ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Математический анализ»

Авторы
Рябых Г. Ю.,
Пристинская О. В.,
Фролова Н. В.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения технических и экономических направлений и специальностей.

Методическое пособие включает задания по разделам специальных глав математического анализа. Приводится необходимый теоретический материал. Данное методическое пособие может быть использовано для самостоятельной работы студентов по решению задач СГМА. Сборник заданий окажет существенную помощь при проведении практических и лабораторных занятий.

Авторы

профессор кафедры «Прикладная математика» Рябых Г.Ю.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пристинская О.В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика» Фролова Н.В.

Оглавление

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

Пусть X и Y - нормированные пространства.

Определение. Оператор $A: X \to Y$ с областью определения $D(A)$ называется *линейным*, если

1) $D(A)$ - линейное многообразие;

2) $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in D$ и любых скаляров λ_1, λ_2.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВОЛЬТЕРРА.

1. Основные понятия

Уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt, \quad (1)$$

где f (x) , K (x ,t) – известные функции, φ(x) – искомая функция, λ – числовой параметр , называется линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода. Функция K (x,t) называется ядром уравнения Вольтерра. Если f(x)=0, то уравнение (1) принимает вид.

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt, \quad (2)$$

и называется однородным уравнением Вольтерра 2-го рода.

Уравнения

$$\int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (3)$$

где $\varphi(x)$ – искомая функция, называется интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода. Не нарушая общности, можем считать нижний предел a равным нулю, что мы и будем предполагать в дальнейшем. Решением интегрального уравнения (1), (2) или (3) называют функцию $\varphi(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество (по x).

2. Резольвента интегрального уравнения Вольтерра.

Решение интегрального уравнения с помощью резольвенты

Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,f)\varphi(f)\,dt,$$

Где K(x,t) есть непрерывная функция при $0 \le x \le a,\ \ 0 \le t \le x,$ а $f(x)$ непрерывна при $0 \le x \le a,$

Будем искать решение интегрального уравнения (1) в виде бесконечного степенного ряда по степеням λ:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \cdots + \lambda^n\varphi_n(x) + \cdots$$

Подставляя формально этот ряд в (1), получим

$$\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \cdots + \lambda^n\varphi_n(x) + \cdots = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)[\varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t) + \cdots + \lambda^n\varphi_n(x) + \cdots]\,dt$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, найдем

$$\varphi_0(x) = f(x),$$
$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t)\,dt = \int_0^x K(x,t)f(t)\,dt,$$
$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi_1(t)dt = \int_0^x K(x,t)\int_0^x K(x,t_1)f(t_1)dt_1\,dt,$$

. . . .

Соотношение (3) дают способ последовательного определения функций $\varphi_n(x)$. Можно показать, что при сделанных предположенных относительно f(x) и K (x,t) полученный таким образом ряд (2) сходится равномерно по x и λ при любом λ и $x \in [0,a]$ и его сумма есть единственное решение уравнения (1).

Далее, из (3) следует :

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)f(t)\,dt,$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)[\int_0^t K(t,t_2)f(t_1)dt_1]dt = \int_0^x f(t_1)dt_1\int_{t_1}^x K(x,t)K(t,t_1)dt = \int_0^x K_2(x,t_1)f(t_1)dt_1$$

,

Где

$$K_2(x,t_1) = \int_{t_1}^x K(x,t)K(t,t_1)dt.$$

Аналогично устанавливается, что вообще

$$\varphi_n(x) = \int_0^x K_n(x,t)f(t)\,dt \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

Функции $K_n(x,t)$ называются повторными или итерированными ядрами. Они, как нетрудно показать, определяются при помощи рекуррентных формул

$$K_n(x,t) = K(x,t),$$
$$K_{n+1}(x,t) = \int_t^x K(x,z)K_n(z,t)\,dt \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

Используя (4) и (5), равенство (2) можно записать так:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v K_{v+1}(x,t) f(t)dt.$$

Функция R (x ,t , λ), определяемая при помощи ряда

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v K_{v+1}(x,t),$$

называется резольвентой (или разрешающим ядром) интегрального уравнения (1). Ряд (6) в случае непрерывного ядра K(x ,t) сходится абсолютно и равномерно.

Резольвента R (x ,t , λ) удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$R(x,t,\lambda)=K(x,t)+\lambda\int_t^x K(x,s)R(s,t;\lambda)ds.$$

С помощью резольвенты решение интегрального уравнения (1) запишется в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x R(x,t;\lambda)f(t)\,dt$$

П р и м е р 1. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром K(x, t)=1

Р е ш е н и е. Имеем K_1(x, t)= K(x,t)=1. Далее, согласно формулам (5),

$$K_2(x,t)=\int_t^x K(x,z)K_1(z,t)dz = \int_t^x dz = x-t,$$

$$K_3(x,t)=\int_t^x 1\cdot(z-t)dz = \frac{(x-t)^2}{2},$$

$$K_4(x,t)=\int_t^x 1\cdot\frac{(z-t)^2}{2}dz = \frac{(z-t)^2}{3t},$$

. . . .

$$K_n(x,t)=\int_t^x 1\cdot K_{n-1}(z,t)dz = \int_t^x 1\cdot\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}dz = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Таким образом, согласно определению

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_{n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(x-t)^n}{n!} = e^{\lambda(x-t)}.$$

Найти с помощью резольвент решения следующих интегральных уравнений:

1. $\varphi(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt.$
2. $\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt$
3. $\varphi(x) = x3^x - \int_0^x 3^{x-1}\varphi(t)\,dt$
4. $\varphi(x) = e^x\sin x + \int_0^x \frac{2+\cos x}{2+\cos t}\varphi(t)dt$
5. $\varphi(x) = 1-2x-\int_0^x e^{x^2-t^2}\varphi(t)dt$
6. $\varphi(x) = e^{x^2+2x} + 2\int_0^x e^{x^2-t^2}\varphi(t)dt$
7. $\varphi(x) = 1+x^2+\int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2}\varphi(t)dt$

КОМПАКТНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Ядро K(x,t) интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода называется вырожденным, если оно является суммой конечного числа произведений функций только от x на функции только от t, т.е. если оно имеет вид

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t);$$

Функции $a_k(x)$ и $b_k(t)$ (k=1,2,…,n) будем считать непрерывными в основном квадрате $a \le x,t \le b$ и линейно независимыми между собой. Интегральное уравнение с вырожденным ядром (1)

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t)\right] \varphi(t)\,dt = f(x)$$

решается следующим образом .

Перепишем (2) в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k(x) \int_a^b b_k(t)\varphi(t)\,dt$$

и введем обозначение

$$\int_a^b b_k(t)\,\varphi(t)\,dt = C_k$$

Тогда (3) примет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x)$$

где C_k- неизвестные постоянные (так как функция $\varphi(x)$ неизвестна)

Таким образом, решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к нахождению постоянных C_k (k=1,2,…,n). Подставляя выражение (5) в интегральное уравнение (2), после несложных выкладок получим

$$\sum_{m=1}^{n} \left\{ C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t) \right] dt \right\} a_m(x) = 0$$

В силу линейной независимости функций $a_m(x)$ $(m = 1,2,\ldots,n)$ отсюда следует, что

$$C_m - \int_a^b b_m(t)\left[f(t) + \lambda\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t)\right]dt = 0,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$, получаем по формулам Крамера.

$$C_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} \ldots -\lambda a_{1k-1} f_1 - \lambda a_{1k+1} \ldots -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{12} \ldots -\lambda a_{2k-1} f_2 - \lambda a_{2k+1} \ldots -\lambda a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda a_{n1} \ldots -\lambda a_{nk-1} f_n - \lambda a_{nk+1} \ldots 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

(k=1,2,…,n)

Решением интегрального уравнения (2) будет функция $\varphi(x)$,определенная равенством

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x).$$

где коэффициенты $C_k\,(k = 1, \ldots, n)$ определяются по формулам (8)

З а м е ч а н и е. Систему (6) можно получить, если обе части равенства (5) последовательно умножить на $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$, и проинтегрировать в пределах от a до b либо же подставить выражение (5) для $\varphi(x)$в равенство (4), заменив x на t.

П р и м е р. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos t + t^2\sin x + \cos x\sin t)\varphi(t)\,dt = x \qquad (9)$$

Р е ш е н и е. Запишем уравнение в следующем виде:

$$\varphi(x) = \lambda x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos t dt + \lambda\sin x\int_{-\pi}^{\pi}t^2\varphi(t)\,dt + \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin t dt + x$$

Введем обозначения:

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos t dt \qquad C_2 = \int_{-\pi}^{\pi}t^2\varphi(t)dt \qquad C_1 = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin t dt \qquad (10)$$

Где C_1, C_2, C_3 – неизвестные постоянные. Тогда (9) примет вид

$$\varphi(x) = C_1\lambda x + C_2\lambda\sin x + C_3\lambda\cos x + x \qquad (11)$$

Подставляя выражение (11) в равенства (10), получим

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi}(C_1\lambda t + C_2\lambda\sin t + C_3\lambda\cos t + t)\cos t dt,$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi}(C_2\lambda t + C_2\lambda\sin t + C_3\lambda\cos t + t)t^2 dt\ ,$$

$$C_3 = \int_{-\pi}^{\pi}(C_1\lambda t + C_2\lambda\sin t + C_3\lambda\cos t + t)\sin t dt,$$

Или

$$C_1\left(1 - \lambda\int_{-\pi}^{\pi}t\cos t dt\right) - C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t\,dt - C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}cos^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi}t\cos t\,dt$$

,

$$C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^3 dt + C_2\left(1 - \lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^2\sin t dt\right) - C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^2\cos t dt = \int_{-\pi}^{\pi}t^2 dt,$$

$$C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t dt - C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt + C_3\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t\, dt\right) = \int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\, dt$$

.

Вычислив входящие в этих уравнениях интегралы, мы получим систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных C_1, C_2, C_3:

$$\left.\begin{aligned} C_1 - \lambda\pi C_3 &= 0 \\ C_1 - 4\lambda\pi C_3 &= 0 \\ -2\lambda\pi C_1 - \lambda\pi C_2 + C_3 &= 2\pi \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Определитель этой системы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ -2\lambda\pi & \lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda^2\pi^2 \neq 0.$$

Система (12) имеет единственное решение

$$C_1 = \frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}, \qquad C_2 = \frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}, \qquad C_3 = \frac{\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}$$

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}(\lambda\pi x - 4\lambda\pi\sin x + \cos x) + x$$

Решить следующие интегральные уравнение с вырожденными ядрами:

1. $\varphi(x) - 4\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\varphi(t)dt = 2x - \pi.$
2. $\varphi(x) - \int_{-1}^{1} e^{\arcsin x}\varphi(t)dt = tgx.$
3. $\varphi(x) - \lambda\int_{-\pi/4}^{\pi/4} tgt\varphi(t)dt = ctgx.$
4. $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 \cos(g\ln t)\varphi(t)dt = 1.$
5. $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 arc\cos t\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
6. $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^p \varphi(t)dt = 1$ $\quad$ ($p > -1$).
7. $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (x\ln t - t\ln x)\varphi(t)dt = \frac{6}{5}(1-4x)$
8. $\varphi(x) - \lambda\int_0^{\pi/2} \sin x\cos t\,\varphi(t)\,dt = \sin x$
9. $\varphi(x) - \lambda\int_0^{2\pi} |\pi - t|\sin x\varphi(t)\,dt = x$
10. $\varphi(x) - \lambda\int_0^{\pi} \sin(x-t)\varphi(t) = \cos x$
11. $\varphi(x) - \lambda\int_0^{2\pi} (\sin x\cos t - \sin 2x\cos 2t + \sin 3x\cos 3t)\,\varphi(t)\,dt = \cos x$
12. $\varphi(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[x - \frac{1}{2}(3t^2-1) + \frac{1}{2}t(3x^2-1)\right]\varphi(t)dt = 1$

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Однородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0$ (1)

всегда имеет очевидное решение $\varphi(x) = 0$, которое называют нулевым (тривиальным) решением.

Значения параметра λ, при которых это уравнение имеет ненулевые решения, называются характеристическими числами уравнения K(x,t), а каждое ненулевое решение этого уравнения называется собственной функцией, соответствующей характеристическому числу λ.

Число $\lambda = 0$ не является характеристическим числом, так как при $\lambda = 0$ из (1) следует $\varphi(x) = 0$.

Если ядро K(x,t)непрерывно в квадрате Q{a$\leq x, t \leq b\}$ или квадратичное суммируемо в Q причем числа a и b конечные то каждому характеристическому числу λ соответствует конечное число линейно независимых собственных функций; число таких функций называется рангом характеристического числа. Разные характеристические числа могут иметь разные ранги. Для уравнения с вырожденным ядром

$\varphi(x) - \lambda \int_a^b [\sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t)]\varphi(t)\, dt = 0$ (2)

характеристические числа являются корнями алгебраического уравнения

$$\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} \dots & -\lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{nn} & -\lambda a_{nn} \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{bmatrix} = 0 \qquad (3)$$

степень которого $p \leq n$. Здесь $\Delta(\lambda)$ – определитель однородный линейной системы

$$\left.\begin{array}{l} (1-\lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12} C_2 - \cdots - \lambda a_{1n} C_n = 0 \\ -\lambda a_{21} C_1 + (1-\lambda a_{22}) C_2 - \cdots - \lambda a_{2n} C_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\lambda a_{n1} C_1 - \lambda a_{n2} C_3 - \cdots + (1-\lambda a_{nn}) C_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

П р и м е р 1. Найти характеристические числа и собственные функций интегрального уравнения

$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi (\cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t)\, \varphi(t)\, dt = 0,$

Р е ш е н и е . Имеем

$\varphi(x) = \lambda \cos^2 x \int_0^\pi \varphi(x) \cos 2t\, dt + \lambda \cos 3x \int_0^\pi \varphi(t) \cos^2 t dt$

Вводя обозначения

$$C_1 = \int_0^{\pi} \varphi(x)\cos 2t\,dt, \qquad C_2 = \int_0^{\pi} \varphi(t)\cos^2 t dt, \qquad (5)$$

будем иметь

$$\varphi(x) = C_1\lambda\cos^2 x + C_2\lambda\cos 3x$$

(6)

Подставляя (6) в (5), получим линейную систему однородных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} C_1(1 - \lambda\int_0^{\pi} \cos^2 t\cos 2t dt) - C_2\lambda\int_0^{\pi} \cos 3t\cos 2t\,dt = 0 \\ -C_1\lambda\int_0^{\pi} \cos^3 dt + C_2\left(1 - \lambda\int_0^{\pi} \cos^3 t\,\cos 3t\,dt\right) = 0 \end{array}\right\}$$

(7)

Так как

$$\int_0^{\pi} \cos^2 t\cos 2tdt = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\pi} \cos 3t\,\cos 2t\,dt = 0,$$
$$\int_0^{\pi} \cos^3 dt = 0\,, \qquad \int_0^{\pi} \cos^3 t\,\cos 3t\,dt = \frac{\pi}{8},$$

то система (7) примет вид

$$\left.\begin{array}{l} \left(1 - \frac{\lambda\pi}{4}\right)C_1 = 0 \\ \left(1 - \frac{\lambda\pi}{8}\right)C_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Уравнение для нахождение характеристических чисел:

$$\begin{vmatrix} 1 - \dfrac{\lambda\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1 - \dfrac{\lambda\pi}{8} \end{vmatrix} = 0$$

Характеристические числа: $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$, $\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$.

При $\lambda = \frac{4}{\pi}$ система (8) принимает вид

$$\begin{cases} 0 \cdot C_1 = 0, \\ \dfrac{1}{2} \cdot C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 0$, C_1 произвольно, и, значит, собственная функция будет $\varphi(x) = C_2\lambda\cos 3x$, или полагая $C_2\lambda = 1$, получим $\varphi_2(x) = \cos 3x$.

Итак, характеристические числа:

$$\lambda_1 = \frac{4}{\pi}, \lambda_1 = \frac{8}{\pi};$$

соответствующие им собственные функции:

$$\varphi_1(x) = \cos^2 x, \varphi_2(x) = \cos 3x$$

Однородное интегральное уравнение Фредгольма может вообще не иметь характеристических чисел и собственных функций.

П р и м е р 2. Однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (3x-2)t\varphi(t)dt = 0$$

не имеет характеристических чисел и собственных функций.

В самом деле, имеем

$$\varphi(x) = \lambda(3x-2)\int_0^1 t\varphi(t)dt$$

Полагая $C = \int_0^1 t\varphi(t)dt = 0$

получим $\varphi(x) = C\lambda(3x-2)$

Подставляя (10) в (9), получим

$$\left[1-\lambda\int_0^1 (3t^2-2t)\,dt\right]\cdot C = 0$$

Но так как $\int_0^1 (3t^2-2t)\,dt = 0$, то уравнение (11) дает C=0, и, следовательно, $\varphi(x) = 0$.

Итак, данное уравнение при любых λ имеет только одно нулевое решение $\varphi(x) = 0$, а значит, оно не имеет характеристических чисел и собственных функций.

Найти характеристические числа и собственные функции для следующих интегральных уравнений с вырожденным ядром:

1. $\varphi(x) - \lambda\int_0^{\pi/2} sin^2x\ \varphi\, dt = 0$
2. $\varphi(x) - \lambda\int_0^{2\pi} \sin x\cos t\varphi(t)dt = 0$
3. $\varphi(x) - \lambda\int_0^{2\pi} \sin x\sin t\varphi(t)\,dt = 0$
4. $\varphi(x) - \lambda\int_0^{\pi} \cos(x+t)\,\varphi dt = 0$
5. $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (45x^2\ln t - 9t^2\ln x)\,dt = 0$
6. $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (2xt - 4x^2)\varphi(t)\,dt = 0$
7. $\varphi(x) - \lambda\int_{-1}^1 (5xt^2 + 4x^3t)\varphi(t)\,dt = 0$
8. $\varphi(x) - \lambda\int_{-1}^1 (5xt^2 + 4x^3t + 3xt)\varphi(t)\,dt = 0$
9. $\varphi(x) - \lambda\int_{-1}^1 (x\,cht - tshx)\varphi(t)\,dt = 0$
10. $\varphi(x) - \int_{-1}^1 (xch - t^2shx)\,\varphi(t)\,dt = 0$
11. $\varphi\left(x - \int_{-1}^1 (x\,cht - tchx\right)\varphi(t)\,dt = 0$

П р и м е р. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x$$

Р е ш е н и е. применяя преобразование Лапласа к обеим частям (3), получим

$$\frac{1}{p-1}\phi(p)=\frac{1}{p^2},$$

откуда

$$\phi(p)=\frac{p-1}{p^2}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=1-x$$

Функция $\varphi(x)=1-x$ есть решение уравнения (3).

Решить интегральные уравнения:

1. $\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt=\sin x$
2. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t=\mathrm{sh}x$
3. $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}}\varphi(t)dt=x^{\frac{5}{2}}$
4. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=\sin x$
5. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=x^2$
6. $\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt=x\sin x$
7. $\int_0^x \mathrm{sh}(x-t)\,\varphi(t)dt=x^3e^{-x}$
8. $\int_0^x J_0(x-t)\,\varphi(t)dt=\sin x$
9. $\int_0^x \mathrm{ch}(x-t)\,\varphi(t)dt=x$
10. $\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt=x+x^2$
11. $\int_0^x (x^2-t^2)\,\varphi(t)dt=\frac{x^3}{3}$
12. $\int_0^x (x^2-4xt+3t^2)\varphi(t)=\frac{x^4}{12}$
13. $\int_0^x (x^2-4xt+3t^2)\varphi(t)=x^2J_4(2\sqrt{x})$
14. $\int_0^x (x-2t)\,\varphi(t)dt=-\frac{x^2}{6}$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt=x$$

Здесь f(x)=x, n=2 Очевидно, f(x)имеет производные всех порядков, но ее первая производная f′(x)=1≠0, т.е. необходимое условие не выполняется.

Применяя формально к обеим часть уравнения (5) преобразование Лапласа, получим

$$\frac{1}{p^2}\Phi(p)=\frac{1}{p^2}$$

откуда

$$\Phi(p)=1.$$

это есть изображение σ -функции $\sigma(x)$

Напомним, что

$\sigma(x) = 1,\qquad \sigma^{(m)}(x) = p^m,$

v-целое $\geq 0.$

Итак, решение интегрального уравнение (5) есть сигма-функция:

$$\phi(p) = \sigma(x).$$

В этом можно убедиться непосредственной проверкой, если учесть, что свертка -функция со всякой гладкой функцией g(x) определяется так:

g(x)* $\sigma(x) = g(x),$

$\sigma^{(k)}(x) * g(x) = g^{(k)}(x) \qquad (k = 1,2,\ldots,)$

В самом деле, в нашем случае g(x)=K(x)=x и

$$\int_0^x K(x-t)\,\sigma(t)dt = K(x) = x$$

Таким образом, решение уравнение (5) существует, но уже в классе обобщенных функций.

Решить интегральные уравнения:

1. $\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt = x^2 + x - 1$
2. .$\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt = \sin x$
3. $\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt = x^2 + x^3$
4. $\int_0^x sin(x-t)\varphi(t)\,dt = x + 1$
5. $\int_0^x sin(x-t)\varphi(t)\,dt = 1 - \cos x$

П р и м е р. Решить интегральное уравнение Вольтерра: $x(t) = 2\cos t + 2\int_0^t \cos(t-\tau)x(\tau)d\tau$.

Р е ш е н и е. Для данного уравнения

$$L(2\cos t) = \frac{2p}{p^2+1},\ L(\cos t) = \frac{p}{p^2+1}.$$

Поэтому, переходя к изображениям в исходном уравнении, получим:

$$X(p) = \frac{2p}{p^2+1} + 2L[\cos t * x(t)],$$

$$X(p) = \frac{2p}{p^2+1} + 2\frac{p}{p^2+1}\cdot X(p),$$

тогда

$$X(p)=\frac{\frac{2p}{p^2+1}}{1-\frac{2p}{p^2+1}}=\frac{2p}{(p-1)^2}=\frac{2}{p-1}+\frac{2}{(p-1)^2},$$

переходя к оригиналу, получим:

$$x(t)=L^{-1}\left[\frac{2}{p-1}+\frac{2}{(p-1)^2}\right]=2e^t+2te^t=2e^t(1+t).$$

Операционным методом решить интегральные уравнения:

1. $y(t)=e^{2t}+\int_0^t e^{\tau-t}y(\tau)d\tau.$
2. $y(t)=t+\int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau.$
3. $y(t)=e^t+2\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau.$
4. $y(t)=\cos t+\int_0^t y(\tau)d\tau.$
5. $y(t)=e^{-t}+\int_0^t e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)y(\tau)d\tau.$
6. $y(t)=\cos t-\int_0^t (t-\tau)\cos(t-\tau)y(\tau)d\tau.$
7. $y(t)=\sin t+\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau.$
8. $y(t)=t-\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau.$
9. $y(t)=e^t-\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau.$
10. $y(t)=e^t+\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau.$