ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие
по дисциплине

«Интегральные преобразования»

Автор
Артамонова Е.А.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения направления бакалавриата 01.03.04 «Прикладная математика». Приведены материалы по основным темам, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины «Интегральные преобразования». Приведены образцы решения всех типовых заданий, снабжённые необходимыми теоретическими сведениями.

Автор

старший преподаватель кафедры
«Прикладная математика»
Артамонова Е.А.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие содержит лекционный и практический материал по всем основным разделам дисциплины «Интегральные преобразования». Представлены основные теоретические положения и понятия, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины, и подробное решение всех типовых заданий. Выбор тематики осуществлялся на основе анализа ФГОС3+ в подготовке бакалавров технических направлений.

Учебное пособие дополняет курс лекций по дисциплине «Интегральные преобразования» и будет полезно студентам в самостоятельной работе и при подготовке к текущему, рубежному и итоговому контролю знаний по данной дисциплине в различных формах, в том числе в форме интернет-экзамена, а также при изучении различных смежных дисциплин математического и естественнонаучного цикла.

1. ОПЕРАТОРЫ УСРЕДНЕНИЯ И ТЕОРЕМА БОХНЕРА

1. *Линейный интегральный оператор* определяется формулой

$g(x) = \int_G T(x,t)f(t)dt = (Tf)(x)$, где G – открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве E_n, $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, $t = \{t_1, \dots, t_n\}$ – точки (или векторы), а $dt = dt_1 \dots dt_n$ – элемент объема E_n. Функция $T(x, t)$ фиксирована и называется *ядром** оператора; функция f пробегает некоторую совокупность D_T – так называемую *область определения оператора* (или *преобразования*) T, а g пробегает также какую-то совокупность Δ_T, называемую областью значений оператора T. Важнейшим оператором этого рода является преобразование Фурье, представление о котором дается в курсе математического анализа. Преобразование Фурье, а также некоторые другие интегральные преобразования находят применение в теории линейных уравнений в тех случаях, когда с помощью интегрального преобразования уравнение в D_T переводится в более удобное для решения или исследования уравнение в Δ_T.

2. К числу интегральных операторов относится *оператор сглаживания* или *усреднения*, имеющий разнообразные применения в математическом анализе.

Пусть f – произвольная измеримая функция в G. Мы можем продолжить ее нулем за пределы множества G и, таким образом, считать, что f задана всюду в E_n. Будем считать, что f локально интегрируема по Лебегу. В таком случае при рассмотрении функции в окрестности точки x естественно ввести ее среднее значение в шаре с центром x или на сфере с этим центром. Если их радиус есть δ, то шар обозначим $K_n^x(\delta)$,а сферу $S_{n-1}^x\ \delta$). В дальнейшем используются также обозначения: $K_n(\delta) = K_n^0(\delta)$, $S_{n-1}(\delta) = S_{n-1}^0(\delta)$, $K_n = K_n(1)$, $S_{n-1} = S_{n-1}(1)$. Объем шара $K_n^x(\delta)$ равен $|K_n(\delta)| = \frac{(\sqrt{\pi})^n \delta^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, а площадь сферы $S_{n-1}^x(\delta)$ есть $|S_{n-1}(\delta)| = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}\delta^{n-1}$.

Результаты указанных усреднений обозначают так:

$$f_\delta(x)=\frac{1}{|K_n(\delta)|}\int_{K_n^x(\delta)} f(y)dy;\quad f_\delta(x)=\frac{1}{|S_{n-1}(\delta)|}\int_{S_{n-1}^x(\delta)} f(y)d\sigma,$$

где $d\sigma$ – элемент площади сферы.

Согласно классической теореме Лебега, для почти всех x из E_n

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{|K_n(\delta)|}\int_{K_n^x(\delta)} f(y)dy=f(x). \qquad (1)$$

При $n = 1$ этот факт доказывается в курсе математического анализа. Вместо шара $K_n^x(\delta)$ можно взять куб с центром x и ребром δ. Если куб заменить прямоугольным параллелепипедом, то положение усложняется.

Утверждение (1) можно переписать в виде

$$\int_{K_n^x(\delta)}[f(y)-f(x)]=o(\delta^n)(\delta\to 0). \qquad (1')$$

Теперь мы введем величину

$$w_x(\delta)=\int_{S_{n-1}^x(\delta)}|f(y)-f(x)|d\sigma,$$

а также величину

$$w_x(\delta)=\int_{K_n^x(\delta)}|f(y)-f(x)|dy=\int_0^\delta w_x(p)dp.$$

Следующее предложение, усиливающее утверждение (1́), также принадлежит Лебегу.

Теорема 1. *Для почти всех* $x\in E_n$

$$w_x(\delta)=o(\delta^n)\ (\delta\to 0). \qquad (2)$$

Определение. Точки x, в которых выполнено (2), называются точками Лебега функции f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принимая для упрощения формул, что функции f вещественна, и обозначая через $\{r^{(m)}\}_1^\infty$ множество всех рациональных чисел, запишем при любом m неравенство

$$w_x(\delta)\le\int_{K_n^x(\delta)}|f(y)-r^{(m)}|dy+\int_{K_n^x(\delta)}|f(x)-r^{(m)}|\,dy=\int_{K_n^x(\delta)}|f(y)-r^{(m)}|dy+|K_n(\delta)|\times|f(x)-r^{(m)}|$$

.

В силу соотношений (1) первый член правой части для почти всех $x\in E_n$ при $\delta\to 0$ есть величина $O(\delta^n)\times|f(x)-r^{(m)}|$. Следовательно, для почти всех $x \in E_n$

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{1}{\delta n}w_x(\delta) = O_x(1) \times |f(x) - r^{(m)}|. \qquad (3)$$

Для данного m соотношения (3) справедливо при всех $x \in E_n \backslash e^{(m)}$, где $e^{(m)}$ – некоторое множество меры нуль в E_n. Если положить $e = \cup_m e^m$, так что и e имеет меру нуль, то в $E_n \backslash e$ (3) имеет место при любом m. Однако для каждого $x \in E_n$ можно выбрать m так, чтобы $\left|f(x) - r^{(m)}\right| < \varepsilon$. Поэтому при $x \in E_n \backslash e$ имеет место неравенство

$0 \le \overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{1}{\delta n}w_x(\delta) \le O_x(1) \times \varepsilon$. Но $\varepsilon > 0$ произвольно. Следовательно, $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta n}w_x(\delta) = 0$.

1. **Теорема 2.** *Пусть* $K(x) \in L\,(E_n)$ *и* $\int_{E_n} K(x)dx = 1$. *Тогда в каждой точке x, где ограниченная функция f непрерывна, имеет место равенство* $f(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{E_n} f(y)\frac{1}{\varepsilon^n}K\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)dy$.

Замечание. При некоторых ограничительных предложениях этой теоремой пользовался еще Вейерштрасс. Стоящий в правой части интеграл может представлять функцию от *x*, обладающую некоторой гладкостью и даже аналитическую в зависимости от ядра *K*(*x*). Вейерштрасс использовал теорему 2 для доказательства известной теоремы о приближении, носящей его имя.

Доказательство. Полагая $y = x + \varepsilon z$, найдем, что

$$\int_{E_n} f(y)\frac{1}{\varepsilon^n}K\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)dy = \int_{E_n} K(z)f(x+\varepsilon z)dz.$$

Если sup | *f* | = *M*, то для подынтегральной функции справедливо неравенство $|K(z) * f(x+\varepsilon z)| \le M * |K(z)|$, т.е. она имеет суммируемую мажоранту. Если x есть точка непрерывности, то при $\varepsilon \to 0$ подынтегральная функция имеет предел $K(z) * f(x)$ и, по теореме Лебега о предельном переходе,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{E_n} K(z) * f(x+\varepsilon z)dz = f(x)\int_{E_n} K(z)dz = f(x).$$

2. Недостатком теоремы 2 является предложение об ограничен-

ности функции f. Если мы хотим рассматривать растущие функции, то нужно брать такие ядра, которые достаточно быстро убывают.

Определение. Ядром типа Фейера называется измеримая функция $k(z)$*, для которой при некотором* $\lambda > 0$ *имеет место неравенство* $(1+|z|)^{n+\lambda} * |k(z)| \le M < \infty$ и $\int_{E_n} k(z)dz = 1$.

Замечание. Среди ядер $k(z)$ выделяются те, для которых $k(z) = k(|z|)$. Их называют радиальными.

Теорема 3 (Бохнер). Если k ядро типа Фейера, а f – измеримая функция, для которой

$$\frac{f(z)}{(1+|z|)^{n+\lambda}} \in L^1(E_n),$$

то в каждой точке Лебега функция f, а значит, почти всюду, имеет место соотношение

$$f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{E_n} f(y)\frac{1}{\varepsilon^n} k\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вводя обозначение

$$T_\varepsilon(x) = \int_{E_n} f(y)\frac{1}{\varepsilon^n} k\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy,$$

найдем без труда, что

$$T_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{E_n} [f(y) - f(x)]\frac{1}{\varepsilon^n} k\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy.$$

Отсюда при произвольном конечном $\delta > \varepsilon$

$$|T_\varepsilon(x) - f(x)| \le \int_{|y-x|<\varepsilon} |f(y) - f(x)| * \frac{1}{\varepsilon^n} k\left|\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)\right| dy + \int_{|y-x|>\varepsilon}^{|y-x|<\varepsilon} |f(y) - f(x)| * \frac{1}{\varepsilon^n} * \left|k\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)\right| dy + \int_{|y-x|>\varepsilon} |f(y) - f(x)| * \frac{1}{\varepsilon^n} * \left|k\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)\right| dy = I_1 + I_2 + I_3$$

.

В первом интеграле воспользуемся тем, что $|k| \le M$. Поэтому

$$I_1 \le \frac{M}{\varepsilon^n} \int_{K_n^x(\varepsilon)} |f(y) - f(x)| dy = \frac{M}{\varepsilon^n} w_x(\varepsilon) = o(1) \ \ (\varepsilon \to o).$$

Для третьего интеграла находим

$$I_3 \le \frac{M}{\varepsilon^n} \int_{|y-x|>\delta} \frac{|f(y)| + |f(x)|}{|y-x|^{n+\lambda}} \varepsilon^{n+\lambda} dy = M\varepsilon^\lambda A(x,\delta).$$

Остается второй интеграл:

$$I_2 \le \frac{M}{\varepsilon^n}\int_{|y-x|>\varepsilon}^{|y-x|<\delta}|f(y)-f(x)| * \frac{\varepsilon^{n+\lambda}dy}{|y-x|^{n+\lambda}} = M\varepsilon^\lambda\int_\varepsilon^\delta \frac{d\rho}{\rho^{n+\lambda}}\int_{S_{n-1}^x(\rho)}|f(y)-f(x)|d\sigma = M\varepsilon^\lambda\int_\varepsilon^\delta \frac{d\rho}{\rho^{n+\lambda}}w_x(\rho) = M\varepsilon^\lambda\int_\varepsilon^\delta \frac{d}{d\rho}w_x(\rho) * \frac{d\rho}{\rho^{n+\lambda}} = M\varepsilon^\lambda\{\frac{w_x(\rho)}{\rho^{n+\lambda}}|_{\rho=\varepsilon}^{\rho=\delta} + (n+\lambda)\int_\varepsilon^\delta \frac{w_x(\rho)d\rho}{\rho^{n+\lambda+1}}\} \le M\varepsilon^\lambda\{\frac{1}{\varepsilon^\lambda} + (n+\lambda)\int_\varepsilon^\delta \frac{d\rho}{p^{\lambda+1}}\} * \max_{0<\rho\le\delta}[\frac{w_x(\rho)}{\rho^n}] \le M(1+\frac{n+\lambda}{\lambda})\max_{0<\rho\le\delta}\left[\frac{w_x(\rho)}{\rho^n}\right] = o(1)\ (\delta\to 0)$$

.

Теперь сначала найдем $\delta > 0$ так, чтобы был достаточно мал член I_2, а звтем устремим к 0 величину ε.

3. В качестве примера рассмотрим ядро, принадлежащее самому Фейеру. Здесь $n = 1$ и

$$k(z) = \frac{2}{\pi} * \frac{\sin^2\frac{z}{2}}{z^2}.$$

Таким образом, в данном случае $\lambda = 1$. Проверим еще нормировку ядра:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{z}{2}}{z^2}dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos z)\left(-\frac{1}{z}\right)dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz = 1.$$

Для дальнейшего вычислим следующий интеграл:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}e^{-itx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos x)}{x^2}\cos txdx = \frac{1}{\pi}\{2\int_0^\infty \frac{\cos tx - 1}{x^2}dx - \int_0^\infty \frac{\cos(t-1)x-1}{x^2}dx - \int_0^\infty \frac{\cos(t+1)x-1}{x^2}dx\}$$

.

Во втором интеграле положим $|t-1|\,x = u$, в третьем $|t+1|\,x = u$, а в первом $|t|\,x = u$. Мы найдем, что

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}e^{-itx}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos u}{u^2}du\left[\frac{1}{2}|t+1| + \frac{1}{2}|t-1| - |t|\right] = \begin{cases} 0 \ \ (t\le -1) \\ 1-|t| \ \ (-1\le t\le 1). \\ 0 \ \ (t\ge 1) \end{cases}$$

Пусть теперь f есть 2π – периодическая функция, суммируемая в интервале длины 2π. Примем в качестве ε дробь $\frac{1}{m}$, где m – натуральное число, и положим $T_\varepsilon(x) = \sigma_m(x)$. Таким образом,

$$\sigma_m(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{\sin^2\frac{m(y-x)}{2}}{m(y-x)^2}dy = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{z}{m}\right) * \sin^2\frac{z}{2} * \frac{dz}{z^2}.$$

Эта функция от *x* имеет, очевидно, период 2π. Коэффициентами Фурье функции $\sigma_m(x)$ являются числа

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_m(x)e^{-ikx}dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{z}{2}}{z^2}dz * \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(x+\frac{z}{m}\right)e^{-ikx}dx =$$
$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{z}{2}}{z^2}dz * \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}e^{ik\frac{z}{m}}dt = c_k * \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{z}{2}}{z^2}e^{iz\frac{k}{m}}dz$$

,

где c_k – коэффициенты Фурье функции *f*. На основании только что проделанных вычислений находим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_m(x)e^{-ikx}dx = \begin{cases} c_k\left(1-\frac{|k|}{m}\right) & (0 \le |k| \le m), \\ 0 & (|k| \ge m). \end{cases}$$

Таким образом, у функции $\sigma_m(x)$ отличны от нуля только первые *m* гармоник. Следовательно

$$\sigma_m(x) = \sum_{k=-(m-1)}^{m-1}\left(1-\frac{|k|}{m}\right)c_k e^{ikx},$$

т. е. $\sigma_m(x)$ является тригонометрической суммой порядка *m* – 1. Нетрудно проверить, что

$$\sigma_m(x) = \frac{s_0 + s_1(x) + \cdots + s_{m-1}(x)}{m},$$

где

$$s_k(x) = \sum_{p=-k}^{k} c_p e^{ipx}$$

есть *k* – я частная сумма Фурье функции *f*.

Из общей теоремы Бохнера применительно к рассматриваемому случаю следует, что в *каждой точке Лебега функции f справедливо* соотношение

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m(x) = f(x).$$

Можно получить более сильные результаты, если воспользоваться равенством

$$\sigma_m(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(x+\frac{z}{m}\right) - f(x)\right] * \frac{\sin^2\frac{z}{2}}{z^2}dz.$$

1) Пусть *f* ограничена ($|f| \leq M$) и в интервале (a, b) непрерывна. В таком случае в каждом замкнутом интервале $[a+\gamma, b-\gamma] \subset (a,b)$ последовательность $\sigma_m(x)$ равномерно стремится к *f*(*x*) при $m > \infty$. Для доказательства заметим, что

$$|\sigma_m(x) - f(x)| \leq \frac{2}{\pi}\int_{-A}^{A}\left|f\left(x+\frac{z}{m}\right) - f(x)\right| * \frac{\sin^2\frac{z}{2}}{z^2}dz + \frac{2}{\pi}\int_{|z|>A}|f\left(x+\frac{z}{m}\right) - f(x)|\frac{\sin^2\frac{z}{2}}{z^2}dz$$

.

Для второго члена имеем оценку

$$\frac{2}{\pi}\int_{|z|>A}|f\left(x+\frac{z}{m}\right) - f(x)|\frac{\sin^2\frac{z}{2}}{z^2}dz \leq \frac{8M}{\pi}\int_{A}^{\infty}\frac{dz}{z^2} = \frac{8M}{\pi A},$$

и, значит, второй член будет меньше $\varepsilon > 0$ для всех *x*, если *A* достаточно велико. С другой стороны, для фиксированного *A* и всех достаточно больших *m* $\left|f\left(x+\frac{z}{m}\right) - f(x)\right| < \varepsilon$, если $x \in [a+\gamma, b-\gamma]$ и $|z| \leq A$. Значит, для всех достаточно больших *m* справедливо неравенство $|\sigma_m(x) - f(x)| < 2\varepsilon \ \ (a+\gamma \leq x \leq b-\gamma)$.

2) Если *f* всюду непрерывна и удовлетворяет условию Коши – Липшица порядка $\lambda(0 < \lambda < 1)$ (так что при любом *x* и любом $h > 0 \ \ |f(x+h) - f(x)| < Mh^{\lambda}$), то имеет место неравенство $|\sigma_m(x) - (x)| \leq C_\lambda M * \frac{1}{m^\lambda}$, причем

$$C_\lambda \leq \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2\frac{z}{2}}{z^{2-\lambda}}dz < \frac{3}{1-\lambda}.$$

Доказательство предоставляется читателю.

ЗАДАЧИ

1. Если *f* удовлетворяет условию Коши-Липшица порядка 1, то $|\sigma_m(x) - f(x)| \leq CM\frac{\ln m}{m}$.
2. Пусть при $m \to \infty$ $\max\limits_{0\leq x\leq 2\pi}|\sigma_m(x) - f(x)| = o(\frac{1}{m})$. Доказать, что в таком случае $f(x)$ = const.
3. Пусть *f* удовлетворяет условию Коши – Липшица порядка 1 на некотором

компакте $G \subset E_n$, т. е. $|f(y) - f(x)| \leq L * |y - x| \forall x,\ y \in G$. Доказать, что f можно продолжить на все E_n так, что полученная функция будет принадлежать тому же классу с той же константой L.

Указание. Предполагая функцию f вещественной, ввести E_n для любой точки $y \in G$ функцию $\Phi_y(x) = f(y) + L * |y - x|$ и затем положить $\Phi(x) = \min \Phi_y(x)$.

4. В E_1 ядро $\tilde{k}(z)$ определено следующими формулами

$$\tilde{k}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} * \frac{z}{z^2+1} & (-1 \leq z \leq 1), \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{z}\right) & (|z| > 1). \end{cases}$$

Таким образом, условие

$$(1 + |z|)^{1+\lambda} * \left|\tilde{k}(z)\right| \leq M < \infty$$

выполнено даже при $\lambda = 2$. Однако условие $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k}(z) dz \neq 0$ не выполнено.

Применяя ту же технику, что и в п° 4, доказать следующее предложение: если f(x) – измеримая функция $(-\infty < x < \infty)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)}{1+|x|} dx < \infty,$$

то в каждой точке Лебеге x функции f имеет место равенство

$$\lim_{s \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * \frac{1}{\varepsilon} * \tilde{k}\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right) dt = 0.$$

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В L^1

1. В этой главе мы начинаем изучение тригонометрических интегралов. В случае функции $f(x)$от одной переменной $x \in (-\infty, \infty)$ эти интегралы будем писать в виде $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) * e^{-ixt} dx$, где t – вещественная переменная. Конечно, здесь должно быть указано, в каком смысле понимается интеграл. Проще всего обстоит дело, если $f \in L^1(-\infty, \infty)$, т. е. функция f измерима и интеграл ее модуля (в смысле Лебега) конечен. Написанная выше формула определяет на всем пространстве $L^1(-\infty, \infty)$ аддитивный и одно-

родный оператор, который называют преобразованием Фурье в $L^1(-\infty,\infty)$. Множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ несуществен, но иногда оказывается полезным, позже мы это увидим. Мы сразу введем преобразование Фурье в пространстве $L^1(E_n)$ при произвольном n. Для этого обозначим через $(x,t) = x_1t_1 + x_2t_2 + \cdots + x_nt_n$ скалярное произведение в E_n. Введем также следующее распространенное обозначение для преобразования Фурье:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} f(x)e^{-i(x,t)dx}, \qquad (1)$$

где $f \in L^1(E_n)$.

Некоторые свойства преобразования Фурье почти очевидны:

1) $\hat{f}(t)$ ограничена, а именно для любого $t \in E_n$ $\left|\hat{f}(t)\right| \le \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} * ||f||_1$,

   где $||f||_1 = \int_{E_n} |f(x)|dx$ – норма f в $L^1(E_n)$.

$\acute{1}$) Если последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ сходится в метрике $L^1(E_n)$ к f, то последовательность $\{\hat{f}_k\}_1^\infty$ равномерно сходится к $\hat{f}$ (это следует из 1);

2) $\hat{f}(t)$ равномерно непрерывна в E_n;

3) $\hat{f}(t)$ стремится к 0 при $|t| \to \infty$ (это предложение называется леммой Римана – Лебега).

Для доказательства утверждения 2) представим $\hat{f}(t)$ в виде

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{|x|<A} f(x)e^{-i(x,t)}dx + \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{|x|>A} f(x)e^{-i(x,t)}dx.$$

Второй интеграл оценим:

$$\left|\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{|x|>A} f(x)e^{-i(x,t)}dx\right| \le \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{|x|>A} |f(x)|dx.$$

При достаточно большом A правая часть неравенства будет меньше сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. Равномерная непрерывность по $t \in E_n$ первого интеграла очевидна.

Для доказательства леммы Римана – Лебега воспользуемся тем фактом, что множество простых финитных функций плотно в $L^1(E_n)$.

Напомним, что простой называется функция, принимающая лишь конечное число различных значений. Простой функцией является характеристическая функция $h(x)$ прямоугольного параллелепипеда с ребрами, параллельными координатным осям. Для такой функции лемма Римана – Лебега очевидна, так как в этом случае

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} e^{-i(t,x)}\,dx_1 \dots dx_n = \frac{i^n}{(\sqrt{2\pi})^n}\prod_{k=1}^{n} \frac{e^{-i\beta_k t_k} - e^{-i\alpha_k t_k}}{t_k},$$

и значит, при $|t| \geq 1 \left|\hat{h}(t)\right| < \frac{C}{|t|}$, где C от t не зависит, так как хотя бы для одного k всегда $t_k^2 \geq \frac{|t|^2}{n}$.

С другой стороны, плотной в $L^1(E_n)$ является уже линейная оболочка подобного рода характеристических функций. Отсюда и вытекает лемма Римана – Лебега в полной общности.

Определение. Если обе функции f, g принадлежат $L^1(E_n)$, то их сверткой называется интеграл

$$\int_{E_n} f(y)g(x-y)dy = (f * g)(x). \qquad (2)$$

Докажем, что интеграл (2) существует для почти всех $x \in E_n$ и представляет функцию из $L^1(E_n)$. Прежде всего заметим, что функция $f(y)g(x-y)$ измерима в $E_n \times E_n$. Далее, напишем равенство $\int_{E_n} |f(y)| * |g(x-y)|dx = |f(y)| * ||g||_1$, правая часть которого принадлежит $L^1(E_n)$. Следовательно, конечен повторный интеграл $\int_{E_n} dy \int_{E_n} |f(y)| * |g(x-y)|dx$. Но в таком случае по теореме Фубини, во-первых, конечен двойной интеграл $\int_{E_n \times} \int_{E_n} |f(y)| \times |g(x-y)dxdy$, во-вторых, для почти всех x конечен и принадлежит $L^1(E_n)$ интеграл

$$\int_{E_n} |f(y)| * |g(x-y)dy, \qquad (\acute{2})$$

и, в-третьих, все три интеграла (двойной и оба повторных) имеют одно и то же значение. Кроме того, имеют одно и то же конечное значение все три интеграла (двойной и оба повторных) с функциями f, g вместо $|f|$, $|g|$. Наше утверждение вытекает из сказанного относительно интеграла $(\acute{2})$.

Заметим далее, что $||f \times g||_1 \leq ||f||_1 * ||g||_1$. Ясно также, что $f \times g = g \times f$.

Пусть $f, g \in L^1(E_n)$ и $h = f \times g$. В таком случае

$$\hat{h}(t) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^n \hat{f}(t) g(t). \qquad (3)$$

Действительно,

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{E_n} e^{-i(t,x)dx} \int_{E_n} f(y) g(x-y) dy.$$

В силу теоремы Фубини,

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{E_n} f(y) dy \int_{E_n} g(x-y) e^{-i(t,x)} dx.$$

Делая замену $x = y + z$, найдем, что

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{E_n} f(y) e^{-i(t,y)} dy \int_{E_n} g(z) e^{-i(t,z)} dz,$$

а это и есть требуемое соотношение (3).

Подобным образом, применяя теорему Фубини к интегралу

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{E_n} f(x) dx \int_{E_n} g(y) e^{-i(x,y)} dy,$$

находим, что при любых $f, g \in L^1(E_n)$

$$\int_{E_n} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{E_n} g(y) \hat{f}(y) dy. \qquad (4)$$

Следующие свойства преобразования Фурье проверяются без труда:

1) если $F(x) = f(Rx)$, где R –вещественное число, то
$$\hat{F}(t) = \frac{1}{|R|^n} \hat{f}\left(\frac{t}{R}\right);$$
2) если $F(x) = f(x + c)$, где c постоянный вектор, то
$$\hat{F}(t) = e^{i(t,c)} * \hat{f}(t);$$
3) если $F(x) = f(x)\, e^{-i(x,c)}$, то $\hat{F}(t) = \hat{f}(t + c)$;
4) если $f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$, где $f_k(x_k) \in L^1(E_1)$. ($k = 1, 2, \ldots, n$), то $\hat{f}(t) = \hat{f}_1(t_1) \hat{f}_2(t_2) \ldots \hat{f}_n(t_n)$.

Докажем еще следующее предложение:

5) если f есть радиальная функция, т.е. $f(x) \equiv f(|x|)$, то тем же свой-

ством обладает $\hat{f}$.

Радиальность функции эквивалентна тому, что функция остается неизменной, когда пространство E_n подвергается вращению с центром 0, т.е. при любом унитарном операторе U в E_n: $f(x) = f(Ux)$. Принимая, что f обладает этим свойством, можем написать следующее равенство:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} f(x)e^{-i(t,x)}dx = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} f(Ux)e^{-i(t,x)}dx.$$

Если $\acute{x} = Ux$, то $d\acute{x} = dx$ и $(t,x) = (Ut,\acute{x})$.

Поэтому

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} f(\acute{x})e^{-i(Ut,\acute{x})}d\acute{x} \equiv \hat{f}(Ut)$$

и, следовательно, $\hat{f}(t) = \hat{f}(|t|)$.

2. В этом п° в качестве важного примера найдем преобразование Фурье функции $e^{-\frac{|x|^2}{2}} (x \in E_n)$. Так как $e^{-\frac{|x|^2}{2}} = \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x_k{}^2}{2}}$, то здесь применимо утверждение 4) предыдущего п°, и мы можем ограничиться нахождением преобразования Фурье в E_1 функции $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} (-\infty < x < \infty)$. Из формулы

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-itx}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\cos tx * dx$$

находим, дифференцируя по t, а затем интегрируя по частям:

$$\frac{d}{dt}\hat{g}(t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\sin tx * dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\{e^{-\frac{x^2}{2}}\sin tx\Big|_{x=0}^{x=\infty} - t^2\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\cos tx * dx\} = -t\hat{g}(t)$$

.

Отсюда следует, что $\hat{g}(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}} = Cg(t)$. Так как $g(0) = 1$, то

$$C = \hat{g}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

.

Таким образом, мы доказали равенство

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\int_{E_n} e^{-\frac{|x|^2}{2}} e^{-i(t,x)}\,dx = e^{-\frac{|t|^2}{2}}$$

Это значит, что $e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ является собственной функцией преобразования Фурье в $L^1(E_n)$, а соответствующее собственное значение равно 1. Заметим, что функция $\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{|z|^2}{2}} (z \in E_n)$ удовлетворяет всем условиям, входящим в определение ядра типа Фейера, включая нормировку. Для дальнейшего назовем функцию

$$W(z,\tau) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\tau})^n} e^{-\frac{|z|^2}{2\tau}} \qquad (5_1)$$

ядром Вейерштрасса (или *Гаусса – Вейерштрасса*). Здесь $\tau > 0$ – параметр (введенный вместо $\varepsilon = \tau^{1/2}$). Запишем еще равенство

$$W(z,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{E_n} e^{-\frac{\tau}{2}|u|^2} e^{-i(u,z)du}, \qquad (5_2)$$

которым нам в дальнейшем придется пользоваться.

3. В качестве другого важного примера найдем преобразование Фурье функции $e^{-|x|} (x \in E_n)$. При этом мы воспользуемся следующей формулой

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u-\frac{c^2}{4u}}\frac{du}{\sqrt{u}} = e^{-c} \quad (c \geq 0).$$

Применяя ее при $c = |x|$, находим, что

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} e^{-|x|} e^{-i(t,x)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{\sqrt{u}}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} e^{-\frac{|x|^2}{4u}} e^{-i(t,x)}\,dx.$$

Сделаем в правой части замену переменной $x = \sqrt{2u} * y$, а затем воспользуемся формулами (5_1), (5_2). Мы получим

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} e^{-|x|} e^{-i(t,x)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{\sqrt{u}}\left(\frac{\sqrt{2u}}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\int_{E_n} e^{-\frac{|y|^2}{2}} \times e^{-i(t\sqrt{2u},y)}\,dy = \frac{(\sqrt{2})^n}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u-u|t|^2} u^{\frac{n-1}{2}}\,du = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{(1+|t|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty e^{-v} v^{\frac{n-1}{2}}\,dv = \frac{2^{n/2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}} * \frac{1}{(1+|t|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

.

Функция

$$\frac{2}{|S_n|} * \frac{1}{(1+|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} e^{-|t|} e^{-i(t,z)} dt \qquad (6)$$

также удовлетворяет всем условиям, входящие в определение ядра Фейера, включая нормировку, так как

$$\frac{2}{|S_n|} \int_{E_n} \frac{dz}{(1+|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}} = 1.$$

Назовем функцию

$$P(z,\eta) = \frac{2}{|S_n|} * \frac{\eta}{(\eta^2+|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \qquad (7_1)$$

ядром Пуассона. Здесь параметр $\eta > 0$ написан вместо ε. Формулу (6) перепишем в виде

$$P(z,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} e^{-\eta|t|} e^{-i(t,z)} dt. \qquad (7_2)$$

ЗАДАЧИ

1. Пусть

$$\psi_{a,b}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} * \frac{\cos at - \cos(a+b)t}{bt^2} \quad (a > 0, b > 0).$$

Доказать, что $\psi_{a,b}(x) = 1 \ \ (|x| \le a)$, $\hat{\psi}_{a,b}(x) = 0 \ \ (|x| \ge a+b)$ и $\hat{\psi}_{a,b}(x)$ линейна на остальных интервалах.

2. Пусть $f(x) \in L^1(E_n)$ и $F(x) = x_k f(x) \in L^1(E_n)$, где k – одно из чисел 1, 2, …, n. Доказать, что $\hat{f}(t)$ имеет непрерывную производную по t_k, а также, что $\frac{\partial}{\partial t_k} f(t) = -i\hat{F}(t)$.

3. Положим $x = \{x_1, \acute{x}\}$, где $\acute{x} = \{x_2, x_2, \ldots, x_n\} \in E_{n-1}$. Пусть $f(x)$ абсолютно непрерывна по x_1 для почти всех $\acute{x} \in E_{n-1}$. Если $f(x) \in L^1(E_n)$ и $F(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \in L^1(E_n)$, то $\hat{F}(t) = it_1 \hat{f}(t)$.

Доказать это утверждение (в котором, конечно, x_1 и t_1 можно заменить на x_k и t_k).

4. Найти площадь единичной сферы в E_n, используя тот факт, что функция $e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ инвариантна относительно преобразования Фурье.

5. Пусть

$$l(x) = \frac{1}{x}\int_0^{\infty} \frac{|\sin tx * \sin t|}{t^2}\,dt \quad (0 < x \le 1).$$

Доказать, что

$$l(x) > \frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{x} + \frac{3}{2} - \frac{3}{\pi}; \qquad l(x) < \frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{x} + \frac{3}{2} + \frac{3}{\pi}.$$

Указание. Использовать разложение

$$|\sin t| = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2kt}{4k^2-1}.$$

3. ТЕОРЕМА ОБРАЩЕНИЯ В L^1.

ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА

1. В связи с каждым интегральным преобразованием прежде всего возникает вопрос о его обращении, т. е. вопрос о том, можно ли восстановить функцию (прообраз) по образу, а если можно, то как это восстановление осуществить. Мы рассмотрим этот вопрос применительно к преобразованию Фурье в $L^1(E_n)$.

Теорема 1. *Если* $f \in L^1(E_n)$ и

$$f(t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} f(x)e^{-i(t,x)}\,dx, \tag{1}$$

то в каждой точке Лебега функции f

$$f(x) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} \hat{f}(t)e^{i(t,x)}e^{-\frac{\tau|t|^2}{2}}\,dt. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем в теореме о представлении Бохнера ядро Вейерштрасса. Рассмотрим величину $T_\varepsilon(x)$, введенную при доказательстве этой теоремы, положим $\tau = \varepsilon^2$ и будем писать для краткости $T_\tau(x)$ вместо $T_\varepsilon(x) = T_{\sqrt{\tau}}(x)$. С учетом формул ($5_1$), ($5_2$) главы 2 будем писать

$$T_\tau(x) = \int_{E_n} f(y)\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{|y-x|^2}{2\tau}}dy = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} f(y)dy\int_{E_n} e^{-\frac{\tau|t|^2}{2}}e^{-i(t,y-x)}\,dt.$$

В силу теоремы Фубини

$$T_\tau(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} e^{-\frac{\tau|t|^2}{2}}e^{i(t,x)}dt\int_{E_n} f(y)e^{-i(t,y)}\,dy,$$

откуда

$$T_\tau(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n}\hat{f}(t)e^{i(t,x)}e^{-\frac{\tau|t|^2}{2}}dt. \qquad (3)$$

На основании теоремы Бохнера $T_\tau(x) \to f(x) \quad (\tau \to 0)$ во всех точках Лебега функции f, что и требовалось доказать.

Замечание. Сравнение $T_\tau(0)$ из первоначального выражения функции $T_\tau(x)$ с тем, которое вытекает из (3), получаем равенство

$$\int_{E_n} f(y)e^{-\frac{|y|^2}{2\tau}}\frac{dy}{\tau^{n/2}}\int_{E_n}\hat{f}(t)e^{-\frac{\tau|t|^2}{2}}dt, \qquad (4)$$

которое понадобится в дальнейшем.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает важное следствие, которое обычно называют *теоремой единственности для преобразования Фурье в* $L^1(E_n)$.

С л е д с т в и е 1. *Если две функции из $L^1(E_n)$ имеют одно и то же преобразование Фурье, то они почти всюду совпадают*.

Благодаря теореме единственности вопрос о восстановлении функции f по ее преобразованию Фурье имеет смысл. Формула (2_1) дает один из способов для этого восстановления. Другой способ дает (в каждой точке Лебега функции f) формула

$$f(x) = \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n}\hat{f}(t)e^{i(x,t)}e^{-\eta|t|}dt, \qquad (2_2)$$

вывод которой с помощью ядра Пуассона предоставляем читателю.

С л е д с т в и е 2. *Если не только $\hat{f}$, но и $\hat{f} \in L^1(E_n)$, то справедлива формула обращения*

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} f(t)e^{i(x,t)}dt. \qquad (2)$$

Действительно, если $\hat{f} \in L^1(E_n)$, то подынтегральное выражение в правой части формул (2_1) и (2_2) имеет абсолютно интегрируемую мажоранту $|\hat{f}(t)|$. Поэтому применима теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Если функция f не принадлежит $L^1(E_n)$, то правая часть формулы (2) может не иметь смысла, иными словами, интеграл (2) может расходиться. С помощью формулы (2_1) или (2_2), как принято говорить, мы «суммируем расходящийся интеграл», приписывая ему определенное значения. Общая ситуация здесь такова. Имеется расходящийся интеграл $\int_{E_n} F(x)dx$. Пусть существует такая функция (фактор сходимости) $\varphi(x,\varepsilon)$ с параметром $\varepsilon > 0$, что $\varphi(x,\varepsilon) \to 1 (\varepsilon \to 0)$ и пусть при каждом $\varepsilon > 0$ интеграл $\int_{E_n} F(x)\ \varphi(x,\varepsilon)dx$ сходится. Если при этом оказывается, что существует и конечен

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{E_n} F(x)\varphi(x,\varepsilon)dx = J,$$

то говорят, что интеграл $\int_{E_n} F(x)dx$ сходится в обобщенном смысле (или суммируем) к значению J. Харди называл это сходимостью в пикквикском смысле и писал

$$(P) \int_{E_n} F(x)dx = J.$$

Для применений этого понятия и основанного на нем «вычисления» интегралов, конечно, необходимо выполнение некоторых условий.
Например, если интеграл сходится в обычном смысле и, сверх того, в пиквикском смысле, то значения его должны быть одинаковы в обоих случаях. Мы можем сказать, что интеграл (2) в каждой точке Лебега функции f суммируем к $f(x)$ как W-методом (метод Вейерштрасса, формула (2_1)), так и A-методом (метод Абеля, формула (2_2)). Пожалуй, стоит пояснить введенное понятие на простом примере. Интеграл $\int_0^\infty e^{ix}dx$, очевидно, расходится, так как $\int_0^T e^{ix}dx = i\left(1-e^{iT}\right)$ при $T\to\infty$ никакого предела не имеет. Однако при $\varepsilon > 0$ $\int_0^\infty e^{ix}e^{-\varepsilon x}dx = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon^2+1}$. Следовательно, $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty e^{ix}e^{-\varepsilon x} \times dx = i$, откуда $(A)\int_0^\infty \cos x\,dx = 0$; $(A)\int_0^\infty \sin x\,dx = 1$.

2. Иногда полезно следующее достаточное условие для того, чтобы $\hat{f} \in L^1(E_n)$.

Теорема 2. *Пусть* $\hat{f} \in L^1(E_n)$ *и выполнены следующие условия:*

1) *существует такое* $\delta > 0$, *что* $|f(x)| \leq N < \infty$ *при* $|x| < \delta$ *(т. е.* $f(x)$ *ограничена в некоторой окрестности точки* $x = 0$*);*

2) $\hat{f}(t) \geq 0$ *для всех* $t \in E_n$. *В таком случае* $\hat{f} \in L^1(E_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о основано на формуле (4). Запишем эту формулу в виде

$$\int_{E_n} \hat{f}(t)e^{-\frac{\tau|t|^2}{2}}dt = \int_{|y|<\delta} f(y)e^{-\frac{|y|^2}{2\tau}}\frac{dy}{\tau^{n/2}} + \int_{|y|>\delta} f(y)e^{-\frac{|y|^2}{2\tau}}\frac{dy}{\tau^{n/2}} = I_1 + I_2.$$

Тогда

$|I_1| \leq N * \int_{|y|<\delta} e^{-\frac{|y|^2}{2\tau}}\frac{dy}{\tau^{n/2}} < N\int_{E_n} e^{-\frac{|y|^2}{2\tau}}\frac{dy}{\tau^{n/2}} = N\int_{E_n} e^{-\frac{|u|^2}{2}}du = (\sqrt{2\pi})^n N$, а с другой стороны, $|I_2| \leq e^{-\delta^2/2\tau} * \frac{1}{\tau^{n/2}}\int_{|y|>\delta}|f(y)| \times dy \leq e^{-\delta^2/2\tau} * \frac{1}{\tau^{n/2}}||f||_1$, где правая часть ограничена при всех $\tau > 0$. Таким образом, при всех $\tau > 0$: $\int_{E_n} \hat{f}(t)e^{-\tau|t|^2/2}dt \leq M < \infty$. Отсюда, так как $\hat{f}(t) \geq 0$, и вытекает, что $\int_{E_n} \hat{f}(t)dt < \infty$.

3. Ядра Вейерштрасса и Пуассона связаны с некоторыми краевыми задачами математической физики. Рассмотрим ядро Пуассона, играющее важную роль в теории гармонических функций.

Напомним, что *гармонической функцией* в некоторой области евклидова пространства двух, трех или большего числа измерений называют дважды непрерывно дифференцируемую в этой области функцию u, для которой $\Delta u = 0$ (Δ – оператор Лапласа). Мы будем в качестве области рассматривать «верхнюю половину» пространства E_{n+1}, она обозначается E_{n+1}^+ и определяется следующим образом:

$$E_{n+1}^+ = \{(x, \eta) \mid x \in E_n, \eta > 0\} = E_n \times (0, \infty).$$

Гармоничность функции $u(x, \eta)$ в E_{n+1}^+ означает, что при любом $x \in E_n$ и любом $\eta > 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r_1^2}=0.$$

Беря какую-нибудь функцию $f\in L^1(E_n)$ и ядро Пуассона

$$P(x,\eta)=\frac{2}{|S_n|}*\frac{\eta}{(|z|^2+\eta^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

можем написать следующее равенство:

$$\int_{E_n} f(y)P(x-y,\eta)\mathrm{dy}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n}\hat{f}(t)e^{i(t,x)}e^{-\eta|t|}\,dt. \qquad (5)$$

Здесь мы воспользовались формулами (4) и (7_2) главы 2. Левая часть равенства (5) есть некоторая функция

$$u(x,\eta)=\frac{1}{|S_n|}\int_{E_n} f(y)\frac{\eta}{(\eta^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}dy, \qquad (6)$$

которую называют интегралом Пуассона для полупространства. Функция $u(x,\eta)$ имеет производные любого порядка по переменным x_k, η, которые можно найти с помощью дифференцирования ядра в формуле (6) или, что предпочтительнее, подынтегрального выражения в правой части формулы (5). Таким путем мы находим, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=-\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n}\hat{f}(t)t_k^2e^{i(t,x)}e^{-\eta|t|}dt\ \ (k=1,2,\dots,n)$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n}\hat{f}(t)|t|^2e^{i(t,x)}e^{-\eta|t|}dt.$$

С помощью сложения этих выражений мы находим, что $u(x,\eta)$ гармонична в E_{n+1}^+.

Теорема 3. *Если $f\in L^1(E_n)$, то интеграл Пуассона (6) представляет гармоничную функцию в E_{n+1}^+ со следующими свойствами:*

a) $\lim\limits_{\eta\to 0} u(x,\eta)=f(x)$ *во всех точках Лебега функции f*;

b) $\int_{E_n}|u(x,\eta)|dx\le ||f||_1$ $(\eta>0)$;

c) $\lim\limits_{\eta\to 0}\int_{E_n}|u(x,\eta)-f(x)|dx=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойство a) составляет применительно к рассматриваемому случаю содержание теоремы Бохнера о представлении. Свойство b) доказывается с помощью теоремы Фубини:

$$\int_{E_n}|u(x,\eta)|dx \le \frac{2}{|S_n|}*\int_{E_n}dx\int_{E_n}|f(y)|*\frac{\eta}{(\eta^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{2}{|S_n|}*$$

$$\int_{E_n}|f(y)|dy\int_{E_n}\frac{dz}{(1+|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}}=\int_{E_n}|f(y)|dy$$

.

Для доказательства свойства c) напишем равенство:

$$u(x,\eta)-f(x)=\frac{2}{|S_n|}*\int_{E_n}[f(x+\eta z)-f(x)]\frac{dz}{(1+|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Отсюда снова по теореме Фубини

$$\int_{E_n}|u(x,\eta)-f(x)|dx \le \frac{2}{|S_n|}*\int_{E_n}\frac{dz}{(1+|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\int_{E_n}|f(x+\eta z)-f(x)|dx \le$$

$$\frac{4}{|S_n|}\int_{|z|>A}\frac{dz}{(1+|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}}*||f||_1+\frac{2}{|S_n|}*\int_{|z|<A}\frac{dz}{(1+|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}}*\int_{E_n}|f(x+\eta z)-f(x)|dx$$

.

Первый член сколь угодно мал при достаточно большом A. С другой стороны, в силу непрерывности в метрике $L^1(E_n)$ каждой функции из $L^1(E_n)$ величина $\int_{E_n}|f(x+\eta z)-f(x)|dx \;\; (|z|<A)$ при $\eta\to 0$ равномерно стремится к 0.

В теории гармонических функций важную роль играет так называемая *задача Дирихле*, или *первая краевая задача*. В классической теории она формулируется следующим образом: в пространстве дана ограниченная область G и на ее границе задана непрерывная функция f; требуется найти функцию, непрерывную в $\bar{G}$ и гармоническую в G при условии, чтобы на границе G она совпадала с функцией f. В теории уравнений с частными производными доказывается, что эта задача имеет не более одного решения, а при некоторых общих предположениях относительно границы доказывается также, что задача Дирихле разрешима. В теореме 3, в сущности, говорится о некотором обобщении задачи Дирихле разрешима. В теореме

3, в сущности, говорится о некотором обобщении задачи Дирихле. Область здесь неограничена, и заданная на ее границе функция, вообще говоря, разрывна. Однако доказано существование в области гармонической функции, принимающей на границе ($\eta = 0$) заданные значения в обобщенном смысле: почти всюду согласно свойству с). Следует заметить, что в этой теореме ничего не сказано относительно единственности решения рассматриваемой задачи Дирихле. Если говорить только о краевом условии а), то ясно, что единственности нет, так как при любой константе C гармоническая функция $u(x,\eta) + C\eta$ вместе с $u(x,\eta)$ будет удовлетворять условию а). В связи с этим заслуживает внимания следующая

Теорема 4. *Если* $u(x,\eta)$ *гармонична в* E_{n+1}^{+} *и удовлетворяет условиям*

b) $\int_{E_n} |u(x,\eta)|dx \leq M < \infty$ для каждого $\eta > 0$;

c) $\lim\limits_{\eta \to 0, \acute{\eta} \to 0} \int_{E_n} |u(x,\eta) - u(x,\acute{\eta})|dx = 0,$

то функция $u(x,\eta)$ *представима интегралом Пуассона, т. е. существует такая функция* $f \in L^1(E_n)$, *что*

$$u(x,\eta) = \frac{2}{|S_n|} \int_{E_n} f(y) \frac{\eta}{(\eta^2 + |x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dy. \qquad (7)$$

Эту теорему можно рассматривать как обратную к теореме 3. Ввиду теоремы 4 задача Дирихле для E_{n+1}^{+} в следующей формулировке всегда имеет в точности одно решение и это решение дается интегралом Пуассона.

Задача Дирихле. Для заданной функции $f \in L^1(E_n)$ найти $E_{n+1}{}^{+}$ гармоническую функцию $u(x,\eta)$, удовлетворяющую следующим условиям:

a) $\lim\limits_{\eta \to 0} u(x,\ \eta) = f(x)$ во всех точках Лебега функции *f*;

b) $\int_{E_n} |u(x,\eta)| * dx \leq M \leq \infty$ для каждого $\eta > 0$;

c) $\lim\limits_{\acute{\eta}\acute{n} \to 0} \int_{E_n} \left|u(x,\ \acute{\eta}) - u\left(x,\ \acute{\eta}\right)\right| dx = 0$

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что ядра Вейерштрасса и Пуассона обладают полугрупповым

свойством:

$W(x,\tau_1+\tau_2)=\int_{E_n} W(y,\ \tau_1)\times W(x-y,\tau_2)dy(\tau_1,\tau_2>0), P(x,\eta_1+\eta_2)=\int_{E_n} P(y,\ \eta_1)*P(x-y,\ \eta_2)dy\ \ (\eta_1,\eta_2>0)$

.

2. Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{ch(x\sqrt{\frac{\pi}{2}})}e^{-itx}dx=\frac{1}{ch(t\sqrt{\frac{\pi}{2}})}.$$

3. Пусть $f\in L^1_{loc}(-\infty,\ \infty)$, т. е. $f\in L^1(a,b)$, при всех конечных a, b, и пусть равномерно в каждом конечном интервале

$$g(x)=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f(u)e^{-iux}du.$$

Доказать, что почти всюду и во всех точках непрерывности $f(x)$

$$f(x)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}(1-\frac{|u|}{\lambda})g(u)e^{iux}du.$$

4. Пусть $f(x)=(\frac{\sin x}{x})^r$, где r –натуральное число. Доказать, что $\hat{f}(t)=0$ при $|t|\geq r$.

5. Доказать, что

$$\frac{12}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\sin\frac{t}{2}}{t})^4e^{-itx}dx=\begin{cases}1-\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{3|x|^3}{4} & (|x|\leq 1),\\ \dfrac{1}{4}(2-|x|)^3 & (1\leq|x|\leq 2).\\ 0 & (|x|\geq 2).\end{cases}$$

Функция $I(z,n)=\frac{12}{\pi}\frac{\sin^4\frac{nz}{2}}{n^3z^4}$ называется ядром Джексона – Валле-Пуссена.

6. Доказать, что

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-itx}dx}{x^{\mu}}=\frac{\Gamma(1-\mu)}{it^{1-\mu}}*e^{i\pi\frac{\mu}{2}}\quad(0<\mu<1;\ \ t>0);$$

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}e^{-itx}dx=\ln\frac{b+it}{a+it}\quad(a>0,b>0).$$

7. Пусть $f(x)=\begin{cases}\cos^{p-1}x\ \ (|x|<\frac{\pi}{2}, \\ 0\qquad\left(|x|>\frac{\pi}{2}\right),\end{cases}$

где $p>0$. Доказать, что

$$\hat{f}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{p-1/\Gamma}} * \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{p+1+t}{2}\right)*\Gamma\left(\frac{p+1-t}{2}\right)}.$$

Доказать, что при $p > 1$ функция $\hat{f}(t)$ принадлежит $L^1(-\infty,\infty)$.

8. Доказать, что

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} \sin tz * dt = e^{-\frac{z^2}{2}} \int_0^z e^{\frac{u^2}{2}} du.$$

9. Доказать, что

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{x}} e^{-itx} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1-i}{\sqrt{t}} e^{-\sqrt{2t}(1+i)} \quad (t > 0).$$

10. Если $f \in L^1(-\infty,\infty)$ и

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^\infty |f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \hat{f}(t) e^{itx} dt| dx = 0,$$

то $\hat{f}$ – финитна (доказать).

4. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ШАРА И ПОЛУПРОСТРАНСТВА

1. В этой главе мы рассмотрим некоторые свойства гармонических функций. Напомним, что определение гармонических функций дано в n°4 главы 3. Там размерность пространства было удобно взять равной $n + 1$. Здесь мы ее обозначим m. Однако при рассмотрении гармонических функций в полупространстве m будет равняться $n + 1$, а полупространством будет E_{n+1}^+. Начнем с некоторого важного оператора усреднения, которым нам придется пользоваться в дальнейшем. Положим

$$\theta(x) = \theta(|x|) = \begin{cases} C_m * \exp\frac{1}{|x|^2 - 1} & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| \geq 1), \end{cases}$$

где $x \in E_m$, а коэффициент C_m определен из условия, что

$$\int_{E_m} \theta(x) dx = \int_{K_m^\circ(1)} \theta(x) dx = 1.$$

Функция $\theta(x)$, как известно и легко проверить, имеет непрерывные производные любого порядка. Если f – произвольная локально интегрируемая функция в E_m, то функция

$$f_p(x) = \int_{E_m} \frac{1}{p_m} \theta\left(\frac{x-y}{p}\right) f(y)dy = \int_{E_m} \theta(z) * f(x - pz)dz,$$

где $p > 0$, является некоторым усреднением функции f. Оно обладает следующими свойствами:

1) Функция $f_p(x)$ финитна, если финитна функция $f(x)$;
2) Функция $f_p(x)$ имеет производные любого порядка, которые могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла;
3) Если $f \in L^p(E_m)$ при каком-нибудь конечном $p \geq 1$, то $||f_p - f||_p \leq \int_{E_m} \theta(z)\{\int_{E_m} |f(x - pz) - f(x)|^p dx\}^{1/p} dz$, откуда следует, что $\lim\limits_{p\to 0} ||f_p - f||_p = 0$. Последнее заключение основано на том, что всякая функция из $L^p(E_m)$ непрерывна в метрике этого пространства.

2. Несомненно, самым важным свойством гармонических функций является теорема о среднем значении, которая формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Если открытое множество $G \subset E_m$, в котором гармоническая функция* u(x) *задана, содержит шар $K_m^x(\rho)$,* то

$$\frac{1}{|S_{m-1}(\rho)|} \int_{S_{m-1}^x(\rho)} u(y)d\sigma = u(x) \tag{1}$$

и

$$\frac{1}{|K_m(\rho)|} \int_{K_m^x(\rho)} u(y)dy = u(x). \tag{2}$$

На доказательстве этой теоремы мы останавливаться не будем. Она содержится во всех курсах математической физики. В курсе математического анализа Гурса она изложена для E_2 и E_3 в главах 27 и 28. Заметим лишь, что эта теорема выводится из известных формул Грина. Докажем, что одно из этих утверждений (1), (2) является следствием другого. Пусть, например, мы желаем вывести (1) из (2). Для этого представим (2) в виде

$$\int_0^\rho dr \int_{S_{m-1}^x(r)} u(y)d\sigma = u(x) * |K_m(\rho)|.$$

Дифференцируя обе части по p, получаем

$$\int_{S_{m-1}^x(\rho)} u(y)d\sigma = u(x)\frac{d}{d\rho}|\,K_m(\rho) = u(x) * |S_{m-1}(\rho)|.$$

Аналогично выводится (2) из (1).

Теорема 1 допускает обращение, а именно, справедлива

Теорема 2. *Если непрерывная в открытой области $G \subset E_m$ функция $u(x)$ удовлетворяет для любого шара $K_m^x(\rho)$, лежащего внутри G, теореме о среднем значении, то $u(x)$ гармонична в G.*

Доказательство. Для любой точки $x \in G$ и произвольного достаточно малого $\delta > 0$ имеем в силу (1):

$$u_\delta(x) = \int_{E_m} \frac{1}{\delta^m}\theta\left(\frac{x-y}{\delta}\right)u(y)dy = \int_0^\infty \frac{1}{\delta^m}\theta\left(\frac{\rho}{\delta}\right)d\rho \int_{S_{m-1}^x(\rho)} u(y)d\sigma =$$
$$u(x)\int_0^\infty \frac{1}{\delta^m}\theta\left(\frac{\rho}{\delta}\right)|S_{m-1}|p^{m-1}d\rho = u(x)\int_{E_m} \theta(y)dy = u(x)$$

.

Как видим, для любого $x \in G$ и достаточно малого $\delta > 0$ $u(x) = u_\delta(x)$, и поэтому $u(x)$ имеет производные всех порядков. Теперь по формуле Тейлора находим:

$$u(x) = \frac{1}{|S_{m-1}(\rho)|}\int_{S_{m-1}^x(\rho)} u(y)d\sigma = \frac{1}{|S_{m-1}(\rho)|}\{\int_{S_{m-1}^x(\rho)} u(x)d\sigma +$$
$$\sum_{i=1}^m \int_{S_{m-1}^x(\rho)}(y_i - x_i)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}d\sigma + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^m \int_{S_{m-1}^x(\rho)}(y_i - x_i)(y_k - x_k) \times$$
$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_k}\partial\sigma\} + O(\rho^3)$$

. (*)

Замечая, что в силу симметрии

$$\int_{S_{m-1}^x(\rho)}(y_i - x_i)d\sigma = 0\,; \quad \int_{S_{m-1}^x(\rho)}(y_i - x_i)(y_k - x_k)d\sigma = 0 \ \ (i \neq k);$$

$$\int_{S_{m-1}^x(\rho)}(y_i - x_i)^2 d\sigma = \int_{S_{m-1}^x(\rho)}(y_k - x_k)^2 d\sigma = \frac{1}{m}\int_{S_{m-1}^x(\rho)} \left|y - x\right|^2 d\sigma =$$
$$\frac{\rho^2}{m} * \left| S_{m-1}(\rho)\right|$$

перепишем равенство (*) в виде

$$0 = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + O(\rho),$$

откуда и вытекает справедливость теоремы.

Теорема 3 (принцип максимума – минимума). *Пусть $u(x)$ вещественная* *гармоническая функция на открытом связном множестве (области)* $G \subset E_m$ *и пусть* $M = \sup\limits_{G} u(x) < \infty$ [*соответственно* $m = \inf\limits_{G} u(x) > -\infty$]. *Тогда имеет место следующая альтернатива: либо* $u(x)$ *принимает значение* M (*соответственно* m) *только на границе* G, *либо* $u(x)$ *есть константа всюду в области* G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(x)$ принимает значение M в некоторой точке $\overset{\circ}{x} \in G$. В силу теоремы о среднем значении найдется шар $K_m^{\overset{\circ}{x}} \subset G$, в любой точке которого значение u не сможет быть меньше M, а следовательно, будет всюду в $K_m^{\overset{\circ}{x}}(\rho)$ равно M. Иначе говоря, множество $\aleph_M \subset G$, на котором $u(x) = M$, открыто в G. Но в силу непрерывности $u(x)$ это множество также замкнуто в G. Итак, $\aleph_M$ и открыто и замкнуто, а значит либо пусто, либо совпадает с G, но первое исключается так как $u(\overset{\circ}{x}) = M$.

Теорема 4 (Пикар – Лиувилль). *Если вещественная функция* $u(x)$ *гармонична всюду в* E_m *и полуограничена, то она константа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Примем для определенности, что $u(x)$ полуограничена сверху: $u(x) \leq M < \infty$. Возьмем две точки $\acute{x}$, $\acute{\acute{x}}$ и построим шары $K_m^{\acute{x}}(\acute{R})$, $K_m^{\acute{\acute{x}}}(\acute{\acute{R}})$, радиусы которых таковы, что сфера $S_{m-1}^{\acute{\acute{x}}}(\acute{\acute{R}})$ касается изнутри сферы $S_{m-1}^{\acute{x}}(\acute{R})$. Тогда в силу (2)

$$(\acute{R})^m u(\acute{x}) - \left(\acute{\acute{R}}\right)^m u\left(\acute{\acute{x}}\right) = \frac{1}{|K_m|} * \int_{K_m^{\acute{x}}(\acute{R})/K_m^{\acute{\acute{x}}}\left(\acute{\acute{R}}\right)} u(y)dy \leq \frac{M}{|K_m|} * \int_{K_m^{\acute{x}}(\acute{R})/K_m^{\acute{\acute{x}}}\left(\acute{\acute{R}}\right)} dy = M(\acute{R}^m - \acute{\acute{R}}^m)$$

откуда

$$u(\acute{x}) - \left(\frac{\acute{\acute{R}}}{\acute{R}}\right)^m u\left(\acute{\acute{x}}\right) \leq M * \left[1 - \left(\frac{\acute{\acute{R}}}{\acute{R}}\right)^m\right].$$

Так как $\acute{R} = \acute{\acute{R}} + |\acute{\acute{x}} - \acute{x}|$, то при $\acute{R} \to \infty$ мы получим в предел неравенство $u(\acute{x}) - u\left(\acute{\acute{x}}\right) \leq 0$. Аналогично доказывается, что $u\left(\acute{\acute{x}}\right) - u(\acute{x}) \leq 0$

3. При рассмотрении гармонических функций в шаровой области вводится некоторое ядро, также носящее имя Пуассона, через которое выражаются решение краевых задач, в первую очередь задачи Дирихле. В качестве шара возьмем $\mathring{K}_m = K_m$ и запишем ядро (пока без нормировки) в виде

$$H(x,\eta) = \frac{1-r^2}{[1-2(x,\eta)+r^2]^{m/2}}.$$

Здесь $r = |x| < 1$, $|\eta| = 1$. С помощью простого дифференцирования можно проверить, что $H(x,\eta)$ гармонична по x.

Вот эта проверка. Положим $D = 1 - 2(x,\eta) + r^2$, так что

$$D^{m/2} * H = 1 - r^2. \qquad (**)$$

Дифференцирование этого соотношения по x_k дает

$$D^{m/2}\frac{\partial H}{\partial x_k} + mD^{m/2-1} * (x_k - \eta_k)H = -2x_k;$$

$$D^{m/2}\frac{\partial H}{\partial x_k} + 2mD^{m/2-1} * (x_k - \eta_k)\frac{\partial H}{\partial x_k} + m(m-2)D^{m/2-2}(x_k - \eta_k)^2 H + mD^{m/2-1} * H = -2$$

.

Исключая из этих равенств $\frac{\partial H}{\partial x_k}$, получаем

$$D^{m/2+1} * \frac{\partial^2 H}{\partial {x_k}^2} - m(m+2)(x_k - \eta_k)^2 D^{m/2-1} * H + mD^{m/2} * H = 4m(x_k - \eta_k)x_k - 2D$$

.

Суммирование по k от 1 до m приводит к равенству

$$D^{m/2+1} * \Delta H - 2mD^{m/2} * H + 2m(1-r^2) = 0,$$

и остается принять во внимание (**).

Интеграл Пуассона для K_m имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{|S_{m-1}|}\int_{S_{m-1}} \frac{1-|x|^2}{[1-2(x,y)+|x|^2]^{m/2}} f(y)d\sigma,$$

где f – заданная функция на S_{m-1}, которую мы будем считать непрерывной. Если положить $x = |x| * \xi,\ y = |y| * \eta$, то интеграл Пуассона можно переписать в виде

$$u(x) = u(r\xi) = \frac{1}{|S_{m-1}|}\int_{S_{m-1}} \frac{1-r^2}{[1-2r(\xi,\eta)+r^2]^{m/2}} f(\eta)d\sigma_\eta (r < 1).$$

Покажем теперь, что функция $\frac{1}{|S_{m-1}|}H(x,\eta)$ удовлетворяет условию нормировки (она называется нормированным ядром Пуассона), т. е.

$$\frac{1}{|S_{m-1}|}\int_{S_{m-1}}\frac{1-r^2}{[1-2r(\xi,\eta)+r^2]^{m/2}}d\sigma_\eta=1.$$

Для этого заметим, что $H(x,\eta)=H(r\xi,\eta)=H(r\eta,\xi)$. Так как $H(x,\eta)$ гармонична по $x, |x|<1$, то по теореме о среднем значении

$$1=H(0,\eta)=\frac{1}{|S_{m-1}(r)|}\int_{S_{m-1}(r)}H(x,\eta)d\sigma_x=\frac{1}{|S_{m-1}|}\int_{S_{m-1}}H(r\xi,\eta)d\sigma_\xi.$$

Поэтому, в силу упомянутой симметрии функции $H(x,\eta)$,

$$\frac{1}{|S_{m-1}|}\int_{S_{m-1}}H(r\eta,\xi)d\sigma_\xi=1.$$

Отсюда, заменяя ξ на η, а η на ξ, получим:

$$\frac{1}{|S_{m-1}|}\int_{S_{m-1}}H(r\xi,\eta)d\sigma_\xi=1.$$

Следующая теорема дает решение классической задачи Дирихле для шара.

Теорема 5. *Какова бы ни была непрерывная функция f на* S_{m-1}, *существует одна и только одна гармоническая в* K_m *и непрерывная в* $\overline{K_m}=K_m\cup S_{m-1}$ *функция u*(*x*), *которая на* S_{m-1} *совпадает с f*(*x*). *Эта функция представляется интегралом Пуассона* ($r=|x|<1$):

$$u(x)=\frac{1}{|S_{m-1}|}\int_{S_{m-1}}\frac{(1-r^2)*f(\eta)}{[1-2(x,\eta)+r^2]^{m/2}}d\sigma. \qquad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из принципа максимума и минимума (теорема 3) сразу следует, что задача имеет не более одного решения. Так как из (3) вытекает гармоничность *u*(*x*) внутри K_m, то нужно лишь доказать, что $u(r\xi)$ при $r\to 1$ стремится к $f(\xi)$ равномерно на S_{m-1}. С этой целью рассмотрим разность

$$u(r\xi)-f(\xi)=\frac{1}{|S_{m-1}|}\int_{S_{m-1}}\frac{(1-r^2)[f(\eta)-f(\xi)]}{[1-2r(\xi,\eta)+r^2]^{m/2}}d\sigma_\eta. \qquad (4)$$

Если мы положим $(\xi,\eta)=\cos\gamma$, то γ $(0\le\gamma\le\pi)$ будет углом между векторами, идущими из центра в точки $\xi,\ \eta$ сферы S_{m-1}. Непрерывность функции *f* на S_{m-1} означает, что при любом $\varepsilon>0$ найдется такое δ, что из $\gamma<\delta$ будет следовать неравенство $|f(\eta)-f(\xi)|<\varepsilon$. Сделавши эти замечание, представим (4) в виде

$$u(r\xi)-f(\xi)=\frac{1}{|S_{m-1}|}\int_{S'_{m-1}}\frac{(1-r^2)[f(\eta)-f(\xi)]}{[1-2r(\xi,\eta)+r^2]^{m/2}}d\sigma_\eta+\frac{1}{|S_{m-1}|}*\int_{S''_{m-1}}\dots,$$

где S'_{m-1} есть часть S_{m-1}, на которой $0\le\gamma<\delta$, а S''_{m-1} – ее дополнение, на котором $\delta\le\gamma<\pi$. Тогда при любом r $(0\le r<1)$

$$\frac{1}{|S_{m-1}|}*\left|\int_{S'_{m-1}}\dots\right|\le\frac{\varepsilon}{|S_{m-1}|}\int_{S_{m-1}}\frac{(1-r^2)d\sigma_\eta}{[1-2r\cos\gamma+r^2]^{m/2}}=\varepsilon.$$

С другой же стороны,

$$\frac{1}{|S_{m-1}|}*\left|\int_{S''_{m-1}}\dots\right|\le\frac{2M}{|S_{m-1}|}\int_{S''_{m-1}}\frac{1-r^2}{[(1-r^2)^2+4r\sin^2\frac{\gamma}{2}]^{m/2}}d\sigma_\eta\le$$
$$\frac{2M*(1-r^2)}{(4r\sin^2\frac{\delta}{2})^{m/2}}\frac{1}{|S_{m-1}|}\int_{S''_{m-1}}d\sigma\le\frac{2M*(1-r^2)}{(4r\sin^2\frac{\delta}{2})^{m/2}},$$

где $M=\max|f(\xi)|$. Правая часть полученного неравенства при фиксированном δ будет $\le\varepsilon$, если $r>1-\vartheta$ с достаточно малым $\vartheta>0$. Таким образом, при любом $\varepsilon>0$ для всех $\xi\in S_{m-1}$ $|u(r\xi)-f(\xi)|<2\varepsilon$, если только $r>1-\vartheta$. Теорема доказана.

Важным следствием теоремы 5 является так называемый принцип симметрии, выражаемый следующей теоремой.

Теорема 6. *Пусть* u(x) *гармонична в области G, лежащей сверху от плоскости* $x_m=0$ *и имеющей часть этой плоскости в качестве куска границы. Если* u(x) *непрерывна в* $\bar{G}$ *и равна 0 на плоской границе G, то* u(x) *можно продолжить гармонически на область* $\acute{G}$, *симметричную G относительно плоскости* $x_m=0$, *полагая* u($\acute{x}$) = − u(x), *если* $\acute{x}$, *x симметричны относительно плоскости* $x_m=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай, когда областью *G* *является полушар с центром на плоскости* $x_m=0$ *и, очевидно, можно для простоты принять, что радиус шара равен 1. Возьмем интеграл Пуассона*

$$v(x)=\frac{1}{|S_{m-1}|}\int_{S_{m-1}}\varphi(\eta)\frac{1-|x|^2}{[1-2(x,\eta)+|x|^2]^{m/2}}d\sigma,$$

где $\varphi(\eta)=u(\eta)$ $(\eta_m\ge0)$; $\varphi(\eta)=-u(\acute{\eta})(\eta_m\le0)$. По теореме 5 функция

$v(x)$ гармонична в шаре K_m и непрерывна в его замыкании, а на верхней половине сферы S_{m-1} совпадает с $u(x)$. Так как при $x_m = 0$ справедливо равенство $(x,\eta) = x_1\eta_1 + \cdots + x_{m-1}\eta_{m-1} = (x,\acute{\eta})$, а, с другой стороны, $\varphi(\eta) = -\varphi(\acute{\eta})$, то при $x_m = 0$ функция $v(x)$, подобно функции $u(x)$, обращается в нуль. Значит, равенство $v(x) = u(x)$ имеет место на полной границе верхнего полушара, а следовательно, и во внутренних точках верхнего полушара. Аналогичным образом доказывается, что в точках нижнего полушара $v(x) = -u(\acute{x})$. Теорема доказана.

4. Теперь обратимся к проблеме Дирихле для E_{n+1}^{+}, которой мы уже занимались в п° 4 гл. 3, и, в частности, докажем теорему 4 главы 3, которая в указанном месте была лишь сформулирована. Начнем с некоторого варианта теоремы 3 главы 3.

Теорема 7. *Пусть f – непрерывная и ограниченная функция в* E_n*, а*

$$u(x,\eta) = \frac{2}{|S_n|}\int_{E_n} f(y)\frac{\eta dy}{(\eta^2 + |y-x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

ее интеграл Пуассона в E_{n+1}^{+}*. В таком случае гармоническая функция* $u(x,\eta)(\eta > 0)$ *обладает следующими свойствами:*

1) при любом $\eta > 0 |u(x,\eta)| \leq M$*, где* $M = \sup_{E_n}|f|$*;*

2) на каждом компакте $Q \subset E_n$ *при*

$n \to 0 \ u(x,\eta) \rightrightarrows f(x).$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1) есть следствие нормировки ядра Пуассона. Чтобы доказать утверждение 2), напишем равенство

$$u(x,\eta) - f(x) = \frac{2}{|S_n|}\int_{|z|<R}[f(x+\eta z) - f(x)]\frac{dz}{(1+|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}} + \frac{2}{|S_n|}\int_{|z|>R}[f(x+\eta z) - f(x)]\frac{dz}{(1+|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}} I_1 + I_2$$

.

Здесь при любом $\eta > 0,\ x \in E_n$ и $R > 1$

$$|I_2| \leq \frac{4M}{|S_n|}\int_{|z|>R}\frac{dz}{(1+|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \leq \frac{4M}{R}.$$

С другой стороны, при каждом R можно так выбрать η_0, чтобы для всех $x \in Q$ имело место неравенство $|f(x+\eta z) - f(x)| < \varepsilon$, если $|z| < R$ и $\eta \leq \eta_0$. Отсюда и вытекает утверждение 2) теоремы 7.

Для доказательства теоремы 4 главы 3 нам понадобится следующая

Лемма. *Если функция $u(x,\eta)$ гармонична в E^+_{n+1} и при любом $\eta_0 > 0$ ограничена в полупространстве $\eta \geq \eta_0$, то, каковы бы ни были $\eta_1 > 0, \eta_2 > 0$,*

$$u(x,\eta_1+\eta_2) = \int_{E_n} u(t,\ \eta_1)P(x-t,\eta_2)dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\eta_0 > 0$ и положим $w(x,\eta) = u(x,\eta\ +\eta_0)$

$$w_1(x,\eta) = \int_{E_n} u(t,\ \eta_0)P(x-t,\eta)dt \qquad (n > 0).$$

Так как $u(x,\eta_0)$ непрерывна, то по теореме 7 на каждом компакте в E_n $w_1(x,\eta) \rightrightarrows u(x,\eta_0)$ при $\eta \to 0$. Тем же свойством обладает очевидно, и $w(x,\eta)$. Поэтому разность $v(x,\eta) = w(x,\eta) - w_1(x,\eta)$ гармонична в E^+_{n+1}, непрерывна в замыкании $\overline{E^+_{n+1}}$ и равна нулю на границе E^+_{n+1}, т. е. на гиперплоскости $\eta = 0$. Кроме того, в силу условия леммы эта функция ограничена. Продолжив $v(x,\eta)$ по принципу симметрии, мы получим ограниченную гармоническую функцию во всем пространстве E^+_{n+1}. По теореме Пикара – Лиувилля эта функция должна быть постоянной, т. е. $v(x,\eta) = \text{const}$ и, следовательно, $v(x,\eta) = 0$, так как это верно при $\eta = 0$. Поэтому

$$u(x,\eta+\eta_0) = \int_{E_n} u(t,\ \eta_0)P(x-t,\eta)dt, \tag{5}$$

и лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4 гл. 3. Вначале докажем, используя лишь условия в) что $u(x,\eta)$ при любом $\eta_0 > 0$ ограничена в полупространстве $\eta \geq \eta_0$. Для этого нужна лишь теорема о среднем значении в форме (2). Из нее следует, что при любом $\eta > 0$

$|u(x,\eta)| \leq \frac{1}{\left|K_{n+1}\left(\frac{\eta}{2}\right)\right|} \int_{K_{n+1}^{(x,\eta)}\left(\frac{\eta}{2}\right)} |u(y,\zeta)|dyd\zeta \leq$

$\frac{1}{\left|K_{n+1}\left(\frac{\eta}{2}\right)\right|} \int_{\eta/2}^{3\eta/2} d\zeta \int_{E_n} |u(y,\zeta)|dy \leq \frac{M_\eta}{\left|K_{n+1}\left(\frac{\eta}{2}\right)\right|} = \frac{2^{n+1}M}{|K_{n+1}(1)|\eta^n}$

.

Ограниченность $u(x,\eta)$ в каждом полупространстве $\eta \geq \eta_0 > 0$ доказана. Следовательно, применима лемма. Таким образом, в силу одного лишь условия в) при любых $\eta_0 > 0, \eta > 0$ имеет место формула (5). Теперь обратимся к условию c^x). Оно выражает тот факт, что «континуальная последовательность» элементов $u(x,\eta_0)$ пространства $L^1(E_n)$ при $\eta_0 \to 0$ сходится в смысле Коши. В силу полноты пространства $L^1(E_n)$ существует такая функция $f \in L^1(E_n)$, что

$$\lim_{\eta_0 \to 0} \int_{E_n} |u(t,\eta_0) - f(t)|dt - 0.$$

Перепишем с помощью функции *f* равенство (5) в виде

$$u(x,\eta_0 + \eta) - \int_{E_n} f(t)P(x-t,\eta)dt =$$

$$= \int_{E_n} \{u(t,\eta_0) - f(t)\}P(x-t,\eta)dt, \qquad (6)$$

где η – фиксированное положительное число. Так как

$$\left|\int_{E_n} \{u(t,\eta_0) - f(t)\}P(x-t,\eta)dt\right| \leq \frac{2}{|S_n|} * \frac{1}{\eta^n} \int_{E_n} |u(t,\eta_0) - f(t)|dt,$$

то правая часть (6) равномерно по *x* стремится к нулю при $\eta_0 \to 0$. Следовательно, из (6) вытекает равенство $u(x,\eta) - \int_{E_n} f(t)P(x-t,\eta)dt = 0$, где $x \in E_n$ и $\eta > 0$ – любые. Таким образом, теорема доказана.

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В L^2

1. Переходим к определению и изучению преобразования Фурье в $L^2(E_n)$. С этой целью введем вначале пространство $L^{1,2}(E_n) = L^1(E_n) \cap L^2(E_n)$. Если f принадлежит этому пространству, то функция $\hat{f}$ определена, так как $f \in L^1(E_n)$. Но благодаря тому, что сверх того $f \in L^2(E_n)$, функция $\hat{f}$ будет обладать одним существенным дополнительным свойством, которое мы теперь выведем. Для этого рассмотрим функцию

$$g(x) = \int_{E_n} f(x+t)\overline{f(t)}dt, \qquad (1)$$

которая представляет свертку двух функций из $L^1(E_n)$, а именно

$$g(x) = \int_{E_n} f(x-t)\overline{f(-t)}dt.$$

Поэтому $g(x) \in L^1(E_n)$.

Воспользовавшись неравенством Коши – Буняковского, находим, что

$$|g(x)| \leq \int_{E_n} |f(t)|^2 dt = ||f||_2^2, \qquad (\alpha)$$

т. е. g ограничена во всем пространстве E_n. Далее, из того же неравенства Коши – Буняковского следует, что

$$\left|g(\acute{x}) - g(\acute{x})\right| \leq ||f||_2 * \sqrt{\int_{E_n} |f(+\acute{x}) - f(t+\acute{x})|^2 dt},$$

а так как всякая функция из $L^p(E_n)(p \geq 1)$ непрерывна в метрике этого пространства, то $g(x)$ равномерно непрерывна в E_n. Если мы временно обозначим $h(t) = \overline{f(-t)}$, то в силу (1) найдем, что

$$\hat{g}(x) = (\sqrt{2\pi})^n \hat{f}(x)\hat{h}(x),$$

а с другой стороны,

$$\hat{h}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} \overline{f(-t)}e^{-i(t,x)}dt = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} \overline{f(u)e^{-\imath(u,x)}}du = \hat{f}(x).$$

Следовательно,

$$\hat{g}(x) = (\sqrt{2\pi})^n |\hat{f}(x)|^2. \qquad (\beta)$$

Итак, согласно (α), $g(x)$ ограничена, а согласно (β), $\hat{g}(x) \geq 0$. Поэтому, в силу теоремы 2 (гл. 3) $\hat{g} \in L^1(E_n)$, и по формуле обращения для почти всех, а значит, благодаря непрерывности $g(x)$, для всех x

$$g(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{E_n} \hat{g}(t) e^{i(t,x)} dt.$$

Отсюда в силу (1) и (β)

$$\int_{E_n} f(x+t)\overline{f(t)}dt = \int_{E_n} |\hat{f}(t)|^2 e^{i(t,x)} dt.$$

В частности, при $x = 0$ получаем равенство

$$\int_{E_n} |f(t)|^2 dt = \int_{E_n} |\hat{f}(t)|^2 dt. \qquad (2)$$

Итак, если $f \in L^{1,2}(E_n)$, то $\hat{f} \in L^2(E_n)$ и имеет место *равенство Парсеваля* (2). Из этого равенства обычным приемом заключаем, что для любых двух функций $f, F \in L^{1,2}(E_n)$ справедливо соотношение

$$\int_{E_n} f(t)\overline{F(t)}dt = \int_{E_n} \hat{f}(t)\overline{\hat{F}(t)}\, dt, \qquad (3)$$

Это и есть то дополнительное свойство, о котором мы выше говорили.

2. Теперь мы можем дать определение преобразования Фурье произвольной функции из $L^2(E_n)$. Возьмем какую-нибудь последовательность $\{f_m\}_1^\infty \subset L^1(E_n) \cap L^2(E_n)$, обладающую тем свойством, что

$$||f_m - f||_2 \to 0 \;\; (m \to \infty).$$

Такая последовательность всегда существует, иначе говоря, $L^{1,2}(E_n)$ плотно в $L^2(E_n)$. Например, в качестве f_m можно взять

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x) \;\; (-\frac{m}{2} < x_k < \frac{m}{2};\;\; k = 1, 2, \dots, n) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad (\text{вне этого куба}). \end{cases} \qquad (4)$$

Выбрав $\{f_m\}_1^\infty$, заметим, что для каждого m существует $\hat{f}_m$ и имеют место соотношения

$$||\hat{f}_m||_2 = ||f_m||_2; \;\;\; ||\hat{f}_{\acute{m}} - \hat{f}_m||_2 = ||f_{\acute{m}} - f_m||_2.$$

Так как $||f_m - f||_2 \to 0 \;\; (m \to \infty)$, то $||f_{\acute{m}} - f_m||_2 \to 0 \;\; (m, \acute{m} \to \infty)$ и, следовательно, $||\hat{f}_{\acute{m}} - \hat{f}_m||_2 \to 0 \;\; (m, \acute{m} \to \infty)$, т. е. последовательность $\{f_m\}_1^\infty$ сходится в смысле Коши. В силу полноты $L^2(E_n)$, существует функция $\hat{f} \in L^2(E_n)$, такая, что $||\hat{f}_m - \hat{f}||_2 \to 0$. Эта функция, определенная лишь с точностью до значений на множестве меры нуль, называется пределом в среднем /limes in medio/ последовательности $\hat{f}_m$, обозначается $\hat{f}(x) = 1.$ i.

m. $\hat{f}_m(x)$ и принимается за преобразование Фурье функции f. Из равенства

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 \tag{5}$$

следует корректность этого определения, т. е. независимость (с точностью до значений на множестве меры нуль) построенного преобразования от выбора последовательности $\{f_m\}_1^\infty \subset L^{1,2}(E_n)$, сходящейся к f в $L^2(E_n)$. Если определить последовательность $\{f_m\}_1^\infty$ формулой (4), то получим для преобразования Фурье $\hat{f}$ выражение

$$\hat{f}(x) = \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{Q_n(m)} f(t) e^{-i(t,x)} dt,$$

где $Q_n(m)$ – куб в E_n, задаваемый неравенствами

$-\frac{m}{2} < x_k < \frac{m}{2}$ $(k = 1, \dots, n)$. Заметим далее, что, в силу линейности и (5), справедливо общее равенство Парсеваля

$$\int_{E_n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{E_n} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}\, dx.$$

Нетрудно видеть, что для преобразования Фурье в $L^2(E_n)$ справедливы, как и в $L^1(E_n)$, следующие простые правила:

1) если $F(x) = f(x+c)$, то $\hat{F}(x) = e^{i(c,x)}\hat{f}(x)$;
2) если $F(x) = e^{-i(c,x)} f(x)$, то $\hat{F}(x) = \hat{f}(x+c)$;
3) если $R \neq 0$ вещественное число и $F(x) = f(Rx)$, то $\hat{F}(x) = \frac{\hat{f}(\frac{x}{R})}{|R|^n}$.

3. В качестве примера найдем преобразование Фурье функции

$$\Psi_\alpha(t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \prod_{k=1}^n \frac{\sin a t_k}{a t_k} \in L^2(E_n),$$

где a – положительный параметр. По доказанному

$$\widehat{\Psi}_\alpha(x) = \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{Q_n(m)} \Psi_\alpha(t) e^{-i(t,x)} dt.$$

При фиксированном $x \in E_n$ предел $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{Q_n(m)} \Psi_\alpha(t) e^{-i(t,x)} dt$ существует и легко вычисляется. В самом деле

$$\int_{Q_n(m)} \Psi_\alpha(t) e^{-i(t,x)} dt = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \prod_{k=1}^n \int_{-m/2}^{m/2} \frac{\sin a t_k}{a t_k} e^{-it_k x_k} dt_k,$$

а так как

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-m/2}^{m/2}\frac{\sin a\tau}{a\tau}e^{-i\tau\xi}d\tau=\lim_{m\to\infty}\int_{0}^{m/2}\frac{\sin a\tau}{a\tau}\cos\tau\xi d\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi a}\int_0^\infty\frac{\sin(a+\xi)\tau+\sin(a-\xi)\tau}{2\tau}d\tau=\frac{1}{4a}\{\operatorname{sign}(a+\xi)+\operatorname{sign}(a-\xi)\}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & |\xi|<a,\\ 0, & |\xi|>a,\\ \dfrac{1}{4a}, & |\xi|=a,\end{cases}$$

то при $x\in Q_n(2a)$ $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{Q_n(m)}\Psi_a(t)e^{-i(t,x)}dt=\frac{1}{(2a)^n}$,

а при $x\notin\overline{Q_n(2a)}$ этот предел равен нулю.

Как известно, поточный предел и предел в метрике L^P последовательности из $L^P\,(p\geq 1)$ совпадают почти всюду, если оба эти предела существуют. Поэтому, обозначая через $\Omega_a(x)$ $(x\in E_n)$ характеристическую функцию куба $Q_n(2a)$, деленную на его объем, получаем из предшествующих вычислений равенство: $\widehat{\Psi}_a(x)=\Omega_a(x)$ (п. в.). Легко проверить непосредственно, что справедлива также формула: $\widehat{\Omega}_a(x)=\Psi_a(x)$ (п. в.).

4. Покажем теперь, что преобразование Фурье в $L^2(E_n)$ может быть представлено еще в одной и притом важной форме. Попутно мы получим также формулу обращения. С этой целью, взяв функцию $f\in L^2(E_n)$ и ее преобразование Фурье $\hat{f}$, запишем следующие два равенства Парсеваля:

$$\int_{E_n}f(t)\overline{e^{-\imath(x,t)}\Psi_a(t)}dt=\int_{E_n}\hat{f}(t)\,\overline{\Omega_a(t-x)}dt,$$

$$\int_{E_n}f(t)\overline{\Omega_a(t-x)}dt=\int_{E_n}\hat{f}(t)\,\overline{e^{-\imath(t,x)}\Psi_a(t)}dt,$$

где мы воспользовались правилами 1) и 2), приведенными в конце п°2 этой главы. Подставляя в эти равенства явные выражения функций Ω_a, Ψ_a, приведем их к виду

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n}f(t)e^{-i(t,x)}\prod_{k=1}^n\frac{\sin at_k}{at_k}dt=\frac{1}{|Q_n(2a)|}\int_{Q_n(2a)}\hat{f}(x+t)dt,$$

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n}\hat{f}(t)e^{i(t,x)}\prod_{k=1}^n\frac{\sin at_k}{at_k}dt=\frac{1}{|Q_n(2a)|}\int_{Q_n(2a)}f(x+t)\,dt.\qquad(6)$$

Отсюда находим, что для почти всех $x \in E_n$:

$$\hat{f}(x) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{E_n} f(t) e^{-i(t,x)} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin a t_k}{a t_k} dt,$$

$$f(x) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{E_n} \hat{f}(t) e^{i(t,x)} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin a t_k}{a t_k} dt. \qquad (7)$$

Первая формула показывает, что преобразование Фурье в $L^2(E_n)$ может быть определено не только как предел в среднем (l.i.m.), но и как поточечный предел почти всюду. Аналогично определяется исходная функция по ее образу. Далее, формула (7) показывает, что всякая функция из $L^2(E_n)$ является образом некоторой функции из $L^2(E_n)$, а вместе с равенством Парсеваля это означает, что *преобразование Фурье в $L^2(E_n)$ есть унитарный оператор*.

Остановимся подробнее на случае $n = 1$. В этом случае вторая из формул (6) имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{itx} \frac{\sin at}{at} dt = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f(x+t) dt.$$

Заменяя x на u и интегрируя по u от 0 до x, находим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) * \frac{e^{itx}-1}{it} * \frac{\sin at}{at} dt = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} dt \int_{0}^{x} f(u+t) du.$$

Делая здесь предельный переход $a \to 0$, получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) \frac{e^{itx}-1}{it} dt = \int_{0}^{x} f(u) du.$$

Значит, почти всюду

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) \frac{e^{itx}-1}{it} dt.$$

Аналогично первая из формул (6) дает:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-itx}-1}{-it} dt. \qquad (8)$$

Впервые преобразование Фурье L^2 построил и изучил Планшерель. В его честь рассматриваемое преобразование называют преобразованием Фурье – Планшереля.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что соотношение (4) главы 2 верно также для $f, g \in L^2(E_n)$.
2. Доказать, что свертка

$$F(x) = \int_{E_n} f(x-y)g(y)dy$$

существует для почти всех $x \in E_n$ в каждом из следующих случаев (сверх рассмотренного в n°2 главы 2):

a) обе функции $f, g \in L^2(E_n)$;

b) одна функция принадлежит $L^1(E_n)$, а другая $L^2(E_n)$.

Доказать, что в случае a) $F \in L^\infty(E_n)$, а в случае b) $F \in L^2(E_n)$.

3. Пусть

$$F(x) = \int_{E_n} f(x-y)g(y)dy,$$

где $f \in L^2(E_n)$, а g принадлежит либо $L^2(E_n)$, либо $L^1(E_n)$. Доказать, что $\hat{F}(t) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^n \hat{f}(t)\hat{g}(t)$.

Указание. Пусть $g \in L^2$; доказать, что преобразование Фурье – Планшереля функция $\varphi(t) = \hat{f}(t)e^{i(x,t)}$ равно $\hat{\varphi}(y) = f(x-y)$ и воспользоваться равенством

$$\int_{E_n} \hat{\varphi}(y)g(y)dy = \int_{E_n} \varphi(y)\,\hat{g}(y)dy.$$

Пусть теперь $g \in L^1$ и (для простоты) $n = 1$; полагая $h = \hat{f} * \hat{g}$ и замечая, что $h \in L^2$, доказать равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\frac{e^{ity}-1}{iy}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\overline{\left\{\frac{e^{i(u-t)y}-e^{iuy}}{-iy}\right\}}dy.$$

Используя преобразование Фурье характеристической функции $x(y)$ отрезка $[-u, -u+t]$, вывести отсюда, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\frac{e^{ity}-1}{iy}dy = \int_0^t dv\int_{-\infty}^{\infty} f(v-u)g(u)du.$$

Далее продифференцировать по t и применить формулу (8).

6. ФУНКЦИЯ ЭРМИТА

1. В этой и следующей главе рассматриваются связи преобразования Фурье с некоторыми специальными функциями. Мы начнем с так называемых функций Эрмита и многочленов Чебышева – Эрмита. *Функции Эрмита* (k = 0, 1, 2 …) определяются формулами

$$\varphi_k(t) = e^{t^2/2}\frac{d^k}{dt^k}e^{-t^2}. \qquad (1)$$

С помощью индукции легко доказывается, что $\frac{d^k e^{-t^2}}{dt^k} = (-1)^k \times e^{-t^2}H_k(t)$, где $H_k(t)$ – многочлен степени k со старшим членом $(2t)^k$, а также, что $H_k(t)$ есть четная функция при четном k и нечетная – при k нечетном. Многочлены $H_k(t)$ носят название *многочленов Чебышева – Эрмита*. Из формулы (1) следует, что $\varphi_k(t) = (-1)^k e^{-t^2}H_k(t)$. Основным свойством функций Эрмита является их ортогональность:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(t)\varphi_l(t)dt = 0 \ \ (k \neq l). \qquad (2)$$

Соотношение (2), очевидно, эквивалентны следующим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(t)e^{-t^2}t^l dt = 0 \ \ (l = 0, 1, \dots, k-1).$$

Но эти соотношения, в силу (1), представляется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^l\left(\frac{d^k}{dt^k}e^{-t^2}\right)dt = 0 \ \ (l = 0, 1, \dots, k-1\,)$$

и немедленно проверяются с помощью k-кратного интегрирования по частям.

Теперь докажем, что

$$\hat{\varphi}_k(t) = (-i)^k\varphi_k(t). \qquad (3)$$

Действительно,

$$\hat{\varphi}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^k e^{-x^2}}{dx^k} * e^{-itx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(x-it)^2}{2}}e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^k e^{-x^2}}{dx^k}dx = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\frac{d^k}{dx^k}e^{\frac{(x-it)^2}{2}}dx = \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^k}{dt^k}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{\frac{(x-it)^2}{2}}dx = \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^k}{dt^k}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{itx}dx\right] = (-i)^k e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^k}{dt^k}e^{-t^2}$$

.

Соотношение (3), верно при $k = 0, 1 \dots$, означает, что функция Эрмита являются собственными функциями преобразования Фурье, причем имеется лишь четыре собственных значения 1, i, -1, $-i$. Каждому из них принадлежит, таким образом, бесконечное множество собственных функций.

2. **Лемма.** *Если* $f \in L^2(-\infty,\infty)$ *и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_k(t)dt = 0 \ \ (k = 0,1,\dots), \qquad (\alpha)$$

то $f(t) = 0$ *почти всюду.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вместо условий (α), очевидно, можно принять, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}t^k dt = 0 \ \ (k = 0,1,\dots). \qquad (\beta)$$

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-itz}dt,$$

где $z = x + iy$ комплексная величина. Так как $f(t)e^{-\frac{t^2}{4}} \in L^1(-\infty;\infty)$, а с другой стороны, $e^{-\frac{t^2}{4}}e^{-itz}t^k$ при любом комплексном z и любом натуральном k является ограниченной функцией от t на всей оси, то функция $F(z)$ голоморфна во всей z-плоскости, а все ее производные

$$F^{(k)}(z) = \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-itz}t^k dt$$

в силу условий (β) равны 0 при $z = 0$. По теореме единственности теории функции $F(z) \equiv 0$. Значит,

$$0 = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-itx}dt \ (-\infty < x < \infty).$$

Так как функция $f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$ принадлежит $L^1(-\infty;\infty)$, то утверждение леммы вытекает из теоремы единственности для преобразования Фурье в L^1.

Из доказанной леммы вытекает, что *множеством функций Эрмита исчерпывается совокупность всех собственных функций оператора Фурье, а точками* $\pm 1, \pm i$ *исчерпывается весь спектр этого оператора. Кроме того, из леммы вытекает, что каждая функция из* $L^2(-\infty;\infty)$ *разлагается в* *метрике L^2 в обобщенный ряд Фурье по функциям Эрмита.*

3. При разложении в ряд по функциям Эрмита нужны нормирующие коэффициенты, т. е. числа

$$a_k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_k(t)]^2 dt.$$

Нетрудно показать, что $a_k^2 = 2^k k! \sqrt{\pi}$. С помощью чисел a_k получается *ортонормированная система Эрмита* $\{\frac{1}{a_k}\varphi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$. Для любой функции $f \in L^2(-\infty;\infty)$ разложение имеет вид:

$$f(t) \overset{L^2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{a_k^2} \varphi_k(t), \tag{4}$$

где обобщенные коэффициенты Фурье c_k определяются по формулам

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_k(t)dt.$$

На основании наших рассмотрений можно дать отличное от изложенного в гл. 5 построение преобразования Фурье в $L^2(-\infty;\infty)$. А именно, всякую функцию $f \in L^2$ мы задаем рядом (4), а ее преобразование Фурье определяем рядом

$$\hat{f}(t) \overset{L^2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \frac{c_k}{a_k^2} \varphi_k(t).$$

Доказательство эквивалентности этого определения планшерелевскому предоставляется читателю.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что функции Эрмита $\varphi_k(t)$ являются собственными функциями дифференциального оператора $L = -\frac{d^2}{dt^2} + t^2$, а именно, $L\varphi_k = (2k+1)\varphi_k$. Совокупность чисел $\{2k+1\}_{k=0}^{\infty}$ представляет полный спектр оператора L.
2. Доказать, что многочлены $H_k(t)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению $H_k(t) + 2(k-1)H_{k-2}(t) = 2tH_{k-1}(t)$.

7. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Пусть $x \in E_n$ – произвольный вектор. Положим $x = r\xi$, где $r \geq 0, \xi \in S_{n-1}$. Вместо координат ξ_k $(k = 1, 2, \dots, n)$, связанных соотношением $\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 = 1$, часто вводятся в качестве независимых координат углы $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, полагая

$$\xi_1 = \sin v_1 \ \sin v_2 \ \dots \ \sin v_{n-2} * \sin v_{n-1},$$

$$\xi_i = \sin v_1 \ \sin v_2 \ \dots \ \sin v_{n-i} * \cos v_{n-i+1} \quad (i = 2, 3, \dots, n-1), \ \ \xi_n = \cos v_1 .$$

При этом для получение всей сферы угол v_{n-1} должен пробегать интервал $[0, 2\pi)$, а остальные углы – интервалы $[0, \pi]$. В частном случае $n = 3$ формулы имеет вид

$$\xi_1 = \sin v_1 \ * \sin v_2, \ \ \xi_2 = \sin v_1 * \cos v_2, \qquad \xi_3 = \cos v_1,$$

и здесь v_2 есть долгота $(0 \leq v_2 < 2\pi)$, а v_1 – широта $(0 \leq v_1 \leq \pi)$. При $n > 2$ роль долготы играет v_{n-1}, а роль широты – система $\{v_1, \dots, v_{n-2}\}$. Хорошо известно, что оператор Лапласа в трехмерном пространстве можно представить в виде

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\{\frac{1}{\sin v_1} * \frac{\partial}{\partial v_1}(\sin v_1 \frac{\partial}{\partial v_1}) + \frac{1}{\sin^2 v_1}\frac{\partial^2}{\partial v_2^2}\}.$$

В случае произвольного $n \geq 2$ оператор Лапласа в E_n представим в виде

$$\Delta = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\tilde{\Delta}, \qquad (1)$$

где $\tilde{\Delta}$ есть некоторый линейный дифференциальный оператор второго порядка по переменным v_k $(k = 1, 2, \dots, n-1)$ или по переменным ξ_k $(k = 1, 2, \dots, n)$, т. е. по координатам на S_{n-1}. Оператор $\tilde{\Delta}$ обычно называют *оператором Бельтрами*. Из представления (1) непосредственно следует, что при $n > 2$ единственными гармоническими функциями, зависящими лишь от r, являются C и $C * r^{2-n}$ (C – константа). Вместо r можно взять расстояние переменной точки x до произвольно выбранной фиксированной точки a. Тогда мы получим следующее нетривиальное решение $\frac{1}{|x-a|^{n-2}}$ $(x \neq a)$. В силу его роли в теории гармонических функций это решение называют фундаментальным решением уравнения Лапласа в E_n. При $n = 3$ фундаментальное решение есть ньютонов потенциал.

При $n = 2$ из представления (1) следует, что единственными решениями, зависящими лишь от r, являются C и $C * \ln\frac{1}{r}$. Фундаментальным решением будет логарифмический потенциал.

Определение. Шаровой функцией степени k $(k = 0, 1, 2, \dots) E_n$ называют всякий однородный многочлен степени k, удовлетворяющий уравнению Лапласа в E_n. Сужение шаровой функции степени k на S_{n-1} называют сферической функцией степени k в E_n.

Если $\Phi_k(x)$ есть шаровая функция степени k, то $\Phi_k(x) = r^k \Phi_k(\xi)$, где $\Phi_k(\xi)$ – сферическая функция степени k. Зависимость функций от размерности n пространства мы будем отмечать лишь в тех случаях, когда это вызывается необходимостью.

Подставляя $\Phi_k(x)$ в уравнение $\Delta u = 0$, где оператор Δ взят в форме (1), без труда найдем, что сферические функции в E_n удовлетворяют уравнению

$$\tilde{\Delta}\Phi_k(\xi) + k(n + k - 2)\Phi_k(\xi) = 0, \qquad (2)$$

т. е. являются собственными функциями оператора Бельтрами.

2. Будем искать преобразование Фурье функции $e^{-\frac{|x|^2}{2}}\Phi_k(x)$, где $\Phi_k(x)$ - шаровая функция степени k в E_n. Для этого напишем равенство (см. п°3 гл. 2)

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} e^{-\frac{|y|^2}{2}} e^{-i(t,y)}\,dy = e^{-\frac{|t|^2}{2}}.$$

Из него с помощью дифференцирований по $t_1, t_2, \dots, t_n$ и составления линейных комбинаций (с комплексными множителями) можно получить новое равенство

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{E_n} e^{-\frac{|y|^2}{2}} e^{-i(t,y)}\Phi_k(y)\,dy = e^{-\frac{|t|^2}{2}} Q_k(t),$$

где $\Phi_k(y)$ – наперед заданная шаровая функция степени k, а $Q_k(t)$, очевидно, будет некоторым многочленом степени k, его-то мы хотим найти. С этой целью перепишем наше соотношение в виде

$$Q_k(t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{E_n} e^{-1/2 \sum_{k=1}^{n} (y_k + it_k)^2} \Phi_k(y) dy.$$

Обе части являются аналитическими функциями от параметров $t_1, t_2, \dots, t_n$ и равенство будет справедливо и в том случае, когда мы дадим им чисто мнимые значения. Полагая $t_j = ix_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, представим наше соотношение в виде

$$Q_k(ix) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{E_n} e^{-1/2 |y-x|^2} \Phi_k(y) dy.$$

Используя теорему о среднем для гармонических функций, найдем:

$$Q_k(ix) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} dr \int_{S_{n-1}^x(r)} \Phi_k(y) d\sigma = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} \Phi_k(x) * |S_{n-1}(r)| dr = \Phi_k(x) \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{E_n} e^{-\frac{|y|^2}{2}} dy = \Phi_k(x)$$

.

Таким образом, $Q_k(ix) = \Phi_k(x)$, и это соотношение между двумя аналитическими функциями сохранится для чисто мнимых значений $x = it$. Используя еще однородность степени k функции Φ_k, получаем: $Q_k(t) = (-i)^k \Phi_k(t)$. Из определения $Q_k(t)$ теперь следует:

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{E_n} e^{-\frac{|y|^2}{2}} e^{-i(t,y)} \Phi_k(y) dy = (-i)^k \Phi_k(t) e^{-\frac{|t|^2}{2}}.$$

Этот результат называют тождеством Гекке.

3. Сферические функции в E_n играют при рассмотрении функций точки на S_{n-1} роль периодических функций (т. е. функций точки на S_1). Мы хотим поэтому изучить в этой главе некоторые вопросы, связанные с разложением в ряды по сферическим функциям. В наших рассмотрениях важную роль будет играть интеграл Пуассона. Вначале возьмем функцию

$$\frac{1 - w^2}{(1 - 2wz + w^2)^\lambda}$$

от комплексной переменной w и вещественных параметров z и $\lambda > 0$. В круге $|w| < 1$ написанная функция допускает разложение в ряд Маклорена

$$\frac{1-w^2}{(1-2wz+w^2)^\lambda} = \sum_0^\infty \alpha_k(z) w^k; \;\; \alpha_0(z) = 1. \qquad (3)$$

Из разложения в биномиальный ряд

$$\frac{1-w^2}{(1-2wz+w^2)^{\lambda}} = \frac{1-w^2}{(1-[2wz-w^2])^{\lambda}}$$
$$= (1-w^2)\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-\lambda}{j}(-1)^j(2wz-w^2)^j$$

видно, что коэффициент $\alpha_k(z)$ в (3) есть многочлен точно степени k. Зависимость коэффициента $\alpha_k(z)$ от λ мы здесь не отмечаем. Так как замена w на $-w$ и z на $-z$ оставляет левую часть (3) без изменения, то $\alpha_k(z) = (-1)^k\alpha_k(-z)$, т. е. $\alpha_k(z)$ есть четный многочлен при четном k и нечетный при нечетном k. Обращаясь теперь к ядру Пуассона $H(x,\eta)$ в E_n, можем написать разложение (где $z = \cos\gamma = (\xi,\eta);\ r < 1$)

$$\frac{1-r^2}{(1-2zr+r^2)^{n/2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{(n)}(\cos\gamma)r^k, \tag{4}$$

причем теперь зависимость коэффициентов от размерности пространства уже указана. Коэффициент при r^k этого разложения есть многочлен

$$\alpha_k^{(n)}(\cos\gamma)r^k = A*(\xi,\eta)^k + \acute{A}*(\xi,\eta)^{k-2} + \cdots .$$

Функция

$$h_k^{(n)}(x,\eta) = A*(x,\eta)^k + \acute{A}*(x,\eta)^{k-2}r^2 + \cdots.$$

является однородным многочленом степени k по x. При этом

$$h_k^{(n)}(r\xi,\eta) = r^k\alpha_k^{(n)}\cos\gamma),$$

так что ряд (4) можно записать в виде

$$\frac{1-|x|^2}{[1-2(x,\eta)+|x|^2]^{n/2}} = \sum_{k=0}^{\infty}h_k^{(n)}(x,\eta). \tag{4_1}$$

Левая часть (4_1), очевидно, аналитична в окрестности точки $x = 0$, а разложение (4_1) получается из ее тейлоровского разложения объединением одночленов одной степени. Поэтому его можно любое число раз почленно дифференцировать с сохранением абсолютной и равномерной сходимости в окрестности начала координат. Так как левая часть (4_1) есть гармоническая функция, то

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty}\Delta_x h_k^{(n)}(x,\eta). \tag{4_2}$$

Поскольку k – е слагаемое в правой части является однородным многочленом от $x_1, \ldots, x_n$ степени $k-2$, то каждый член правой части (4_2) на самом деле равен 0. Значит, $h_k^{(n)}(x,\eta)$ есть шаровая функция степени k по x, а $h_k^{(n)}(\xi,\eta) = \alpha_k^{(n)}(\cos\gamma)$ есть сферическая функция степени k как по ξ, так и по η. Эту функцию называют зональной сферической функцией степени k в E_n.

4. При каждом k в E_n имеется лишь конечное число линейно независимых вещественных сферических функций степени k. Обозначим это число символом $N_k^{(n)}$. Легко убедиться, что $N_k^{(1)} = 2$. Действительно, единственная однородная аналитическая функция степени k на плоскости есть $(\alpha+i\beta)z^k$. Поэтому в качестве вещественных линейно независимых сферических функций на плоскости при любом k можно взять

$$\frac{z^k+\hat{z}^k}{2} \text{ и } \frac{z^k-\hat{z}^k}{2i}.$$

Ниже мы получим выражение для $N_k^{(k)}$ через n и k. При любом n введем базис вещественных сферических функций степени k в E_n, ортонормированный относительно скалярного произведения

$$< f,g >= \frac{1}{|S_{n-1}|}\int_{S_{n-1}} f(\eta) * g(\eta)d\sigma.$$

Обозначим этот базис $\{\Phi_{kj}^{(n)}(\xi)\}_{j=1}^{N_k^{(n)}}$ $(k = 0,1,2,\ldots)$. Теперь мы можем представить зональную функцию степени k в виде

$$\alpha_k^{(n)}(\cos\gamma) = \sum_{j,l=1}^{N_k^{(n)}} C_{jl}\Phi_{kj}^{(n)}(\xi)\Phi_{kl}^{(n)}(\eta), \tag{5}$$

где в силу симметрии $C_{jl} = C_{lj}$.

Запишем шаровую функцию $r^k\Phi_{kj}^{(n)}(\xi)$ в виде интеграла Пуассона

$$r^k\Phi_{kj}^{(n)}(\xi) = \frac{1}{|S_{n-1}|} * \int_{S_{n-1}} \Phi_{kj}^{(n)}(\eta)H(r\xi,\eta)d\sigma_\eta = \frac{1}{|S_{n-1}|} * \int_{S_{n-1}} \Phi_{kj}^{(n)}(\eta)\sum_{l=0}^{\infty} r^l\alpha_l^{(n)}(\cos\gamma)\,d\sigma_\eta$$

.

Из этого тождества вытекают следующие соотношения

$$\int_{S_{n-1}} \Phi_{kj}^{(n)}(\eta)\alpha_l^{(n)}(\cos\gamma)d\sigma_\eta = 0 \ \ (l \neq k),$$

$$\frac{1}{|S_{n-1}|} * \int_{S_{n-1}} \Phi_{kj}^{(n)}(\eta)\alpha_k^{(n)}(\cos\gamma)d\sigma_\eta = \Phi_{kj}^{(n)}(\xi).$$

Второе из написанных соотношений в силу (5) можно представить в виде

$$\frac{1}{|S_{n-1}|}\int_{S_{n-1}} \Phi_{kj}^{(n)}(\eta)\sum_{j,l=1}^{N_k^{(n)}} C_{jl}\Phi_{kj}^{(n)}(\xi)\Phi_{kl}^{(n)}(\eta)d\sigma_\eta = \Phi_{kj}^{(n)}(\xi),$$

откуда и следует, что $C_{jl} = \delta_{lj}$. Таким образом,

$$\alpha_k^{(n)}(\cos\gamma) = \sum_{j=1}^{N_k^{(n)}} \Phi_{kj}(\xi)\Phi_{kj}(\eta).$$

Если положить здесь $\xi = \eta$, то получим равенство

$$\alpha_k^{(n)}(1) = \sum_{j=1}^{N_k^{(n)}} [\Phi_{kl}^{(n)}(\eta)]^2.$$

Отсюда, интегрируя обе части по S_{n-1}, находим следующую формулу $N_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)}(1)$ для размерности пространства вещественных сферических функций степени k в E_n. Если воспользоваться формулой (3) при $\lambda = \frac{n}{2}$, то мы получим тождество

$$\frac{1+w}{(1-w)^{n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} N_k^{(n)} w^k,$$

откуда следует, что

$$N_k^{(2)} = \begin{cases} 1 \ (k=0) \\ 2 \ (k>0) \end{cases}; \ \ N_k^{(n)} = \frac{(n+k-3)!(n+2k-2)}{k!(n-2)!} \ \ (n \geq 3; k \geq 0).$$

5. Теперь обратимся к изучению многочленов $\alpha_k^{(n)}(t)$ в интервале (-1, 1) и докажем их ортогональность относительно некоторого веса. В качестве отправного пункта возьмем равенства

$$\frac{1}{|S_{n-1}|}\int_{S_{n-1}} \alpha_k^{(n)}(\cos\gamma) * \alpha_l^{(n)}(\cos\gamma)d\sigma_\eta = \alpha_k^{(n)}(1) * \delta_{kl}, \qquad (6)$$

вытекающие из результатов п°4. Так как интегралы в (6) не зависят от ξ, то можно принять, что $\xi = \{0, 0, \dots, 0, 1\}$, и тогда $\cos\gamma = \eta_n$. Пересечение сферы $\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2 = 1$ с плоскостью $\eta_n = t$ является $(n-2)$ – мерной сферой радиуса $\sqrt{1-t^2}$. Для любой функции $f(t),\ t \in (-1,1)$,

$$\int_{S_{n-1}} f(\cos\gamma)d\sigma_\eta = \int_0^\pi f(\cos\gamma)|S_{n-2}(\sin\gamma)|d\gamma =$$
$$|S_{n-2}|\int_0^\pi f(\cos\gamma)(\sin\gamma)^{n-2}d\gamma = |S_{n-2}|\int_{-1}^1 f(t)(\sqrt{1-t^2})^{n-3}dt$$

.

Вспоминая, что $|S_{n-1}| = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, можем переписать (6) в виде

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n-1}{2})} * \int_{-1}^1 \alpha_k^{(n)}(t)\alpha_l^{(n)}(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt = \delta_{kl} * \alpha_k^{(n)}(1).$$

Как видим, многочлены $\alpha_k^{(n)}(t)$ ортогональны относительно веса $(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}$. Они являются частным случаем ортогональных многочленов Якоби. Их называют многочленами Гегенбауэра.

6. Предположим теперь, что на S_{n-1} задана вещественная и для простоты непрерывная функция точки $\varphi(\xi)$. Мы можем сопоставить ей ряд по сферическим функциям

$$\varphi(\xi) \sim \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=1}^{N_k^{(n)}} a_{kj}\Phi_{kj}^{(n)}(\xi), \qquad (7)$$

где

$$a_{kj} = \frac{1}{|S_{n-1}|}\int_{S_{n-1}} \varphi(\eta)\Phi_{kj}^{(n)}(\eta)d\sigma. \qquad (8)$$

Докажем, что справедливо равенство

$$\frac{1}{|S_{n-1}|}\int_{S_{n-1}} |\varphi(\xi)^2 d\sigma = \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=1}^{N_k^{(n)}} |a_{kj}|^2, \qquad (9)$$

Которое назовем равенством Парсеваля. Для этого возьмем интеграл Пуассона

$$u(r\xi) = \frac{1}{|S_{n-1}|} * \int_{S_{n-1}} \frac{1-r^2}{[1-2r\cos\gamma+r^2]^{n/2}}\varphi(\eta)d\sigma_\eta.$$

Разлагая ядро Пуассона при $0 < r < 1$ в ряд по сферическим функциям, получим с учетом (8) и результатов п°4, что

$$u(r\xi) = \sum_{k=0}^\infty r^k \sum_{j=1}^{N_k^{(n)}} a_{kj}\Phi_{kj}^{(n)}(\xi).$$

Отсюда умножим обе части на $\varphi(\xi)$ и интегрируя по сфере S_{n-1}, находим

$$\frac{1}{|S_{n-1}|}\int_{S_{n-1}} u(r\xi)\varphi(\xi)d\sigma = \sum_{k=0}^\infty r^k \sum_{j=1}^{N_k^{(n)}} |a_{kj}|^2.$$

Делая предельный переход $r \to 1$, мы и получим равенство Парсеваля (9). Оно справедливо для функций $\varphi \in L^2(S_{n-1})$.

Сделаем одно важное замечание относительно ряда по сферическим функциям в (7). В нем члены соединены в группы. Вот сумма членов *k*-й группы: $\sum_{j=1}^{N_k^{(n)}} a_{kj}\Phi_{kj}^{(n)}(\xi) = \Phi_k^{(n)}(\xi)$. Функция $\Phi_k^{(n)}(\xi)$ есть *k*-я сферическая гармоника, входящая в разложение. Ясно, что отдельные слагаемые, из которых она состоит, можно не знать. В связи с этим стоит заметить, что в силу (8)

$$\Phi_k^{(n)}(\xi) = \frac{1}{|S_{n-1}|}\int_{S_{n-1}} \varphi(\eta)\sum_{j=1}^{N_k^{(n)}} \Phi_{kj}^{(n)}(\xi)\,\Phi_{kj}^{(n)}(\eta)d\sigma_\eta = \frac{1}{|S_{n-1}|}\int_{S_{n-1}} \varphi(\eta)\, a_k^{(n)}(\cos\gamma)d\sigma_\eta$$

,

т. е. вся гармоника представляется в виде одного интеграла через многочлены Гегенбауэра.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что лапласиан в E_n можно представить в виде $\frac{1}{r^2}[(r\frac{\partial}{\partial r})^2 + (n-2)\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \tilde{\Delta}]$, и вывести отсюда следующее предложение: если *u* – гармоническая функция, то тем же свойством обладает функция $v = r\frac{\partial u}{\partial r}$.
2. Используя предложение предыдущей задачи, доказать гармоничность ядра Пуассона $\frac{1-r^2}{[1-2r(\xi,\eta)+r^2]^{n/2}}$.
3. Пусть *u*(*x*) гармонична всюду в E_n и для каждого $x \in E_n$

$$u(x) \le C(1 + |x|^p),$$

где *C* и *p* – положительные константы. Доказать, что при этом условии *u*(*x*) есть гармонический многочлен степени $\le p$ (обобщение теоремы Пикара – Лиувилля).

Решение. Напишем верное $R > 0$ и любого $\xi \in S_{n-1}$ разложение

$$u(R\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} R^k \Phi_k^{(n)}(\xi),$$

где сферические функции $\Phi_k^{(n)}(\xi)$ в силу замечания в конце п°6 представляется через зональную сферическую функцию в виде

$$R^k \Phi_k^{(n)}(\xi) = \frac{1}{|S_{n-1}|} \int_{S_{n-1}} u(R\eta) a_k^{(n)}(\cos\gamma) d\sigma_\eta.$$

Отсюда следует неравенство

$$R^k * |\Phi_k^{(n)}(\xi)| \frac{M_k^{(n)}}{|S_{n-1}|} \int_{S_{n-1}} |u(R\eta)| d\sigma,$$

где

$$M_k^{(n)} = \max_{-1<t<1} |a_k^{(n)}(t)|,$$

или неравенство

$$R^k * \left|\Phi_k^{(n)}(\xi)\right| \leq \frac{M_k^{(n)}}{|S_{n-1}|} \int_{S_{n-1}} \{|u(R\eta)| + u(R\eta)\} d\sigma - M_k^{(n)} * u(0).$$

А с другой стороны, $|u(R\eta)| + u(R\eta) = 2\max\{u(R\eta), 0\}$. Поэтому, в силу условия задачи,

$$R^k * \left|\Phi_k^{(n)}(\xi)\right| \leq 2 * M_k^{(n)} * C * (1+R)^p - M_k^{(n)} * u(0),$$

откуда и получается, что $\Phi_k^{(n)}(\xi) = 0$ при $k > p$.

4. Пусть $f(t)(-1 \leq t \leq t)$ – заданная непрерывная функция. Доказать, что для любой сферической функции $\Phi_k^{(n)}(\xi)$ степени k в E_n справедливо равенство

$$\frac{1}{|S_{n-1}|} \int_{S_{n-1}} f(\cos\gamma) \Phi_k^{(n)}(\eta) d\sigma_\eta = \lambda_k \Phi_k^{(n)}(\xi),$$

показывающее , что собственными функциями ядра $f(\cos\gamma)$ являются сферические функции степени k ($k = 0, 1, \ldots$). Доказать также, что собственные значения λ_k определяются формулами

$$\lambda_k = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) * \Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-1}^{1} f(t) \frac{a_k^{(n)}(t)}{a_k^{(n)}(1)} (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt,$$

т. е. являются коэффициентами разложения

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k^{(n)}(t).$$

5. Применить общий результат предыдущей задачи к функции $f(t) = e^{-irt}(-1 \leq t \leq 1)$, где параметр $r > 0$. Таким образом, теперь

$\lambda_k = \lambda_k(r)$ в формуле

$$\frac{1}{|S_{n-1}|}\int_{S_{n-1}} e^{-ir\cos\gamma}\,\Phi_k^{(n)}(\eta)d\sigma_\eta = \lambda_k \Phi_k^{(n)}(\xi).$$

Пользуясь тем, что при каждом фиксированном $\eta(|\eta| = 1)$ функция $e^{-i(x,\eta)}$ удовлетворяет уравнению $\Delta e^{-i(x,\eta)} = -e^{-i(x,\eta)}$, доказать равенство

$$\lambda_k(r) = (-i)^k 2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\tfrac{n}{2})\frac{J_{k+\frac{n}{2}-1}(r)}{r^{\frac{n}{2}-1}};$$

в частности, при $n = 3$ получить равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} P_k(t)e^{-irt}dt = (-i)^k\frac{J_{k+\frac{1}{2}}(r)}{\sqrt{r}},$$

где P_k – многочлен Лежандра; J_k – функция Бесселя.

6. Доказать, что многочлен Лежандра $P_k(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$-\frac{d}{dt}(1-t^2)\frac{dy}{dt} = k(k+1)y.$$

7. Доказать, что многочлены Лежандра удовлетворяют рекуррентному соотношению $(k+1)P_{k+1}(t) + kP_{k-1}(t) = (2k+1)*tP_k(t)$.

8. ЭРМИТОВО-ПОЗИТИВНЫЕ ФУНКЦИИ

1. *Определение.* Комплекснозначная функция $f(x)(x \in E_n)$ называется *эрмитово-позитивной*, если при любом наборе точек $x^k \in E_n(k = 1, 2, \dots, N > \infty)$ и любых комплексных числах ξ_k имеет место неравенство

$$\sum_{\alpha;\beta=1}^{N} f(x^\alpha - x^\beta)\xi_\alpha\bar{\xi}_\beta \geq 0. \qquad (1)$$

Полагая в (1) $N = 1$, найдем что $f(0)*|\xi|^2 \geq 0$, откуда следует, что для всякой эрмитово-позитивной функции $f(0) \geq 0$. Далее, положим $N = 2$. Неравенство (1) примет вид

$f(0)\xi_1\bar{\xi}_1 + f(x^1 - x^2)\xi_1\bar{\xi}_2 + f(x^2 - x^1)\xi_2\bar{\xi}_1 + f(0)\xi_2\bar{\xi}_2 \geq 0$. Отсюда, заменяя $x^1 - x^2$ на x, находим, что $f(-x) = \overline{f(x)}$. Кроме того, запишем, что дискриминант $\begin{vmatrix} f(0) & f(x) \\ f(x) & f(0) \end{vmatrix}$ должен быть ≥ 0; получаем следующее свойство: $f(x) \leq f(0)$, из которого следует ограниченность всякой эрмитово-позитивной функции. Наконец, положим $N = 3$ и возьмем

$x^3 = 0, \xi_1 = -\xi_2 = \xi,\ \xi_1 = \eta$. Тогда неравенство (1) примет вид

$$f(0) * |\xi|^2 - f(x^1 - x^2) * |\xi|^2 + f(x^1) * \xi\bar{\eta} - f(x^2 - x^1) * |\xi|^2 + f(0) * |\xi|^2 - f(x^2) * \xi\bar{\eta} + f(-x^1) * \eta\bar{\xi} - f(-x^2)\eta\bar{\xi} + f(0) * |\eta|^2 \geq 0$$

,

или

$$[f(0) * |\eta|^2 + 2 * \left[f(0) - \frac{f(x^1 - x^2) + f(x^2 - x^1)}{2}\right] * |\xi|^2 + [f(x^1) - f(x^2)]\xi\bar{\eta} + \left[\overline{f(x^1) - f(x^2)}\right] * \bar{\xi}\eta \geq 0$$

,

откуда $|f(x^1) - f(x^2)|^2 \leq 2f(0)[f(0) - \frac{f(x^1 - x^2) + f(x^2 - x^1)}{2}]$.

Так как $f(0) - \frac{f(x^1 - x^2) + f(x^2 - x^1)}{2} = Re[f(0) - f(x^1 - x^2)]$, то из непрерывности вещественной части эрмитово-позитивной функции в точке 0 вытекает равномерная непрерывность самой функции во всем пространстве. Мы будем в дальнейшем рассматривать только непрерывные эрмитово-позитивные функции. Заметим, что для этих функций имеет место континуальный аналог неравенства (1), а именно

$$\int_{E_n} \int_{E_n} f(x - y)\rho(x)\overline{\rho(y)}dxdy \geq 0, \qquad (1^{bls})$$

где $\rho(x)$ – произвольная непрерывная функция из $L_1(E_n)$. Проверим это утверждение для $n = 1$. В этом случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)\rho(x)\overline{\rho(y)}dxdy = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \int_{-A}^{A} f(x - y)\,\rho(x)\overline{\rho(y)}dxdy = \lim_{A\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{\alpha,\beta=-N}^{N} f\left(\frac{\alpha A - \beta A}{N}\right)\rho\left(\frac{\alpha A}{N}\right)\overline{\rho\left(\frac{\beta A}{N}\right)}\frac{A^2}{N^2}$$

,

где стоящая в правой части двойная сумма ≥ 0 в силу (1).

2. Основной теоремой теории эрмитово-позитивных функций является теорема об интегральном представлении этих функций. При $n = 1$эта теорема была доказана почти одновременно А. Я. Хинчиным и Бохнером. При

произвольном $n > 1$теорему несколько позже доказал Бохнер.

Пусть $f(x)(x \in E_n)$ – заданная непрерывная эрмитово-позитивная функция. Напишем неравенство (1^{bis}), полагая

$$\rho(x) = e^{-2\varepsilon|x|^2} e^{-i(t,x)}.$$

Мы получим

$$\int_{E_n} \int_{E_n} f(x-y) e^{-2\varepsilon|x|^2} e^{-2\varepsilon|y|^2} e^{-i(t,x)} e^{-i(t,y)} dxdy \geq 0.$$

Сделаем замену переменных $x - y = u$, $x + y = v$. Вычисляя якобиан, находим, что вместо $dxdy$ придется написать $\frac{1}{2^n} dudv$. Далее, $|u|^2 + |v|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$. Поэтому наше неравенство примет вид

$$\frac{1}{2^n} \int_{E_n} \int_{E_n} f(u) e^{-\varepsilon|u|^2} e^{-\varepsilon|v|^2} e^{-i(t,u)}\, dudv \geq 0,$$

или

$$\int_{E_n} e^{-\varepsilon|v|^2} dv \int_{E_n} f(u) e^{-\varepsilon|u|^2} e^{-i(t,u)} du \geq 0,$$

откуда, добавляя постоянный множитель, получаем:

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{E_n} f(u) e^{-\varepsilon|u|^2}\, e^{-i(t,u)} du \geq 0.$$

Если мы введем ограниченную абсолютно интегрируемую функцию (с параметром $\varepsilon > 0$) $f_\varepsilon(u) = f(u) e^{-\varepsilon|u|^2}$, то последнее неравенство будет означать, что преобразование Фурье $\hat{f}_\varepsilon(t)$ этой функции всюду неотрицательно. По теореме 2 гл. 3 $\hat{f}_\varepsilon \in L^1$, и имеет место формула обращения

$$f(u) e^{-\varepsilon|u|^2} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{E_n} e^{-i(t,u)}\, \hat{f}_\varepsilon(t) dt. \tag{2}$$

Левая часть имеет предел при $\varepsilon \to 0$, но не ясно, как реализовать предельный переход в правой части формулы (2).

Рассмотрим подробно случай, когда $n = 1$ и, следовательно,

$$f(u) e^{-\varepsilon u^2} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} \hat{f}_\varepsilon(t) dt (-\infty < u < \infty). \tag{3}$$

Введем функцию

$$w_\varepsilon(t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_\varepsilon(v) dv. \tag{4}$$

Из положительности $\hat{f}_\varepsilon(t)$ и соотношение (3) следует, что функция $w_\varepsilon(t)$

при любом $\varepsilon > 0$ монотонна и удовлетворяет неравенству $0 \le w_\varepsilon(t) \le f(0)$. Формулу (3) можно переписать в виде

$$f(u)e^{-\varepsilon u^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, dw_\varepsilon(t). \qquad (5)$$

Теперь воспользуемся теоремой Хелли о выборе, согласно которой для семейства $\{w_\varepsilon(t)\}$ с параметром $\varepsilon > 0$ найдутся монотонная функция $w(t), 0 \le w(t) \le f(0)$ и некоторая последовательность $\varepsilon_i \to (i \to \infty)$, такие, что для всех t $\lim\limits_{i\to\infty} w_{\varepsilon_i}(t) = w(t)$. Далее мы покажем, что при $\varepsilon = \varepsilon_i \to 0$ из (5) следует равенство $f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, dw(t)$. Для этого, во-первых нужна теорема Хелли о предельном переходе, в силу которой $\lim\limits_{i\to\infty} \int_{-A}^{B} \varphi(t)\, dw_{\varepsilon_i}(t) = \int_{-A}^{B} \varphi(t) dw(t)$, где $\varphi(t)$ – любая непрерывная функция на конечном интервале $[-A, B]$. Во-вторых, имеется дополнительная трудность, поскольку в нашем случае интервал интегрирования бесконечен. В связи с этим перепишем соотношение (5) в виде

$$f(u)e^{-\varepsilon u^2} - \int_{-A}^{B} e^{iut} dw_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{-A} e^{iut} dw_\varepsilon(t) + \int_{B}^{\infty} e^{iut} dw_\varepsilon(t),$$

где A, $B > 0$. Для правой части написанной формулы возьмем мажоранту

$$\left| \int_{-\infty}^{-A} e^{iut} dw_\varepsilon(t) + \int_{B}^{\infty} e^{iut} dw_\varepsilon(t) \right| \le \int_{|t|>C} dw_\varepsilon(t),$$

где $C = \min\{A, B\}$.

Лемма. *Каково бы ни было число $\delta > 0$, при всех $\varepsilon > 0$ и всех $C \ge C_\delta$ имеет место неравенство*

$$\int_{|t|>C} dw_\varepsilon(t) < \delta.$$

Допустим, что эта лемма доказана. Взяв произвольные $\delta > 0$, найдем отвечающее ему C_δ. Тогда для всех $\varepsilon > 0$ при условии $\min\{A, B\} \ge C_\delta$ будем иметь неравенство

$$\left| f(u)e^{-\varepsilon u^2} - \int_{-A}^{B} e^{iut}\, dw_\varepsilon(t) \right| \le \delta,$$

правая часть которого от ε не зависит. Положим $\varepsilon = \varepsilon_i$ и устремим $i \to \infty$. По теореме Хелли о предельном переходе

$$\left| f(u) - \int_{-A}^{B} e^{iut}\, dw(t) \right| \le \delta.$$

При произвольном $\delta > 0$ это неравенство имеет место, если только $\min\{A, B\} \geq C_\delta$. Но это и означает, что

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} dw(t).$$

Полученное равенство и есть представление Бохнера – Хинчина непрерывной эрмитово-позитивной функции.

Доказательство леммы. Выведем из (5) два соотношения. Во-первых, напишем равенство

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dw_\varepsilon(t),$$

а во-вторых, умножим обе части (5) на $\frac{1}{2\gamma} du$ и проинтегрируем по u от $-\gamma$ до γ ($\gamma > 0$), после чего будем иметь:

$$\frac{1}{2\gamma} \int_{-\gamma}^{\gamma} f(u) e^{-\varepsilon u^2} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \gamma t}{\gamma t} dw_\varepsilon(t).$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{\sin \gamma t}{\gamma t}\right] dw_\varepsilon(t) = f(0) - \frac{1}{2\gamma} \int_{-\gamma}^{\gamma} f(u)\, e^{-\varepsilon u^2} du. \qquad (*)$$

Выражение $1 - \frac{\sin \gamma t}{\gamma t}$ всегда неотрицательно, а если $\gamma|t| > 2$, то это выражение больше $1/2$. Поэтому левая часть (*) больше, чем

$$\frac{1}{2} \int_{|t|>2/\gamma} dw_\varepsilon(t) < f(0) - \frac{1}{2\gamma} \int_{-\gamma}^{\gamma} f(u) e^{-\varepsilon u^2} du = \{f(0) - \frac{1}{2\gamma} \int_{-\gamma}^{\gamma} f(u) du\} + \frac{1}{2\gamma} \int_{-\gamma}^{\gamma} (1 - e^{-u^2}) f(u) du = I_1 + I_2$$

.

Поскольку для всех $\varepsilon \in [0,1]$

$$|I_2| \leq \frac{f(0)}{\gamma} \int_0^{\gamma} (1 - e^{-u^2}) du \leq f(0)(1 - e^{-\gamma^2}),$$

величина $I_1 + I_2$ стремится к нулю при $\gamma \to 0$, что и доказывает лемму.

Теперь остановимся на случае любого $n \geq 1$. Здесь, получив формулу (2), мы, по аналогии с (4), вводим для любого $t = \{t_1, \dots, t_n\} \in E_n$ функцию

$$w_\varepsilon(t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_n} \hat{f}_\varepsilon(v) dv_1 \dots dv_n.$$

Функция $w_\varepsilon(t)$ является монотонной функцией от t в том смысле, что из $t_1 \geq t_1', \dots, t_n \geq t_n'$ вытекает соотношение $w_\varepsilon(t) \geq w_\varepsilon(t')$. Вместо (5) имеем теперь представление

$$f(u)e^{-\varepsilon|u|^2} = \int_{E_n} e^{i(u,t)}\, dw_\varepsilon(t).$$

Далее применяется теорема выбора Хелли, в силу которой и здесь существует последовательность $\varepsilon_i \to 0$ и монотонная функция $w(t)$, такая, что $\lim\limits_{i\to\infty} w_{\varepsilon_i}(t) = w(t)$. Лемма также переносится на случай любого n. При этом вместо (*) здесь будет соотношение

$$\int_{E_n} \{1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin \gamma t_k}{\gamma t_k}\} dw_\varepsilon(t) = f(0) - \frac{1}{(2\gamma)^n} \int_{Q_n(2\gamma)} f(u)\, e^{-\varepsilon|u|^2}\, du.$$

Окончательная формулировка теоремы такова.

Теорема Бохнера – Хинчина. *Если f – непрерывная эрмитово-позитивная функция в* E_n*, то существует ограниченная монотонная функция* $w(t)$ *точки t такая, что всюду в* E_n

$$f(x) = \int_{E_n} e^{i(x,t)} dw(t). \qquad (6)$$

Обратно, всякой такой функции $w(t)$ *по формуле (6) отвечает некоторая непрерывная эрмитово-позитивная функция.*

Вторая часть теоремы тривиальна.

Теорема. *По заданной непрерывной эрмитово-позитивной функции f(x) монотонная функция w в представлении (6) определяется в своих точках непрерывности однозначно с точностью до аддитивности постоянной.*

Ограничимся доказательством этой теоремы при $n = 1$. Возьмем непрерывную функцию $\Phi(t;\, a, b, \varepsilon)$, определяемую соотношениями

$$\Phi(t;\ a, b, \varepsilon) = \begin{cases} 1 & (a \le t \le b) \\ 0 & (t > b + \varepsilon \text{ или } t < a - \varepsilon), \end{cases}$$

и линейную в интервалах $(a - \varepsilon, a), (b, b + \varepsilon)$, причем $\varepsilon > 0$. Преобразование Фурье $\widehat{\Phi} = \Psi$ функции Φ, как легко проверяется простым вычислением, принадлежит L^1. Из формулы

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dw(t)$$

находим, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Psi(x;a,b,\varepsilon)dx = \int_{-\infty}^{\infty} dw(t) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} * \Psi(x;a,b,\varepsilon)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\,(t;a,b,\varepsilon)dw(t) = \int_{a-\varepsilon}^{a} \frac{t-a+\varepsilon}{\varepsilon} * dw(t) + \int_{a}^{b} dw(t) + \int_{b}^{b+\varepsilon} \frac{t-b-\varepsilon}{-\varepsilon} dw(t)$$

.

Примем, что *a* и *b* – точки непрерывности функции $w(t)$. Тогда средний член правой части равен $w(b) - w(a)$ и крайние члены правой части при $\varepsilon \to 0$ стремится к 0. Следовательно

$$w(b) - w(a) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\Psi(\mathrm{x};\mathrm{a},\mathrm{b},\varepsilon)\mathrm{dx}. \qquad (7)$$

Так как $w(b) - w(a)$ для любых точек непрерывности функции $w(t)$ однозначно определяется по функции *f*, то теорема доказана.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что наряду с (7) формула обращения может быть представлена в виде

$$w(b) - w(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} * \int_{-T}^{T} f(x)\frac{e^{-iax} - e^{-ibx}}{x}\mathrm{dx} \qquad (7_1)$$

(эта формула обращения принадлежит Леви и С. Н. Бернштейну).

2. Обобщить формулы (7) и (7_1) на случай любого *n* > 1.

9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАНКЕЛЯ

1. Настоящая глава посвящена построению интегрального оператора, ядром которого является функция Бесселя. Этот оператор носит название преобразования Ханкеля. Напишем функцию Бесселя $J_v(x)$ $(v > -1)$ в виде ряда

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\tfrac{x}{2})^{v+2k} \Gamma(v+k+1) * k!. \qquad (1)$$

На полуоси *x* > 0 мажорантой этого ряда является разложение так называемой модифицированной функции Бесселя

$$I_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{v+2k}}{\Gamma(v+k+1)*k!}.$$

Нам понадобится следующее неравенство

$$I_v(x) \le \frac{1}{\Gamma(v+1)} * (\tfrac{x}{2})^{v} + (\tfrac{x}{2})^{v+2} \mathrm{ch}\, x \ (x \ge 0).$$

Для его доказательства представим $I_v(x)$ в виде

$$I_v(x) = \frac{1}{\Gamma(v+1)} * (\frac{x}{2})^v + (\frac{x}{2})^{v+2} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{x}{2})^{2k} \Gamma(v+k+2) * \Gamma(k+2).$$

Теперь остается проверить, что при $k \geq 0$

$2^{2k} * \Gamma(v+k+2) * \Gamma(k+2) \geq (2k)!$

При $k = 0$ это неравенство очевидно, а далее проверяется по индукции.

Для наших построений нужен следующий интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r^v + J_v(tr) dr.$$

Чтобы его найти, представим $J_v(tr)$ в виде (1). Затем, благодаря оценке функции $I_v(tr)$, найдем, что для вычисления интеграла можно применить почленное интегрирование. Опуская простые преобразования, напишем окончательный результат

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r^v + J_v(tr) dr = e^{-\frac{t^2}{2}} t^v,$$

который полезно представить в виде

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r^{v+\frac{1}{2}} \sqrt{tr} J_v(tr) dr = e^{-\frac{t^2}{2}} t^{v+\frac{1}{2}}. \qquad (2)$$

Эта формула выражает то факт, что функция $e^{-\frac{t^2}{2}} t^{v+\frac{1}{2}}$ является собственной функцией интегрального оператора с ядром $\sqrt{tr} * J_v(tr)$. Предлагаем читателю обратить внимание на тот случай формулы (2), когда $v = -\frac{1}{2}$.

При этом следует вспомнить, что

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

2. Возьмем формулу (2) и положим в ней

$$r = \sqrt{a} y; \;\; t = \frac{1}{\sqrt{a}} x; a > 0.$$

Мы получим следующее соотношение:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{a y^2}{2}} a^{\frac{v+1}{2}} y^{v+1} J_v(xy) dy = e^{-\frac{x^2}{2a}} * \frac{1}{a^{v/2}} * x^v.$$

Отсюда, если ввести $\beta = \frac{1}{\alpha}$, находим

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha y^2}{2}} \alpha^{\frac{v+1}{2}} y^{v+\frac{1}{2}} \sqrt{xy} J_v(xy) dy = e^{-\frac{\beta x^2}{2}} * \beta^{\frac{v+1}{2}} * x^{v+\frac{1}{2}}. \qquad (3)$$

Теперь заметим, что $\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} = -\beta \frac{\partial}{\partial \beta}$, и применим к левой части (3) оператор $(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha})^k$, а к правой – оператор $(-\beta \frac{\partial}{\partial \beta})^k$, положив затем в результате $\alpha = \beta = 1$.

Тогда мы получим следующее тождество:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} y^{v+\frac{1}{2}} T_k(y^2) \sqrt{xy} J_v(xy) dy = (-1)^k e^{-\frac{x^2}{2}} x^{v+\frac{1}{2}} T_k(x^2), \qquad (4)$$

где $T_k(z)$ – многочлен k-й степени от z. В частности,

$T_0(z) = 1;\ T_1(z) = z - (v+1);\ T_2(z) = z^2 - 2(v+2)z + (1+v)^2$.

Таким образом, *выражения*

$$e^{-\frac{x^2}{2}} * x^{v+\frac{1}{2}} * T_{2k}(x^2)\ (k = 0, 1, 2, \dots) \qquad (5)$$

являются собственными функциями оператора $\mathcal{H}$, определяемого формулой

$$(\mathcal{H} f)(x) = \int_0^\infty f(y) \sqrt{xy}\, J_v(xy) dy,$$

принадлежащим собственному значению 1, а выражения

$$e^{-\frac{x^2}{2}} * x^{v+\frac{1}{2}} * T_{2k+1}(x^2)\ (k = 0, 1, 2, \dots) \qquad (6)$$

подобным образом принадлежат собственному значению –1. *Так как оператор $\mathcal{H}$ симметричен, то каждая из функций* (5) *ортогональна каждой из функций* (6).

Следует заметить, что все интегралы (4) абсолютно сходятся, так как функции (5), (6) принадлежат как $L^1(0,\infty)$, так и $L^2(0,\infty)$. Функции (5) и отдельно функции (6) можно ортогонализовать и нормировать (нам удобнее на $1/2$). Мы получим, объединяя их, последовательность функций

$$e^{-\frac{x^2}{2}} x^{v+\frac{1}{2}} \tilde{L}_k^{(v)}(x^2)\ (k = 0, 1, 2, \dots), \qquad (7)$$

где $\tilde{L}_k^{(v)}(z)$ – многочлен точно степени k. При этом ортонормированность выражается равенством

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} x^{2v+1} \tilde{L}_k^{(v)}(x^2)\tilde{L}_m^{(v)}(x^2)dx = \frac{1}{2}\delta_{km}. \qquad (8)$$

Заметим, что каждая из функций (7) является собственной функцией нашего оператора, принадлежащей собственному значению $(-1)^k$. Если мы в формуле (7) сделаем замену $x^2 = t$, то вместо (8) получим

$$\int_0^\infty e^{-t} t^v \tilde{L}_k^{(v)}(t)\tilde{L}_m^{(v)}(t)dt = \delta_{km},$$

$\tilde{L}_k^{(v)}(t)$ – это нормированные *полиномы Сонина – Лагерра*. Они играют важную роль в анализе.

Часто рассматривают ненормированные полиномы. Они определяются равенством

$$e^{-x}x^v \tilde{L}_n^{(v)}(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+v}).$$

3. Покажем, что система полиномов Сонина – Лагерра обладают *полнотой*. Это значит, что *если измеримая функция f удовлетворяет условиям*

1) $\int_0^\infty e^{-x} * x^v * |f(x)|^2 dx < \infty$;

2) $\int_0^\infty e^{-x} * x^v * f(x) * L_n^{(v)}(x)dx = 0 \;\; (n = 0,1,2,\dots)$,

то $f(x) = 0$ п. в. Условия 2) эквивалентны следующим:

2^{bis}) $\int_0^\infty e^{-x}x^v f(x)\, x^n dx = 0 \;\; (n = 0,1,2,\dots)$.

Рассмотрим функцию

$$g(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x} * x^v * f(x) * e^{-ix\zeta}dx,$$

где $\zeta = \zeta + i\eta(|\eta| < \frac{1}{4})$. В этой полосе $|e^{-ix\zeta}| < e^{\frac{1}{4}x}$, а так как

$e^{-\frac{x^2}{2}} * x^{v/2} * f(x) \in L^2(0,\infty)$ и при любом целом

$n \geq 0 \;\; e^{-\frac{1}{4}}x^{v/2}x^n \in L^2(0,\infty)$, то подынтегральная функция и ее произведения на x^n $(n = 0,1,\dots)$ принадлежит $L^1(0,\infty)$, какова бы ни была точка ζ из упомянутой полосы. Отсюда следует, что $g(\zeta)$ в этой полосе аналитична и ее производные равны

$$g^{(n)}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-x}x^v(-ix)^n f(x)e^{-ix\zeta}dx.$$

В силу условий 2^{bis}):

$$g^{(n)}(0) = 0 \ \ (n = 0, 1, \dots).$$

Но в таком случае аналитическая функция $g(\zeta)$ есть во всей полосе тождественный нуль. В частности, она равна нулю на вещественной оси, т. е. при $\eta = 0$.

Таким образом,

$$0 = g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x} x^v f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Правая часть есть $\hat{F}(\xi)$, где

$$F(x) = \begin{cases} e^{-x} x^v f(x) & (x > 0), \\ 0 & (x < 0). \end{cases}$$

Из теоремы единственности следует, что $F(x) = 0$ п. в.

4. В этом п° рассмотрим при фиксированном $v > -1$ оператор Ханкеля $\mathcal{H}_v = \mathcal{H}$, определяемый формулой

$$(\mathcal{H} f)(x) = \int_0^\infty f(y) \sqrt{xy} J_v(xy) dy,$$

которая имеет непосредственный смысл, если $f \in L^1(0, \infty)$ и $\int_0^1 |f(y)| y^{v+\frac{1}{2}} dy < \infty$. Мы, однако, будем предполагать, что $f \in L^2(0, \infty)$. При этом предположении мы можем разложить функцию f в ортогональный ряд по функциям (7):

$$f(x) \overset{L^2}{=} \sum_{k=0}^\infty a_k e^{-\frac{x^2}{2}} x^{v+\frac{1}{2}} \tilde{L}_k^{(v)}(x^2), \tag{9}$$

где

$$a_k = 2 \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} y^{v+\frac{1}{2}} \tilde{L}_k^{(v)}(y^2) f(y) dy.$$

Разложение (9) следует понимать в метрике $L^2(0, \infty)$. Это значит следующее: если положить

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k e^{-\frac{x^2}{2}} x^{v+\frac{1}{2}} \tilde{L}_k^{(v)}(x^2),$$

то

$$\lim_{n \to \infty} ||f - f_n||_2 = 0.$$

Но в силу рассмотрений п°2 этой главы

$$(\mathcal{H} f_n)(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k e^{-\frac{x^2}{2}} x^{v+\frac{1}{2}} \tilde{L}_k^{(v)}(x^2).$$

Поэтому

$||\mathcal{H}f_n - \mathcal{H}f_m||_2 = ||f_n - f_m||_2$

и

$$||\mathcal{H}f_n||_2 = ||f_n||_2.$$

Отсюда легко усмотреть, что оператор Ханкеля корректно определен на любом элементе $f \in L^2(0,\infty)$ формулой $\mathcal{H}f = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\mathcal{H}f_n$, т. е.

$$(\mathcal{H}f)(x) \overset{L^2}{=} \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k e^{-\frac{x^2}{2}} x^{v+\frac{1}{2}} \tilde{L}_k^{(v)}(x^2),$$

если f задается разложением (9). Это оператор унитарен, самосопряжен и может быть также определен с помощью формулы

$$(\mathcal{H}f)(x) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_0^A f(y)\sqrt{xy}\,J_v(xy)dy.$$

Рекомендуемая литература

1. Аттетков А.В., Методы оптимизации, М.: РИОР: ИНФРА-М, учеб. пособие для вузов, 2012.
2. Волков В.А., Ряды Фурье. Интегральные преобразования Фурье и Радона, Екатеринбург: Издательство Уральского университета, учебно-методическое пособие, 2014.
3. Волков И.К., Интегральные преобразования и операционное исчисление, М.: Изд-во МГТУ, учеб. для втузов, 2002.
4. Ворович Е.И., Основы интегрального исчисления функции одной переменной, Ростов н/Д ИЦ ДГТУ, учеб. пособие, 2010.
5. Диткин В.А., Прудников А.П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, М.: Гос. изд-во физико-математической лит, 1961.
6. Снеддон И., Преобразования Фурье, М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
7. Фихтенгольц Г.М., Основы математического анализа, СПб.: Лань, учебник, 2002.