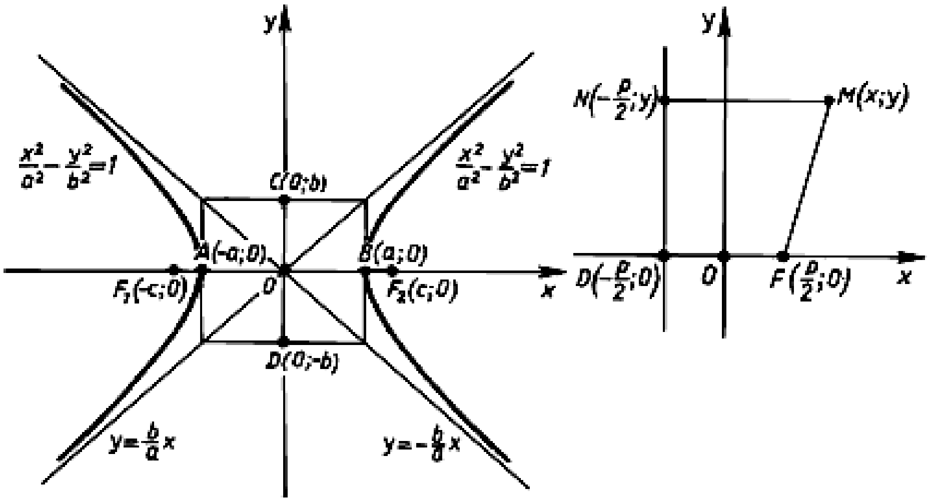


Рис. 3.4. Гипербола

Исследуем форму гиперболы. Из уравнения (3.6) видно, что гипербола симметрична относительно осей *Ox* и *Oy* и начала координат *O*. Действительно, если точка $M_0(x_0;\ y_0)$ принадлежит гиперболе, то ей принадлежат и точки $M_1(-x_0;\ y_0)$, $M_2(x_0;\ -y_0)$, $M_3(-x_0;\ -y_0)$. Гипербола пересекает ось абсцисс в точках $A(-a;\ 0)$ и $B(a;\ 0)$. Точки *A* и *B* называются вершинами гиперболы. Отрезок *AB* называется действительной осью гиперболы. Его длина равна $2a$. Гипербола состоит из двух не связанных между собой частей, называемых ее ветвями (рис. 3.4). Прямые

$$y=\frac{bx}{a} \text{ и } y=-\frac{bx}{a}$$

называются асимптотами гиперболы: при увеличении *x* по абсолютной величине ветви гиперболы все ближе прилегают к этим прямым (см. рис. 3.4). Гипербола называется равносторонней, если $a = b$. Ее уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Асимптотами равносторонней гиперболы являются взаимно перпендикулярные прямые $y = x$ и $y = -x$.

§4. Каноническое уравнение параболы

Параболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние до заданной точки равно расстоянию до заданной прямой, не проходящей через данную точку. Данная точка называется фокусом параболы, данная прямая называется директрисой. Расстояние от фокуса до директрисы называется фокальным параметром параболы и обозначается через *p*. Выведем уравнение параболы. Для этого расположим систему координат так, чтобы ось *Ox* проходила через фокус *F* перпендикулярно директрисе. Точку пересечения оси абсцисс с директрисой обозначим буквой *D* (рис. 3.5), за начало координат *O* примем середину отрезка *DF*, за положительное направление оси *Ox* примем направление вектора $\overline{OF}$. В выбранной системе координат фокус *F* имеет координаты $(\frac{p}{2};0)$, а директриса имеет уравнение

$$x=-\frac{p}{2}, \text{ или } x+\frac{p}{2}=0.$$

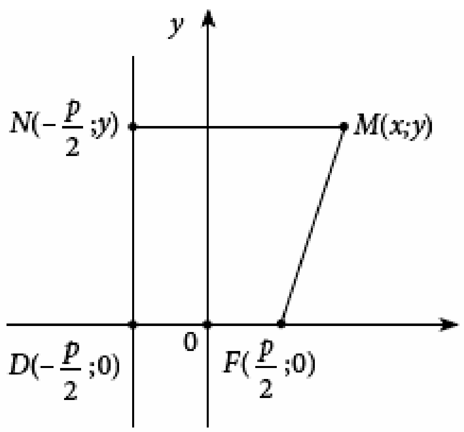


Рис. 3.5. Директриса и фокус параболы

Пусть *M(x; y)* – произвольная точка параболы. Опустим из точки *M* перпендикуляр на директрису, и пусть *N* - основание этого перпендикуляра. Длина отрезка *MN* равна расстоянию от точки *M* до директрисы.

Расстояние от точки M до фокуса равно длине отрезка MF. Тогда координаты точек параболы удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат. В итоге получим:

$$y^2 = 2px. \qquad (3.7)$$

Уравнение (3.7) называется каноническим уравнением параболы.

Исследуем форму параболы. Из уравнения (3.7) видно, что парабола целиком лежит в области $x \geq 0$ и симметрична относительно оси Ox. Действительно, если точка $M_0(x_0;\ y_0)$ принадлежит параболе, то ей принадлежит и точка $M_1(x_0;\ -y_0)$. Ось симметрии параболы называют осью параболы. Парабола (3.7) пересекает ось симметрии Ox в точке $O(0;\ 0)$, которая называется вершиной параболы.

Контрольные вопросы по теме: «Аналитическая геометрия на плоскости. Кривые второго порядка»

1. Дайте определение геометрическим местам точек, представляющим собой окружность, эллипс, гиперболу и параболу.
2. Напишите канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы.
3. Что называется эксцентриситетом эллипса и гиперболы. Какие значения он принимает для эллипса, для гиперболы.
4. Есть ли асимптоты у гиперболы? Если есть, то какими уравнениями они определяются?
5. Если парабола задана уравнением $y^2 = 2px$, $p > 0$, то каково уравнение ее директрисы?
6. Как доказать, что уравнение второго порядка $4x^2 + 3y^2 - 8x +$

$12y - 32 = 0$ определяет эллипс?

7. Уравнение эллипса $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{25}=1$. Каковы длины его полуосей?

8. Что называется основным прямоугольником гиперболы? Как он соотносится с асимптотами?

9. Уравнение линии второго порядка имеет вид: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

а) определить вид линии;

б) определить длины полуосей.

10. Парабола задана уравнением $y^2 = 4x$. найти расстояние от ее вершины до начала системы координат.

ГЛАВА 4. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

§1. Уравнение плоскости

Зададим вектор $\overline{m} \neq 0$, перпендикулярный плоскости, который будем называть ***нормалью плоскости P***. Плоскость *P* в пространстве определена однозначно, если известна некоторая ее нормаль *m* и какая-нибудь точка $M_0 \in P$.

Фиксируем в пространстве декартову систему координат, и пусть $\{A, B, C\}$ – компоненты нормали *m*, а (x_0, y_0, z_0) – координаты точки M_0 плоскости *P* в этой системе координат. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка пространства. Для того чтобы $M_0 \in P$, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\overline{M_0M}$ был перпендикулярен вектору $\overline{m}$, т. е. $(\overline{M_0M}, \overline{m}) = 0$.

Так как $\overline{M_0M}$ имеет компоненты $\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, то

$$(\overline{M_0M}, \overline{m}) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$$

и, следовательно, координаты произвольной точки *M* плоскости *P* удовлетворяют уравнению

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{4.1}$$

Если рассмотреть совокупность всех плоскостей, проходящих через фиксированную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение любой плоскости из этой совокупности будет иметь вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Указанная совокупность плоскостей обычно называется связкой плоскостей, проходящей через данную точку. Если P_1 и P_2 – различные плоскости этой связки, заданные соответственно уравнениями

$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0,$$
$$A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0.$$

то нормали к P_1 и P_2: $\overline{m}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\overline{m}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ неколлинеарны и потому $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$.

Для плоскостей, не проходящих через начало координат, часто используют так называемое ***нормальное уравнение плоскости***. Для этого прежде всего определяют внешнюю единичную нормаль $\overline{n}$. Именно, нормаль $\overline{n}$ к плоскости P называется ***внешней единичной нормалью***, если $|\overline{n}| = 1$, начало $\overline{n}$ – произвольная точка P, а конец $\overline{n}$ и начало координат лежат по разные стороны от плоскости P. Если $\overline{n}$ образует углы α, β, γ с осями x, y, z соответственно, то $\overline{n} = (\cos\alpha)\overline{i} + (\cos\beta)\overline{j} + (\cos\gamma)\overline{k}$. Поэтому уравнение плоскости P имеет вид:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + D = 0. \qquad (4.2)$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – проекция начала координат на плоскость P. Тогда $p = |\overline{OM_0}| > 0$ – расстояние от начала координат до плоскости P. В силу выбора внешней единичной нормали $\overline{n}$ векторы $\overline{n}$ и $\overline{OM_0}$ коллинеарны и одинаково направлены. Поэтому

$$(\overline{n}, \overline{OM_0}) = |\overline{n}| \cdot |\overline{OM_0}|\cos 0 = |\overline{OM_0}| = p. \qquad (4.3)$$

С другой стороны,

$$(\overline{n}, \overline{OM_0}) = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma. \qquad (4.4)$$

Из (4.3) и (4.4) следует, что

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma = p. \qquad (4.5)$$

Так как $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$, то из (4.2) имеем:

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma + D = 0.$$

(4.6)

Из (4.5) и (4.6) получаем, что $D = -p$, и, следовательно, плоскость P имеет уравнение

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) называется ***нормальным уравнением плоскости***.

Точно так же, как в случае прямой, переход от общего уравнения плоскости к нормальному осуществляется умножением обеих частей уравнения на нормирующий множитель μ. В случае плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, он определяется по формуле

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad (4.8)$$

в которой знак выбирается противоположным знаку D, если $D \neq 0$. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

§2. Прямая в пространственной системе координат

Пусть l – произвольная прямая. Её положение в пространстве вполне определяется некоторой точкой $M_0 \in l$ и вектором $\bar{s}$, расположенным на l.

Фиксируем в пространстве декартову систему координат с началом в точке O. Обозначим через $\bar{r}_0$ и $\bar{r}$ радиус-векторы точек M_0 и M (M – произвольная точка прямой l). Тогда вектор $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$ коллинеарен вектору $\bar{s}$. Поэтому $\bar{r} - \bar{r}_0 = t\bar{s}$, где t – некоторое вещественное число.

Когда t пробегает всю совокупность вещественных чисел, точка M - конец вектора $\overline{M_0M}$ – пробегает всю прямую l. Следовательно, для текущего радиус-вектора $\bar{r}$ точек прямой l имеем уравнение

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{s},$$

которое обычно называют векторным уравнением прямой.

Получим параметрические и канонические уравнения прямой. Пусть прямая l задана векторным уравнением

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{s}, \qquad (4.9)$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – конец радиус-вектора $\bar{r}$, а $M(x, y, z)$ – конец текущего радиус-вектора $\bar{r}$ прямой l (см. рис. 4.1). Обозначим через m, n, p проекции вектора $\bar{s}$ на координатные оси x, y, z. Тогда

$$\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k},$$

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

$$\bar{s} = m\bar{i} + n\bar{j} + p\bar{k}.$$

Поэтому (4.9) можно записать в виде:

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x_0 + mt)\bar{i} + (y_0 + mt)\bar{j} + (z_0 + pt)\bar{k} /$$

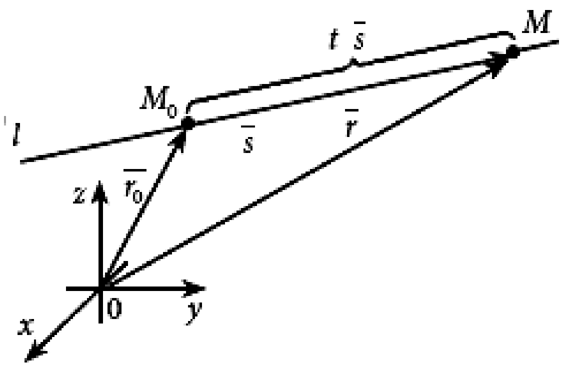


Рис. 4.1. Параметрическое уравнение прямой

Отсюда получаем три уравнения для координат текущей точки прямой l;

$$x = x_0 + mt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + pt. \quad (4.10)$$

Уравнения (4.10) называются ***параметрическими уравнениями прямой l***. Положение точки M на прямой l характеризуется параметром $t \in (-\infty, +\infty)$. Поэтому и уравнения (4.10) называются параметрическими уравнениями прямой.

Часто бывает полезным задавать прямую системой уравнений, которая не содержит параметра. Исключение параметра из системы (4.10) проще всего провести следующим образом: находим t из каждого уравнения системы (4.10);

$$t = \frac{x - x_0}{m},\ t = \frac{y - y_0}{n},\ t = \frac{z - z_0}{p}.$$

Отсюда получаем, что для любой точки $M(x, y, z) \in t$ справедливы соотношения

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (4.11)$$

Система уравнений (4.11) называется ***каноническими уравнениями прямой***. Геометрический смысл коэффициентов уравнений (4.11) таков: x_0, y_0, z_0 – координаты некоторой точки прямой; m, n, p – проекции на координатные оси вектора, лежащего прямой.

Отметим некоторые частные случаи.

1. Если прямая l перпендикулярна какой-нибудь координатной оси, то проекция на эту ось любого вектора, лежащего на l равна нулю. Например, если l перпендикулярна оси x, то $m = 0$. В этом случае уравнения прямой l запишутся:

$$\begin{cases} x - x_0, \\ \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Однако и в этом случае принято записывать уравнения прямой в канонической форме:

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

понимая под этой записью систему уравнений (4.12).

2. Аналогично, если прямая *l* перпендикулярна двум осям координат, например осям *x* и *y*, ее канонические уравнения записываются в виде:

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad (4.13)$$

где под (4.13) понимается система уравнений

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0 \end{cases},$$

которая определяет прямую, параллельную оси *z*.

Углом φ между прямыми в пространстве называется наименьший из двух смежных углов, образованных прямыми, проведенными через произвольную точку пространства параллельно данным прямым.

Угол φ между прямыми, очевидно, находится в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Угол φ между этими прямыми равен углу между векторами $\overline{s_1}=\{m_1,n_1,p_1\}$ и $\overline{s_2}=\{m_2, n_2, p_2\}$ или дополняет его до п. Поэтому

$$\cos\varphi=\frac{\left|(\overline{s_1},\overline{s_2})\right|}{\left|\overline{s_1}\right|\left|\overline{s_2}\right|}=\frac{\left|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\right|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Если прямые параллельны, то векторы $\overline{s_1}$ и $\overline{s_2}$ коллинеарны. Отсюда *условие параллельности* двух прямых имеет вид:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Далее, если две прямые перпендикулярны, то $\cos\varphi = 0$. Поэтому условие перпендикулярности двух прямых таково:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

§3. Особенности расположения прямой в пространстве

Всякую прямую, заданную каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

можно рассматривать как линию пересечения плоскостей

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}, \\ \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{p} \end{cases}.$$

С другой стороны, всякие две пересекающиеся плоскости P_1 и P_2, заданные уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \qquad (4.14)$$

определяют прямую – линию их пересечения. Поэтому представляет интерес, как от уравнений (4.14), задающих прямую, перейти к каноническим уравнениям этой прямой.

Поскольку необходимым и достаточным условием параллельности плоскостей являются соотношения

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

то система уравнений (4.14) определяет в пространстве прямую, если коэффициенты при соответствующих текущих координатах в этих уравнениях не пропорциональны.

Если l – прямая, задаваемая уравнениями (4.14), то любой вектор, лежащий на l, будет перпендикулярен нормали к P_1 – вектору $\overline{m}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и нормали к P_2 – вектору $\overline{m}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$. Поэтому вектор $\bar{s} = \overline{m}_1 \times \overline{m}_2$ лежит на прямой l. Отсюда следует, что канонические уравнения l имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \qquad (4.15)$$

Найдем теперь координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит прямая l. Так как коэффициенты в уравнениях (4.15) при текущих координатах не пропорциональны, то по крайней мере один из определителей

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Для определенности будем считать, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Запишем систему (4.15) в виде:

$$A_1x + B_1y = D_1 - C_1z,$$
$$A_2x + B_2y = D_2 - C_2z. \qquad (4.16)$$

Полагая здесь z равным произвольному числу z_0 (например, нулю), мы из системы (4.16) найдем числа x_0 и y_0. Тройка чисел (x_0, y_0, z_0) определяет точку M_0, лежащую на l. Подставляя x_0, y_0, z_0 в (4.15), получаем канонические уравнения прямой l.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Этот угол заключается в пределах от 0 до

$\frac{\pi}{2}$. Пусть нам даны прямая

$$l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

и плоскость

$$P: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Пусть φ – угол между прямой *l* и плоскостью *P*, тогда угол между нормалью $\overline{m}$ = {A, B, C} к плоскости *P* и вектором $\overline{s}$ = {*m, n, p*}, лежащим на *l*, равен $\frac{\pi}{2} \pm \varphi$ (см. рис. 4.2). Так как *sin*φ ≥ 0, то

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right)\right| = \frac{|(\overline{m}, \overline{s})|}{|\overline{m}||\overline{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \qquad (4.17)$$

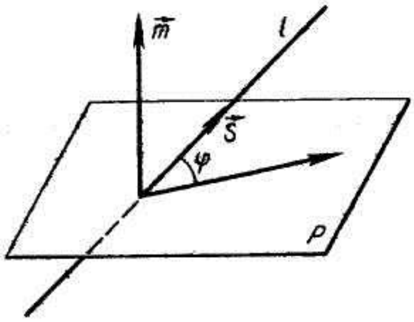


Рис. 4.2. Угол между прямой и плоскостью

Если прямая *l* параллельна плоскости *P*, то *sin*φ = 0 и, следовательно,

$$Am + Bn + Cp = 0. \qquad (4.18)$$

Следовательно, (4.16) есть ***условие параллельности прямой и плоскости***. Если прямая *l* и плоскость *P* перпендикулярны, то векторы $\overline{m}$ и $\overline{s}$ коллинеарны. Очевидно, справедливо и обратное. Поэтому ***условие перпендикулярности прямой l и плоскости P*** имеет вид:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (4.19)$$

Контрольные вопросы по теме: «Аналитическая геометрия в пространстве. Плоскость и прямая в пространстве»

1. Как записать уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно направляющему вектору $\bar{n} = \{A, B, C\}$?
2. В каких случаях общее уравнение плоскости задает плоскость:

а) проходящую через начало координат;

б) параллельную оси z;

в) проходящую через ось z?

3. Как записать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1, M_2, M_3?
4. Каким образом в пространстве задается прямая?
5. Как найти угол между плоскостями в пространстве?
6. Каковы условия параллельности и перпендикулярности плоскостей в пространстве?
7. Каково каноническое уравнение прямой в пространстве? Раскрыть смысл всех параметров.
8. Каков вид уравнения прямой, проходящей через две заданные точки?
9. Каковы условия перпендикулярности и параллельности прямых?
10. Каковы условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве?

Часть 3. Векторные пространства.

Глава 1. Определение и свойства векторных пространств.

§1. Определение векторных пространств.

Определение 1.4. Говорят, что на множестве X задана бинарная операция, если каждой упорядоченной паре элементов x_1 и x_2 из X, поставлен в соответствие однозначно определенный элемент x_3 из этого же множества.

Формально, бинарная операция f есть отображение из декартова произведения $X \times X$ в X, т.е. $f: X \times X \to X$. Иногда, когда используют запись в стиле "арифметических действий", бинарную операцию обозначают символами «$\circ$», «+», «*» и т.д.: $a \circ b = f(a,b)$. Например, пусть $X = R$ – множество вещественных чисел, f – бинарная операция вычитания на этом множестве, тогда $f(a,b) = a - b$.

Определение 1.5. Будем говорить, что на множестве X задана операция умножения на числа из поля F, если для любого числа $\lambda \in F$ и любого элемента $x \in X$ по определённому правилу поставлен в соответствие некоторый элемент множества X. Этот элемент обозначают $\lambda \cdot x \in X$.

Формально, операция умножения на числа из поля F есть отображение $F \times X \to X$.

Пример такой операции: операция умножения матриц на числа.

Определение 1.6. Непустое множество L элементов произвольной природы называется *векторным пространством над полем* F, если на этом множестве L задана бинарная операция «+», называемая сложением, и задана операция умножения элементов L на числа из поля F (пока под полем F можно понимать множество вещественных чисел), и выполнены следующие условия:

(v1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$, для $\forall\overline{a},\overline{b}\in L$

(v2) $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$ (ассоциативность)

(v3) $\overline{a}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{a}=\overline{a}$ (наличие нейтрального элемента $\overline{0}$)

(v4) для любого элемента $\overline{a}$ существует противоположный элемент $(-\overline{a})$, такой, что $\overline{a}+(-\overline{a})=(-\overline{a})+\overline{a}=\overline{0}$. (существование обратного элемента).

(v5) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$

(v6) $\lambda(\mu\overline{a})=(\lambda\mu)\overline{a}$

(v7) $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$

(v8) $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$

Позже мы приведём различные примеры векторных пространств, элементами которых могут быть объекты самой разной природы: матрицы, многочлены, функции, операторы и т.д. При этом, однако, элементы абстрактного векторного пространства часто называют векторами.

Геометрические пространства векторов V^k, $k=1,2,3$ над полем вещественных чисел являются частными случаями абстрактного векторного пространства.

§2. Простейшие свойства векторного пространства, вытекающие из определения.

1) Нулевой элемент $\overline{0}$ единственен.

Доказательство проведём от противного. Предположим, что имеются два различных нулевых элемента $\overline{0}_1$ и $\overline{0}_2$. Тогда $\overline{0}_1=\overline{0}_1+\overline{0}_2=\overline{0}_2$.

2) Противоположный элемент единственен.

Доказательство. Предположим, что к элементу $\overline{a}$ имеются два различных противоположных. Пусть это будут элементы $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Но, тогда, используя аксиому ассоциативности, получаем

$$(\overline{b}+\overline{a})+\overline{c}=\overline{b}+(\overline{a}+\overline{c})$$

$$\overline{0}+\overline{c}=\overline{b}+\overline{0}$$

$$\overline{c}=\overline{b}$$

3) $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$

Доказательство.

$0\cdot\overline{a}=(0+0)\cdot\overline{a}=0\cdot\overline{a}+0\cdot\overline{a}$. Прибавим к обеим частям этого равенства элемент $(-0\cdot\overline{a})$:

$0\cdot\overline{a}+(-0\cdot\overline{a})=(0\cdot\overline{a}+0\cdot\overline{a})+(-0\cdot\overline{a})$, отсюда получаем

$\overline{0}=0\cdot\overline{a}+(0\cdot\overline{a}+(-0\cdot\overline{a}))=0\cdot\overline{a}+\overline{0}=0\cdot\overline{a}$.

4) $\alpha\cdot\overline{0}=\overline{0}$.

Доказательство предоставляем читателю.

5) Если $\alpha\cdot\overline{a}=\overline{0}$, то $\alpha=0$ или $\overline{a}=\overline{0}$.

Доказательство. Предполагаем противное: $\alpha\neq 0$ и $\overline{a}\neq\overline{0}$, а $\alpha\cdot\overline{a}=\overline{0}$. Тогда существует число α^{-1}, умножив на которое получим $\alpha^{-1}\cdot(\alpha\cdot\overline{a})=\alpha^{-1}\cdot\overline{0}$, но тогда, в силу аксиомы (v6) и уже доказанного свойства 4) получим $(\alpha^{-1}\cdot\alpha)\cdot\overline{a}=\overline{0}$, $\Rightarrow 1\cdot\overline{a}=\overline{0}$, $\Rightarrow$ $\overline{a}=\overline{0}$ противоречие.

6) $(-1)\cdot\overline{a}=(-\overline{a})$

Доказательство. $\overline{a}+(-1)\cdot\overline{a}=1\cdot\overline{a}+(-1)\cdot\overline{a}=(1+(-1))\cdot\overline{a}=0\cdot\overline{a}=\overline{0}$.

Поэтому $(-1)\cdot\overline{a}$ является противоположным к элементу $\overline{a}$, и в силу единственности противоположного элемента совпадает с $(-\overline{a})$.

7) $(-\alpha)\cdot\overline{a}=-(\alpha\cdot\overline{a})$

8) $\alpha\cdot(-\overline{a})=-(\alpha\cdot\overline{a})$

Свойства 7) и 8) непосредственно вытекают из свойства 6) и аксиомы (v6).

9) Обобщенный закон ассоциативности.

Из аксиомы (v2) по индукции можно получить, что при сложении элементов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, результат не зависит от способа расстановки скобок в сумме. Поэтому при записи таких сумм скобки просто опускают:

$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n$.

Иногда удобно использовать ещё одну операцию, не имеющую самостоятельного значения, а удобную для вычислений.

Определение 1.7. Разностью элементов по определению называют элемент $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$.

§3. Примеры векторных пространств.

Пример 1.1. Пусть $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ упорядоченный набор из n вещественных чисел. Такой набор называют *арифметическим вектором*.

Рассмотрим множество R^n всех таких наборов при фиксированном n.

Введём на этом множестве операцию сложения наборов:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

и операцию умножения набора на вещественное число λ по правилу:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что множество арифметических векторов R^n с введенными операциями удовлетворяет аксиомам (v1)–(v8) , то есть является векторным пространством. Его называют *пространством арифметических векторов*.

Пример 1.2. Пусть P – произвольное поле (читатель знакомый с комплексными числами или простыми полями Галуа может считать, что это и есть примеры полей, отличных от поля вещественных чисел, и это произвольное поле может быть одним из этих полей, а читатель незнакомый с такими примерами может считать, что это произвольное поле может быть просто полем рациональных чисел, то есть множеством дробей). Рассмотрим множество P^n упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ элементов поля P. Вводя также как и в предыдущем примере операции сложения на P^n и умножения на элементы поля P, непосредственной проверкой убеждаемся, что P^n является векторным пространством над полем P.

Пример 1.3. Пусть $M_{m\times n}$ множество матриц размера $m \times n$ с вещественными элементами и с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число. Непосредственно можно убедиться, что все аксиомы выполняются, следовательно, это множество с рассмотренными операциями является векторным пространством. Заметим, что если записывать матрицы не обычным способом, а в виде одной строки, располагая строки матрицы последовательно одну за другой, то запись матрицы будет представлять собой арифметический вектор с $m \cdot n$ координатами, и мы получим пространство R^{mn} из предыдущего примера. Тот факт, что эти пространства устроены одинаково, отражается в понятии изоморфизма, которое будет рассмотрено чуть позже.

Пример 1.4. Пространство многочленов степени не выше n.

Зафиксируем некоторое целое число $n \geq 0$. И рассмотрим множество $R[x]_n$ многочленов $a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ от переменной x, степени k не выше n, $(k \leq n)$ с вещественными коэффициентами.

Введём на этом множестве операцию сложения двух многочленов и операцию умножения многочлена на число по обычным правилам алгебры. Заметим, что операция сложения на этом множестве не выводит за пределы этого множества, т.к. при сложении двух многочленов степень многочлена, полученного в результате, не превосходит наибольшей из степеней исходных многочленов, и полученный многочлен принадлежит $R[x]_n$. То есть сложение – это бинарная операция, определённая на $R[x]_n$. Заметим, что и операция умножения на числа тоже не выводит за $R[x]_n$. В качестве нейтрального элемента $\overline{0}$ выступает многочлен, все коэффициенты которого равны нулю $0 \cdot x^n + \ldots + 0 \cdot x + 0$, и который в силу этого просто совпадает с числом 0. А в качестве противоположного к многочлену $p(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ выступает многочлен $(-p(x)) = -a_k x^k - \ldots - a_1 x - a_0$. Множество $R[x]_n$ с указанными операциями – векторное пространство, в чём можно убедиться непосредственной проверкой аксиом (v1)–(v8).

Заметим, что множество многочленов вида $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ фиксированной степени $n \geq 1$ относительно указанных операций сложения и умножения на число не образует векторное пространство, т.к. эти операции могут выводить за рассматриваемое множество. Так, при сложении двух многочленов степени равной n может получиться многочлен меньшей степени, а при умножении на число 0 получается многочлен нулевой степени.

Проверка всех восьми аксиом векторного пространства – процесс достаточно трудоёмкий и рутинный, поэтому мы сейчас предложим конструкцию общего характера, включающую в себя достаточно широкий класс примеров.

Пример 1.5. Пусть X – произвольное множество, а V – векторное пространство. Рассмотрим множество всех отображений $M(X;V)=\{f:X\to V\}$ из X в V с операциями сложения и умножения на число, определенными поточечно, то есть по следующим правилам:

$$(f+g)(x)\equiv f(x)+g(x),\qquad f,g\in M(X;V)$$

$$(\lambda\cdot f)(x)\equiv\lambda\cdot f(x),\qquad \lambda\ -\ \text{число}.$$

Заметим, что при каждом фиксированном значении аргумента x мы получаем вектор v, принадлежащий векторному пространству V, который отображение f сопоставляет элементу x. То есть $x\overset{f}{\mapsto}v$. Так как все такие векторы v – это элементы векторного пространства, то для них выполнены все аксиомы. А поскольку операции над отображениями определены поточечно и сводятся к операциям с векторами, то аксиомы будут справедливы и для отображений. Проверим, к примеру, аксиому (v1):

$$(f+g)(x)\equiv f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)\ \Rightarrow\ f+g=g+f$$

Заметим, что пространство R^n получается, если положить в качестве $V=R$, а в качестве X отрезок натурального ряда $X=\{1,2,\ldots,n\}$.

§4. Линейная независимость. Базис.

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ – числа, $\bar a_1,\bar a_2,\ldots,\bar a_k$ – векторы. Так как векторы можно умножать на числа и складывать, а в силу ассоциативности сложения, скобки можно не расставлять, то по этим векторам и числам строится вектор

$\bar v=\lambda_1\bar a_1+\lambda_2\bar a_2+\ldots+\lambda_k\bar a_k$, который называется *линейной комбинацией* векторов $\bar a_1,\bar a_2,\ldots,\bar a_k$, а числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ называются коэффициентами этой линейной комбинации. Про вектор $\bar{v}$ говорят также, что он раскладывается по векторам $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ называют также коэффициентами разложения.

Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ называется *линейно независимой* (л.н.з.), если равенство $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_k\bar{a}_k = \bar{0}$ возможно лишь в случае, когда все коэффициенты линейной комбинации равны нулю $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$. В противном случае система векторов называется *линейно зависимой* (л.з.).

Свойства линейной зависимости и независимости.

1. Система, состоящая из одного нулевого вектора $\bar{0}$ линейно зависима.
2. Система, состоящая из одного ненулевого вектора $\bar{a}_1 \neq \bar{0}$ линейно независима.
3. Система, содержащая нулевой вектор линейно зависима.
4. Если система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_k$ линейно зависима, и $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m$ – произвольные векторы, то система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m$ – линейно зависима.
5. Если система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_k$ линейно независима, то линейно независима любая ее подсистема $\bar{a}_{i_1}, \bar{a}_{i_2}, \ldots, \bar{a}_{i_p}$, ($p \le k$).

Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называется *максимальной линейно независимой*, если:

1) эта система линейно независима.
2) при добавлении *любого* вектора $\bar{b}$ к исходной системе система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, \bar{b}$ становится линейно зависимой.

Определение 1.8. Максимальная л.н.з. система векторов векторного пространства называется *базисом.*

Двойственным (ниже поясним, что это значит) к понятию линейной независимости является понятие полноты системы векторов.

Определение 1.9. Система векторов $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_k$ называется *полной (порождающей)* в векторном пространстве V, если любой вектор $\bar{x}$ этого пространства представим в виде линейной комбинации векторов $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_k$: $\bar{x}=\mu_1\bar{b}_1+\ldots+\mu_k\bar{b}_k$.

Отметим, что данное определение не подразумевает единственности такого представления.

Сформулируем простейшие свойства полных систем, доказательство которых оставляем читателю.

1. Если некоторая подсистема системы векторов является полной, то и вся система векторов является полной.
2. Если система векторов $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_k$ является полной, и вектор $\bar{b}_i$ является линейной комбинацией остальных, то система векторов $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{i-1},\bar{b}_{i+1},\ldots,\bar{b}_k$ тоже будет полной.

Перечисленные выше свойства означают, что если к полной системе добавлять новые векторы, то полнота сохраняется, а если из линейно независимой системы исключать векторы, то линейная независимость тоже сохраняется, и в этом смысле понятия линейной независимости и полноты являются двойственными.

Предложение 1.1. Максимальная линейно независимая система является полной.

Доказательство. Действительно, если к максимальной л.н.з. системе пространства добавить произвольный вектор, то система перестанет быть линейно независимой. Это означает, что найдется такая равная $\overline{0}$ линейная комбинация этих векторов, что не все коэффициенты этой комбинации равны 0 одновременно. Более того, можно утверждать, что заведомо отличен от 0 коэффициент при добавленном векторе (поскольку в противном случае мы получили бы нетривиальную, равную 0 линейную комбинацию линейно независимых векторов, что невозможно). Перенеся добавленный вектор в другую часть равенства, и разделив на коэффициент, получим, что он представим в линейной комбинации векторов максимальной линейно независимой системы, что и означает её полноту. Предложение доказано.

Таким образом, базис представляет собой линейно независимую, полную систему векторов в векторном пространстве.

Лемма 1.1. Пусть каждый вектор семейства $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m$ линейно выражается через векторы $\overline{b}_1,\ldots,\overline{b}_n$. Тогда, если $m>n$, то семейство $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m$ линейно зависимо.

Доказательство. Схема доказательства: из теоремы Кронеккера-Капелли, в частности следует, что система линейных однородных уравнений, число неизвестных которой больше числа уравнений, обязательно имеет ненулевое решение, поскольку в этом случае ранг расширенной матричной системы заведомо меньше числа неизвестных. Отсюда и вытекает доказываемое утверждение. Покажем это подробно.

Действительно, по условию существуют такие числа k_{ij}, ($i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$) что

$$\bar{a}_1 = k_{11}\bar{b}_1 + k_{12}\bar{b}_2 + \dots + k_{1n}\bar{b}_n,$$
$$\bar{a}_2 = k_{21}\bar{b}_1 + k_{22}\bar{b}_2 + \dots + k_{2n}\bar{b}_n,$$
(1.1)
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\bar{a}_m = k_{m1}\bar{b}_1 + k_{m2}\bar{b}_2 + \dots + k_{mn}\bar{b}_n$$

Покажем теперь, что существует нетривиальная, равная $\bar{0}$ линейная комбинация векторов $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_m$ (это и будет означать, что эти векторы линейно зависимы). Рассмотрим линейную комбинацию этих векторов с коэффициентами $\lambda_1,\dots,\lambda_m$:

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 \dots + \lambda_m\bar{a}_m$$

подставим сюда выражения (1.1). Получим

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 \dots + \lambda_m\bar{a}_m =$$
$$= \lambda_1\left(k_{11}\bar{b}_1 + k_{12}\bar{b}_2 + \dots + k_{1n}\bar{b}_n\right) + \lambda_2\left(k_{21}\bar{b}_1 + k_{22}\bar{b}_2 + \dots + k_{2n}\bar{b}_n\right) + \dots +$$
$$+ \lambda_m\left(k_{m1}\bar{b}_1 + k_{m2}\bar{b}_2 + \dots + k_{mn}\bar{b}_n\right).$$

Перегруппировав слагаемые, получим, что

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 \dots + \lambda_m\bar{a}_m = (k_{11}\lambda_1 + \dots + k_{m1}\lambda_m)\bar{b}_1 + \dots + (k_{1n}\lambda_1 + \dots + k_{mn}\lambda_m)\bar{b}_n.$$

Приравняем полученную линейную комбинацию к $\bar{0}$. Ясно, что эта линейная комбинация равна $\bar{0}$ (нулевому вектору), если каждый из коэффициентов перед векторами $\bar{b}_j$ равен 0. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} k_{11}\lambda_1 + \dots + k_{m1}\lambda_m = 0 \\ k_{12}\lambda_1 + \dots + k_{m2}\lambda_m = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ k_{1n}\lambda_1 + \dots + k_{mn}\lambda_m = 0 \end{cases} \qquad (1.2)$$

Это система уравнений относительно неизвестных чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, содержащая n уравнений с m неизвестными, причем по условию $n < m$. Поэтому, в силу теоремы Кронеккера-Капелли система (1.2) имеет ненулевое решение, то есть такое решение, в котором не все числа $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ одновременно равны 0. И, следовательно, семейство векторов $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m$ линейно зависимо. Лемма доказана.

Пусть $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$ – базис в векторном пространстве, а $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m$ – произвольное семейство векторов в этом пространстве.

Лемма 1.2. Если семейство векторов $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m$ линейно независимо, и $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$ – базис, то $m \le n$.

Доказательство. Так как базис $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$ является полным семейством, то векторы $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m$ линейно через него выражаются. Следовательно, по лемме 1.1, если $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m$ – линейно независимы, то $m \le n$, и лемма доказана.

Теорема 1.1. Все базисы пространства состоят из одного и того же числа векторов.

Доказательство. Если л.н.з. система векторов $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m$ является базисом (т.е. вдобавок и полным семейством), то в условии леммы 1.2 можно поменять местами системы векторов $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$ и $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m$, и тогда получим, что $n \le m$. Но с другой стороны $m \le n$ в силу той же леммы 1.2. Из этих двух неравенств вытекает, что $m = n$. Теорема доказана.

Определение 1.10. Число векторов базиса называется *размерностью* векторного пространства V и обозначается через $\dim V$.

В силу доказанной выше теоремы это число определено корректно, то есть не зависит от выбора конкретного базиса.

Пусть $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$ – произвольный базис линейного пространства V. Тогда для любого вектора $\bar{a}\in V$ существуют такие однозначно определенные числа $a^1,\ldots,a^n$ (индекс вверху означает номер), что вектор $\bar{a}=a^1\bar{e}_1+\ldots+a^n\bar{e}_n$. Отметим, что существование чисел $a^1,\ldots,a^n$ следует из полноты базиса, а их единственность вытекает из линейной независимости векторов базиса, о чём и сообщает следующая

Теорема 1.2. (о разложении по базису). Если $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n$ – базис векторного пространства V, то всякий вектор $\bar{b}$ этого пространства раскладывается по базисным векторам $\bar{b}=b^1\bar{e}_1+b^2\bar{e}_2+\ldots+b^n\bar{e}_n$, причём это представление единственно.

Доказательство. Так как система векторов $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n$ является максимальной линейно независимой системой векторов, то после добавления к ней произвольного вектора $\bar{b}$ мы получаем уже линейно зависимую систему векторов $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n,\bar{b}$. Другими словами, найдётся такая равная нулю линейная комбинация этих векторов $\mu\bar{b}+b^1\bar{e}_1+b^2\bar{e}_2+\ldots+b^n\bar{e}_n=\bar{0}$, в которой хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. Нетрудно понять, что коэффициент μ при векторе $\bar{b}$ не может равняться нулю, так как тогда получается равная нулю линейная комбинация линейно независимых векторов $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n$, которая может равняться только в случае равенства нулю всех коэффициентов. Но тогда получается, что все коэффициенты линейной комбинации $\mu\bar{b}+b^1\bar{e}_1+b^2\bar{e}_2+\ldots+b^n\bar{e}_n=\bar{0}$ равны нулю, что противоречит предположению о том, что у этой линейной комбинации есть хотя бы один отличный от нуля коэффициент. Таким образом, мы показали, что коэффициент $\mu\neq 0$. Отсюда следует, что $\bar{b}=-\dfrac{1}{\mu}(b^1\bar{e}_1+b^2\bar{e}_2+\ldots+b^n\bar{e}_n)$. То есть вектор $\bar{b}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$.

Покажем теперь, что это представление единственно. Действительно, пусть имеется два представления для вектора $\bar{b}$: $\bar{b} = b^1\bar{e}_1 + b^2\bar{e}_2 + \ldots + b^n\bar{e}_n = \nu^1\bar{e}_1 + \nu^2\bar{e}_2 + \ldots + \nu^n\bar{e}_n$. Вычитая из первого представления второе представление, получаем что $(b^1 - \nu^1)\bar{e}_1 + (b^2 - \nu^2)\bar{e}_2 + \ldots + (b^n - \nu^n)\bar{e}_n = \bar{0}$. Мы получили равную нулю линейную комбинацию линейно независимых векторов. Из определения линейной независимости следует, что все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю. Последнее означает, что $b^1 = \nu^1$, $b^2 = \nu^2$, $\ldots$ $b^n = \nu^n$. Другими словами, что представление вектора $\bar{b}$ в виде линейной комбинации векторов базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ единственно. Теорема доказана.

Определение 1.11. Числа $a^1, \ldots, a^n$ называются *координатами* вектора $\bar{a} = a^1\bar{e}_1 + \ldots + a^n\bar{e}_n$ в базисе $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$.

В обозначении координат вектора мы используем верхний индекс для обозначения номера координаты.

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – два вектора, а $a^1, \ldots, a^n$ и $b^1, \ldots, b^n$ их координаты в базисе $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$. Тогда,

$$\bar{a} = a^1\bar{e}_1 + \ldots + a^n\bar{e}_n$$

$$\bar{b} = b^1\bar{e}_1 + \ldots + b^n\bar{e}_n$$

и поэтому

$$\bar{a} + \bar{b} = (a^1\bar{e}_1 + \ldots + a^n\bar{e}_n) + (b^1\bar{e}_1 + \ldots + b^n\bar{e}_n) =$$

$$(a^1 + b^1)\bar{e}_1 + \ldots + (a^n + b^n)\bar{e}_n. \qquad (1.3)$$

Аналогично,

$$\lambda\bar{a} = \lambda(a^1\bar{e}_1 + \ldots + a^n\bar{e}_n) = (\lambda a^1)\bar{e}_1 + \ldots + (\lambda a^n)\bar{e}_n \qquad (1.4)$$

Таким образом, при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число, его координаты умножаются на то же число.

Ранее мы ввели векторное пространство арифметических векторов R^n, состоящее из упорядоченных наборов чисел $(a^1,\ldots,a^n)$ над которыми определены операции покомпонентного сложения и умножения на число.

Пусть V – пространство, а $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$ – базис в пространстве V, который для краткости будем обозначать одной буквой $e = (\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n)$.

Рассмотрим отображение φ_e, сопоставляющие вектору $\bar{a} = a^1\bar{e}_1 + \ldots + a^n\bar{e}_n$ его координаты $(a^1,\ldots,a^n)$.

Иногда, для краткости, вместо обозначения $\varphi_e(\bar{a})$ используют обозначение $(\bar{a})_e$.

В силу отмеченных выше свойств (1.3), (1.4):

$$\varphi_e(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi_e(\bar{a}) + \varphi_e(\bar{b}) \qquad (1.5)$$

и

$$\varphi_e(\lambda\bar{a}) = \lambda\varphi_e(\bar{a}) \qquad (1.6)$$

Кроме того, отображение φ_e переводит разные векторы в разные. Действительно, пусть $\bar{a} \neq \bar{b}$. Предположим, что $\varphi_e(\bar{a}) = \varphi_e(\bar{b})$, тогда $(a^1,\ldots,a^n)$ = $(b^1,\ldots,b^n)$ и $\bar{a} = a^1\bar{e}_1 + \ldots + a^n\bar{e}_n = \bar{b}$. Противоречие. Т.е. отображение φ_e – инъективно.

Далее, отображение φ_e сюръективно, т.к. для любого набора чисел $(a^1,\ldots,a^n)$ найдется вектор $\bar{a}$, такой, что $\bar{a} = a^1\bar{e}_1 + \ldots + a^n\bar{e}_n$. Т. к. отображение φ_e инъективно и сюръективно, то оно является биективным (взаимно-однозначным) отображением.

Биективное отображение векторного пространства V в векторное пространство U, сохраняющие операции сложения и умножения на число, называется *изоморфизмом*. Определенное выше отображение называется *"координатным" изоморфизмом*. Пространства V и U называются изоморфными, если между ними существует изоморфизм. На самом деле мы доказали следующую теорему:

Теорема 1.3. Всякое пространство V размерности n изоморфно R^n.

Следует отметить, что в случае пространств геометрических векторов V^n размерность пространства V^n ($n=1,2,3$) равна n. Это мы сейчас докажем. Итак,

Определение 1.12. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $\in V^n$, называются коллинеарными, если будучи приложенными к одной точке они лежат на одной прямой. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение 1.13. Три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \tilde{n} \in V^n$, называются компланарными, если будучи приложенными к одной точке они лежат в одной плоскости.

Лемма 1.3. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

Доказательство. Необходимость ($\Rightarrow$). Дано: $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны. Покажем, что они линейно зависимы (л.з.).

1) Если $\bar{a}=\bar{0}$, тогда в силу свойства (3) линейной зависимости $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – л.з.

2) Если $\bar{a}\neq\bar{0}$, тогда можно представить вектор $\bar{b}=\lambda\bar{a}$. Для этого до-

статочно положить $|\lambda| = \dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$, и знак λ выбрать положительным, если векторы сонаправлены, и отрицательным, если они направлении противоположно. Следовательно $\bar{b}$ – линейная комбинация вектора $\bar{a}$, тогда $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – л.з.

Достаточность (⇐). Дано: $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы (л.з.). Покажем, что они коллинеарны. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы, следовательно один из векторов – линейная комбинация остальных, тогда $\bar{b} = \lambda\bar{a}$ следовательно, согласно определению произведения вектора на число, будучи приложены к одной точке, они лежат на одной прямой, т.е. коллинеарны. Лемма доказана.

Лемма 1.4. Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \tilde{n}$ компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

Доказательство. Необходимость (⇒). Дано: $\bar{a}, \bar{b}, \tilde{n}$ компланарны.

1) Если один из векторов – нулевой, пусть для определённости это вектор $\bar{a} = \bar{0}$. Но согласно свойству (3) линейной зависимости система, содержащая нулевой вектор линейно зависима, т.е. $\bar{a}, \bar{b}, \tilde{n}$ – л.з.

2) Пусть все векторы ненулевые. Т.к. $\bar{a}, \bar{b}, \tilde{n}$ лежат в одной плоскости, то один из них (скажем $\bar{a}$) выражается через остальные $\bar{a} = \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$.

Предложение 1.2. Если V^1 – множество векторов, параллельных некоторой фиксированной прямой, то $\dim V^1 = 1$.

Доказательство. Возьмём $\bar{a} \in V^1$, такой, что $\bar{a} \neq \bar{0}$, тогда, система состоящая только из одного этого вектора линейно независима. Если взять произвольный вектор $\bar{b} \in V^1$, то тогда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, поэтому они линейно зависимы, следовательно, система, состоящая из вектора $\bar{a}$, является максимальной линейно независимой системой, т.е. является полной (см. предложение 1.1) и, ввиду её линейной независимости, является базисом. Поэтому $\dim V^1 = 1$.

Предложение 1.3. Если V^2 – множество векторов, параллельных некоторой фиксированной плоскости, то $\dim V^2 = 2$.

Доказательство. Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарны, тогда они линейно независимы. Если взять ещё один вектор, то получим в силу леммы 4 линейно зависимую систему. Поэтому система, состоящая из линейно независимых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, является полной, то есть является базисом, поэтому $\dim V^2 = 2$.

Предложение 1.4. $\dim V^3 = 3$.

Доказательство. Три некомпланарных вектора в пространстве V^3 существуют. Следовательно, существуют три линейно независимых вектора $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$.

Пусть $\bar{a}_4 \in V^3$ любой вектор. Тогда его можно представить как линейную комбинацию векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$:

$$\bar{a}_4 = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3.$$

Следовательно, система, состоящая из линейно независимых векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ является полной, то есть является базисом. Получили, что $\dim V^3 = 3$.

С другой стороны мы сейчас увидим, что примеры векторных пространств не ограничиваются пространствами геометрических векторов.

Мы приведём примеры векторных пространств, базисы в которых состоят из большего, чем три числа векторов.

Пример 1.6. Рассмотрим введённое выше пространство $R[x]_n$ многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше n.

$$R[x]_n = \{p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mid \quad a_i \in R\}$$

Покажем, что одночлены (мономы)

$$1, x, x^2, \dots, x^n \tag{1.7}$$

образуют базис в этом пространстве. Прежде всего отметим, что всякий многочлен $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in R[x]_n$ представим в виде линейной комбинации одночленов (1.7):

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$$

Тогда система одночленов (1.7) является полной. Покажем их линейную независимость. Рассмотрим их линейную комбинацию, равную нулю:

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot x + \ldots + \lambda_n \cdot x^n = 0 \tag{1.8}$$

Правая часть этого равенства понимается как нулевой многочлен. А равенство понимается, как тождественное равенство двух многочленов. Выберем $n+1$ различных значений аргумента x: $x_0, x_1, \dots, x_n$, и подставим каждое из этих значений в (1.8). Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 x_0 + \dots + \lambda_n x_0^n = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_1^n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \lambda_0 + \lambda_1 x_n + \dots + \lambda_n x_n^n = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет только нулевое решение, если её определитель не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \neq 0$$

Но этот определитель действительно не равен нулю, так как $x_i \neq x_j$ в силу выбора значений аргумента. Получаем, что полная система одночленов (1.7) линейно независима, а следовательно, является базисом. Поэтому $\dim(R[x]_n) = n+1$.

Пример 1.7. Пусть P – произвольное поле. Обозначим через $P[x]_n$ пространство многочленов с коэффициентами из поля P степени не выше n. Его определение дословно повторяет данное выше определение векторного пространства $R[x]_n$ многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше n. Так же как и в предыдущем примере показывается, что мономы

$1, x, x^2, \ldots, x^n$ образуют базис в векторном пространстве $P[x]_n$. Следовательно, $\dim_P(P[x]_n) = n+1$.

Пример 1.8. Пусть P, как и в предыдущем примере, произвольное поле, P^n – векторное пространство арифметических векторов. Несложно проверить (оставляем эту проверку в качестве упражнения читателю), что наборы у которых на i-ом месте ($i = 1, \ldots, n$) стоит единица поля, а остальные элементы набора – нули, образуют базис в векторном пространстве P^n. Следовательно, $\dim_P(P^n) = n$.

Глава 2. Подпространства векторного пространства.

§1. Определение подпространства векторного пространства, операции над подпространствами.

Пусть P – поле (читатель может считать, что это либо поле вещественных чисел, либо поле комплексных чисел), V – векторное пространство над полем P.

Определение 2.1. Подмножество U векторного пространства V называется подпространством, если оно само является векторным пространством относительно операций определённых в V.

Теорема 2.1. Множество $X \subset V$ является подпространством пространства V в том и только в том случае если выполнены следующие условия:

1) $X \neq \varnothing$,
2) из того что $\bar{x}, \bar{y} \in X$, следует что $(\bar{x} + \bar{y}) \in X$,
3) из того что $\bar{x} \in X$, а число $\lambda \in P$, следует что $\lambda\bar{x} \in X$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть X – подпространство векторного пространства V. Значит, оно само является векторным пространством. Поэтому оно не пусто, и на нём определена бинарная операция сложения элементов $(\bar{x} + \bar{y}) \in X$ и операция умножения элемента $\bar{x} \in X$ на число λ из поля P: $\lambda\bar{x} \in X$. Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Прежде всего отметим, что множество X не пусто (по условию) и на нём определены две операции – сложение и умножение на числа из P (в силу свойств 2) и 3)). Выполнимость аксиом (v1) – (v8) векторного пространства вытекает из того, что множество X является подмножеством пространства V, для которого эти аксиомы справедливы. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пересечение двух подпространств является подпространством.

Доказательство. Пусть U и W подпространства векторного пространства V. Тогда элемент $\overline{0} \in U$ и $\overline{0} \in W$ поэтому $\overline{0} \in U \cap W$, следовательно: 1) $U \cap W$ не пусто.

2) Если элементы $\overline{x}, \overline{y} \in U \cap W$, то $\overline{x}, \overline{y} \in U$ и $\overline{x}, \overline{y} \in W$, тогда $\overline{x} + \overline{y} \in U$ и $\overline{x} + \overline{y} \in W$. Следовательно $\overline{x} + \overline{y} \in U \cap W$.

3) Если элемент $\overline{x} \in U \cap W$, а число $\lambda \in P$, то $\overline{x} \in U$ и $\overline{x} \in W$ следовательно $\lambda\overline{x} \in U$ и $\lambda\overline{x} \in W$. Стало быть $\lambda\overline{x} \in U \cap W$. Доказательство завершено.

Теорема 2.3. Пересечение любого числа подпространств является подпространством.

Доказательство для этого случая дословно повторяет доказательство предыдущей теоремы.

Пусть U и W подпространства векторного пространства V.

Определение 2.2. Множество $U + W = \{\overline{u} + \overline{w} \mid \ \overline{u} \in U, \overline{w} \in W\}$ называется суммой подпространств U и W.

Теорема 2.4. $U + W$ является подпространством.

Доказательство. В силу теоремы 2.1 достаточно проверить условия 1) – 3). Итак, 1) $U + W \neq \varnothing$, так как $\overline{0} + \overline{0} \in U + W$.

2) Пусть $\overline{z}_1, \overline{z}_2 \in U + W$ тогда $\overline{z}_1 = \overline{u}_1 + \overline{w}_1$, а $\overline{z}_2 = \overline{u}_2 + \overline{w}_2$, где $\overline{u}_1, \overline{u}_2 \in U$ и $\overline{w}_1, \overline{w}_2 \in W$. Найдём сумму $\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = (\overline{u}_1 + \overline{w}_1) + (\overline{u}_2 + \overline{w}_2) = (\overline{u}_1 + \overline{u}_2) + (\overline{w}_1 + \overline{w}_2)$ = $= \overline{u}_3 + \overline{w}_3$, где $\overline{u}_3 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \in U$, а $\overline{w}_3 = \overline{w}_1 + \overline{w}_2 \in W$.

Поэтому $\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = \overline{u}_3 + \overline{w}_3 \in U + W$.

3) Пусть $\overline{z} \in U + W$, а число $\lambda \in P$. Тогда $\overline{z} = \overline{u} + \overline{w}$, где $\overline{u} \in U$, $\overline{w} \in W$. Тогда $\lambda\overline{z} = \lambda(\overline{u} + \overline{w}) = \lambda\overline{u} + \lambda\overline{w}$, причём $\lambda\overline{u} \in U$, $\lambda\overline{w} \in W$. Следовательно $\lambda\overline{z} = \lambda\overline{u} + \lambda\overline{w} \in U + W$. Теорема доказана.

Теорема 2.5. $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

Доказательство. Выберем базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_k$ в пересечении $U \cap W$. Эта система векторов линейно независима, и её можно дополнить векторами $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_s$ до базиса в U:

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_s, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_k$$

Аналогично, её можно дополнить векторами $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_r$ до базиса

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_k, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_r$$

в W. Покажем, что система векторов

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_s, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_k, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_r \tag{2.1}$$

является базисом в $U+W$. Покажем полноту. Пусть $\bar{z} \in U+W$ тогда найдутся $\bar{u} \in U$, $\bar{w} \in W$, такие, что $\bar{z} = \bar{u} + \bar{w}$. Так как $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_s, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_k$ – базис в U, то вектор $\bar{u}$ можно разложить по базисным векторам: $\bar{u} = \alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 + \ldots + \alpha_s\bar{u}_s + \beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2 + \cdots + \beta_k\bar{e}_k$. Аналогично,

$\bar{w} = \gamma_1\bar{e}_1 + \gamma_2\bar{e}_2 + \cdots \gamma_k\bar{e}_k + \delta_1\bar{w}_1 + \delta_2\bar{w}_2 + \ldots + \delta_r\bar{w}_r$. Тогда

$$\bar{z} = \bar{u} + \bar{w} = \alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 + \ldots + \alpha_s\bar{u}_s + (\beta_1+\gamma_1)\bar{e}_1 + (\beta_2+\gamma_2)\bar{e}_2 + \cdots + (\beta_k+\gamma_k)\bar{e}_k + \\ + \delta_1\bar{w}_1 + \delta_2\bar{w}_2 + \ldots + \delta_r\bar{w}_r$$

Полнота доказана. Докажем линейную независимость системы $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_s, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_k, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_r$. Приравняем к $\bar{0}$ линейную комбинацию

$$\alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 + \ldots + \alpha_s\bar{u}_s + \beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2 + \cdots + \beta_k\bar{e}_k + \gamma_1\bar{w}_1 + \gamma_2\bar{w}_2 + \ldots + \gamma_r\bar{w}_r = \bar{0}$$

Тогда

$$\alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 + \ldots + \alpha_s\bar{u}_s + \beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2 + \cdots + \beta_k\bar{e}_k = -\gamma_1\bar{w}_1 - \gamma_2\bar{w}_2 - \ldots - \gamma_r\bar{w}_r$$

Левая часть этого равенства это вектор, принадлежащий U, а правая часть – вектор принадлежащий W, и поскольку они равны, то этот вектор принадлежит пересечению $U \cap W$, а значит, он раскладывается по базису пересечения $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_k$. То есть

$$-\gamma_1\overline{w}_1-\gamma_2\overline{w}_2-\ldots-\gamma_r\overline{w}_r=\mu_1\overline{e}_1+\mu_2\overline{e}_2+\cdots+\mu_k\overline{e}_k.$$

Поэтому $\gamma_1\overline{w}_1+\gamma_2\overline{w}_2+\ldots+\gamma_r\overline{w}_r+\mu_1\overline{e}_1+\mu_2\overline{e}_2+\cdots+\mu_k\overline{e}_k=\overline{0}$. Но так как система векторов $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\cdots,\overline{e}_k,\overline{w}_1,\overline{w}_2,\ldots,\overline{w}_r$ линейно независима (это базис в W) то все коэффициенты этой линейной комбинации равны 0:

$\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_r=\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_k=0$. Но тогда и линейная комбинация $\alpha_1\overline{u}_1+\alpha_2\overline{u}_2+\ldots+\alpha_s\overline{u}_s+\beta_1\overline{e}_1+\beta_2\overline{e}_2+\cdots+\beta_k\overline{e}_k=\overline{0}$, и поскольку векторы $\overline{u}_1,\overline{u}_2,\ldots,\overline{u}_s,\overline{e}_1,\overline{e}_2,\cdots,\overline{e}_k$ тоже линейно независимы (базис в U), то

$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_s=\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_k=0$. Таким образом, показано, что все коэффициенты $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_s=\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_k=\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_r=0$. Что и означает линейную независимость системы (2.1). Таким образом, мы показали, что $\dim(U+W)=s+k+r$. Кроме того, по условию $\dim(U\cap W)=k$, $\dim U=s+k$, $\dim W=k+r$. Отсюда следует справедливость теоремы. Доказательство завершено.

Определение 2.3. Говорят, что векторное пространство V является прямой суммой своих подпространств U и W (пишут $V=U\oplus W$), если каждый элемент $\overline{v}\in V$ можно представить в виде $\overline{v}=\overline{u}+\overline{w}$, где $\overline{u}\in U$, $\overline{w}\in W$, причём единственным образом.

Теорема 2.6. $V=U\oplus W$ тогда и только тогда, когда

1) $V=U+W$, и

2) $U\cap W=\{\overline{0}\}$.

Доказательство. Необходимость. По условию $V=U\oplus W$, следовательно, произвольный элемент $\overline{v}\in V$ можно представить в виде $\overline{v}=\overline{u}+\overline{w}$, то есть $V=U+W$. Покажем теперь, что $U\cap W=\{\overline{0}\}$. Предположим противное – допустим, что $U\cap W\neq\{\overline{0}\}$. Это означает, что найдётся элемент $\overline{z}\neq\overline{0}$, и такой, что $\overline{z}\in U\cap W$. Тогда $\overline{z}\in U$ и $\overline{z}\in W$, и имеем

$\bar{v} = \bar{z} + \bar{u} + \bar{w} + (-\bar{z})$, где $\bar{z} + \bar{u} \in U$, а $\bar{w} + (-\bar{z}) \in V$. Таким образом имеем, что вектор $\bar{v}$ имеет два различных представления: $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ и $\bar{v} = \bar{z} + \bar{u} + \bar{w} + (-\bar{z})$, что противоречит единственности представления.

Достаточность. Дано, что $V = U + W$ и $U \cap W = \{\bar{0}\}$. Требуется доказать единственность представления

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \tag{2.2}$$

Предположим, что имеется ещё одно представление

$$\bar{v} = \bar{u}_1 + \bar{w}_1, \tag{2.3}$$

где $\bar{u}_1 \in U$, $\bar{w}_1 \in W$. Тогда вычитая из представления (2.2) представление (2.3) имеем $\bar{0} = (\bar{u} - \bar{u}_1) + (\bar{w} - \bar{w}_1)$. Поэтому $(\bar{u} - \bar{u}_1) = -(\bar{w} - \bar{w}_1)$, но $\bar{u} - \bar{u}_1 \in U$, $\bar{w} - \bar{w}_1 \in W$. А поскольку $(\bar{u} - \bar{u}_1) = -(\bar{w} - \bar{w}_1)$, то левая и правая часть – это элемент, принадлежащий $U \cap W = \{\bar{0}\}$. Следовательно, $\bar{u} - \bar{u}_1 = \bar{0}$ и $\bar{w} - \bar{w}_1 = \bar{0}$. То есть $\bar{u} = \bar{u}_1$, $\bar{w} = \bar{w}_1$, а значит представление (2.2) единственно.

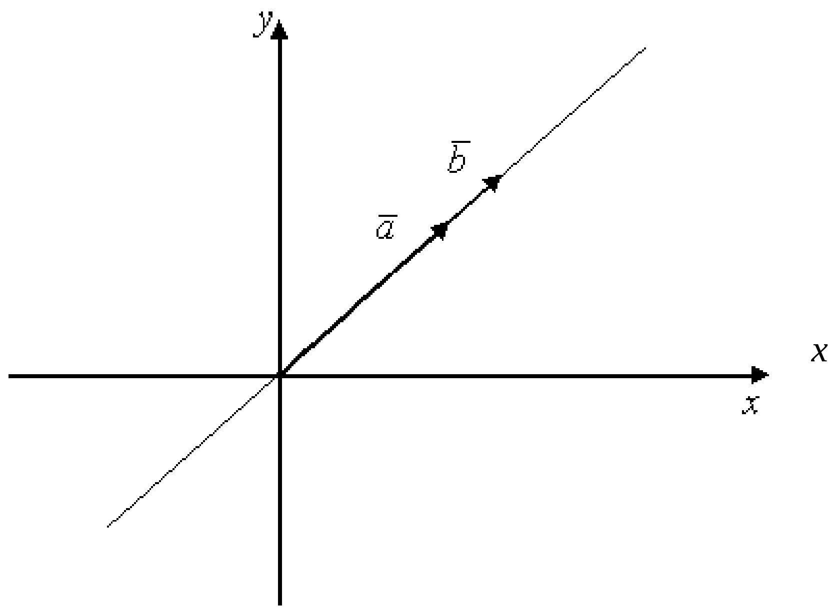
Теорема доказана.

Следствие. $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Примеры подпространств.

Пример 2.1. Множество векторов, параллельных прямой, проходящей через начало координат является подпространством.

Пусть для наглядности $V = V^2$. Фиксированную прямую обозначим l.



$\bar{a}+\bar{b}\in l$, $\lambda\bar{a}\in l$.

Пример 2.2. Рассмотрим множество $P[x]_n$ многочленов степени не выше n над полем P. Как отмечено ранее (см. пример 1.7), множество $P[x]_n$ с операциями сложения многочленов и умножения многочлена на числа из P является векторным пространством. Зафиксируем число $\alpha\in P$. Множество $U=\{f(x)\in P[x]_n \mid f(\alpha)=0\}$ является подпространством $P[x]_n$, так как

1. $U\neq\varnothing$, поскольку многочлен $0=0\cdot x^n+\dots+0\cdot x+0$ в любой точке обращается в 0 и поэтому принадлежит U.

2. Если $f(x)$ и $g(x)\in U$, то $(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha)=0+0=0$, следовательно $f(x)+g(x)\in U$.

3. Если $f(x)\in U$ и $\lambda\in P$, то $(\lambda f)(\alpha)=\lambda f(\alpha)=\lambda\cdot 0=0$, следовательно $\lambda f(x)\in U$.

Рассмотрим ещё один крайне важный для дальнейшего пример подпространства.

Пример 2.3. Рассмотрим $P^n = \{\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in P\}$ – пространство арифметических векторов размерности n с координатами из поля P (см. пример 1.2). Пусть A – матрица размера $m \times n$ с элементами из поля P. Рассмотрим множество $U = \{\overline{x} \in P^n \mid A\overline{x} = \overline{0}\}$. Заметим, что множество U является множеством решений линейной однородной системы уравнений $A\overline{x} = \overline{0}$. Покажем, что U является подпространством.

1. $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in U$, следовательно $U \neq \varnothing$.
2. $\overline{a}, \overline{b} \in U \Rightarrow A(\overline{a} + \overline{b}) = A\overline{a} + A\overline{b} = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0} \Rightarrow \overline{a} + \overline{b} \in U$.
3. $\overline{a} \in U$, $\lambda \in P \Rightarrow A(\lambda\overline{a}) = \lambda A\overline{a} = \lambda \cdot \overline{0} = \overline{0} \Rightarrow (\lambda\overline{a}) \in U$

Итак, *множество решений линейной однородной системы уравнений* $A\overline{x} = \overline{0}$ *является подпространством* пространства P^n.

Определение 2.4. Множество всех линейных комбинаций векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_k$ называют линейной оболочкой, натянутой (порождённой векторами) на векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_k$, и обозначают $\langle \overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_k \rangle$.

Таким образом, согласно определению

$$\langle \overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_k \rangle = \{\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \cdots + \lambda_k\overline{a}_k \mid \lambda_i \in P\} \tag{2.4}$$

Пример 2.4. $L = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_k \rangle$ является подпространством. Действительно,

1. Вектор $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in L$, следовательно $L \neq \varnothing$.
2. $\overline{a}, \overline{b} \in L \Rightarrow \overline{a} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \cdots + \lambda_k\overline{a}_k$, $\overline{b} = \mu_1\overline{a}_1 + \mu_2\overline{a}_2 + \cdots + \mu_k\overline{a}_k$

$\overline{a} + \overline{b} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \cdots + \lambda_k\overline{a}_k + \mu_1\overline{a}_1 + \mu_2\overline{a}_2 + \cdots + \mu_k\overline{a}_k =$

$(\lambda_1 + \mu_1)\overline{a}_1 + (\lambda_2 + \mu_2)\overline{a}_2 + \cdots + (\lambda_k + \mu_k)\overline{a}_k \Rightarrow \overline{a} + \overline{b} \in L$.

3. $\overline{a} \in L$, $\beta \in P \Rightarrow \overline{a} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \cdots + \lambda_k\overline{a}_k \Rightarrow$

$$\beta\bar{a} = \beta(\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \dots + \lambda_k\bar{a}_k) = \beta\lambda_1\bar{a}_1 + \beta\lambda_2\bar{a}_2 + \dots + \beta\lambda_k\bar{a}_k \;\Rightarrow\; (\beta\bar{a}) \in L$$

Итак, *линейная оболочка системы векторов* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ *является подпространством* векторного пространства.

Таким образом, на основании примеров 2.3 и 2.4 имеем *два способа задания подпространств*:

1) как множество решений некоторой однородной системы линейных уравнений $U = \{\bar{x} \in P^n \mid A\bar{x} = \bar{0}\}$.

2) как линейную оболочку некоторой порождающей это подпространство системы векторов $L = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k \rangle$

Отметим, что *любое* подпространство можно задать как линейную оболочку порождающей её системы векторов. Ниже мы покажем, что любое подпространство можно задать с помощью линейной однородной системы уравнений $A\bar{x} = \bar{0}$.

Отметим одно важное свойство линейных оболочек.

Предложение 2.1. Если векторы $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_m \in \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k \rangle$, то линейная оболочка $\langle \bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_m \rangle \subset \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k \rangle$.

Доказательство. Т.к. векторы $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_m$ принадлежат подпространству $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k \rangle$, то и любая их линейная комбинация $\lambda_1\bar{b}_1 + \lambda_2\bar{b}_2 + \dots + \lambda_m\bar{b}_m$ принадлежит подпространству $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k \rangle$, т.е. $\langle \bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_m \rangle \subset \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k \rangle$.

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении базиса и размерности линейной оболочки.

Введём понятие *элементарных преобразований* (э.п.) для системы векторов. Элементарными будем следующие два вида преобразований:

1) прибавление к вектору другого вектора, умноженного на произвольное число.

2) умножение вектора на число отличное от нуля.

Теорема 2.7. Пусть имеется система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ векторного пространства V, и система векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m$, полученная из $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$, с помощью элементарных преобразований, тогда линейные оболочки этих систем векторов совпадают:

$$\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k \rangle = \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m \rangle$$

Доказательство. Рассмотрим систему векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$. Заметим, что если вектор $\bar{b}_i$ получен из этой системы с помощью элементарных преобразований, то он является линейной комбинацией исходных векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$. Тогда в силу предложения 2.1 линейная оболочка $\langle \bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m \rangle \subset \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k \rangle$. Поскольку каждое элементарное преобразование обратимо, то, получаем, что и система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ получается из системы $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \cdots, \bar{b}_m$ при помощи элементарных преобразований. Поэтому применив предыдущие рассуждения к системе векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \cdots, \bar{b}_m$, получаем $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k \rangle \subset \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m \rangle$. Из этих двух вложений имеем $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k \rangle = \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m \rangle$. Доказательство завершено.

§2. Алгоритм нахождения базиса в линейной оболочке.

Отметим, что если линейная оболочка порождается линейно независимой системой векторов, то эта система является базисом линейной оболочки, а число векторов базиса равно размерности линейной оболочки.

Вообще говоря, система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$, порождающая линейную оболочку не обязана быть линейно независимой. Сейчас мы рассмотрим способ построения базиса в линейной оболочке $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k \rangle$, использующий введённые выше элементарные преобразования. Число векторов построенного базиса даст размерность линейной оболочки.

Выберем некоторый базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ в векторном пространстве V, и разложим векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ по векторам выбранного базиса. Верхний индекс будем использовать для обозначения номера координаты

$$\bar{a}_i = a_i^1 \bar{e}_1 + a_i^2 \bar{e}_2 + \ldots + a_i^n \bar{e}_n, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Таким образом, имеем координатный изоморфизм $\varphi_e : V \to R^n$.

Сопоставим линейной оболочке $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k \rangle$ матрицу, i – я строка которой совпадает с набором координат $(a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n)$ вектора $\bar{a}_i$ в выбранном базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n$. Эта матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_k^1 & a_k^2 & \cdots & a_k^n \end{pmatrix}$$

Заметим, что введённым выше элементарным преобразованиям векторов в точности соответствуют элементарные преобразования метода Гаусса над строками матрицы A. Наша цель – привести матрицу A с помощью элементарных преобразований строк к ступенчатому виду, поскольку строки ступенчатой матрицы образуют линейно независимую систему векторов в пространстве R^n.

Элементарные преобразования строк матрицы соответствуют элементарным преобразованиям векторов в линейной оболочке, поэтому в результате таких преобразований получаем некоторый новый набор векторов, порождающих ту же линейную оболочку. Поскольку, после приведения к ступенчатому виду строки полученной матрицы линейно независимы, то линейно независима и соответствующая порождающая система векторов в линейной оболочке. Таким образом, построен базис линейной оболочки.

Пример 2.5. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов:

$\bar{a}_1 = (1,-2,-1,1)$; $\bar{a}_2 = (-1,2,-1,3)$; $\bar{a}_3 = (-2,4,2,-2)$; $\bar{a}_4 = (-3,6,1,-3)$;

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу к ступенчатому виду методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{1}} & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 \to \tilde{N}_2 \\ 2\tilde{N}_1 + \tilde{N}_3 \to \tilde{N}_3 \\ 3\tilde{N}_1 + \tilde{N}_4 \to \tilde{N}_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{N}_3 \leftrightarrow \tilde{N}_4 \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{-2}} & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{N}_2 - \tilde{N}_3 \to \tilde{N}_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ненулевые строки полученной ступенчатой матрицы дают искомый базис, который имеет вид:

$$\bar{u}_1 = (1,-2,-1,1);\quad \bar{u}_2 = (0,0,-2,4);\quad \bar{u}_3 = (0,0,0,4);$$

Теорема 2.8. Если $U = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k \rangle$ и $W = \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m \rangle$, то $U + W = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m \rangle$

Доказательство. Пусть вектор $\bar{v} \in U + W$, тогда он представим в виде

$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$, где $\bar{u} \in U$, $\bar{w} \in W$. Поэтому $\bar{u} = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_k\bar{a}_k$, $\bar{w} = \mu_1\bar{b}_1 + \mu_2\bar{b}_2 + \ldots + \mu_m\bar{b}_m$ и $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} =$

$$= \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_k\bar{a}_k + \mu_1\bar{b}_1 + \mu_2\bar{b}_2 + \ldots + \mu_m\bar{b}_m \in \left\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_k, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m \right\rangle.$$

Отсюда следует, что $U + W \subset \left\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m \right\rangle$.

Взяв вектор $\bar{v} \in \left\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ddots, \bar{a}_k, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m \right\rangle$, и рассуждая аналогично, получим $\left\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m \right\rangle \subset U + W$. Теорема доказана.

§3. Алгоритм построения фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении базиса и размерности подпространства U, заданного с помощью однородной системы линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{0}$.

Пусть подпространство $U = \left\{ \bar{x} \in P^n \middle| \; A\bar{x} = \bar{0} \right\}$.

Определение 2.5. Фундаментальной системой решений (ФСР) для однородной системы уравнений $A\bar{x} = \bar{0}$ называется базис в пространстве решений этой системы, то есть такая линейно независимая система решений, что любое решение системы является их линейной комбинацией.

Согласно определению, ФСР системы $A\bar{x} = \bar{0}$ является базисом в подпространстве $U = \left\{ \bar{x} \in P^n \middle| \; A\bar{x} = \bar{0} \right\}$, заданном этой системой.

Укажем способ построения ФСР однородной системы.

Приведём систему уравнений $A\bar{x} = \bar{0}$ к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований алгоритма Гаусса. При необходимости перенумеровав переменные, не нарушая общности можно считать, что полученная система будет иметь вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{1m}x_m + \dots + a_{1n}x_n = 0 \end{cases}$$

Выразим переменную x_m из последнего уравнения, через переменные $x_{m+1},\dots,x_n$ и подставим её в предыдущее уравнение. Далее из этого уравнения выразим переменную x_{m-1}, и так далее. Действуя таким образом, найдём выражения для переменных $x_m, x_{m-1},\dots,x_2,x_1$ через переменные $x_{m+1},\dots,x_n$. Переменные $x_1,x_2,\dots,x_{m-1},x_m$ называют зависимыми, а переменные $x_{m+1},\dots,x_n$ называют свободными. Получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = b_{1,m+1}x_{m+1} + b_{1,m+2}x_{m+2} + \dots + b_{1,n}x_n \\ x_2 = b_{2,m+1}x_{m+1} + b_{2,m+2}x_{m+2} + \dots + b_{2,n}x_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_m = b_{m,m+1}x_{m+1} + b_{m,m+2}x_{m+2} + \dots + b_{m,n}x_n \end{cases} \qquad (2.5)$$

Будем придавать последовательно одной из свободных переменных $x_{m+1},\dots,x_n$ значение 1, полагая остальные равными 0. Вычисления оформим в таблицу:

Векторы ФСР	Зависимые переменные				Свободные переменные			
	x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	…	x_n
$\bar{u}_1$	$b_{1,m+1}$	$b_{2,m+1}$	…	$b_{m,m+1}$	1	0	…	0
$\bar{u}_2$	$b_{1,m+2}$	$b_{2,m+2}$	…	$b_{m,m+2}$	0	1	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…

$\bar{u}_{n-m}$	$b_{1,n}$	$b_{2,n}$	...	$b_{m,n}$	0	0	...	1

Докажем, что строки полученной таблицы (векторы $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n-m}$) суть искомая ФСР, то есть являются линейно независимыми, и образуют полную систему в пространстве решений. Докажем линейную независимость. Рассмотрим линейную комбинацию $\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \ldots + \lambda_{n-m}\bar{u}_{n-m} = 0$. Для наглядности будем записывать координаты векторов как столбцы:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} b_{1,m+1} \\ b_{2,m+1} \\ \vdots \\ b_{m,m+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} b_{1,m+2} \\ b_{2,m+2} \\ \vdots \\ b_{m,m+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_{n-m} \begin{pmatrix} b_{1,n} \\ b_{2,n} \\ \vdots \\ b_{m,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Два вектора равны, если равны их соответствующие координаты. Сравнивая $m+1$ – е координаты векторов, записанных слева и справа, заключаем, что $\lambda_1 = 0$, сравнивая $m+2$ – е координаты, заключаем, что $\lambda_2 = 0$, и так далее, сравнивая n-е координаты, заключаем, что $\lambda_{n-m} = 0$. Таким образом все коэффициенты линейной комбинации одновременно равны нулю, следовательно векторы линейно независимы. Покажем теперь, что любое решение системы можно выразить как линейную комбинацию векторов $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n-m}$. Поскольку исходная система эквивалентна системе (2.5), (то есть множества решений этих систем совпадают), то достаточно доказать, что каждое решение системы (2.5) является линейной комбинацией векторов $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n-m}$. Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – решение системы (2.5), тогда $\bar{x} = x_{m+1}\bar{u}_1 + x_{m+2}\bar{u}_2 + \ldots + x_n\bar{u}_{n-m}$. То есть система векторов $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n-m}$ является полной, а поскольку она линейно независима, то она является базисом в пространстве решений, то есть ФСР. Что и требовалось показать.

На самом деле мы показали больше – не только указали способ построения ФСР, но и построили *алгоритм перехода от способа задания подпространства* U *с помощью однородной системы* $A\bar{x}=\bar{0}$ *к способу задания подпространства с помощью линейной оболочки*, поскольку линейная оболочка векторов $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_{n-m}$ совпадает с пространством решений однородной системы $A\bar{x}=\bar{0}$.

Рассмотрим пример нахождения фундаментальной системы решений.

Пример 2.6. Найти базис и размерность пространства решений (построить ФСР) однородной системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0 \\ x_1-x_3+2x_4=0 \end{cases}$$

Решение: Запишем матрицу системы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу к ступенчатому виду методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{2}} & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \tilde{N}_1-2\tilde{N}_2\to\tilde{N}_2 \\ \\ \tilde{N}_1-2\tilde{N}_3\to\tilde{N}_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \underline{\underline{3}} & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2-3\tilde{N}_3\to\tilde{N}_3$$

$\sim \qquad\qquad \sim$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 12 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{N}_3/4 \to \tilde{N}_3 \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

~

Выразим из полученной системы неизвестные

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(-x_2 - x_3 + x_4 - x_5) \\ x_2 = \frac{1}{3}(-5x_3 + 3x_4 - 3x_5) \\ x_3 = 3x_4 \end{cases}$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3– зависимые, x_4, x_5 – свободные. Выразим зависимые переменные через свободные, для этого подставим выражение x_3 в выражение для x_2 (вторая строка системы), а затем полученные выражения в первое равенство системы, получим:

$$\begin{cases} x_3 = 3x_4 \\ x_2 = \frac{1}{3}(-5 \cdot 3x_4 + 3x_4 - 3x_5) = -4x_4 - x_5 \\ x_1 = \frac{1}{2}(-x_2 - x_3 + x_4 - x_5) = \frac{1}{2}(-(-4x_4 - x_5) - 3x_4 + x_4 - x_5) = x_4 \end{cases}$$

итак, имеем, что

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = -4x_4 - x_5 \\ x_3 = 3x_4 \end{cases}$$

Отметим, что эти вычисления (обратный ход метода Гаусса) можно (и гораздо удобнее) проделывать в матричной форме, при этом нули нужно получать над элементами, расположенными на “ступеньках” начиная с последней строки:

$$\sim\begin{pmatrix}2&1&1&-1&1\\0&3&5&-3&3\\0&0&\underline{\underline{-1}}&3&0\end{pmatrix}\begin{matrix}5\tilde{N}_3+\tilde{N}_2\to\tilde{N}_2\\ \tilde{N}_3+\tilde{N}_1\to\tilde{N}_1\end{matrix}\begin{pmatrix}2&1&0&2&1\\0&3&0&12&3\\0&0&-1&3&0\end{pmatrix}\sim\quad C_2/3\to\tilde{N}_2$$

$$\begin{pmatrix}2&1&0&2&1\\0&\underline{\underline{1}}&0&4&1\\0&0&-1&3&0\end{pmatrix}\sim\quad \tilde{N}_1-C_2\to\tilde{N}_1\quad\sim\begin{pmatrix}2&0&0&-2&0\\0&1&0&4&1\\0&0&-1&3&0\end{pmatrix}\quad\begin{cases}2x_1-2x_4=0\\x_2+4x_4+x_5=0\\-x_3+3x_4=0\end{cases}$$

Итак,

$$\begin{cases}x_1=x_4\\x_2=-4x_4-x_5\\x_3=3x_4\end{cases}$$

Составим таблицу, придавая последовательно одной из свободных переменных значение 1, полагая остальные равными 0:

базис	зависимые переменные			свободные переменные	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\bar{u}_1$	1	-4	3	1	0
$\bar{u}_2$	0	-1	0	0	1

Итак, искомый базис в пространстве решений (ФСР) нашей системы образуют векторы $\bar{u}_1=(1,-4,3,1,0)$ и $\bar{u}_2=(0,-1,0,0,1)$. Размерность пространства решений равна числу базисных векторов и равна 2. Всякое решение $\bar{x}$ системы представимо в виде $\bar{x}=x_4\bar{u}_1+x_5\bar{u}_2$, или, в развёрнутой форме (да простит нас читатель за некоторую нестрогость – запись координат векторов в столбик):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$ где x_4, x_5 – произвольные числа.

Рассмотрим теперь алгоритм обратного перехода: *от способа задания подпространства* U *с помощью линейной оболочки к способу задания подпространства с помощью однородной системы* $A\overline{x} = \overline{0}$.

Пусть подпространство U задано как линейная оболочка $U = \langle \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m \rangle$. Найдём однородную систему линейных уравнений, множество решений которой совпадает с подпространством U. Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольный вектор из R^n. Вектор $\overline{x}$ принадлежит линейной оболочке U тогда и только тогда, когда $\overline{x} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m\overline{a}_m$. Обозначим координаты вектора $\overline{a}_i = (a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n)$, и для наглядности будем писать координаты в виде столбца:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_m \begin{pmatrix} a_m^1 \\ a_m^2 \\ \vdots \\ a_m^n \end{pmatrix}$$

Это равенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} a_1^1\lambda_1 + a_2^1\lambda_2 + \ldots + a_m^1\lambda_m = x_1 \\ a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2 + \ldots + a_m^2\lambda_m = x_2 \\ \vdots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_1^n\lambda_1 + a_2^n\lambda_2 + \ldots + a_m^n\lambda_m = x_n \end{cases}$$

Приведём эту систему к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований метода Гаусса.

$$\begin{cases} b_1^1\lambda_1 + \ldots + b_k^1\lambda_k + \ldots + b_m^1\lambda_m = c_1^1 x_1 + \ldots + c_n^1 x_n \\ \ldots \\ b_k^k\lambda_k + \ldots + b_m^k\lambda_m = c_1^k x_1 + \cdots + c_n^k x_n \\ 0 = c_1^{k+1} x_1 + \cdots + c_n^{k+1} x_n \\ \ldots \\ 0 = c_1^n x_1 + \cdots + c_n^n x_n \end{cases}$$

Вектор $\overline{x}$ из R^n принадлежит линейной оболочке U в том и только в том случае, когда он является решением этой системы. А эта система имеет решение в том и только в том случае, когда вектор $\overline{x}$ является решением однородной системы

$$\begin{cases} 0 = c_1^{k+1} x_1 + \ldots + c_n^{k+1} x_n \\ \ldots \\ 0 = c_1^n x_1 + \cdots + c_n^n x_n \end{cases}$$

Это и есть искомая однородная система, множество решений которой совпадает с подпространством U как мы только что показали.

§4. Нахождение базиса и размерности в сумме и пересечении подпространств.

Рассмотрим сначала *алгоритм нахождения базиса и размерности в сумме подпространств*.

1. Пусть подпространства U и W заданы как линейные оболочки: $U = \langle \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m \rangle$, $W = \langle \overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_k \rangle$ в векторном пространстве V конечной размерности n, и пусть $e = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n)$ – его базис. Тогда, раскладывая векторы $\overline{a}_i$ и $\overline{b}_j$ по базисным векторам $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ перейдём к координатному представлению, то есть вместо подпространств U и W рассмотрим

линейные оболочки $\langle(\bar{a}_1)_e,\ldots,(\bar{a}_m)_e\rangle$ и $\langle(\bar{b}_1)_e,\ldots,(\bar{b}_k)_e\rangle$, являющиеся подпространствами арифметического векторного пространства P^n. Для краткости обозначим $U_e=\langle(\bar{a}_1)_e,\ldots,(\bar{a}_m)_e\rangle$ и $W_e=\langle(\bar{b}_1)_e,\ldots,(\bar{b}_k)_e\rangle$. Тогда имеем, что $U_e+W_e=\langle(\bar{a}_1)_e,\ldots,(\bar{a}_m)_e,(\bar{b}_1)_e,\ldots,(\bar{b}_k)_e\rangle$ и задача нахождения базиса и размерности суммы подпространств сведена к рассмотренной выше задаче нахождения базиса и размерности в линейной оболочке арифметических векторов.

2. Пусть одно или оба подпространства заданы как множество решений однородной системы. Пусть для определённости подпространство $U=\{\bar{x}\in P^n \mid A\bar{x}=\bar{0}\}$ совпадает с пространством решений однородной системы линейных уравнений $A\bar{x}=\bar{0}$. Используем алгоритм перехода к способу задания этого подпространства как линейной оболочки фундаментальной системы решений (алгоритм изложен выше в параграфе 3). Если W задано как линейная оболочка, то задача сведена к п.1, иначе переходим к способу задания W с помощью линейной оболочки.

Рассмотрим теперь *алгоритм нахождения базиса и размерности в пересечении подпространств*.

1. Пусть сначала оба подпространства заданы как множества решений линейных однородных систем уравнений. Тогда всякий вектор, принадлежащий пересечению подпространств с одной стороны принадлежит первому подпространству, то есть является решением первой системы, а с другой стороны, принадлежит второму подпространству, то есть является решением второй системы, и, следовательно, является решением обоих систем. Поэтому в этом случае строим однородную систему, являющуюся объединением двух упомянутых выше линейных однородных систем. Найдём фундаментальную систему решений в пространстве реше-

ний этой системы, используя описанный выше алгоритм. Сама фундаментальная система и будет искомым базисом в пространстве решений, а число элементов в ФСР и будет искомой размерностью пересечения подпространств.

2. Если одно из подпространств (или оба) задано как линейная оболочка системы векторов, то предварительно, используя описанный выше в предыдущем параграфе алгоритм, перейдём к способу задания подпространства как пространства решений линейной однородной системы уравнений. То есть сведём задачу к задаче, рассмотренной в пункте 1.

Коротко:

.	$U=\langle \bar{a}_1,\dots,\bar{a}_m\rangle$, $W=\langle \bar{b}_1,\dots,\bar{b}_k\rangle$ тогда $U+W=\langle \bar{a}_1,\dots,\bar{a}_m,\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_k\rangle$
.	$U: A\bar{x}=\bar{0}$, $W: B\bar{x}=\bar{0}$ тогда $U\cap W: \begin{cases} A\bar{x}=\bar{0} \\ B\bar{x}=\bar{0} \end{cases}$

Рассмотрим примеры нахождения суммы и пересечения подпространств.

Пример 2.7. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств U и W, если

подпространство U задано как множество решений однородной системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

а подпространство W задано линейной оболочкой системы векторов $W = \langle \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \rangle$, $\bar{w}_1 = (1,-3,3,1,-1)$, $\bar{w}_2 = (1,-2,3,1,-2)$, $\bar{w}_3 = (1,2,1,1,1)$.

Зададим подпространство U линейной оболочкой, для этого построим ФСР системы (2.6) (смотри пример 2.6 в §3). Получим $U = \langle \bar{u}_1, \bar{u}_2 \rangle$, где $\bar{u}_1 = (1,-4,3,1,0)$, $\bar{u}_2 = (0,-1,0,0,1)$.

Итак, $W = \langle \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \rangle$, $U = \langle \bar{u}_1, \bar{u}_2 \rangle$. Тогда $U + W = \langle \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \rangle$. Найдём базис в получившейся линейной оболочке, согласно алгоритму, описанному выше.

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{1}} & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \tilde{N}_3 - \tilde{N}_1 \to \tilde{N}_3 \\ \\ \tilde{N}_4 + \tilde{N}_1 \to \tilde{N}_4 \\ \\ \tilde{N}_5 + \tilde{N}_1 \to \tilde{N}_5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{-1}} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \tilde{N}_3 + \tilde{N}_2 \to \tilde{N}_3 \\ \\ \tilde{N}_4 + 2\tilde{N}_2 \to \tilde{N}_4 \\ \\ \tilde{N}_5 + 6\tilde{N}_2 \to \tilde{N}_5 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad C_3 \leftrightarrow \tilde{N}_5 \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sim$

Ненулевые строки полученной матрицы $(1,-4,3,1,0)$, $(0,-1,0,0,1)$, $(0,0,-2,0,7)$ являются базисом в $U + W$. Размерность $\dim(U + W) = 3$.

Найдём теперь базис и размерность $U \cap W$. Для этого зададим подпространство $W = \langle \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \rangle$, $\bar{w}_1 = (1,-3,3,1,-1)$, $\bar{w}_2 = (1,-2,3,1,-2)$, $\bar{w}_3 = (1,2,1,1,1)$ как множество решений однородной системы линейных уравнений. Будем действовать согласно описанному выше алгоритму перехода к этому способу задания подпространства:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ -3 & -2 & 2 & x_2 \\ 3 & 3 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \\ -1 & -2 & 1 & x_5 \end{array}\right) \sim \qquad \begin{array}{c} \tilde{N}_2 + 3\tilde{N}_1 \to \tilde{N}_2 \\ \tilde{N}_3 - 3\tilde{N}_1 \to \tilde{N}_3 \\ \tilde{N}_4 - \tilde{N}_1 \to \tilde{N}_4 \\ \tilde{N}_5 + \tilde{N}_1 \to \tilde{N}_5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 5 & x_2 + 3x_1 \\ 0 & 0 & -2 & x_3 - 3x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & -1 & 2 & x_5 + x_1 \end{array}\right) \sim \qquad \tilde{N}_5 + \tilde{N}_2 \to \tilde{N}_5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 5 & x_2 + 3x_1 \\ 0 & 0 & -2 & x_3 - 3x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 0 & 7 & x_5 + 4x_1 + x_2 \end{array}\right) \sim \qquad 2\tilde{N}_5 + 7\tilde{N}_2 \to \tilde{N}_5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 5 & x_2 + 3x_1 \\ 0 & 0 & -2 & x_3 - 3x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -13x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 2x_5 \end{array}\right)$$

Система, определяющая подпространство $W: \begin{cases} -x_1 + x_4 = 0 \\ -13x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$.

Итак, $U: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$, $W: \begin{cases} -x_1 + x_4 = 0 \\ -13x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$,

поэтому подпространство $U \cap W$ задаётся системой

$$U \cap W: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \\ -13x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Найдём теперь базис в $U \cap W$. Применим для этого алгоритм построения ФСР, описанный выше.

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{2}} & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -13 & 2 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &2\tilde{N}_2 - \tilde{N}_1 \to \tilde{N}_2 \\ &2\tilde{N}_3 - \tilde{N}_1 \to \tilde{N}_3 \\ &2\tilde{N}_4 + \tilde{N}_1 \to \tilde{N}_4 \\ &2\tilde{N}_5 + 13\tilde{N}_1 \to \tilde{N}_5 \end{aligned}$$

прямой ход метода Гаусса

$\sim$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \underline{\underline{-3}} & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 17 & 27 & -13 & 17 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &3\tilde{N}_3 - \tilde{N}_2 \to \tilde{N}_3 \\ &3\tilde{N}_4 + \tilde{N}_2 \to \tilde{N}_4 \\ &3\tilde{N}_5 + 17\tilde{N}_2 \to \tilde{N}_5 \end{aligned}$$

$\sim$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{-4}} & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 12 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &4\tilde{N}_4 - 2\tilde{N}_3 \to \tilde{N}_4 \\ &\tilde{N}_5 - \tilde{N}_3 \to \tilde{N}_5 \end{aligned}$$

$\sim$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{N}_3 / 4 \to \tilde{N}_3$$

$\sim$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{-1}} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \tilde{N}_2 - 5\tilde{N}_3 \to \tilde{N}_2 \\ \tilde{N}_1 + \tilde{N}_3 \to \tilde{N}_1 \end{matrix}$$

обратный ход метода Гаусса

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \underline{\underline{-3}} & 0 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 3\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 \to \tilde{N}_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \tilde{N}_1 / 6 \to \tilde{N}_1 \\ \tilde{N}_2 /(-3) \to \tilde{N}_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ -x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = -4x_4 - x_5 \\ x_3 = 3x_4 \\ x_4, x_5 - \textit{свободные} \end{cases}$$

Строим таблицу:

базис	зависимые переменные			свободные переменные	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

$\bar{b}_1$	1	-4	3	1	0
$\bar{b}_2$	0	-1	0	0	1

Получили, что базис в $U \cap W$ образуют векторы $\bar{b}_1 = (1,-4,3,1,0)$ и $\bar{b}_2 = (0,-1,0,0,1)$. Размерность пересечения $\dim(U \cap W) = 2$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Является ли линейным пространством над полем действительных чисел множество векторов плоскости с общим началом, концы которых лежат на одной прямой?
2. Является ли линейным пространством над полем действительных чисел множество арифметических векторов с целыми координатами?
3. Чем отличается действительное линейное пространство от комплексного?
4. Являются ли линейно зависимыми два коллинеарных вектора?
5. Являются ли линейно зависимыми три компланарных вектора?
6. Сформулируйте необходимое и достаточное условие линейной зависимости систем векторов
7. Может ли базис линейного пространства содержать нулевой вектор?
8. Дайте определение базиса линейного пространства.
9. Как связаны между собой размерность линейного пространства и количество векторов в базисе?
10. Сколько базисов может быть в *n*-мерном пространстве?
11. Может ли матрица перехода от одного базиса к другому быть вырожденной?
12. Какие линейные пространства называют изоморфными?
13. Является ли подпространством линейного пространства $V_3(R)$ множество векторов, параллельных данной плоскости?
14. Может ли размерность пространства быть меньше размерности его подпространства?
15. Является ли линейная оболочка, натянутая на систему векторов, подпространством линейного пространства?
16. Дайте определение ранга матрицы.
17. Может ли ранг квадратной матрицы *n*-го порядка быть меньше *n*?
18. Чему равен ранг транспонированной матрицы A^{τ}, если ранг матрицы *A* равен *r*?
19. Может ли однородная система линейных алгебраических уравнений быть несовместной?
20. Сколько фундаментальных систем решения может иметь однородная си-

стема линейных алгебраических уравнений?

21. Является ли подпространством линейного пространства множество решений однородной системы линейных алгебраических уравнений?
22. Тот же вопрос для неоднородной системы.
23. Какой формулой описывается общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений?
24. Сформулируйте необходимое и достаточное условие совместности системы линейных алгебраических уравнений.

Библиографический список.

1. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М. Наука, 1972.
2. Баранов И. В., Стукопин В.А. Элементы линейной алгебры. – Изд.-во ДГТУ, Ростов-на-Дону, 2007.
3. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Изд.-во МГУ, 1977.