ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Практикум
по дисциплине

«Математический анализ»

Авторы
Глушкова В. Н., Фролова Н. В.,
Рябых Г. Ю., Пристинская О. В.,
Ермилова О. В., Ароева Г. А.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Приведены задания по основным темам, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины «Математический анализ. Интегральное исчисление». Приведены образцы решения типовых заданий, снабжённые необходимыми теоретическими сведениями.

Предназначено для преподавателей и студентов, изучающих базовый курс математики. Пособие рекомендовано студентам всех форм обучения технических и экономических направлений и специальностей.

Авторы

доцент кафедры «Прикладная математика» Глушкова В.Н.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.,
профессор кафедры «Прикладная математика» Рябых Г.Ю.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пристинская О.В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Ермилова О.В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Ароева Г.А.

Оглавление

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. Изменить порядок интегрирования. Области интегрирования изобразить на чертеже.

1. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{8-y^2}} f(x;y)dx$;

2. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{2x-x^2} f(x;y)dy$;

3. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)dy$;

4. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x;y)dy$;

5. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2x}^{4x-x^2} f(x;y)dy$;

6. $\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{y} f(x;y)dx$;

7. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{8-x^2}}^{-2} f(x;y)dy$;

8. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{\sqrt{-1-y}}^{1} f(x;y)dx$;

9. $\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{y} f(x;y)dx$;

10. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{x^2-2}^{0} f(x;y)dy$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области (D), ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.

1. $\iint\limits_{(D)} (xy-3x^5y^2)dxdy, D: y=-x^2, y=|x|, x=1.$

2. $\iint\limits_{(D)} (5x^2y+x^3y^3)dxdy, D: y=-\frac{x^2}{2}, y=x.$

3. $\iint\limits_{(D)} 3ye^{\frac{xy}{4}}dxdy, D: y=e, y=\ln 5, x=4, x=8.$

4. $\iint\limits_{(D)} (3x^4y^2-10xy)dxdy, D: y=x^2, y=-x.$

5. $\iint\limits_{(D)} y\sin(2xy)dxdy, D: y=\frac{\pi}{2}, y=\frac{3}{2}\pi, x=\frac{1}{2}, x=2$

6. $\iint\limits_{(D)} y^2e^{-xy}dxdy, D: x=0, y=1, y=\frac{x}{2}.$

7. $\iint\limits_{(D)} (2x^3y^3 - 7xy^4)dxdy, D: y = \sqrt{x}, y = -x, x = 1.$

8. $\iint\limits_{(D)} (4xy + x^4y^5)dxdy, D: y = x^2, y = -|x|, x = -1$

9. $\iint\limits_{(D)} y^2 e^{-\frac{xy}{2}} dxdy, D: x = 0, y = \sqrt{2}, y = x$

10. $\iint\limits_{(D)} y^2 \cos(xy)dxdy, D: x = 0, y = \sqrt{\pi}, y = x$

Задание 3. Вычислить тройной интеграл по области (V), заданной поверхностями. Сделать чертёж.

1. $\iiint\limits_{(V)} 2y^2e^{xy}dxdydz, где V: x = 0, y = 1, y = x, z = 0, z = 1.$

2. $\iiint\limits_{(V)} 3(y^2 + z)dxdydz, где V: x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1, z = x + y.$

3. $\iiint\limits_{(V)} y^2z\cos(xyz)dxdydz, где V: x = 1, y = 2x, y = 0, z = 0, z = 36.$

4. $\iiint\limits_{(V)} (x + y - z)dxdydz, где V: x = -1, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 2.$

5. $\iiint\limits_{(V)} y^2e^{\frac{xy}{2}} dxdydz, где V: x = 0, y = 2, y = 2x, z = 0, z = -1.$

6. $\iiint\limits_{(V)} (5x + 6z)dxdydz, где V: x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1.$

7. $\iiint\limits_{(V)} 2y^2ze^{xyz} dxdydz, где V: x = 1, y = 1, z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

8. $\iiint\limits_{(V)} (x^2 + 4y^2)dxdydz, где V: z = 2x + y, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

9. $\iiint\limits_{(V)} 7xzdxdydz, где V: y = x, y = 0, x = 2, z = xy, z = 0.$

10. $\iiint\limits_{(V)} x^2 \sin\frac{\pi xy}{2} dxdydz, где V: x = 2, y = x, y = 0, z = 0, z = \pi.$

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями (перейти к полярным координатам), сделать чертеж.

1. $x^2-6x+y^2=0; y=\frac{x}{\sqrt{3}};$
$x^2-10x+y^2=0; y=\sqrt{3}x.$

2. $y^2-2y+x^2=0; y=\frac{x}{\sqrt{3}};$
$y^2-10y+x^2=0; x=0.$

3. $x^2-4x+y^2=0; y=0;$
$x^2-8x+y^2=0; y=\sqrt{3}x.$

4. $y^2-4y+x^2=0; y=x;$
$y^2-2y+x^2=0; x=0.$

5. $x^2-2x+y^2=0; y=0;$
$x^2-6x+y^2=0; y=x.$

6. $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2),$
$x^2+y^2=1,$ (вне круга)

7. $(x^2+y^2)^2=4xy;$
$x^2+y^2=\sqrt{3},$ (вне круга).

8. $(x^2+y^2)^2=3(x^2-y^2),$
$x^2+y^2=3,$ (вне лемнискаты).

9. $(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2);$
$x^2+y^2=2,$ (вне круга).

10. $(x^2+y^2)^2=8xy;$
$x^2+y^2=4,$ (вне лемнискаты).

Задание 5. Вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертёж.

1. $z=0, y=0, x=0,$
$x+y=1, z=x^2+y^2.$
2. $z=0, z=4-x-y, \quad y=0, x^2+y^2=4.$
3. $z=0, y+z=2, x^2+y^2=4.$
4. $z=0, x^2+y^2=z, x^2+y^2=4.$
5. $z=x^2+y^2, y=x^2, y=1, z=0.$
6. $z=0, z=9-x^2, x^2+y^2=9.$
7. $z=0, z=y^2, x^2+y^2=9.$
8. $z=0, x=0, y=0, x+y+z=1$
9. $z=0, y=0, x=0, x+y=1, z=2-x-y.$
10. $z=0, z=4\sqrt{y}, x=0, x+y=4.$

Задание 6. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями.

1. $x^2+y^2+z^2=4, z\ge 0.$
2. $x^2+y^2=2z, z=1.$
6. $z=\sqrt{2-x^2-y^2}, z=x^2+y^2.$
7. $z=8-x^2-y^2, z=-1.$

3. $x^2+y^2+z^2=2,\quad x^2+y^2=z^2, z\geq 0.$

4. $z=1-x^2-y^2, z=0.$

5. $z=1+x^2+y^2, z=5.$

8. $z^2=x^2+y^2, z=\sqrt{10-x^2-y^2}.$

9. $x^2+y^2+z^2=1, z=\frac{x^2+y^2}{2}, z\geq 0.$

10. $x^2+y^2+z^2=25, z\leq 0.$

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл I рода (по длине дуги).

1. $\int\limits_Z (x-y)dl,$ где Z – отрезок прямой между точками A(0;0) и B(0;0).

2. $\int\limits_Z \frac{dl}{x^2+y^2+z^2},$ где Z – дуга первого витка кривой $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t, \\ z=3t. \end{cases}$

3. $\int\limits_Z \frac{y}{x}dl,$ где Z – дуга параболы $y=\frac{x^2}{2}$ от точки A(1; $\frac{1}{2}$) до точки B(2;2).

4. $\int\limits_Z xydl,$ где Z – четверть окружности $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\sin t \end{cases},$ лежащая в первой четверти.

5. $\int\limits_Z (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})dl,$ где Z – отрезок прямой между точками A(-1;0) и B(0;1).

6. $\int\limits_Z (x^2+y^2+z^2)dl,$ где Z – дуга винтовой линии $\begin{cases} x=5\cos t \\ y=5\sin t, t\in[0;\pi] \\ z=3t \end{cases}$

7. $\int\limits_Z ydl,$ где Z – дуга параболы $y^2=2x$ от точки O (0;0) до точки A(4; $\sqrt{8}$).

8. $\int\limits_Z \sqrt{1+2x}dl,$ где Z – дуга линии $\begin{cases} x=t^2/2 \\ y=t^3/3 \end{cases}, t\in[0;1]$

9. $\int\limits_Z \frac{y}{\sqrt{x}}dl,$ где Z – дуга линии $y^2=4x$ от точки A (1;2) до точки B(4;4).

10. $\int\limits_Z x dl,$ где Z – дуга линии $\begin{cases} x = t \\ y = t^2/2 \end{cases}, t \in [0;1].$

Задание 8. Найти работу силы **F** при перемещении вдоль линии Z от точки M к точке N.

1. $\mathbf{F} = -y\bar{i} + x\bar{j}; Z: y = x^3, M(0;0), N(2;8).$

2. $\mathbf{F} = (x+y)\bar{i} + (x-y)\bar{j}; Z: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1, (x \geq 0, y \geq 0), M(1;0), N(0;3).$

3. $\mathbf{F} = (x^2 + 2y)\bar{i} + (y^2 + 2x)\bar{j}; Z: y = 2 - \frac{x^2}{8}, M(-4;0), N(0;2).$

4. $\mathbf{F} = 2x\bar{i} - (x+2y)\bar{j};$ где Z – отрезок прямой MN, M(-1;0), N(1;2).

5. $\mathbf{F} = xy\bar{i}; Z: y = \sin x, M(\pi;0), N(0;0).$

6. $\mathbf{F} = (x^2 - 2y)\bar{i} + (y^2 - 2x)\bar{j};$ где Z – отрезок прямой MN, M(-4;0), N(0;2).

7. $\mathbf{F} = (x+y)\bar{i} + (x-y)\bar{j}; Z: y = x^2, M(-1;1), N(1;1).$

8. $\mathbf{F} = x^3\bar{i} - y^3\bar{j}; Z: x^2 + y^2 = 4, (x \geq 0, y \geq 0), M(2;0), N(0;2).$

9. $\mathbf{F} = x^2 y\bar{i} - y\bar{j};$ где Z – отрезок прямой MN, M(-1;0), N(0;1).

10. $\mathbf{F} = (xy - x)\bar{i} + \frac{x^2}{2}\bar{j}; Z: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1; (y \geq 0), M(3;0), N(-3;0).$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ

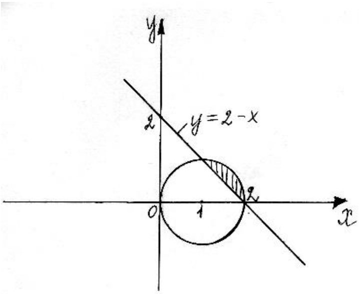
Задание 1. Изменить порядок интегрирования. Сделать чертёж:

$$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy.$$

Решение. Изобразим область интегрирования, для чего выпишем пределы изменения x и y:

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ 2 - x \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}. \end{cases}$$

Уравнение $y=\sqrt{2x-x^2}$ – это верхняя полуокружность, r =1 и центр в точке(1;0). Второе уравнение – это прямая, проходящая через точки (2,0) и (0,2). Заданная область заштрихована на чертеже.



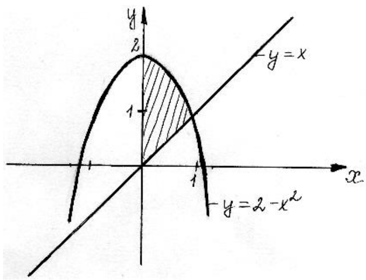
Для этой области имеем:

$$\begin{cases} 2-y \le x \le \sqrt{1-y^2}+1, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

Следовательно, данный интеграл, поменяв порядок интегрирования, можно записать так:

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{\sqrt{1-y^2}+1} f(x,y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D$ (x+ y)dx dy по области (D), ограниченной линиями: x = 0, x =1, y =x, y =2- x^2.



Решение: Область D ограничена прямыми x = 0, y = x и параболой $y=2-x^2$, тогда $\iint\limits_{(D)}(x+y)dxdy=\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2}(x+y)dy.$

Вычисляем внутренний интеграл, считая x постоянным:

$$\int_{x}^{2-x^2}(x+y)dy=(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_{y=x}^{y=2-x^2}=\left[x(2-x^2)+\frac{(2-x^2)^2}{2}\right]-(xx+\frac{x^2}{2})=$$

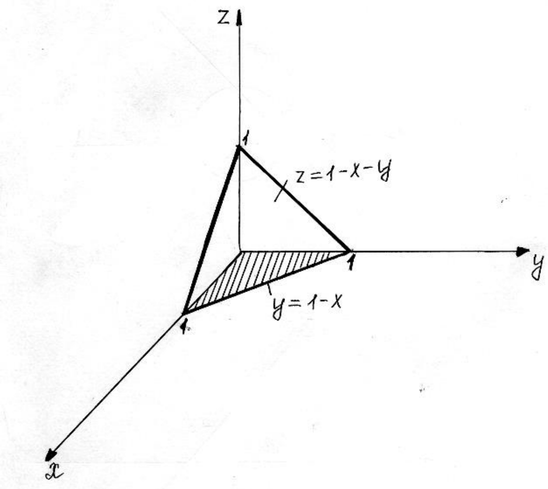
$$=\frac{x^4}{2}-x^3-\frac{7}{2}x^2+2x+2.$$

Вычисляем внешний интеграл:

$$\int_0^1(\frac{x^4}{2}-x^3-\frac{7}{2}x^2+2x+2)dx=(\frac{x^5}{10}-\frac{x^4}{4}-\frac{7}{6}x^3+x^2+2x)\Big|_0^1=\frac{101}{60}.$$

Задание 3. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)dxdydz$ по области V, заданной поверхностями x + y + z =1, x = 0, y = 0, z = 0.

Решение. Изобразим область V на чертеже. Это пирамида, ограниченная плоскостью x + y + z =1 и координатными плоскостями x=0, y = 0, z = 0. Область V проецируется на плоскость Oxy в треугольник, ограниченный прямыми x = 0, y = 0, y = 1 – x.



Опишем область интегрирования с помощью неравенств V:

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\\ 0\le z\le 1-x-y\end{cases}.$$

Вычислим интеграл:

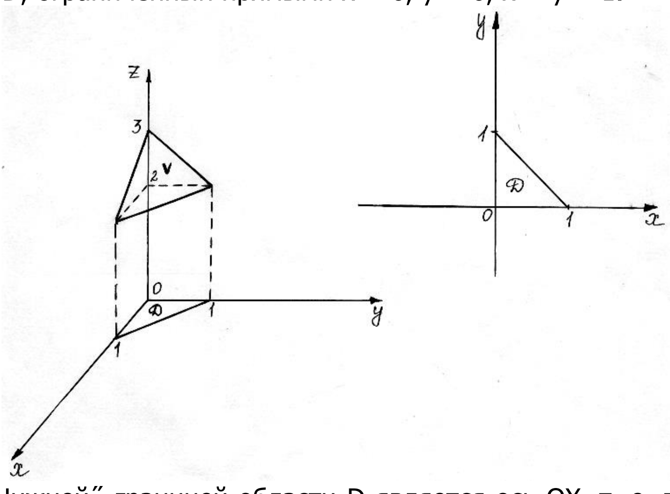
$$\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left[xz+yz+\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y}$$

$$dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left[y-yx^2-xy^2-\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x}dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int\limits_0^1(2-3x+x^3)dx=\frac{1}{6}\left[2x-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{8}.$$

Задание 4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями x+y+z=3, z=2, x=0, y=0.

Решение. V = $\iiint\limits_V dxdydz$. Тело снизу ограничено плоскостью z = 2, сверху - плоскостью x + y + z = 3, поэтому предел интегрирования по z определяется неравенством $2\le z\le 3-x-y$. $\Rightarrow$ V = $\iint\limits_D dxdy\int\limits_1^{3-x-y}dz$. На плоскость XOY тело проецируется в треугольник D, ограниченный прямыми x = 0, y = 0, x + y = 1.



″Нижней″ границей области D является ось OX, т. е. прямая y=0. ″Верхней″ границей - прямая y = 1 – x. $\Rightarrow$ Пределы интегрирования по y определяются неравенством $0\le y\le 1-x$, а по x: $0\le x\le 1$.

Итак, D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1-x, \\ 2 \le z \le 3-x-y. \end{cases}$

Следовательно,

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_2^{3-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)dy =$$

$$\int_0^1 (\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2})dx = \frac{1}{6}.$$

Задание 5. Вычислить криволинейный интеграл I рода: $\int_Z y^2 dl,$ где Z - часть окружности

$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad 0 \le t \le \pi/2.$

Решение. Так как $x_t' = -a\sin t,\;\; y_t' = a\cos t,$ то дифференциал дуги

$$dl = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}dt = adt\,.$$

Следовательно, получаем:

$$\int_Z y^2 dl = \int_0^{\pi/2} a^2 a\sin^2 tdt = \frac{a^3}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt = \frac{a^3}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3\pi}{4}.$$