ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие
по дисциплине

«Математический анализ»

Авторы
Рябых Г. Ю.,
Пристинская О. В.,
Фролова Н. В.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения технических и экономических направлений и специальностей

Авторы

профессор кафедры «Прикладная математика» Рябых Г.Ю.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пристинская О.В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.

Оглавление

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексным числом z называют упорядоченную пару вещественных чисел x и y:

$$z=(x,y).$$

Число x называют *вещественной частью* комплексного числа z и обозначают

$$x = \operatorname{Re} z;$$

число y называют *мнимой частью* комплексного числа z и обозначают

$$y = \operatorname{Im} z.$$

Если $y = 0$, то комплексное число z считают тождественно совпадающим с вещественным числом x, то есть полагают

$$z=(x,0)\equiv x.$$

Комплексные числа вида

$$z=(0,y)$$

при $y \neq 0$ называют *чисто мнимыми,* или просто *мнимыми.* Для комплексных чисел

$$z_1=(x_1,y_1) \text{ и } z_2=(x_2,y_2)$$

равенство

$$z_1=z_2$$

по определению, равносильно системе

$$\begin{cases} x_1=x_2, \\ y_1=y_2. \end{cases}$$

На множестве комплексных чисел определены операции сложения, вычитания, умножения и деления. Определениями этих операций служат следующие равенства:

1) *сложение и вычитание*

$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$;

2) умножение

$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

3) *деление* (при $z_2 \neq 0$)

$$\frac{z1}{z2}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right).$$

Число

$$\bar{z}=(x,-y)$$

называют *сопряженным числу z* = (x, *y)*. Имеет место равенство

$$z\bar{z}=x^2+y^2.$$

Квадратный корень из суммы квадратов вещественной и мнимой частей комплексного числа *z* называют *модулем* числа *z* и обозначают $|z|$ *:*

$$|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

2. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Число *z = (x,y)* записывают в виде

$$z=x+i\,y,$$

где *i* — мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2=-1$.

С учетом этого условия операции над комплексными числами в алгебраической форме можно производить по тем же правилам, что и операции над многочленами: результат будет соответствовать приведенным выше определениям.

3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Рассматривается полярная система координат, полюс которой совпадает с началом декартовой системы координат *Oxy,* а направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси *Ox.* Декартовые и полярные координаты точки *z =(x, y)* связаны соотношением

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$$

Если в алгебраической форме комплексного числа *z, z =x+i y* заменить декартовы координаты точки *z* ее полярными координатами, то получим тригонометрическую форму комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Координата *r* - это модуль *z.* Координату φ называют *аргументом* комплексного числа *z* и обозначают Arg *z.*

Модуль и аргумент комплексного числа *z=(x,y)* определяются соотношениями $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Аргумент определен этими соотношениями неоднозначно. Существует бесчисленное множество значений φ, удовлетворяющих данным соотношениям.

В самом деле, если эти соотношения удовлетворяются $\varphi = \varphi_0$, то они удовлетворяются и при $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Значение аргумента φ, заключенное в промежутке $-\pi < \varphi \le \pi$ называют главным значением аргумента и обозначают arg *z*. Таким образом, совокупность всех значений аргумента определяется формулой

$$Argz = \arg z + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Имеют место следующие формулы умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме. Если

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$,

то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$ при $z_2 \ne 0$.

Из формулы умножения комплексных чисел следует формула возведения комплексного переменного в целую степень *n:*

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Операция извлечения корня из комплексного числа определяется как обратная по отношению к операции возведения в степень.

Комплексное число *w* называют *корнем n - й степени* из комплексного числа z и обозначают

$$w = \sqrt[n]{z},$$

если имеет место равенство $w^n = z$. Операция извлечения корня неоднозначна.

Корень n —й степени из комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

имеет точно n различных значений, определяемых формулой

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k=0,1,2,\ldots n-1,$$

где $\sqrt[n]{r}$ — это арифметический корень n—й степени из положительного числа r.

4. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

В теории функций комплексного переменного показательная функция определена таким образом, что справедлива, так называемая *формула Эйлера:*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Эта формула позволяет перейти от тригонометрической формы комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ к показательной форме

$$z = re^{i\varphi}$$

5. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ОТОБРАЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Если каждому комплексному числу z, принадлежащему множеству E , ставится в соответствие комплексное число w, то говорят, что w есть функция от z на множестве E_1 и пишут $w = f(z), z \in E$. Функция $f(z)$ может быть многозначной, то есть, числу z может ставиться в соответствие не одно число w, а некоторая совокупность комплексных чисел.

Множество G называется областью, если выполнены следующие два условия:

1. Около каждой точки *G* можно указать кружок (называемый окрестностью данной точки) такой, что все точки кружка принадлежат *G;*
2. Каждые две точки множества *G* можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат множеству *G.*

Совокупность внутренних частей двух кругов не является областью, так как не выполняется условие 2.

Внутренней точкой области называют точку, входящую в область с некоторой своей окрестностью.

Внешней точкой области называют точку, которая вместе с некоторой своей окрестностью лежит вне области.

Граничной точкой области называют такую точку, каждая окрестность которой, содержит как точки , принадлежащие области, так и точки, не принадлежащие области.

Совокупность граничных точек называют *границей области.*

Если к области *G* присоединить ее границу, то полученное множество точек называется замкнутой областью и обозначается $\overline{G}$.

6. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

В теории функции комплексного переменного показательная и тригонометрические функции, обычно вводятся одним из двух следующих способов.

Первый способ состоит в том, что функции e^z, sin *z*, cos *z* определяются на комплексной плоскости теми, же степенными рядами, что и на вещественной оси. Второй способ определения, равносильный первому, состоит в том, что показательная функция e^z для любого комплексного числа $z = x + iy$ *определяется* формулой

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)\,.$$

Положив здесь $x = 0$, $y = \varphi$, получим формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Тригонометрические функции для комплексного значения аргумента определяются формулами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Приведенное определение сохраняет в силе для комплексного переменного *z* все тригонометрические формулы и основное свойство показательной функции, выражаемое формулой

$$e^{a}e^{b} = e^{a+b}$$

Отсюда следует одно из наиболее важных представлений показательной функции. А именно, если $z = x + i\,y$, то

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

Из формулы Эйлера следует, что показательная функция является периодической с периодом $2\pi i$, то есть при любом значении *z* справедливо равенство

$$e^{z+2\pi i} = e^{z}$$

Гиперболические функции sh *z (гиперболический синус)* и ch *z (гиперболический косинус)* определяются формулами

$$shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

Тригонометрические функции sin *z* и cos *z* связаны с гиперболическими функциями sh *z* и ch *z* соотношениями

$$\sin iz = i\,\mathrm{sh}\, z, \quad \cos iz = \mathrm{ch}\, z.$$

Логарифмическая функция определяется как обратная по отношению к показательной. А именно, логарифмом (натуральным) комплексного числа *z* называется комплексное число *w*, такое, что

$$e^{w} = z.$$

Пишут $w = \mathrm{Ln}\, z$.

Логарифмическая функция многозначна. Если

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

то

$$Lnz = \ln r + (\varphi + 2k\pi)i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

Пусть *a* и *b* — два комплексных числа. Общая степень a^b

определяется формулой

$$a^b = e^{bLna}.$$

Так как Ln *a* имеет бесконечное множество значений, то и a^b имеет бесконечное множество значений. В частном случае все эти значения или часть из них могут совпадать между собой.

7. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. АНАЛИТИЧНОСТЬ. УСЛОВИЯ КОШИ-РИМАНА

Производной функции *f(x)* называется предел отношения приращения функции к приращению независимого переменного при условии, что приращение независимого переменного стремится к нулю.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Формально это определение совпадает с определением производной в вещественной области. Однако на комплексной плоскости существует гораздо больший произвол в способе стремления Δz *к* нулю. Это приводит к тому, что даже очень простые функции комплексного переменного могут не иметь производной.

Для существования производной функции

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

в точке $z = x + iy$ необходимо и достаточно, чтобы функции *u(x,y)* и *v(x,y)* были дифференцируемы в точке *(x,y)* и чтобы в этой точке выполнялись условия *Коши-Римана:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

При выполнении указанных условий будем иметь

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

В полярных координатах

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi).$$

Условия Коши-Римана имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

а производная выразится формулой

$$f'(z) = \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right),$$

Если функция *f(z)* дифференцируема во всех точках некоторой области *G,* то она называется *аналитической* в области *G.* Функцию *f(z)* называют аналитической в замкнутой области G, если она дифференцируема в некоторой области $\overline{G}$, содержащей область *G* вместе с ее границей.

Необходимым и достаточным условием аналитичности функции

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

в области *G* является существование в этой области непрерывных частных производных функций *u(x,y)* и *v(x,y),* связанных соотношениями Коши-Римана.

Из условий Коши-Римана для функций *u(x, y)* и *v(x, y)* следуют соотношения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Функции, удовлетворяющие таким соотношениям называются *гармоническими.*

Таким образом, если функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ является аналитической в некоторой области *G* ,то ее вещественная и мнимая части *u(x,y)* и *v(x,y)* - гармонические функции в области *G.*

Если две гармонические функции *u(x,y)* и *v(x,y)* связаны условиями Коши-Римана, то их называют *сопряженными гармоническими функциями.*

8. ИНТЕГРАЛ

Интеграл от функции комплексного переменного определяется следующим образом.

Пусть на плоскости комплексного переменного задана кривая *L* уравнением

$$z=x(t) + i\,y(t), \quad \alpha \le t \le \beta \ .$$

Функции *x(t)* и *y(t)* будем предполагать непрерывными на отрезке $[\alpha, \beta]$. Пусть, далее, на кривой *L* задана непрерывная функция

$$f(z) = u(x, y)+iv(x, y).$$

Разобьем кривую *L* на *n* частей точками $z_0, z_1, \dots, z_n$

На получившихся частичных дугах произвольным образом выберем точки $\xi_1, \xi_2, .., \xi_n$ (по одной на каждой дуге). Составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Предел этой суммы при неограниченном возрастании числа делений *n* и при неограниченном уменьшении длин частичных дуг называют контурным интегралом, или просто интегралом от функции $f(z)$ по контуру *L* и обозначают $\int\limits_L f(z)dz$.

При сделанных предположениях относительно кривой *L* и функции $f(z)$ интеграл (то есть, предел) существует и не зависит ни от способов разбиения дуги *L* на части, ни от выбора точек ξ_k на соответствующих частичных дугах.

Свойства контурного интеграла совпадают со свойствами обычного криволинейного вещественного интеграла.

Практическое вычисление контурного интеграла сводится к вычислению криволинейных интегралов по формуле

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_L v(x,y)dx + u(x,y)dy \ .$$

Эту формулу легко запомнить с помощью символической записи

$$\int\limits_L f(z)dx = \int\limits_L [u(x,y) + iv(x,y)](dx + idy).$$

$$(*)$$

Если кривая *L* имеет параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad , \quad \alpha \le t \le \beta \ ,$$

то в правой части равенства $(*)$ следует формально сделать замену по формулам

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt.$$

и вычислять интеграл, как обычный определенный интеграл в пределах от α до β, обращаясь с i, как с постоянной, удовлетворяющей условию $i^2 = -1$.

Если кривая L задана уравнением

$$y = \varphi(x), \quad a \le x \le b,$$

то поступают точно таким же образом, делая замену переменной y и ее дифференциала по формулам

$$y = \varphi(x), \quad dy = \varphi'(x)dx$$

и вычисляя получившийся определенный интеграл в пределах от *a* до *b.*

9. ТЕОРЕМА КОШИ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

В теории функций комплексного первичного фундаментальную роль играет теорема Коши. Приведем формулировки этой теоремы для односвязной и для многосвязной областей.

Теорема Коши для односвязной области.

Если функция является аналитической в замкнутой односвязной области, то интеграл от нее по контуру области равен нулю.

Из теоремы Коши следует, что если подынтегральная функция является аналитической в односвязной области и контур интегрирования целиком расположен в данной области, то величина интеграла не зависит от формы контура, а зависит лишь от начальной и конечной точек контура. Это дает возможность ввести для функции комплексного переменного неопределенный интеграл посредством формулы

$$F(z) = \int_{z_1}^{z} f(t)dt .$$

Имеет место равенство $F'(z) = f(z)$, то есть, функция $F(z)$ является первообразной для функции $f(z)$.

Основная формула интегрального исчисления

Если функция $f(z)$ - аналитическая в односвязной области, кривая *L*, соединяющая точки z_1 и z_2 принадлежит данной области, и $F(z)$ - какая-либо первообразная функции $f(z)$, аналитическая в некоторой области, содержащей кривую *L*, то имеет место формула

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi = F(z_2) - F(z_1).$$

Теорема Коши для многосвязной области

Если функция является аналитической в замкнутой многосвязной области, то интеграл от нее по всему контуру этой области в положительном направлении равен нулю. Или, что то же самое, интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по всем внутренним контурам при условии, что интегрирование по всем контурам производится против часовой стрелки.

В дальнейшем, если это не будет оговорено особо, всегда будем считать, что при интегрировании по замкнутому контуру направление обхода берется против часовой стрелки.

Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области *G*, ограниченной контуром *L*, то значение функции во внутренней точке *a* области *G* выражается через значения функции $f(z)$ на контуре формулой

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{z-a}dz,$$

носящей название *интегральной формулы Коши.*

10. РЯДЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ с комплексными членами называется сходящимся, если существует предел суммы его первых n членов

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \text{ при } n \to \infty.$$

В этом случае предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называют суммой ряда и пишут

$$S = \sum_{nn=1}^{\infty} u_n.$$

Если предел S_n не существует, то ряд называется расходящимся и суммы не имеет.

Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Это — необходимый признак сходимости ряда.

Если положить

$$u_n = \alpha_n + \beta_n i, \qquad n = 1,2,\ldots,$$

то ряду с комплексными членами $\sum\limits_{nn=1}^{\infty} u_n.$ можно поставить в соответствие два ряда с вещественными членами $\sum\limits_{nn=1}^{\infty} \alpha_n.$ и $\sum\limits_{nn=1}^{\infty} \beta_n.$

Ряд с комплексными членами сходится тогда и только тогда, когда одновременно сходятся два последних ряда. При этом, если

$$S=\sum_{nn=1}^{\infty}u_n,\quad S_1=\sum_{nn=1}^{\infty}\alpha_n,\quad S_2=\sum_{nn=1}^{\infty}\beta_n$$

то $S=S_1+iS_2$. Ряд $\sum_{nn=1}^{\infty}u_n$ называется абсолютно сходящимся, если

сходится ряд $\sum_{nn=1}^{\infty}|u_n|$. Из очевидных неравенств $|a_n|\le|u_n|$, $|\beta_n|\le|u_n|$ заключаем, что если ряд с комплексными числами сходится абсолютно, то ряды с вещественными членами $\sum_{nn=1}^{\infty}\alpha_n$ и $\sum_{nn=1}^{\infty}\beta_n$ абсолютно сходятся, значит, и исходный ряд сходится.

11. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Ряд вида $c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots$ называют *степенным рядом.*

Совокупность точек z, в которых ряд сходится, называют *областью сходимости степенного ряда.*

Для каждого степенного ряда можно указать круг радиуса $R(0\le R\le\infty)$ с центром в точке a, внутри которого ряд абсолютно сходится, вне - расходится. Этот круг называют кругом сходимости степенного ряда, а радиус его - радиусом сходимости ряда. На границе круга сходимости различные степенные ряды ведут себя по-разному.

Степенные ряды, полученные из данного степенного ряда почленным дифференцированием или интегрированием, имеют тот же радиус сходимости, что и данный ряд.

Т е о р е м а. *Сумма степенного ряда есть функция, аналитическая внутри круга сходимости, причем производную её можно найти почленным дифференцированием ряда.*

Это - основная теорема теории аналитических функций. Из нее, в частности, следует, что многочлены, показательная и тригонометрические функции на всей плоскости комплексного переменного являются аналитическими функциями.

12. РЯД ТЕЙЛОРА

Точку z_0 называют регулярной точкой функции $f(z)$, если в некоторой окрестности z_0 функция $f(z)$ является аналитической.

Точку z_0 называют особой точкой функции $f(z)$, если ни в какой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ не является аналитической.

В окрестности регулярной точки $z = a$ функцию $f(z)$ можно представить степенным рядом

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots,$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

а радиус сходимости *R* равен расстоянию от точки *a* до ближайшей особой точки функции $f(z)$. Для коэффициентов ряда имеют место такие интегральные представления:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{(t-a)^{n+1}}, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

где Г — окружность $|z-a| = r < R$.

Степенной ряд, коэффициенты которого определяются приведенными формулами, называют рядом Тейлора функции $f(z)$.

Разложение в ряд Тейлора единственно в том смысле, что если функция $f(z)$ каким-либо образом представлена в виде суммы ряда но степеням $z-a$:

$$f(z) = d_0 + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \ldots,$$

имеющего радиус сходимости *R,* то

$$d_n = c_n, \qquad n = 0,1,2,\ldots,$$

Нули аналитической функции

Пусть $z = a$ — регулярная точка функции $f(z)$. В некоторой окрестности этой точки функция $f(z)$ может быть представлена рядом Тейлора.

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots,$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \qquad n = 0,1,2,\ldots,$$

Если

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0, \qquad c_m \neq 0,$$

или, что тоже самое,

$$f(a) = f'(a) = \ldots f^{(m-1)}(a) = 0,$$

$f^m(a) \neq 0,$

то разложение в окрестности точки z = а имеет вид

$$f(z) = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \ldots,$$

$c_m \neq 0,$

В этом случае точку z = а называют *нулем* кратности *т* функции $f(z)$. При *т* = 1 нуль называют *простым.* В окрестности нуля кратности *m* функция $f(z)$ может быть представлена формулой $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$, где

$$\varphi(z) = c_m + c_{m+1}(z-a) + c_{m+1}(z-a)^2 + \ldots,$$

$c_m \neq 0,$

Функция $\varphi(z)$ - аналитическая в точке $z = a$, так как в некоторой окрестности этой точки разлагается в сходящийся степенной ряд. Кроме того, вследствие условия $c_m \neq 0$, $\varphi(a) \neq 0$.

13. РЯД ЛОРАНА

Функцию, аналитическую в кольце

$$r < |z-a| < R$$

можно в этом кольце представить как сумму сходящегося ряда

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots,$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}},$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

где Г - окружность $|z-a| = p$, $r < p < R.$

Ряд указанного вида называется рядом Лорана функции $f(z)$. Разложение в ряд Лорана единственно, в том смысле, что если каким-либо способом получено разложение функции $f(z)$ в кольце $-r < |z-a| < R$ в ряд вида

$$f(z) = d_0 + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \ldots + \frac{d_{-1}}{z-a} + \frac{d_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots,$$

то $d_n \equiv c_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

Ряд Лорана представляет собой сумму двух степенных рядов:

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots u \frac{c-1}{z-a} + \frac{c-2}{(z-a)^2} + \ldots,$$

Первый ряд называют *правильной частью разложения,* второй - *главной частью разложения.* Правильная часть сходится внутри круга $|z-a| < R$, главная часть сходится вне круга $|z-a| > r$. Ряд Лорана сходится там, где сходятся оба эти ряда, то есть в кольце

$$z < |z-a| < R.$$

Радиус внутренней окружности может быть равен нулю, а радиус внешней - бесконечности.

14. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОГО ХАРАКТЕРА И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Точка $z=a$ называется изолированной особой точкой однозначного характера функции $f(z)$, если $f(z)$ - однозначная и аналитическая в круговом кольце $0<|z-a|<p$, а точка $z=a$ является особой точкой функции $f(z)$.

В самой точке $z=a$ функция может быть не определена.

В окрестности изолированной особей точки однозначного характера $z=a$ функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана.

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots$$

В этом разложении главная часть может содержать бесконечное число членов, может содержать конечное число членов и, наконец, может вообще отсутствовать.

В зависимости от этого различают три типа изолированных особых точек однозначного характера.

Изолированная особая точка однозначного характера называется

1. *существенно особой точкой*, если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное множество членов, то есть, если разложение имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots,$$

где бесконечное множество членов последовательности $c_{-1},c_{-2},\ldots$ отлично от нуля.

2. *полюсом,* если главная часть ряда Лорана содержит лишь конечное число членов, то есть, если разложение имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots$$

при этом, если $c_{-m}\neq 0$, то m называют кратностью полюса; в случае m = 1 полюс называют простым; в окрестности простого полюса разложение имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots,$$

$c_{-1}\neq 0$);

3. устранимой особой точкой, если ряд Лорана не содержит главной части, то есть, если разложение имеет вид $f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots$

15. ВЫЧЕТЫ

Пусть

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots$$

лорановское разложение аналитической функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки $z=a$. *В* этом разложении коэффициент c_{-1} называется вычетом функции $f(z)$ в ее особой точке $z=a$. Обозначают

$$c_{-1}=\underset{z=a}{\text{Выч}}\, f(z)$$

Для нахождения c_{-1}, как и для нахождения любого другого коэффициента ряда Лорана, можно использовать соответствующую интегральную формулу. Однако на практике вычеты чаще всего находят по-другому. Если $z=a$ - простой полюс, то лорановское разложение имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots$$

и, следовательно,

$$c_{-1} = \underset{z=a}{Выч}\, f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

Если $z = a$ - полюс кратности *т,* то лорановское разложение имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots +$$

$$\frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

откуда легко следует соотношение

$$c_{-1} = \underset{z=a}{Выч}\, f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]$$

Для существенно особых точек аналогичных формул нет. Однако, и в этом случае использование интегральной формулы не является необходимым. Достаточно любым способом найти разложение функции $f(z)$ по положительным и отрицательным степеням разности $z-a$ в кольце сходимости ряда Лорана. В силу теоремы единственности это разложение совпадает с рядом Лорана, и, следовательно, коэффициент при $(z-a)^{-1}$ является вычетом функции $f(z)$ в точке $z = a$.

Основная теорема теории вычетов

Если функция $f(z)$ в замкнутой области $\overline{G}$ является аналитической всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, .., a_N$, лежащих внутри области *G,* то имеет место равенство

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{N}\underset{z=a^k}{Выч}\, f(z),$$

где C - полная граница области, проходимая в положительном направлении.

16. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ И НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Теория вычетов может быть применена к вычислению определенных и несобственных интегралов в вещественной области.

Рассмотрим, например, вычисление интегралов в пределах от 0 до 2π 2 от функций, рационально выражаемых через синус и косинус. Заменой синуса и косинуса но формулам Эйлера и, затем, подстановкой $z = e^{ix}$ такие интегралы сводятся к интегралам от рациональных дробей по окружности $|z| = 1$. После этого остается лишь применить основную теорему теории вычетов.

При вычислении несобственных интегралов

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz$$

от рациональных функций, не имеющих особых точек на вещественной оси, используют следующей прием. Вводят в рассмотрение
вспомогательный замкнутый контур *С*, состоящий из отрезка $[-R,+R]$,
вещественной и дуги K_R, являющейся верхней половиной окружности $|z| = R$. При этом число *R* выбирают настолько большим, чтобы все полюсы подынтегральной функции, расположенные в верхней
полуплоскости, находились внутри контура *С.* Тогда

$$\int_{K_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \underset{z_i}{Выч}\, f(z)$$

При возрастании *R* это равенство сохраняет силу. Можно перейти к пределу при $R \to \infty$. Если $\int_{K_R} f(z)dz \to 0$ при $R \to \infty$, то получим равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} Выч\, f(z)\big|_{z_i}$$

Очевидно, для применения этого метода нужно быть уверенным, что первый интеграл стремится к нулю при $R \to \infty$. Применение описанного метода обычно основывается на следующей лемме: если $\lim\limits_{z \to \infty} zf(z) = 0$, то

$$\lim_{R\to\infty}\int_{K_R} f(z)dz = 0$$

Таким же методом находится значение интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin mzdz \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos mzdz.$$

Формулы Эйлера позволяют связать вычисление таких интегралов с вычислением интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx.$$

Теперь для применения описанного метода нужно быть уверенным в том, что $\int_{K_R} f(x)e^{iax}dx \to 0$ при $R\to\infty$

Лемма. *Интеграл* $\int_{K_R} f(x)e^{iax}dx, \alpha > 0$ *стремится к нулю при* $R\to\infty$ *если* $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$

Для функций, удовлетворяющих условиям этой леммы, будет иметь место формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{n} Выч\left[f(z)e^{i\alpha z}\right]_{z=z_j},$$

$(\alpha > 0)$

где $z_1, z_2, ..., z_n$ – изолированные особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

17. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. Даны: $z_1=-1+i$, $z_2=3i$, $z_3=2-i$, $z_4=5$, $z_5=-2i$, $z_6=i-2$, $z_7=3-7i$, $z_8=i$, $z_9=8i-4$.

Вычислить:

1) $\dfrac{z_1+z_6}{2z_8-z_4}$; $\dfrac{z_9-2\overline{z}_7}{z_1-z_2}$; $\dfrac{z_5\cdot z_4-z_3}{\overline{z}_8\cdot z_7}$;

2) $\dfrac{3z_6-z_1}{z_2\cdot z_3}$; $\dfrac{\overline{z}_7-2z_8}{z_5+z_9}$; $\dfrac{z_8-z_4}{z_6\cdot\overline{z}_1}$;

3) $\dfrac{z_4-z_5}{z_6+2z_7}$; $\dfrac{z_8\cdot\overline{z}_8-z_2}{z_9-z_7}$; $\dfrac{z_8}{z_1\cdot\overline{z}_3\cdot z_7-z_5}$;

4) $\dfrac{z_6-z_7+z_8}{\overline{z}_9}$; $\dfrac{3z_1+z_3}{\overline{z}_8\cdot z_5+z_4}$; $\dfrac{z_9\cdot\overline{z}_5}{\overline{z}_6+z_3}$;

5) $\dfrac{z_8-z_3}{z_4-3z_5}$; $\dfrac{18\overline{z}_8\cdot z_4-z_5}{z_7+z_8}$; $\dfrac{z_6z_2-z_8}{\overline{z}_1\cdot\overline{z}_7}$;

6) $\dfrac{3z_7+z_9}{z_5\cdot z_8}$; $\dfrac{\overline{z}_6+z_8}{z_9}\cdot z_3$; $\dfrac{\overline{z}_1\cdot z_2+z_3}{z_4+z_5\cdot 3}$;

7) $\dfrac{8z_6+\overline{z}_8}{z_5+z_4}$; $\dfrac{z_1\cdot z_2-2z_3}{3\overline{z}_3}$; $\dfrac{z_9-z_8}{z_2}\cdot z_4\cdot z_7$;

8) $z_7+\dfrac{z_7-2z_3}{z_6}$; $\dfrac{2z_9-3z_7}{z_3\cdot\overline{z}_1}$; $\dfrac{z_9}{z_6}-z_1\cdot\overline{z}_3$;

9) $z_9\cdot z_4-\dfrac{z_6+2z_7}{z_8}$; $\dfrac{z_4+\overline{z}_5}{\overline{z}_7}$; $\dfrac{z_3\cdot\overline{z}_1-11z_5}{z_6}$;

10) $\dfrac{18z_8+\overline{z}_5+z_4}{\overline{z}_1}$; $\dfrac{z_7-2\overline{z}_8}{z_6\cdot\overline{z}_3}$; $\dfrac{8-z_5\cdot z_8}{z_1+\overline{z}_2}\cdot z_3$.

Задание 2. Возвести комплексное число z в степень:

1) $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$, $z^7-?$;

3) $z=1-\sqrt{3}i$, $z^6-?$;

2) $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z^7-?$;

4) $z=3-3i$, $z^{11}-?$;

5) $z=-2+2i$, $z^9-?$;

8) $z=-1-i$, $z^8-?$;

6) $z=\sqrt{3}+i$, $z^5-?$;

9) $z=2-2i$, $z^9-?$;

7) $z=-2\sqrt{3}-2i$, $z^4-?$;

10) $z=-\sqrt{3}-i$, $z^{10}-?$.

Задание 3. Найти корни уравнения:

1) $z^4+4z^2+3=0$;
2) $z^4-6iz^2-8=0$;
3) $z^6-5z^3+6=0$;
4) $z^8-z^4-8=0$;
5) $z^4-6z^2+45=0$;
6) $z^6+4z^3+3=0$;
7) $z^4+iz^2+2=0$;
8) $z^6+2z^3-15=0$;
9) $z^4-3z^2-4=0$;
10) $z^4-3iz^2-2=0$.

Задание 4. Вычислить значение функции $W=f(z)$ в точке z_0:

1) $W=e^z+\dfrac{1}{z}$, $z_0=2+i$;
2) $W=\dfrac{2}{\overline{z}}+\cos 3z$, $z_0=1-i$;
3) $W=\ln z+z^3$, $z_0=1+\sqrt{3}i$;
4) $W=\sin 2z+\cos z+z^2$, $z_0=2-i$;
5) $W=\ln\left(z^2\right)+\overline{z}$, $z_0=3-2i$;
6) $W=\overline{z}^2+e^{-iz}$, $z_0=1+2i$;
7) $W=e^{\overline{z}}+\dfrac{1}{z^2}$, $z_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$;
8) $W=\sin 2\overline{z}+i\ln z$, $z_0=2+3i$;
9) $W=sh(z+i)+z^3$, $z_0=\sqrt{3}+i$;
10) $W=\operatorname{Re}\overline{z}\cdot\dfrac{1+i}{z^2-i}$, $z_0=1+i$.

Задание 5. Проверить выполнение условий Коши-Римана и там, где они выполняются, найти производную:

1) $f(z)=\cos(iz)$;
2) $f(z)=\sin\overline{z}$;
3) $f(z)=r\cdot e^{i\cdot\varphi}$;
4) $f(z)=ch\,z$;
5) $f(z)=z\cdot e^z$;
6) $f(z)=z\cdot\operatorname{Re}z$;
7) $f(z)=i\,sh\,\overline{z}$;
8) $f(z)=\ln r+i\cdot\varphi$, где $z=r\cdot e^{i\cdot\kappa}$;
9) $f(z)=e^{3z}$;
10) $f(z)=iz^2-3z+1$.

Задание 6. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_l (iz^2+z)dz$, где l - отрезок прямой от точки $z_0=i$ до точки $z_1=1$;

2) $\int\limits_l \operatorname{Re} z\cdot \operatorname{Im} z^2 dz$, где l - дуга параболы $y=2x^2$ от точки $z_0=0$ до точки $z_1=1+2i$;

3) $\int\limits_l \operatorname{Im} z\, dz$, где l - дуга окружности $|z|=3$ от точки $z_0=3$ до точки $z_1=3e^{2\pi i}$;

4) $\int\limits_l e^{\bar{z}}\, dz$, где l - отрезок прямой от точки $z_0=i$ до точки $z_1=\pi+\pi i$;

5) $\int\limits_l \operatorname{Re}(\sin z)\cos z\, dz$, где l - отрезок прямой от точки $z_0=\frac{1}{2}(\pi-i)$ до точки $z_1=\frac{1}{2}(\pi+i)$;

6) $\int\limits_l \operatorname{Re}(z^2-z)\,dz$,где l - дуга параболы $y=2x^2$ от точки $z_0=0$ до точки $z_1=1+2i$;

7) $\int\limits_l (iz^2+2z)\,dz$, где l - отрезок прямой от точки $z_0=0$ до точки $z_1=1+i$; $\int\limits_l (i\bar{z}+z^2)\,dz$, где l - часть окружности $|z|=2$, $\arg z\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$;

8) $\int\limits_l z\cdot|z|\,dz$, где l - дуга окружности $|z|=1$ от точки $z_0=1$ до точки $z_1=e^{2\pi i}$;

10) $\int\limits_l ch z\, dz$, где l - отрезок прямой от точки $z_0=0$ до точки $z_1=\pi-\pi i$.

Задание 7. Получить разложение в ряд Лорана функции

$f(z)$ по степеням $z-z_0$ в области D. Выписать значение вычета.

1) $f(z)=\dfrac{1}{z-3}+\dfrac{3}{z-6}$, $z_0=4$; D: $1<|z-4|<2$;

2) $f(z)=\dfrac{1}{z+2}+\dfrac{1}{z+5}$, $z_0=-3$; D: $1<|z+3|<2$;

3) $f(z)=\dfrac{2}{z+i}-\dfrac{3}{z+4i}$, $z_0=-2i$; D: $1<|z+2i|<2$;

4) $f(z)=\dfrac{1}{z+2i}+\dfrac{1}{z+6i}$, $z_0=-3i$; D: $1<|z+3i|<3$;

5) $f(z)=\dfrac{2i}{z+3}+\dfrac{3}{z+6}$, $z_0=-4$; D: $1<|z+4|<2$;

6) $f(z)=\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{2i}{z-4i}$, $z_0=2i$; D: $1<|z-2i|<2$;

7) $f(z)=\dfrac{i}{z+2}+\dfrac{2}{z+7}$, $z_0=-4$; D: $2<|z+4|<3$;

8) $f(z)=\dfrac{3i}{z-i}+\dfrac{2}{z-5i}$, $z_0=2i$; D: $1<|z-2i|<3$;

9) $f(z)=\dfrac{3}{z+4}+\dfrac{i}{z+8}$, $z_0=-5$; D: $1<|z+5|<3$;

10) $f(z)=\dfrac{i}{z-1}+\dfrac{2}{z-8}$, $z_0=4$; D: $3<|z-4|<4$.

Задание 8. Определить тип всех особых точек и вычислить вычет функции, найти вычет в бесконечно удалённой точке.

1) $f(z)=\dfrac{z-1}{(z+1)(z-2i)}$;

2) $f(z)=\dfrac{z}{(z+3i)(z+2)^2}$;

3) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z+i)^2}$;

4) $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z^2-9)^2}$;

6) $f(z)=\dfrac{2z}{(z+i)^2(z+3)}$;

7) $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{(z-0.5)^2}$;

8) $f(z)=\dfrac{z^2+4}{z^3(3z-1)}$;

9) $f(z)=\dfrac{3z-i}{(z+2i)^2(z+i)}$;

5) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z-\dfrac{\pi}{2}}$;   10) $f(z)=\dfrac{z+1}{(z+3i)^2(z+2)}$.

18. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ

Задание 1. Даны: $z_1=1+i$, $z_2=3i-1$, $z_3=2-3i$, $z_4=5-3i$, $z_5=i-6$, $z_6=2i$, $z_7=3$, $z_8=-i$.

Вычислить:

$$\frac{3z_1-2z_5}{z_4}=\frac{3(1+i)-2(i-6)}{5-3i}=\frac{3+3i-2i+12}{5-3i}=\frac{15+i}{5-3i}=\frac{(15+i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)}=$$

$$=\frac{75+45i+5i+3i^2}{5^2-(3i)^2}=\frac{75+50i-3}{25+9}=\frac{72+50i}{34}=\frac{36}{17}+\frac{25}{17}i;$$

$$\frac{2z_7+3z_8}{z_2-z_1}=\frac{2\cdot3+3\cdot(-i)}{3i-1-(1+i)}=\frac{6-3i}{-2+2i}=\frac{6-3i}{-2(1-i)}=-\frac{1}{2}\frac{(6-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{6+6i-3i-3i^2}{1-i^2}=-\frac{1}{2}\frac{9+3i}{2}=-\frac{9+3i}{4}=-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}i.$$

Задание 2. Возвести комплексное число z в степень.

$z=2+2\sqrt{3}i$, $z^5-?$

$z=x+iy=2+2\sqrt{3}i$ - алгебраическая форма комплексного числа.

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4,$$

$$\left.\begin{aligned}cos\,\varphi&=\frac{x}{r}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\\ sin\,\varphi&=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad\varphi=\frac{\pi}{3},$$

$$\Rightarrow z=r(cos\,\varphi+i\,sin\,\varphi)=4\left(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}\right)$$ - тригонометрическая форма комплексного числа.

Далее, по формуле возведения комплексного числа в n-ую степень, имеем:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = z^5 = r^5(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi) =$$

$$= 4^5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1024\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 512 - i512\sqrt{3}.$$

Задание 3. Найти корни уравнения

$$z^6 - iz^3 + 6 = 0.$$

Пусть $t = z^3$, тогда $t^2 - it + 6 = 0$, откуда $t_1 = 3i$; $t_2 = -2i$, следовательно $z_1^3 = 3i$, $z_2^3 = -2i$.

Тогда, по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

будем иметь:

$$z_1 = \sqrt[3]{3i} \Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{i}, \; i = cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2}.$$

Пусть $\sqrt[3]{i} = \omega$, тогда имеем три значения корня:

$$\omega_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot 0}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6};$$

$$\omega_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot 1}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot 1}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6};$$

$$\omega_3 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot 2}{3}\right) = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}.$$

Таким образом,

$$z_{11} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right);$$

$$z_{12} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right);$$

$$z_{13} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Аналогично, $z_2 = \sqrt[3]{-2i} \Rightarrow z_1 = -\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{i}$, следовательно

$$z_{21} = -\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right);$$

$$z_{22} = -\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right);$$

$$z_{23} = -\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Задание 4. Вычислить значение функции $W = f(z)$ в точке z_0.

$$W = 3z^2 + ch3z;\ z_0 = 2 + i.$$

$$W = 3z^2 + \frac{e^{3z} + e^{-3z}}{2} = 3(2+i)^2 + \frac{e^{3(2+i)} + e^{-3(2+i)}}{2} =$$

$$= 3\left(4 + 4i + i^2\right) + \frac{1}{2}\left(e^{6+3i} + e^{-6-3i}\right) =$$

(т.к.

$$ch3z = \frac{e^{3z} + e^{-3z}}{2} = \frac{e^{3(2+i)} + e^{-3(2+i)}}{2} = \frac{e^{6}(cos\,3 + i\,sin\,3) + e^{-6}(cos\,3 - i\,sin\,3)}{2})$$

$$= 12 + 12i - 3 + \frac{\left(e^6 + e^{-6}\right)\cos 3}{2} + i\frac{\left(e^6 - e^{-6}\right)\sin 3}{2} =$$

$$= \frac{18 + \left(e^6 + e^{-6}\right)\cos 3}{2} + i\frac{24 + \left(e^6 - e^{-6}\right)\sin 3}{2}.$$

Задание 5. Проверить выполнение условий Коши-Римана и там, где они выполняются, найти производную:

$$f(z) = e^z.$$

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Так как $e^z = e^{x+iy} = e^x\cos y + ie^x\sin y$, то $u(x,y) = e^x\cos y$, $v(x,y) = e^x\sin y$.

Найдём частные производные и выясним, в окрестности каких точек они существуют и непрерывны, а также в каких точках плоскости выполняются условия Коши-Римана $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y\right) = e^x \cos y\,,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \sin y\right) = e^x \cos y\,,$$

т.е. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ для любых действительных x и y, и эти частные производные непрерывны во всей плоскости R^2; кроме того, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^x \cos y\right) = -e^x \sin y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^x \sin y\right) = e^x \sin y$,

т.е. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ для любых действительных x и y, и эти частные производные непрерывны во всей плоскости R^2.

Так как условия Коши-Римана выполняются для любой пары действительных чисел (x, y) и частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ существуют и непрерывны в окрестности любой точки (x, y), то производная $f'(z)$ существует в любой точке $z = x + iy$ комплексной плоскости С.

Найдём эту производную:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) = e^z.$$

Итак, $f'(z) = \left(e^z\right)' = e^z$, $\forall z \in C$.

Задание 6. Вычислить интеграл вдоль кривой l от точки z_0 до точки z_1:

$$\int_l z\,Re\,z\,dz\,,$$

где l: $Im\,z = Re\,z + 1$; $z_0 = 1 + 2i$, $z_1 = 2 + 3i$.

$z = x + iy \;\Rightarrow\; x = Re\,z$, $y = Im\,z \;\Rightarrow\; l$: $y = x + 1$ от точки $(1;2)$ до точки $(2;3)$.

$$\int_l z\,\mathrm{Re}\,z\,dz = \int_l (x+iy)x\,d(x+iy) = \int_l (x^2+ixy)(dx+idy) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = x+1 \\ \Rightarrow dy = dx \end{array} \right| = \int_1^2 \left(x^2 + ix(x+1)\right)(dx+idx) =$$

$$= \int_1^2 (x^2+ix^2+ix)(1+i)\,dx = \int_1^2 (2ix^2+ix-x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{2ix^3}{3} + \frac{ix^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_1^2 = -\frac{5}{2} + i\frac{43}{6}.$$

Задание 7. Найти разложение функции в ряд Лорана в окрестности z_0. Указать главную и правильную части ряда и его область сходимости. Выписать значение вычета.

$$f(z) = \frac{2}{z(3-z)},\ z_0 = 0.$$

Предварительно представим данную дробь в виде суммы двух простейших дробей $\dfrac{2}{z(3-z)} = \dfrac{A}{z} + \dfrac{B}{3-z}$.

Найдём числа A и B:

$\dfrac{2}{z(3-z)} = \dfrac{A(3-z)+Bz}{z(3-z)}$, следовательно,

$0\cdot z + 2 = (B-A)z + 3A$, откуда $\begin{cases} 0 = B - A, \\ 2 = 3A, \end{cases}$ т.е. $A = B = \dfrac{2}{3}$.

Итак, $$\frac{2}{z(3-z)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3-z}.$$

Так как дробь $\dfrac{2/3}{z}$ уже представлена в виде суммы (состоящей из одного слагаемого) членов вида $c_n z^n$, то остаётся найти разложение дроби $\dfrac{2/3}{3-z}$. Для этого воспользуемся разложением дроби $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ в бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = z$ в той области, где z – “мало” (т.е. в открытом круге $q = |z| < 1$) и получим:

$$\frac{2/3}{3-z} = \frac{2/3}{3\left(1-z/3\right)} = \frac{2}{3\cdot 3}\left(1+\frac{z}{3}+\left(\frac{z}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z}{3}\right)^n+\ldots\right) =$$

$$= \frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}z+\frac{2}{3^4}z^2+\ldots+\frac{2}{3^{n+2}}z^n+\ldots$$

Этот ряд сходится при $|q| < \left|\frac{z}{3}\right| < 1$, т.е. в открытом круге $|z| < 3$.

Теперь запишем ряд Лорана для исходной дроби:

$$\frac{2}{z(3-z)} = \frac{2/3}{z}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}z+\frac{2}{3^4}z^2+\ldots+\frac{2}{3^{n+2}}z^n+\ldots = \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{2}{3^{n+2}}z^n$$

.

Область сходимости этого ряда – кольцо $0 < |z| < 3$. Первое слагаемое, $\frac{2/3}{z}$, является главной частью ряда,оставшаяся часть ряда–правильной $\underset{0}{res}\, f(z) = \frac{2}{3}$.

Задание 8. Определить тип всех особых точек и вычислить вычет функции, найти вычет в бесконечно удалённой точке.

$$f(z) = \frac{z+1}{(z+2i)^2(z-1)}.$$

Особыми точками функции $f(z)$, очевидно, являются следующие точки:

$-2i$ - полюс 2-ого порядка, 1- полюс 1-ого порядка.

Найдём вычет в точке $-2i$:

$$\underset{-2i}{res}\, f(z) = \lim_{z\to -2i}\left[f(z)\left(z-(-2i)\right)^2\right]' = \lim_{z\to -2i}\left[\frac{(z+1)\left(z-(-2i)\right)^2}{(z+2i)^2(z-1)}\right]' =$$

$$= \lim_{z\to -2i}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)' = \lim_{z\to -2i}\frac{-2}{(z-1)^2} =$$

$$= \frac{-2}{(-2i-1)^2} = \frac{2}{3-4i} = \frac{2(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{6}{25} + \frac{8}{25}i\,.$$

Найдём вычет в точке 1, записав функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\dfrac{z+1}{(z+2i)^2}}{z-1}, \text{ где } \psi(1)=0,\ \psi'(1)=1\neq 0, \text{ тогда}$$

$$\underset{1}{res}\, f(z) = \left.\frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}\right|_{z=1} = \left.\frac{\dfrac{z+1}{(z+2i)^2}}{1}\right|_{z=1} = \left.\frac{z+1}{(z+2i)^2}\right|_{z=1} = \frac{2}{(1+2i)^2} = -\frac{6}{25} - \frac{8}{25}i$$

.

Найдём вычет в бесконечно удалённой точке:

$$\underset{\infty}{res}\, f(z) = -\left(\underset{-2i}{res}\, f(z) + \underset{1}{res}\, f(z)\right) = -\left(\frac{6+8i}{25} - \frac{6+8i}{25}\right) = 0\,.$$