ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Математический анализ»

Авторы
Пожарский Д. А.,
Рябых Г. Ю.,
Пристинская О. В.,
Фролова Н. В.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения технических и экономических направлений и специальностей

Авторы

профессор кафедры «Прикладная математика» Пожарский Д.А.,
профессор кафедры «Прикладная математика» Рябых Г.Ю.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пристинская О.В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.

Оглавление

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1.Задачи базового уровня

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Задача 1. Найти общее решение:

1. $y' - 2^{x-y} = 0,$
2. $tg\, x * tg\, y = y',$
3. $(1 + x^2)y' + \ y = 0,$
4. $4yy' + y^2 = 4,$
5. $y^2y' - 1 + 2x = 0,$
6. $10yy' = y^2 - 25,$
7. $y\, tg^3x = y'cos^2x,$
8. $(1 - y^3)y'\sqrt{1 - x^2} = y,$
9. $y^2(1 + x) + y'x^2(1 - y) = 0,$
10. $3y - 1 = y'(3x - 1),$
11. $sin^2x\, y' = \sqrt{1 - y^2},$
12. $(1 + x) + (1 - y)xy' = 0,$
13. $(1 - x^2)y' = 2xy^2,$
14. $y'ctg\, x + y = 2,$
15. $3\sqrt[3]{y^2} - y = 0,$
16. $y' + x^3cos^2y = 0,$
17. $2 - 4x^2\, yy' = y^2,$
18. $\sqrt{x + 3}y' - ctg\, y = 0,$
19. $\sqrt{x^2 + 4}y' = 3^y,$
20. $\sqrt{9 - x^2}y' = \sqrt{4 + y^2},$
21. $y'(1 - y) = 1 + x,$
22. $y'cos^2x = 5 + x,$
23. $3 - y^2 + x^2y' = 0,$
24. $6y' = \frac{9}{y} - y, y \neq 0,$
25. $xyy' = 1 - x^2,$
26. $xy + \sqrt{1 + x^2}y' = 0$

Задача 2. Решить задачу Коши

1.	$\ln x \cos x = y,$	$y(0) = e$
2.	$e^y(1 + y') = 1,$	$y(0) = \ln 2$
3.	$(1 + e^{2x})y^2y' = e^x,$	$y(0) = 1$
4.	$yy' \sin yy' + 2x = 0,$	$y(1) = \frac{\pi}{2}$

5. $x\sqrt{1+y^2} = -yy'(1+x^2),$ $y(0) = 1$
6. $yy' + xe^y = 0,$ $y(1) = 1$
7. $\sqrt{1-y^2} = yy'(1+x^2),$ $y(0) = 1$
8. $y'\ln y - y = 0,$ $y(1) = e$
9. $y\, ln^3y + y'\sqrt{1+x} = 0,$ $y(-1) = e$
10. $x\sqrt{1+y^3} = y'\sqrt{1-x^2},$ $y(0) = 0$
11. $xy + (x+1)y' = 0,$ $y(0) = e$
12. $\sqrt{1+y^2} = xyy',$ $y(1) = 1$
13. $y'\ln y + \sin 3x = 0,$ $y(0) = e$
14. $(x+3)^5 y' = y\ln y,$ $y(0) = e$
15. $yy'(x-3) + e^{y^2} = 0,$ $y(2) = 1$
16. $y' = -2\sqrt{y}\ln x,$ $y(1) = 0$
17. $e^x e^y y' + x = 0,$ $y(0) = 0$
18. $1 + y^2 = xyy',$ $y(1) = 1$
19. $x(1+y^6) = y^2(1-x^4)y',$ $y(0) = 1$
20. $y' - xy\ln x = 0,$ $y(1) = 1$
21. $x\ \sin 2x = yy',$ $y(0) = 1$
22. $x^2y'\ln y - 2 = 0,$ $y(1) = e$
23. $e^x \cos y\, y' + x = 0,$ $y(0) = 0$
24. $e^x y' = x cos^2 y,$ $y(0) = 0$
25. $y'e^x tgy = x,$ $y(0) = 0$
26. $y' - y\ln x = 0,$ $y(1) = 1$

Задача 3. Найти общее решение линейного ДУ 1-го порядка:

1. $y' = \frac{3y}{x} + x,$
2. $xy' + x^2 + xy = y,$
3. $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x,$
4. $xy' - y = x^2\cos x,$
5. $y' + 2xy = xe^{-x^2},$
6. $y' + 2y = 4x,$
7. $y' + \frac{y}{x} = x^2,$
8. $xy' - 2y = x^4,$
9. $y' + 2y = e^{-x},$
10. $y' + 2xy = e^{-x^2},$
11. $y'x - y = x^2,$

Задача 4. Найти общее решение ДУ типа Бернулли:

1. $(x-1)y' - y = y^2.$
2. $y'x + t = -xy^2.$
3. $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2y^{\frac{4}{3}}.$
4. $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4.$
5. $xy' + 2y = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$
6. $2xy' = y - y^3\sin x.$
7. $3y' + y = \frac{1}{y^2}.$
8. $xy' + 2y - x^5y^2 = 0.$
9. $xy' + y = y^2\ln x.$
10. $3xy^2y' - 2y^3 = x^3.$
11. $y' + 2xy = y^2e^{x^2}.$

12. $y'x^2 - 2xy = 3$,
13. $y' - \frac{2y}{1+x} = (1+x)^3$,
14. $y'x\ln x - y = 3x^3\ln^2 x$,
15. $xy' - 2y = x^3\cos x$,
16. $y' - 2\frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$,
17. $xy' + y - e^x = 0$,
18. $y'\cos x + y\sin x = 1$,
19. $y' = \frac{y+1}{x} + 1$,
20. $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$,
21. $y' - \frac{y}{x} = xe^x$,
22. $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$,
23. $e^x y' + ye^x = 1$,
24. $xy' = xy + e^x$,
25. $xy' - 2y = 2x^4$,
26. $(x+1)y' - 2y - (x+1)^4 = 0$.

12. $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$.
13. $y' - ytgx + y^2\cos x = 0$.
14. $2y'\sin x + y\cos x = y^3\sin^2 x$.
15. $y' + 2y = y^2 e^x$.
16. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.
17. $y' - y^4\cos x - ytgx = 0$.
18. $xy' + y - \frac{1}{2}y^3 x = 0$
19. $y' + \frac{y}{x} = x^5 y^6$.
20. $yy' = \frac{y^2}{x} - x^3$.
21. $xy' + y = \frac{y^2}{x}$.
22. $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}$.
23. $xy' - y = xy^2 e^x$
24. $y' - \frac{x}{1-x^2}y = 5y^2$.
25. $y' = y - y^2 e^x$.
26. $y' - 2x\sqrt{y} - \frac{4y}{x} = 0$.

Задача 5. Найти общее решение ДУ, однородного относительно x и y:

1. $x + y - xy' = 0$,
2. $y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0$,
3. $x\left(y' + e^{\frac{y}{x}}\right) = y$,
4. $xy' - y = x\sin\frac{y}{x}$,
5. $x - y + xy' = 0$,
6. $(x - y\cos\frac{y}{x}) + xy'\cos\frac{y}{x} = 0$,
7. $y^2 + x^2 y' = xyy'$,
8. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$,
9. $xyy' - y^2 = 2x^2$,
10. $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$,
11. $xy - (x^2 - xy)y' = 0$,
12. $x\,tg\frac{y}{x} = xy' - y$,
13. $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$,

Задача 6. Проинтегрировать ДУ вида $y'' = f(x)$:

1. $y'' = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$.
2. $y'' = 2\sin x\cos^2 x$.
3. $y'' = \frac{\ln x}{x^2}$.
4. $y'' = \cos(1 - 3x)$.
5. $y'' = 2x\ln x$.
6. $y'' = x + \cos 2x$.
7. $y'' = \frac{2}{x}$.
8. $y'' = x^2\ln 2x$.
9. $y'' = \cos^2 x$.
10. $y'' = arctg\,x$.
11. $y'' = \sin^2 3x$.
12. $y'' = \frac{x+1}{x-1}$.
13. $y'' = \cos^2 5x$.

14. $y - xy' = yy'$,
15. $x + 2y - xy' = 0$,
16. $y + \sqrt{xy} - xy' = 0$,
17. $x^3y' = y(y^2 + x^2)$,
18. $xy + (y^2 - x^2)y' = 0$,
19. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$,
20. $3xy' = y(3 - \ln\frac{y}{x})$,
21. $xy^2y' - x^3 - y^3 = 0$,
22. $xy'\sin\frac{y}{x} + x = y\sin\frac{y}{x}$,
23. $y' = 4 + \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2$,
24. $(5xy - x^2)y' - 5y^2 = 0$,
25. $x^2 + y^2 = 2xyy'$,
26. x+2y-xy'=0,

14. $y'' = (x + 1)e^x$.
15. $y'' = \frac{1}{(2x+3)^3}$.
16. $y'' = \sin(5 - 2x)$.
17. $y'' = sin^2x cos^2x$.
18. $y'' = \frac{1}{x^2+x}$.
19. $y'' = cos^3x$.
20. $y'' = \frac{1}{1+x^2}$.
21. $y'' = \cos x + \sin 3x$.
22. $y'' = -\frac{1}{x^2}$.
23. $y'' = xe^x$.
24. $y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.
25. $y'' = \frac{1}{3x-2}$.
26. $y'' = 2 + \frac{3}{x}$.

Найти общее решение линейных однородных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

Задача 7.

1. $4y'' + 9y' + 2y = 0$,
2. $y'' + 5y' + 6y = 0$,
3. $y'' - y' - 2y = 0$,
4. $y'' + 2y' - 3y = 0$,
5. $y'' + 6y' = 0$,
6. $2y'' - 5y' + 2y = 0$,
7. $y'' - 3y' + 2y = 0$,
8. $y'' - 16y = 0$,
9. $y'' - 7y' + 6y = 0$,
10. $4y'' - 13y' + 3y = 0$,
11. $y'' - 5y' = 0$,
12. $y'' + y' - 2y = 0$,
13. $y'' - 5y' + 6y = 0$,
14. $3y'' - 13y' + 4y = 0$,
15. $y'' - 3y' = 0$,

Задача 8.

1. $y'' + 3y' + 2{,}25y = 0$,
2. $y'' - 10y' + 25y = 0$,
3. $2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0$,
4. $y'' + 7y' + 12{,}25y = 0$,
5. $y'' - 6y' + 9y = 0$,
6. $y'' - 0{,}6y' + 0{,}09y = 0$,
7. $16y'' - 40y' + 25y = 0$,
8. $y'' + 13y' + 42{,}25y = 0$,
9. $y'' - 14y' + 49y = 0$,
10. $y'' + 2\sqrt{3}y' + 3y = 0$,
11. $36y'' - 60y' + 25y = 0$,
12. $y'' + 15y' + 56{,}25y = 0$,
13. $y'' + 12y' + 36y = 0$,
15. $y'' - 11y' + 30{,}25y = 0$,
16. $3y'' - 2\sqrt{3}y' + y = 0$,
17. $36y'' + 12y' + y = 0$,

16. $y'' + 3y' - 4y = 0,$
17. $2y'' - 5y' + 3y = 0,$
18. $y'' + 6y' - 7y = 0,$
19. $5y'' + 9y' - 2y = 0,$
20. $y'' - 49y = 0,$
21. $y'' + 8y' - 9y = 0,$
22. $y'' + 4y' - 5y = 0,$
23. $4y'' - 25y = 0,$
24. $y'' + 7y' - 8y = 0,$
25. $y'' - 4y' + 3y = 0,$
26. $y'' - y = 0.$

18. $42{,}25y'' - 13y' + y = 0,$
19. $12{,}25y'' - 7y' + y = 0,$
20. $4y'' - 4y' + y = 0,$
21. $2y'' + 6\sqrt{2}y' + 9y = 0,$
22. $9y'' - 12y' + 4y = 0,$
23. $y'' - 9y' + 20{,}25y = 0,$
24. $y'' + 8y' + 16y = 0,$
25. $y'' - 0{,}8y' + 0{,}16y = 0,$
26. $5y'' - 2\sqrt{5}y' + y = 0,$
27. $y'' - 26y' + 169y = 0.$

Задача 9.

1. $3y'' + 2\sqrt{3}y' + 13y = 0,$
2. $y'' + 10y' + 41y = 0,$
3. $y'' + 1{,}4y' + 4{,}49y = 0,$
4. $y'' - 4y' + 29y = 0,$
5. $y'' + 0{,}6y' + 9{,}09y = 0,$
6. $y'' + 4y' + 20y = 0,$
7. $y'' - 1{,}2y' + 16{,}36y = 0,$
8. $16y'' - 8y' + 65y = 0,$
9. $y'' - 3y' + 14{,}5y = 0,$
10. $y'' - 10y' + 34y = 0,$
11. $y'' + 5y' + 8{,}5y = 0,$
12. $y'' - 4y' + 13y = 0,$
13. $y'' + 2\sqrt{5}y' + 9y = 0,$
14. $y'' - 0{,}8y' + 4{,}16y = 0,$
15. $y'' + 2y' + 17y = 0,$
16. $y'' - 1{,}4y' + 9{,}49y = 0,$
17. $y'' + 2y' + 50y = 0,$
18. $y'' + 6y' + 13y = 0,$
19. $2y'' - 2\sqrt{2}y' + 3y = 0,$
20. $y'' + 2y' + 26y = 0,$
21. $y'' + 3y' + 8{,}5y = 0,$

Задача 10.

1. $y'' + 4y = 0$
2. $y'' + 1{,}44y = 0$
3. $y'' + 25y = 0$
4. $y'' + 49y = 0$
5. $y'' + 9y = 0$
6. $y'' + 16y = 0$
7. $y'' + 36y = 0$
8. $2y'' + 3y = 0$
9. $y'' + 1.21y = 0$
10. $y'' + 64y = 0$
11. $y'' + 81y = 0$
12. $2y'' + 0.72y = 0$
13. $3y'' + 0.48y = 0$
14. $y'' + 121y = 0$
15. $y'' + 225y = 0$
16. $y'' + 0.25y = 0$
17. $y'' + 0.64y = 0$
18. $y'' + 0.36y = 0$
19. $y'' + y = 0$
20. $y'' + 2.56y = 0$
21. $y'' + 289y = 0$

22. $4y'' - 4y' + 17y = 0,$
23. $y'' + 2\sqrt{2}y' + 3y = 0,$
24. $y'' - 2y' + 5y = 0,$
25. $y'' + 2y' + 37y = 0,$
26. $4y'' - 12y' + 13y = 0.$

22. $y'' + 196y = 0$
23. $y'' + 1.69y = 0$
24. $y'' + 0.49y = 0$
25. $y'' + 6.25y = 0$
26. $y'' + 0.04y = 0$

Задача 11. Найти общее решение неоднородного линейного ДУ 2-го порядка:

1. $y'' + 6y' + 9y = x$
2. $y'' - 3y' + 2y = x^2$
3. $y'' - 3y' = cos3x$
4. $y'' + 4y' + 5y = cos4x$
5. $y'' - 8y' + 16y = e^{2x}$
6. $y'' + 1{,}4y' + 4{,}49y = cos0{,}7x$
7. $y'' - 36y = 6x$
8. $y'' + 6y' + 25y = sin3x$
9. $y'' - 2y' + 17y = cos2x$
10. $y'' + 2y' + 37y = sinx$
11. $y'' - 4y' + 5y = sin4x$
12. $y'' - 6y' + 45y = cos3x$
13. $y'' - 25y = 5x$
14. $y'' - 6y' + 25y = cos3x$
15. $y'' - 1{,}4y' + 4{,}49y = sin0{,}7x$
16. $y'' - 5y' + 4y = 5x + 1$
17. $y'' - 16y = 4x$
18. $y'' + 2y' + 10y = sin2x$
19. $y'' - 7y' + 6y = e^{2x}$
20. $y'' - 4y' = sin4x$
21. $y''+6y'+25y=\sin2x$
22. $y''-9y=3x+1$
23. $y''-2y'+37y=\cos x$
24. $y''+8y'+16y=x^2$
25. $y''-4y=2x+4$
26. $y''+y=4xe^x$

Задача 12. Решить задачу Коши:

1. $y'' + y' - 2y = 3e^x,\quad y(0) = 0, y'(0) = 3$
2. $y'' - 2y' + y = 2e^x,\quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
3. $y'' + 9y' - 10y = 11e^x,\quad y(0) = 0, y'(0) = 12$
4. $y'' - y = 2sinx + 2cosx,\quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
5. $y'' + y = 2cosx,\quad y(0) = 1, y'(0) = 2$
6. $y'' - 2y' + y = e^x,\quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
7. $y'' + 4y = 2sin2x,\quad y(0) = 0, y'(0) = 0$
8. $y'' + y' - 6y = (2x^2 + 2x - 7)e^x,\quad y(0) = 0, y'(0) = 0$
9. $y'' + y' = x^3 + 1,\quad y(0) = 4, y'(0) = -3$

10. $y'' + y = 4e^x$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$
11. $y'' - y' = x^2$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$
12. $y'' - y = xsinx$, $y(0) = -3, y'(0) = 5$
13. $y'' + 16y = 5sin2x$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$
14. $y'' - y' - 6y = xe^{2x}$, $y(0) = 0, y'(0) = 3$
15. $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$
16. $y'' - y' = x^3 + x$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$
17. $2y'' + y' - y = 32e^x$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$
18. $y'' + 4y' - 5y = xe^x$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$
19. $y'' + y' = x^2 - x + 3$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$
20. $y'' - y = (2x - 1)e^x$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$
21. y''-y'-2y=e-x(x+2), y(0)=0, y'(0)=0
22. y''-5y'=(12x-7)e-x, y(0)=0, y'(0)=0
23. y''-4y'+5y=2x2ex, y(0)=2, y'(0)=3
24. y''+25y=5cos3x, y(0)=-1, y'(0)=3
25. y''+9y=2, y(0)=2/9, y'(0)=3
26. y''+2y'-3y=7sin2x, y(0)=0, y'(0)=0

2. Задачи повышенного уровня

Определить тип ДУ и найти его общее решение:

Задача 1.

1. $y'\cos^2x+y=tgx$,
2. $y'-ycosx=sinxcosx$,
3. $x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$,
4. $y'=x^2+2x-2y$,
5. $y'+y+4x-1=0$,
6. $y'cosx+y=1-sinx$,
7. $(1+x^2)y'+y=arctgx$,
8. $y'+\frac{y}{x}=2lnx+1$,
9. $(1+x^2)y'=2xy+(1+x^2)^2$,
10. $y'-\frac{2y}{1-x^2}=1+x$,
11. $y'+3y\ tg3x=sin6x$,

12. $y'+2y=e^{3x}$,
13. $y'=2y+e^{x}-x$,
14. $y'=3x^{2}y+x^{5}+x^{2}$,
15. $y'=\frac{2y}{x+1}+e^{x}(x+1)^{2}$,
16. $e^{x^2}y'+2xe^{x^2}=x\sin x$,
17. $x(1-x^{2})y'+(2x^{2}-1)y=x^{3}$,
18. $x(y'-y)=(1+x^{2})e^{x}$,
19. $y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$,
20. $y'=e^{x}-e^{x}y$,
21. $y'\sqrt{1-x^{2}}+y=\arcsin x$,
22. $y'+\frac{1+2x}{x^{2}}y=1$,
23. $xy' - \frac{y}{x+1} = x$,
24. $y'+\frac{xy}{1-x^{2}}=\arcsin x-x$,
25. $y'+\frac{y}{x}=x^{2}e^{-x^{2}}$,
26. $(2x+1)y'=4x+2y$.

Задача 2.

1. $x-y+(x+y)y'=0$.
2. $(\sqrt{xy}-x)y'+y=0$.
3. $x^{2}+2xy+xyy'=0$.
4. $4x^{4}y^{2}y'=4x^{6}+y^{6}$.
5. $xy'-y\cos^{2}(\ln\frac{y}{x})=0$.
6. $x+4y-4(x+y)y'=0$.

7. $xy' = y + x\,tg\frac{y}{x}$.
8. $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$.
9. $y - xy' = 2(x + yy')$.
10. $xy' = y + x\cos\frac{y}{x}$.
11. $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.
12. $(x^2 + yx)y' - 2xy = 0$.
13. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.
14. $yxy' - y^2 + x^2 e^{\frac{y}{x}} = 0$.
15. $(x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x})y = (y\sin\frac{y}{x})y = (y\sin\frac{y}{x} - x\cos\frac{y}{x})xy'$.
16. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.
17. $3y^2 + 3xy + x^2 = (x^2 + 2xy)y'$.
18. $y^2y' = y^2 + xy - x^2$.
19. $(xy' - y)\,arctg\frac{y}{x} = x$.
20. $8y + 10x + (5y + 7x)y' = 0$.
21. $3y\sin\frac{3x}{y} + (y - 3x\sin\frac{3x}{y})y' = o$.
22. $25x + 10y + yy' = 0$.
23. $x - 7y + (7x + 4y)y' = 0$.
24. $x^2y' + y^2 - 2xy = 0$.
25. $xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}$.
26. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$.

Задача 3.

1.$y'-2y\,tgx+y^2\sin x=0$,

2.$y'-\frac{2x}{1+x^2}y=4\sqrt{y}\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$,

3.$y'-2y\sin x+y^2\sin 2x=0$,

4.$(x^3+1)y'+3x^2y=y^2(x^3+1)^2\sin x$,

5.$y'=y^2e^x-y$,

6.$4xy'+3y=e^{-x}x^4y^5$,

7.$y'=y(y^3\cos x+tgx)$,

8.$2y'+y=\frac{x}{y^2}$,

9.$y'+2xy=2xy^2$,

10.$y'+4xy=2xe^{-x^2}*\sqrt{y}$,

11.$y'=y\,ctgx+\frac{y^3}{\sin x}$,

12.$y'-2e^xy=2e^x\sqrt{y}$,

13.$2y'\ln x+\frac{y}{x}=\frac{ln}{y}$,

14.$y'=x\sqrt{y}+\frac{xy}{x^2-1}$,

15.$y'-y\cos x=y^2\cos x$,

16.$y'+xy=x^3y^3$,

17.$(1-x^2)y'-xy=xy^2$,

18.$y'+\frac{2y}{x}=y^2x^2\ln x$,

19.$y'\cos x-y=y^2\cos x(\sin x-1)$,

20.$y'-y=\frac{x+8}{3y^2}$,

21.$\frac{1-x^2}{x}y'-y=4y^2$,

22. $3y'-2y=\frac{x+1}{y^2}$,

23. $2yy'=y^2\cos x+\sin 2x$,

24. $2yy'+y^2+2x=0$,

25. $y+xy'=2y^2x\ln x$,

26. $y'+y=xy^3$.

Задача 4.

1. $y''+2y'+10y=e^{-x}\sin 3x$.
2. $y''+4y=\cos 2x$.
3. $y''+4y'+4y=xe^{-2x}$.
4. $y''-3y'=xe^{3x}$.
5. $y''+9y=\sin 3x$.
6. $y''-2y'=x+2$.
7. $y''+6y'+25y=e^{-3x}\cos 4x$.
8. $y''-y'=2x$.
9. $y''-6y'+9y=e^{3x}$.
10. $y''-3y'=2-6x$.
11. $y''+y'=xe^{-x}$.
12. $y''-10y'+25y=e^{5x}$.
13. $y''-2y'+10y=e^{x}\cos 3x$.
14. $y''-6y'=3x$.
15. $y''+16y=\cos 4x$.
16. $y''+y'=4x^2$.
17. $y''-8y'+52y=e^{4x}\sin 6x$.
18. $y''-4y'+4y=e^{2x}$.
19. $y''+4y=\sin 2x$.
20. $y''+6y'+9y=e^{-3x}$.
21. $y''-6y'=3x+1$.
22. $y''+8y'+52y=e^{-4x}\cos 6x$.

23. $y''-4y'=2x$.

24. $y''+9y=\cos 3x$.

25. $y''-6y'+25y=e^{-3x}\sin 4x$.

26. $y''-9x=e^{3x}$.

Задача 5.

1. $1+(y')^2=yy'$,
2. $y''(2y+3)-2(y')^2=0$,
3. $(y'')^2-(y')^2-1=0$,
4. $y''(1+y)=(y')^2+y'$,
5. $(1-\ln y)yy''+(1+\ln y)(y')^2=0$,
6. $yy''-(y')^2=y^2\ln y$,
7. $\sqrt{y}\,y''-y'=0$,
8. $y^3y''=1$,
9. $y''-(y')^2=0$,
10. $yy''-(y')^2-y^2y'=0$,
11. $y''=\frac{1}{4\sqrt{y}}$,
12. $yy''-(y')^2=0$,
13. $y''-y=0$,
14. $2yy''-3(y')^2=4y^2$,
15. $y''\operatorname{tg} y=2(y')^2$,
16. $(y-1)y''=2(y')^2$,
17. $yy''=(y')^2-(y')^3$,
18. $y''-2yy''=0$,
19. $y^4-y^3y''=1$,
20. $yy''-2yy'\ln y-(y')^2=0$,
21. $(1+y^2)y''=2y(y')^2$,
22. $yy''+y^2+(y')^2=0$,

23. $(y'')^2=y'$,

24. $yy''-(y')^2=y^2$,

25. $y''=y'e^y$,

26. $y''=e^y$.

Задача 6.

1. $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$.
2. $(1-x^2)y''-xy'=2$.
3. $y''=y'+x$.
4. $xy''=(1+2x^2)y'$.
5. $xy''=y'$.
6. $(1+x^2)y''+(y')^2=-1$.
7. $xy''-y'-x^2=0$.
8. $y''\ln x-\frac{1}{x}y'=0$.
9. $2xy'y''=(y')^2+1$.
10. $y''-\frac{1}{x-1}y'=x(x-1)$.
11. $(x+1)y''-(x+2)y'+(x+1)^2=0$.
12. $x^2y''+xy'-1=0$.
13. $4xy''=4-(y')^2$.
14. $y''+y'\mathrm{tg}x=\sin 2x$.
15. $x^3y''+x^2y'=1$.
16. $y''=\frac{y''}{x}+\frac{x^2}{y'}$.
17. $y''(x^2+1)=2xy'$.
18. $xy''+x(y')^2-y'=0$.
19. $x^2y''=(y')^2$.
20. $xy''-y'=e^xx^2$.

21. $y''+2x(y')^2=0$.

22. $(1+e^x)y''+y'=0$.

23. $y''-2\text{ctg}x\, y'=\sin^2 x$.

24. $y''=1-y'$.

25. $\sin x\, y''+2y'=0$.

26. $x^2y''=(y')^2$.

Задача 7. Найти общее решение нормальной системы ДУ:

1. $\begin{cases} y' = 3y + 2x, \\ z' = -9y - 3z + 2x. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y' = 3y - 5z, \\ z' = 2z + \cos 4x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y' = 9y - 7z + 3x^2, \\ z' = 6y + 10z. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y' = 6y - 11z, \\ z' = 5y - 10z + \sin 3x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y' = 3y - 13z - \cos 9x, \\ z' = y - z. \end{cases}$

6. $\begin{cases} y' = y + 2z + 3x, \\ z' = 5y - 2z. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y' = -4y + 4z, \\ z' = 11y + 10z + x^2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y' = y - 3z, \\ z' = 3y + z + 2x. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y' = -7y - 8z - \cos 3x, \\ z' = 2y + 3z. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y' = 2y - 13z, \\ z' = y - 2z + e^{5x}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y' = 6y - 6z, \\ z' = 5y - 7z + 2sin5x. \end{cases}$

12. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 7y - 6z + cos2x. \end{cases}$

13. $\begin{cases} y' = 9y - 7z, \\ z' = 7y - 5z + e^{-4x}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y' = -3y - 7z, \\ z' = 6y + 10z + 2sin4x. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y' = -y - 3z, \\ z' = 4y + 6z + 2x^2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} y' = 2y - 2z, \\ z' = y + 5z - 4x. \end{cases}$

17. $\begin{cases} y' = 6y + 5z + e^{2x}, \\ z' = -9y - 6z. \end{cases}$

18. $\begin{cases} y' = 4y - 3z, \\ z' = 6y - 2z + sin6x. \end{cases}$

20. $\begin{cases} y' = 5y - 5z, \\ z' = 5y - 3z + 7x^2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} y' = y - 2z - 4x, \\ z' = y + 4z. \end{cases}$

22. $\begin{cases} y' = 8y - 2z + e^{8x}, \\ z' = 10y - z. \end{cases}$

23. $\begin{cases} y' = -8y - 5z + 3sin2x, \\ z' = 6y + 3z. \end{cases}$

24. $\begin{cases} y' = -2y + 8z - 8x^2, \\ z' = -2y + 6z. \end{cases}$

25. $\begin{cases} y' = -4y - 9z, \\ z' = 4y + 8z + 6x. \end{cases}$

26. $\begin{cases} y' = 5y - 3z, \\ z' = 6y - 6z + cos5x. \end{cases}$

Задача 2. Методом вариации и произвольных постоянных найти общее решение линейных неоднородных ДУ:

1. $y'' + y = \operatorname{tg} x$,
2. $y'' - y' = \frac{e^x}{e^x + 1}$,
3. $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$,
4. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$,
5. $y'' + y = \frac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$,
6. $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$,
7. $y'' - 6y' + 9y = 36\sqrt{x} - \frac{12x + 1}{x\sqrt{x}}$,
8. $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$,
9. $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$,
10. $y'' - y' = \frac{2 - x}{x^3} e^x$,
11. $y'' + y = -\frac{1}{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}$,
12. $y'' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$,
13. $y'' - 2y' + y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$,
14. $y'' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Дифференциальными уравнениями (ДУ) называются такие уравнения, в которых неизвестными являются функции одного или нескольких переменных, причем в уравнение входят не только сами функции, но и их производные (или дифференциалы).

Если независимая переменная одна, то уравнение называется *обыкновенным*. Наивысший порядок производной, входящий в уравнение, называется *порядком* дифференциального уравнения. Например,

$y^2y' + \sin(x)y'' + \sqrt{y'''}=0$ – обыкновенное ДУ третьего порядка.

Р е ш е н и е м ДУ в интервале]a,b[называется функция $y=y(x)$, определённая (и столько раз непрерывно дифференцируемая, каков порядок ДУ) в этом интервале, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Часто среди всех решений ДУ требуется найти такое, которое удовлетворяет заданным условиям: $y=y_0$ при $x=x_0$ (x_0 , y_0 – заданные числа, *начальные данные* для уравнения порядка); $y=y_0$, $y' = y'_0$ при $x=x_0$ (x_0 , y_0 , y'_0 – заданные числа для ДУ второго порядка). Задание таких условий называется *заданием начальных условий*.

Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям, называется *заданием начальных условий*. Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям, называется *задачей Коши*. Процесс отыскания решений ДУ называется его *интегрированием*.

О б щ и м р е ш е н и е м ДУ 1-го порядка называется функция $y=\varphi(x,C)$, удовлетворяющая требованиям: 1) при каждом значении С из некоторого допустимого множества она является решением исходного ДУ; 2) решение каждой задачи Коши (если оно существует и единственно) получается из функции $y=\varphi(x,C)$ при определенном значении С. Решения, которые получаются из общего решения при каждом конкретном значении постоянной С, называются *частными*.

3.1*. Нормальные системы ДУ

Совокупность n, $n\in N$ линейных ДУ первого порядка

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_n = a_{n1}(x)y_n + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \qquad (15)$$

называется *нормальной* системой ДУ. Здесь $a_{ij}=a_{ij}(x)$ $(i,j=1,\dots,n)$ (*коэффициенты* системы) и $f_i=f_i(x)$ $(i=1,\dots,n)$ (*свободные члены* системы) – известные функции, непрерывные на некотором промежутке $]a,b[\ \epsilon R$, $y_j=y_j(x)$ $(j=1,\dots,n)$ – искомые функции. Решением системы (15) называется совокупность функций $y_1(x),\dots,y_n(x)$, непрерывно дифференцируемых на $]a,b[$ и таких, что они обращают на $]a,b[$ в тождество каждое уравнение системы (15). Система (15) называется *однородной*, если все свободные члены системы $f_1(x),\dots,f_n(x)$ тождественно нулевые на $]a,b[$, и *неоднородной* в противном случае.

Нормальная система (15) допускает запись в матричной форме

$$Y'=A\cdot Y+F\ .$$

Здесь $A=((a_{ij}))$ – матрица системы. $F=(f_1,f_2,\dots,f_n)^T$ -вектор -столбец свободных членов, $У=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$ – столбец неизвестных, $У'=(y_1',y_2',\dots,y_n')^T$ – столбец производных искомых функций.

Теория решений неоднородных нормальных линейных систем ДУ во многом аналогична теории решений линейного ДУ порядка n. Общее решение неоднородной системы (15) имеет вид:

$$У_{о.н.}=У_{о.о}+У_{ч.н.}\ ,$$

где $У_{о.о.}$ – общее решение соответствующей однородной системы

$$У'=A\cdot У\ , \qquad (16а)$$

а $У_{ч.н.}$ – какое-либо частное решение неоднородной системы (15). Структура общего решения однородной системы (16а) определяется формулой:

$$У_{о.о} = \sum_{i=1}^{n} C_j У_j \quad ,$$

где $У_1,\dots,У_n$ – фундаментальная система решений однородной системы (16а), $C_1, \dots, C_n$ - произвольные постоянные.

В случае, когда все коэффициенты системы $a_{ij}(i,j=1,\dots,n)$ – постоянные числа, фундаментальную систему $У_1, \dots, У_n$ можно искать по методу Эйлера в виде

$$У_j = e^{\lambda_j x} \gamma_j \qquad (j=1,\dots,n),$$

Где λ_j – некоторое число, $\gamma_j=(\gamma_{1j},\dots,\gamma_{nj})^T$ – вектор-столбец с неизвестными компонентами γ_{kj} $(k=1,\dots,n)$.

Неизвестное число λ_j и вектор γ_j определяется из матричного уравнения

$$A\gamma_j = \lambda_j \gamma_j \,. \qquad (17)$$

Число λ_j называется *собственным* (*характеристическим*) значением системы (16а), если для него существует ненулевой вектор γ_j такой, что выполнено равенство (17). Можно показать, что матричное уравнение (17) имеет нетривиальное решение γ_j тогда и только тогда, когда λ_j является корнем уравнения

$$\mathrm{Det}(A-\lambda E) \equiv \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0, \qquad (18)$$

называемого характеристическим (вековым) уравнением для системы (16а). Здесь E – единичная матрица порядка n.

Решая характеристическое уравнение (18), представляющее собой алгебраическое уравнение степени n, находим все его корни λ_n и для каждого корня λ_j находим соответствующий ненулевой вектор γ_j, называемый с о б с т в е н н ы м в е к т о р о м системы (16а), соответствующим собственному значению λ_j матричного уравнения (17), равносильного некоторой линейной системе алгебраических уравнений.

Не останавливаясь подробно на рассмотрении всех возможных случаев, отметим, что если все n корней характеристического уравнения (18) действительны и различны (простые), то вектор-функции $У_j = e^{\lambda_j x} \gamma_j$ $(j=1,\dots,n)$, линейно-независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений (16а). В этом случае

$$У_{о.о} = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j x} \gamma_j$$

в координатной форме-

$$y_{100} = C_1 e^{\lambda_1 x}\gamma_{11} + C_2 e^{\lambda_2 x}\gamma_{12} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}\gamma_{1n}$$
$$y_{200} = C_1 e^{\lambda_1 x}\gamma_{21} + C_2 e^{\lambda_2 x}\gamma_{22} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}\gamma_{2n}$$
$$\cdots$$
$$y_{n00} = C_1 e^{\lambda_1 x}\gamma_{n1} + C_2 e^{\lambda_2 x}\gamma_{n2} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}\gamma_{nn}$$

Если $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j$ - простой комплексный корень уравнения (18) и γ_j – соответствующий ему (вообще говоря, комплексный) собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_j. В этом случае, отделяя у компонент вектор-столбцов $У_j = e^{\lambda_j x}\gamma_j$ и $\bar{У}_j = e^{\bar{\lambda}_j x}\bar{\gamma}_j$ действительные и мнимые части, получим две действительные вектор-функции

$$U_i = R_e У_i, \quad V_i = J_m У_i,$$

входящие в фундаментальную систему решений однородной системы.

Что касается отыскания частного решения неоднородной системы (15), то его можно провести по методу вариации постоянных:

$$У_{ч.н.} = \sum_{j=1}^{n} C_j(x)\, У_j(x). \qquad (19)$$

Функции $C_1(x),\ldots,C_n(x)$ можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} C'_1 y_{11} + C'_2 y_{12} + \cdots + C'_n y_{1n} = f_1, \\ C'_1 y_{21} + C'_2 y_{22} + \cdots + C'_n y_{2n} = f_2, \\ C'_1 y_{n1} + C'_2 y_{n2} + \cdots + C'_n y_{nn} = f_n, \end{cases} \qquad (20)$$

которая заведомо имеет единственное решение.