ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Математический анализ»

Авторы
Рябых Г. Ю.,
Пристинская О. В.,
Фролова Н. В.,
Ворович Е. И.,
Тукодова О. М.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения технических и экономических направлений и специальностей

Авторы

профессор кафедры «Прикладная математика» Рябых Г.Ю.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пристинская О.В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.,
доцент кафедры «Прикладная математика» Ворович Е.И.,
доцент кафедры «Прикладная математика» Тукодова О.М.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Методическое пособие содержит индивидуальные задания по основным разделам дисциплины «Математический анализ», а также примеры решений. Задания по каждой теме имеют 30 вариантов, что позволяет использовать их для студентов заочной формы обучения. Представлены основные теоретическими положения и понятия, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины.

Методическое пособие дополняет курс лекций по дисциплине «Математический анализ» и будет полезно студентам в самостоятельной работе и при подготовке к текущему, рубежному и итоговому контролю знаний по данной дисциплине в различных формах, в том числе в форме интернет-экзамена, а также при изучении различных смежных дисциплин математического и естественнонаучного цикла.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ.

1) Определение производной функции.
2) Геометрический и механический смысл производной.
3) Теорема Ферма (формулировка и доказательство).
4) Теорема Ролля (формулировка и доказательство).
5) Теорема Лагранжа (формулировка и доказательство).
6) Теорема Коши (формулировка и доказательство).
7) Признак выпуклости графика функции (формулировка и доказательство).
8) Признак вогнутости графика функции (формулировка и доказательство).
9) Определение асимптоты кривой. Правило нахождения наклонных асимптот графика функции (формулировка и вывод).
10) Сформулировать правило нахождения вертикальных асимптот графика функции. Пояснить геометрически.
11) Определение функции, возрастающей на интервале [a, b].Вывести достаточный признак возрастания функции на интервале [a, b].
12) Определение функции, убывающей на интервале [a, b].Вывести достаточный признак убывания функции на интервале [a, b].
13) Каков геометрический смысл теоремы Ролля?
14) Каков геометрический смысл теоремы Лагранжа?
15) Привести пример, показывающий, что обращение в некоторой точке первой производной в нуль недоста-

точно для наличия в данной точке экстремума функции.

16) Привести пример, показывающий, что обращение в некоторой точке второй производной в нуль недостаточно для того, чтобы соответствующая точка была точкой перегиба.

17) Точки перегиба. Определение. Правило нахождения. Геометрический смысл.

18) Дать полную схему исследования функций.

19) Сформулировать правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функции y=f(x) на интервале [a, b].

20) Сформулировать определение точки максимума и минимума функции и правило нахождения этих точек.

21) Привести пример функции, имеющей наибольшее и наименьшее значение на открытом интервале] a, b [, и пример функции, не имеющей ни наибольшего, ни наименьшего значений на этом интервале.

22) Почему правило, используемое для нахождения наклонных асимптот графика функции, не может быть применено к нахождению вертикальных асимптот?

ИНТЕРВАЛЫ МОНОТОННОСТИ И ЭКСТРЕМУМ

Пусть функция y = f(x) непрерывна на (a, b).

Определение: Если для любых значений x_1 и x_2 принадлежащих (a, b)

а) при $x_1 < x_2$ $f(x_1) < f(x_2)$, f(x) называется возрастающей на (a, b)

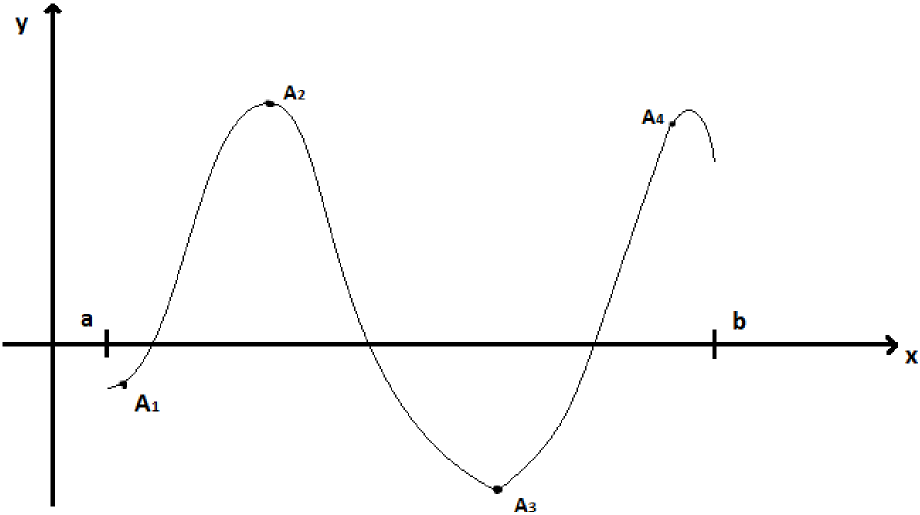
б) при $x_1 < x_2$ $f(x_1) > f(x_2)$, f(x) называется убывающей на (a, b)

Пример: функция $y = x^2$ возрастает на $(0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0)$

Интервалы возрастания и убывания объединяются под общим названием интервалы монотонности функции.

Пусть функция на (a, b) несколько раз переходит от возрастания к убыванию, то есть колеблется

На рис.1 A_1 и A_3 — локальные минимумы, A_2 и A_4 — локальные максимумы.



Определение: Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности X точки x_0.
Если для любого $x \in X$

а) $f(x_0) > f(x)$, то x_0 назначается точкой максимума $f(x)$, а $y_0 = f(x_0)$ — максимумом $f(x)$

б) $f(x_1) < f(x_2)$,то x_0 назначается точкой минимума $f(x)$, а $y_0 = f(x_0)$ — минимумом $f(x)$

Максимум и минимум объеденены под общим названием экстремум функции.

Из определения следует что функция может иметь несколько экстремумов на (a, b) рис.1 . Поэтому используются термины : локальный максимум, локальный минимум, локальный экстремум

Определение интервалов монотонности и экстремумов с помощью производной

Теорема 1: Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на [a, b] и дифференцируема на (a, b) . Если для любого $x \in (a, b)$

- $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает на (a, b);
- $f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает на (a, b);

- $f'(x) = 0$, то $f(x) = const$ на (a, b);

Ясно, что точка максимума функции — это точка, где возрастание функции сменяется её убыванием, в точке минимума. Соответственно убывание функции сменяется её возрастанием. Поэтому точки экстремума — это точки, где f(x) меняет знак.

Теорема 2 (первое достаточное условие экстремума) : Пусть функция f(x) непрерывна в некоторой окрестности X точки x_0, и $f'(x)$ непрерывна в X кроме, быть может, точки x_0.

Если для любых $x \in X$

а) при $x < x_0$ $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, то x_0 — точка максимума функции $y = f(x)$

б) при $x < x_0$ $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, то x_0 — точка минимума функции $y = f(x)$

в) если при переходе через x_0 $f'(x)$ не меняет знак, то x_0 не является точкой экстремума функции $y = f(x)$

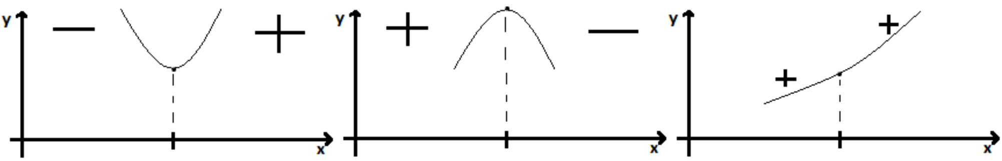


Рис.2

Замечание: Возрастание функции может смениться убыванием (если наоборот) не только в точках экстремума, но и в точках разрыва функции.

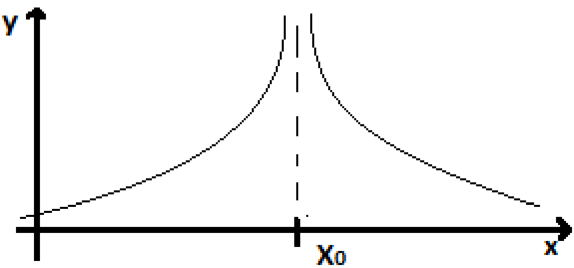


Рис.3

x_0 — точка разрыва

Если в точке x_0 $f'(x)$ меня- ет знак, то можно утверждать, что x_0 — либо точка экстремума, либо точка разрыва f(x).

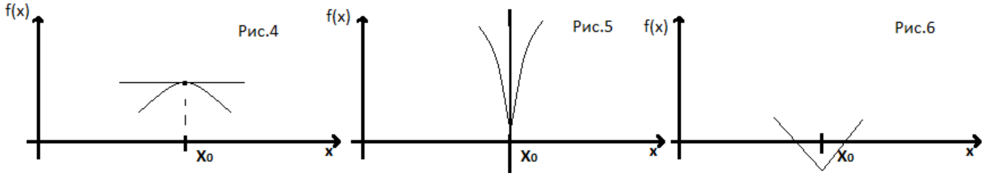
Теорема 3 (необходимое условие экстремума) :

Если x_0 точка экстремума f(x), то возможен один из трёх вариантов:

а) $f'(x_0) = 0$ (Рис.4)

б) $f'(x_0) = \infty$ (Рис.5), (« острый экстремум »)

в) $f'(x_0)$ не существует (Рис.6)



Геометрическое объяснение: на рисунках изображён график функции и касательная ℓ, проведённая в точке x_0. Угловой коэффициент касательной обозначим k, ϕ — угол наклона ℓ к оси OX.

Учтём, что $k = \text{tg}\,\phi = f'(x_0)$.

На Рис.4 $\ell \parallel OX$, $\phi = 0$, $k = 0$, $f'(x_0) = 0$.

На Рис.5 $\ell \perp OX$, $\phi = 90°$, $k = \infty$, $f'(x_0) = \infty$.

Определение: x_0, называется критической точкой f(x), если для неё выполняется одно из условий а), б) или в) теоремы 3.

Замечание: Условия теоремы 3 являются необходимыми, но не достаточными. Функция может иметь экстремум только в критических точках. Но критическая точка не обязательно является точкой экстремума f(x).

Для того, чтобы утверждать, что критическая точка является точкой экстремума, необходимо еще проверить смену знака f′(x) в ней.

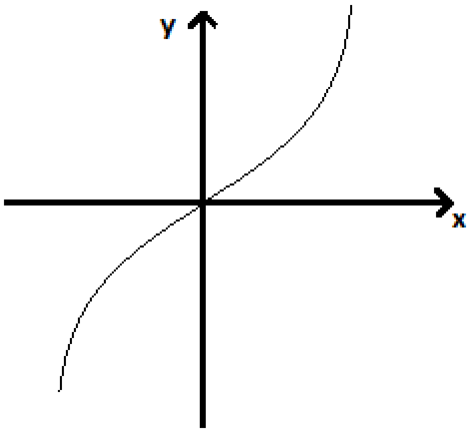


Рис.7

Пример: $y = x^3$, $f'(x) = 3x^2 = 0$, $x = 0$ — критическая точка. Легко видеть, что $x = 0$ не является экстремумом $f(x)$. (Рис.7)

План нахождения интервалов монотонности и экстремумов

1. Выписать область определения $f(x)$ (00$\varnothing$).
2. Найти $f'(x)$.
3. Выявить критические точки $f(x)$, они являются решениями уравнений $f'(x) = 0$ и $f'(x) = \infty$.
4. Определить интервалы знакопостоянства $f'(x)$ — интервалы монотонности $f(x)$.
5. Исследовать смену знака производной при переходе через каждое критическое значение, принадлежащее 00$\varnothing$. Если $f(x)$ меняет знак, то критическая точка является точкой экстремума.

ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ КРИВОЙ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА.

Введем декартову прямоугольную систему координат и рассмотрим в ней график кривой заданной функцией $f(x)$.

Определение: Говорят, что кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a,b), если все точки кривой лежат ниже её касательной на этом интервале; кривая обращена выпуклостью вниз на интервале (b,c), если все точки кривой лежат выше её касательной на этом интервале. Кривую, обращенную выпуклостью вверх, будем называть выпуклой, а обращенную выпуклостью вниз — вогнутой (Рис.8)

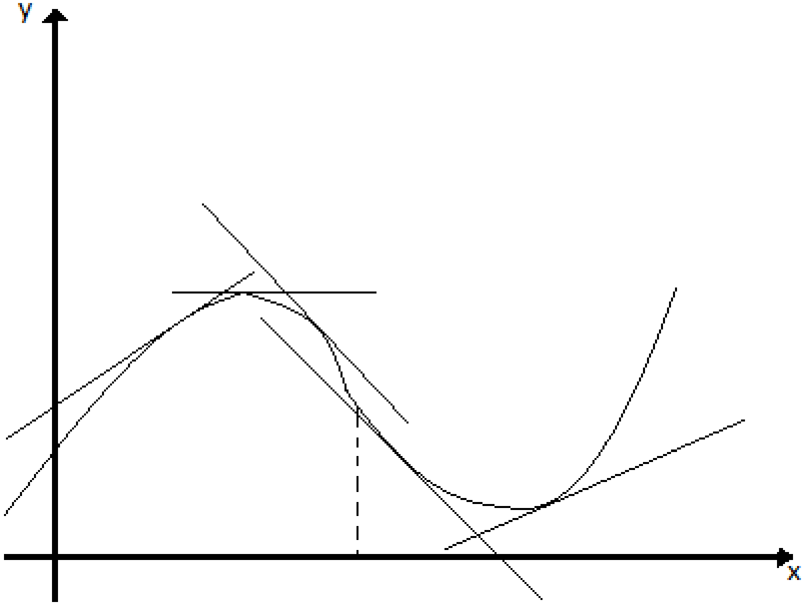


Рис.8

Рис.9

Теорема 4. Если во всех точках интервала (a, b)

а) $f''(x) < 0$, то кривая $y = f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью вверх (кривая выпукла).

б) $f''(x) > 0$, то кривая $y = f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью вниз (кривая вогнута).

Следствие 1. Если $f''(x)$ меняет знаки переходя через некоторую точку a, то a является либо точкой перегиба, либо точкой разрыва функции $y = f(x)$.

Следствие 2. $f''(x)$ меняет знак либо в точке перегиба, либо в точке разрыва функции $y = f(x)$.

Пусть $f''(x)$ меняет знак переходя через точку a. Это возможно в одном из трёх случаев: а) $f''(a) = 0$; б) $f''(a) = \infty$; в) $f''(a)$ не существует. Точки для которых выполняется одно из условий, называются критическими точками второго рода функции $f(x)$. Но критическая точка второго рода не обязательно является точкой перегиба функции $f(x)$.

Пример. $f(x) = x^4$; $f'(x) = 4x^3$; $f''(x) = 12x^2 \geq 0$. $x = 0$ — критическая точка второго рода функции. Но $x = 0$ не является точкой перегиба, не выполняется условие смены знака $f''(x)$.

Теорема 5: (Достаточные условия того, что данная точка кривой является точкой перегиба).

Пусть $y = f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки a. Путь a — критическая точка второго рода функции и при переходе через значение $x = a$ производная $f''(x)$ меняет знак. Тогда точка кривой с абсциссой $x = a$ есть точка перегиба.

Правило исследования на выпуклость, вогнутость, точку перегиба:

1. Находим область определения функции $f(x)$ (ООФ).
2. Находим $f'(x)$.
3. Находим $f''(x)$.
4. Находим критические точки второго рода. Они являются решениями уравнений $f''(X) = 0$; $f''(X) = \infty$; а также точками, где $f''(X)$ не существует.
5. Отмечаем интервалы знакопостоянства $f''(X)$. По знаку $f''(x)$ определяем интервалы выпуклости и вогнутости.
6. Далее, проверяем каждую критическую точку второго рода, принадлежащую ООФ, на смену знака $f''(X)$. Если знаки $f''(X)$ разные, то данная критическая точка — точка перегиба.

АСИМПТОТЫ

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в ∞, кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение: Прямая L называется асимптотой кривой, если расстояние от переменной точки кривой М до L при удалении точки М в бесконечность стремится к нулю.

Асимптоты являются инструментом исследования поведения функции y = f(x) при неограниченном возрастании (по абсолютной величине) абсциссы или ординаты переменной точки кривой.

В соответствии с этим различаются вертикальные асимптоты ($y \to \infty$) и наклонные асимптоты ($x \to \infty$).

Вертикальные асимптоты

Определение: Прямая x = a называется вертикальной асимптотой функции y = f(x), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

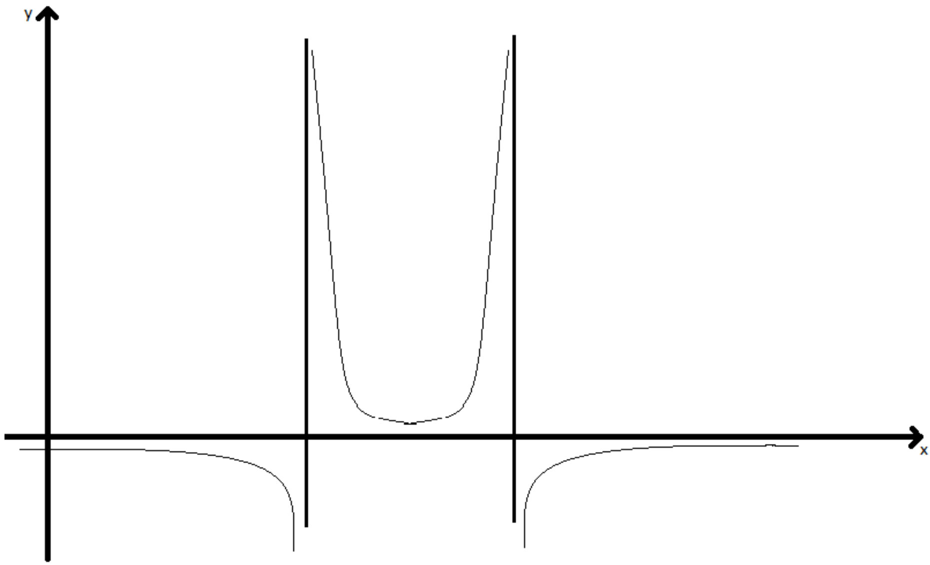


Рис. 10

Вертикальные асимптоты — это вертикальные прямые, они приближают поведение функции вблизи точек разрыва второго рода (точек бесконечного разрыва).

На Рис.10 прямые x = a и x = b — вертикальные асимптоты.

При $x \to a - 0$ (слева) $y \to -\infty$

$x \to a + 0$ (справа) $y \to +\infty$

$x \to b - 0$ $y \to -\infty$

$x \to b + 0$ $y \to +\infty$

Функция может не иметь вертикальных асимптот, если у нее нет точек бесконечного разрыва. Например, функции $y = x^2$ и $y = \frac{x}{x^2+1}$ определены и непрерывны на всей числовой оси, они не имеют вертикальных асимптот.

Пример: 1) $y = \frac{4}{x-3}$ 00Ø : $x \neq 3$ $\lim_{x \to 3} \frac{4}{x-3} = \frac{4}{0} = \infty \to$ прямая x = 3 — вертикальная асимптота.

2) $y = \ln(x-2)$ 00Ø : $x - 2 > 0$ $x > 2$. $\lim_{x \to 2+0} \ln(x-2) = -\infty \to x = 2$ — вертикальная асимптота.

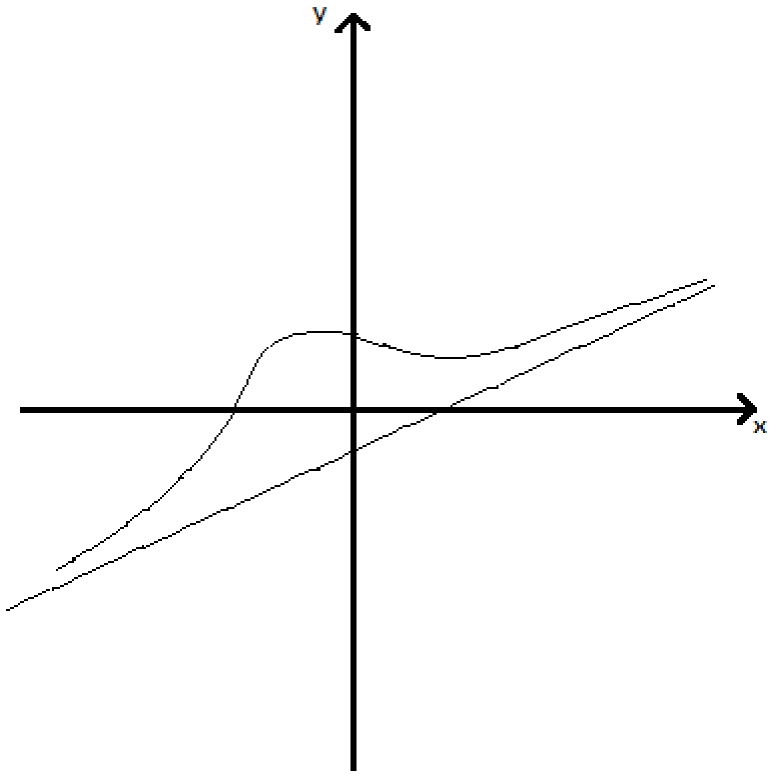


Рис.11

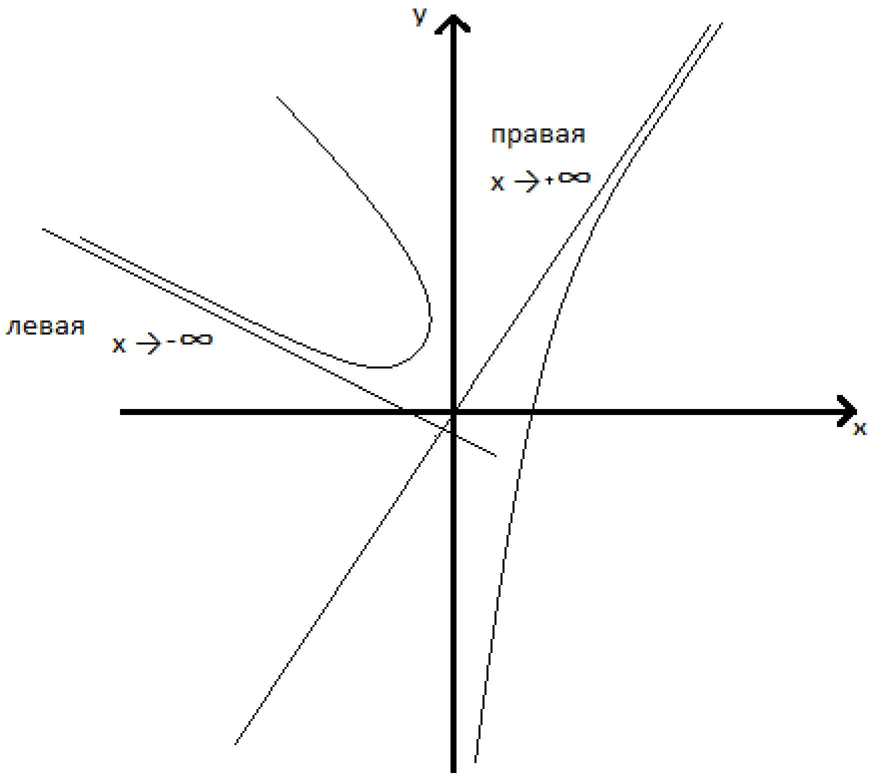


Рис.12

Наклонные асимптоты — это невертикальные прямые они описываются уравнением $y = kx + b$.

Функция может иметь две наклонные асимптоты (Рис.12): правую и левую. Правая приближает функцию при $x \to +\propto$, левая — при $x \to -\propto$.

Иногда, одна и та же прямая является одновременно и правой и левой наклонной асимптотой. (Рис.11)

Кривая может не иметь наклонных асимптот. Например, кривая $y = x^2$ не имеет наклонных асимптот. При $x \to \pm\propto$, $y \to \propto$, ветви кривой уходят в $\propto$, не приближаясь при этом ни к какой прямой.

Для определения коэффициентов k и b в уравнении $y = kx + b$ выведены формулы (1) и (2).

$$k = \lim_{x\to\pm\propto}\frac{f(x)}{x} \quad (1)$$

$b = \lim\limits_{x \to \pm \infty} [f(x) - kx]$ (2)

Для получения уравнения правой асимптоты предела вычисляются при $x \to \pm \infty$, левой — при $x \to -\infty$.

Если вычисляемые пределы существуют и конечны, то прямая y = kx + b является асимптотой. Если хотя бы один из пределов не существует или равен ∞, то кривая не имеет правой (левой) наклонной асимптоты.

Общая схема исследования функции

1. Найти область определения функции (ООФ), точки разрыва, вертикальные асимптоты.
2. Выявить возможную симметрию графика (четность, нечетность функции).
3. Найти точки пересечения с осями координат.
4. Найти интервалы монотонности, экстремум.
5. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.
6. Исследовать поведение функции при $x \to \pm \infty$. Найти наклонные асимптоты.

Заключение.

Если для любого x f(-x) = f(x) функция называется четной; если f(-x) = - f(x), то функция называется нечетной.

Графики четных функций симметричны относительно оси ОУ, нечетных — относительно начала координат.

Функции, не обладающие свойствами четности или нечетности, называются функциями общего вида.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1) Определить интервалы монотонности и точки экстремума функции

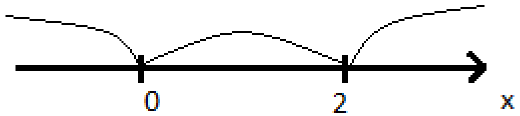
$У = \frac{x^3+4}{x^2}$ Решение:

ООФ : $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, x = 0 – точка разрыва

$У' = \frac{3x^4 - 2x(x^3+4)}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$

У′ = 0 $x^3 = 0$ x=0 не является точкой экстремума, так как x = 0 – точка разрыва; x = 2 – критическая точка.

Определите интервалы знакопостоянства $f'(x)$



	$-\infty,0$	0	(0, 2)	2	$2, \infty$
знак y'	+	точка раз-рыва	—	min	+

Ответ: x = 2 -- точка минимума

$У_{min}= y(2) = \frac{2^2+4}{2^2} = 3.$

f(x) возрастает на интервалах $(-\propto, 0)$ и $(2, \propto)$, убывает на интервале (0, 2).

2) Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба y = $\ln(1 + x^2)$

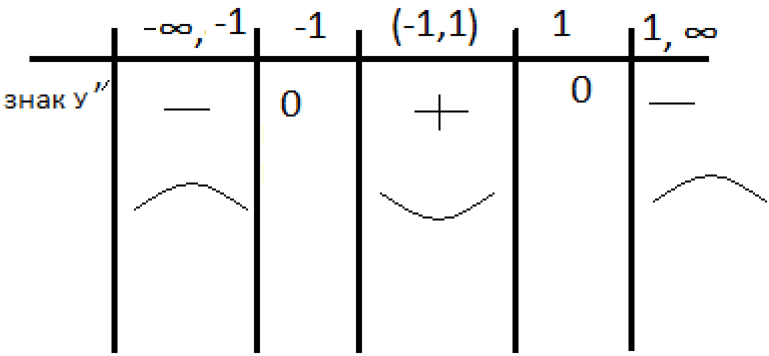
Решение

ООФ: x ϵ $(-\propto, \propto)$, так как условие $1 + x^2 > 0$, выполняется на всей числовой оси.

$У' = \frac{2x}{1+x^2}$, $У'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

Критические точки второго рода :

$У'' \neq \propto$, так как $1 + x^2 \neq 0$.



Ответ: $(-\propto, -1)$, $(1, \propto)$ – интервалы выпуклости, (-1,1) – интервалы вогнутости

x = -1 и x = 1 – точки перегиба.

3) Найти асимптоты функции

$y = \ln(1+x)$

Решение

ООФ : 1+x > 0 x> -1 $(-1, \propto)$

$\lim\limits_{x\to -1+0} \ln(1+x) = -\propto$

Прямая x = -1 – вертикальная асимптота

$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = [\frac{\propto}{\propto}] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{[\ln(1+x)]'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+x} = 0.$

$b = \lim\limits_{x\to+\propto} \ln(1+x) = \propto$

Наклонных асимптот нет.

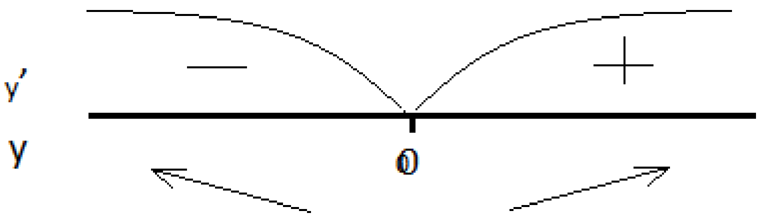
3) Исследовать функцию и построить график

а) $y = x + e^{-x}$

1. ООФ : x ∈ $(-\propto, \propto)$, точек разрыва нет, верикальных асимптот нет.
2. $f(-x) = -x + e^{x} \neq f(x)$; $\neq -f(x)$ функция общего вида
3. x = 0 y = 1, A (0,1) – точка пересечения с осью ОУ
4. $y' = 1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x - 1}{e^x}$

Критические точки : $y' = 0$ $e^x = 1$ $x = 0$

$y' \neq \propto$ так как $e^x \neq 0$



При x ∈ (0, ∝)   y′ > 0   f(x) возрастает
x ∈ (−∝, 0)   y′ < 0   f(x) убывает
x = 0 – точка минимума; $y_{min} = y(0) = 1$
A(0,1) – точка минимума

5. $y'' = e^{-x} > 0$ для любого x критических точек второго рода нет, точек перегиба нет. Кривая выпукла на всей числовой оси.
6. Наклонные асимптоты.

Правая : $k = \lim\limits_{x\to+\propto} \frac{x+e^{-x}}{x} = [\,\frac{\propto}{\propto}] = \lim\limits_{x\to+\propto} (1 - \frac{1}{xe^{x}})$ = 1

$b = \lim\limits_{x\to+\propto} (x + e^{-x} - x\,) = 0$

Прямая y = x – правая наклонная асимптота.

Левая: $k = \lim\limits_{x\to+\propto} \frac{x+e^{-x}}{x} = [\,\frac{\propto}{\propto}] = \lim\limits_{x\to+\propto} (1 + \frac{e^{-x}}{x}) = \propto$

$\lim\limits_{x\to-\propto} \frac{e^{x}}{x} = [\,\frac{\propto}{\propto}] = \lim\limits_{x\to-\propto} \frac{(e^{x})'}{(x)'} = \lim - e^{-x} = \propto$

Левой наклонной асимптоты нет.

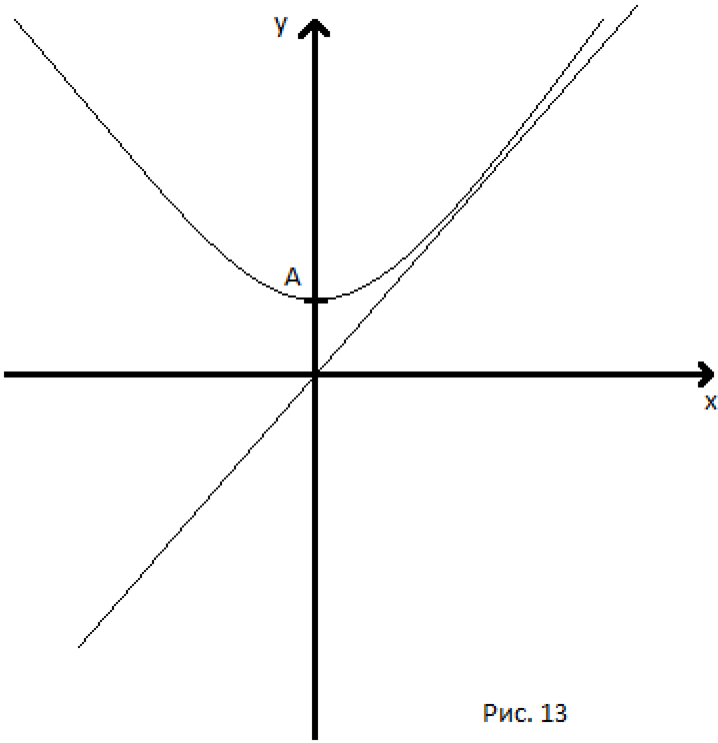


Рис. 13

б) $y = \frac{x}{1+x^2}$ Решение

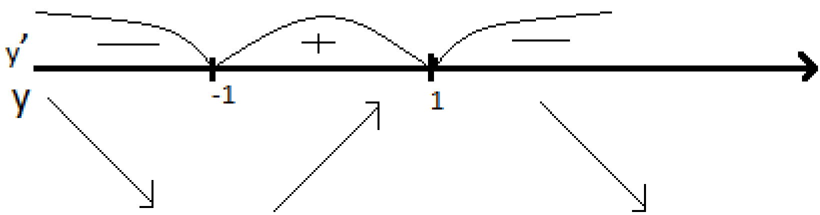
1. ООФ : x ∈ (-∝, ∝), точек разрыва и вертикальных асимптот нет

2. $f(-x) = \frac{-x}{1+(-x^2)} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x)$ – функция нечетна, график симметричен относительно начала координат.

3. y(0) =. График проходит через начало координат

4. $y' = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

Критические точки : $y' = 0$, $1 - x^2 = 0$, $x = \pm 1$, $y' \neq$ ∝



При x ∈ (-∝ ,1), y'< 0 функция убывает

$x \in (-1, 1)$, $y' > 0$ функция возрастает

$x \in (1, \infty)$, $y' < 0$ функция убывает

$x = -1$ – точка минимума ; $y_{min} = y(-1) = -0{,}5$

$x = 1$ – точка максимума ; $y_{max} = y(1) = 0{,}5$

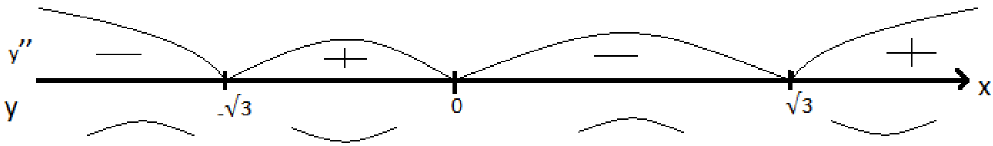
Точка А $(-1; -0{,}5)$ – минимум, В$(1, 0{,}5)$ – максимум

5. $y'' = \frac{-2x(1+x^2)-2(1+x^2)\cdot 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

Критические точки второго рода:

$y' = 0$, $2x(x^2-3) = 0$ $x_1 = 0$ $x_2 = \sqrt{3}$ $x_3 = -\sqrt{3}$

$y'' \neq \infty$



При $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$ $y'' < 0$ – кривая выпуклая

$x \in (-\sqrt{3}, 0)$ $y'' > 0$ – кривая вогнутая

$x \in (0, \sqrt{3})$ $y'' < 0$ – кривая выпуклая

$x \in (\sqrt{3}, \infty)$ $y'' > 0$ – кривая вогнутая

$x = 0$, $x \neq \sqrt{3}$ -- точки перегиба .

$y(0) = 0$ О(0,0)—точка перегиба

$y(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ C $\left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ – точка перегиба

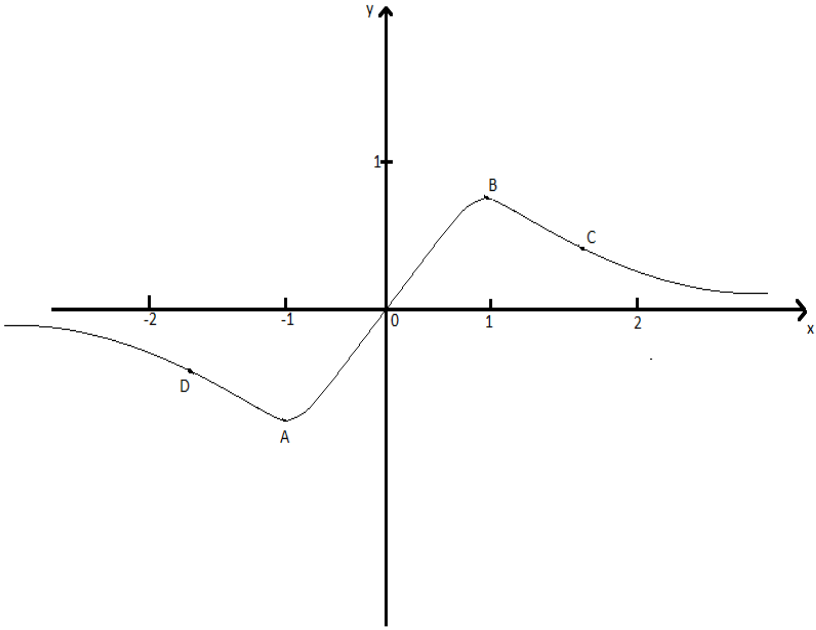
$y(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ D $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ – точка перегиба

5. Наклонить асимптоты : $y = kx + b$

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{(1+x^2)x} = 0$ $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$

Прямая $y = 0$ – правая и левая наклонная асимптота

.



ЗАДАНИЯ

Тип 1. Исследовать функцию на экстремумы.

1) $y = x - \sqrt[3]{x^2} - 3$

2) $y = \frac{1}{e^{2x} - 1}$

3) $y = x^2 - 2\ln x$

4) $y = x - \ln x$

5) $y = \ln(x^2 + 2x)$

6) $y = x^2 \ln x$

7) $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$

8) $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

9) $y = (x - 1) \cdot e^{2x+1}$

10) $y = x \cdot e^{-x^2}$

11) $y = e^{\frac{1}{3-x}}$

12) $y = e^{\frac{1}{2-x}}$

13) $y = x^{\frac{2}{3}} \cdot e^{x}$

14) $y = \ln(x^2 - 4x + 8)$

15) $y = e^{2x - x^2}$

16) $y = e^{x^3}$

17) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

18) $y = \ln(1 - x^2)$

19) $y = x^2 e^{2x-1}$

20) $y = \frac{\ln x}{x}$

21) $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$

22) $y = x \ln x$

23) $y = x e^{2x-1}$

24) $y = \ln(x^2 - 4)$

25) $y = e^{\frac{x}{x-2}}$

26) $y = \frac{e^x}{x}$

27) $y = \ln\frac{x-1}{x+2}$

28) $y = x - \ln(x^2 + 1)$

29) $y = x \ln(x^2 + 1)$

30) $y = \ln(2x^2 + 3)$

Тип 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке [a, b]:

1) $y = \frac{x+6}{e^x+13}, [-5, 5]$

2) $y = \sqrt[3]{2x^2 + 1}, [-2, 1]$

3) $y = 2x - \sqrt{x}, [0,4]$

4) $y = -3x^4 + 6x^2 - 1, [-2, 2]$

5) $y = \frac{\ln x}{2} - \operatorname{arctg} x, \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$

6) $y = \frac{x-3}{x^2+7}, [-2, 3]$

7) $y = \frac{x-2}{x^2+7}, [-2, 3]$

8) $y = \frac{x-3}{x^2+16}, [-5, 5]$

9) $y = x^4 - 8x^2 + 3, [-2, 2]$

10) $y = 2\sin x + \sin 2x, \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

11) $y = e^{2x} - e^{-2x}, [-2, 1]$

12) $y = 2\sin x + \cos 2x, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

13) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 2, [-1,2]$

14) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, [-3, 2]$

15) $y = \sin x + \cos x, [0, \frac{\pi}{2}]$

16) $y = x - 2\ln x, [1, e]$

17) $y = \frac{x-4}{x^2+9}, [-4, 6]$

18) $y = \sqrt{4 - x^2}, [-2, 2]$

19) $y = \frac{4-x^2}{4+x^2}, [-1, 3]$

20) $y = \operatorname{tg} x - x, \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

21) $y = \frac{1}{x^2-1}, \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

22) $y = x^4 - 2x^2 + 3, [-2, 1]$

23) $y = x + \sqrt{x}, [0, 4]$

24) $y = x + \frac{1}{x}, [\frac{1}{2}, 5]$

25) $y = x^3 - 3x^2 + 1, [-1, 4]$

26) $y = \frac{x}{2} + \cos x, [\frac{\pi}{2}, \pi]$

27) $y = 2x + \cos 2x, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

28) $y = \frac{1}{1+x^2}, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

29) $y = x + \sin x, \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

30) $y = \frac{x-5}{x^2+1}, [-3, 7]$

31) $y = x - 2\ln x, [1, e]$

32) $y = \frac{x-4}{x^2+9}, [-4, 6]$

33) $y = \sqrt{4 - x^2}, [-2, 2]$

34) $y = \frac{4-x^2}{4+x^2}, [-1, 3]$

35) $y = \operatorname{tg} x - x, \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

36) $y = \frac{1}{x^2-1}, \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

37) $y = x^4 - 2x^2 + 3, [-2, 1]$

38) $y = x + \sqrt{x}, [0, 4]$

39) $y = x + \frac{1}{x}, [\frac{1}{2}, 5]$

40) $y = x^3 - 3x^2 + 1, [-1, 4]$

41) $y = \frac{x}{2} + \cos x, [\frac{\pi}{2}, \pi]$

42) $y = 2x + \cos 2x, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

43) $y = \frac{1}{1+x^2}, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

44) $y = x + \sin x, \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

45) $y = \frac{x-5}{x^2+1}, [-3, 7]$

Тип 3. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции.

1) $y = \frac{e^x}{e^x+1}$

2) $y = (x-1)\cdot e^{2x+1}$

3) $y = e^{\frac{1}{1-x}}$

4) $y = x^{\frac{2}{3}\cdot e^{-x}}$

5) $y = e^{2x-x^2}$

6) $y = x^2\cdot e^{-x}$

7) $y = \ln(x^2+2x+2)$

8) $y = x\cdot e^{2x-1}$

9) $y = e^{\frac{1}{x+2}}$

10) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$

11) $y = x^2\ln x$

12) $y = e^{\frac{1}{x}}$

13) $y = x\cdot e^{-x^2}$

14) $y = x\cdot e^{-x}$

15) $y = \ln(x^2-4x+8)$

16) $y = \ln(1-x^2)$

17) $y = e^{-x^2}$

18) $y = \ln(2x^2+3)$

19) $y = \frac{\ln x}{x}$

20) $y = e^{\frac{1}{2-x}}$

21) $y = \frac{e^x}{x}$

22) $y = xe^{3x}$

23) $y = x\cdot e^{x-1}$

24) $y = \frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$

25) $y = \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$

26) $y = x^2 \ln x$

27) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$

28) $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

29) $y = x \cdot e^{3x}$

30) $y = e^{\frac{1}{2x+1}}$

Тип 4. Найти асимптоты графика функции.

1) $y = \frac{5x}{x-3}$

2) $y = 3x + \frac{3x}{x-1}$

3) $y = \frac{x}{x^2+1}$

4) $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$

5) $y = xe^{\frac{1}{x}}$

6) $y = x\, arctg\, x$

7) $y = \frac{x^2}{1+x}$

8) $y = \frac{x^2-6+3}{x-6}$

9) $y = x + \frac{\sin x}{x}$

10) $y = \ln(9 - x^2)$

11) $y = \frac{2x^3}{x^2-4}$

12) $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$

13) $y = \sqrt[3]{x^2(x+1)}$

14) $y = \frac{x^2-2x+3}{x+2}$

15) $y = x^2 \cdot e^{-x}$

16) $y = x + 2arctg\, x$

17) $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$

18) $y = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x$

19) $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$

20) $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

21) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$

22) $y = \frac{x^3}{x^2-4}$

23) $y = \frac{7x^2-3}{x}$

24) $y = \frac{x^3}{(x+2)(x+3)}$

25) $y = \frac{x^2-x-6}{x-2}$

26) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$

27) $y = \frac{x^4}{(x-2)^3}$

28) $y = \frac{2x^3}{x^2+3}$

29) $y = \frac{x^3}{x^2-x+10}$

30) $y = \frac{x^3}{(3x-2)^2}$

Тип 5. Исследовать функции и построить графики

1) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

$y = (x-1)e^{3x+1}$

2) $y = \frac{x}{9-x^2}$

$y = x^2 - 2\ln x$

3) $y = \frac{2}{x^2+2x}$

$y = x^3 e^{-x}$

4) $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

$y = \ln(x^2 + 4x)$

5) $y = \frac{1-2x}{x^2-x+2}$

$y = e^{-x^2}$

6) $y = 4x^2 + \frac{5}{x}$

$y = x - \ln(x+1)$

7) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$

$y = \ln(x^2 - 4x + 8)$

8) $y = \frac{1}{x^2-1}$

$$y = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

9) $y = \frac{1}{x^2-1}$

$y = \ln(4 - x^2)$

10) $y = \frac{x^2+5}{x+2}$, $y = xe^{-x}$

11) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ $\qquad y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

12) $y = \frac{1}{x^2-9}$ $\qquad y = x\ln x$

13) $y = \frac{2x+1}{x^2}$ $\qquad y = \frac{e^x}{x}$

14) $y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$ $\qquad y = \frac{\ln x}{x}$

15) $y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$ $\qquad y = e^{\frac{1}{x}}$

16) $y = \frac{x}{x^2+1}$ $\qquad y = ln\frac{1+x}{1-x}$

17) $y = x^2 + \frac{16}{x}$ $\qquad y = \ln(x^2+9)$

18) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ $\qquad y = x - \ln x$

19) $y = \frac{x-1}{x^2-2x}$ $\qquad y = e^{\frac{1}{x-2}}$

20) $y = \frac{x^4}{x^3-1}$ $\qquad y = \frac{1}{e^x-1}$

21) $y = x + \frac{1}{x}$ $\qquad y = \ln(x^2+3x+2)$

22) $= \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$ $\qquad y = x^2\ln x$

23) $y = \frac{x}{(x-1)^2}$ $\qquad y = \frac{1}{e^{2x}-1}$

24) $y = \frac{x^3-1}{4x^2}$ $\qquad y = xe^x$

25) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ $\qquad y = \ln(x^2-x)$

26) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\qquad y = x + e^{-x}$

27) $y = \frac{x^2+1}{2x}$ $\qquad y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$

28) $y = \left(1 + \frac{3}{x-1}\right)^2$ $\qquad y = x^2\ln(x+2)$

29) $y = \frac{2}{x^2+x+1}$ $\qquad y = \ln(x^2-2x+2)$