



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие
по дисциплине
**«Математические основы
прогнозирования»**

Автор
Артамонова Е.А.

Ростов-на-Дону, 2018



Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения направления бакалавриата 01.03.04 «Прикладная математика». Приведены материалы по основным темам, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины «Математические основы прогнозирования». Приведены образцы решения всех типовых заданий, снабжённые необходимыми теоретическими сведениями.

Автор

Старший преподаватель кафедры
«Прикладная математика»
Артамонова Е.А.



Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ.....	5
1.1. УНИВЕРСАЛЬНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ В РЕЖИМЕ ОНЛАЙН.....	5
1.2. КАЛИБРУЕМОСТЬ ПРОГНОЗОВ.....	7
1.3. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КАЛИБРУЕМЫХ ПРОГНОЗОВ.....	12
1.4. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЯДРОМ.....	15
1.5. УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ТОРГОВАЯ СТРАТЕГИЯ	20
1.6. КАЛИБРУЕМОСТЬ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ.....	24
1.7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4.....	33
2. ЭЛЕМЕНТЫ СРАВНИТЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ.....	36
2.1. АЛГОРИТМ ВЗВЕШЕННОГО БОЛЬШИНСТВА.....	37
2.2. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕРЬ В РЕЖИМЕ ОНЛАЙН.....	40
2.3. АЛГОРИТМ СЛЕДОВАНИЯ ЗА ВОЗМУЩЕННЫМ ЛИДЕРОМ.....	44
2.4. АЛГОРИТМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ВЗВЕШИВАНИЯ ЭКСПЕРТНЫХ РЕШЕНИЙ.....	53
2.5. АЛГОРИТМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ВЗВЕШИВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ ОБУЧЕНИЯ.....	57
2.6. РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ ПРОГНОЗЫ.....	59
2.7. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА.....	63
2.8. УСИЛЕНИЕ ПРОСТЫХ КЛАССИФИКАТОРОВ – БУСТИНГ.....	68
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	74



ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие содержит материал по всем основным разделам дисциплины «Математические основы прогнозирования». Представлены основные теоретические положения и понятия, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины, и подробное решение всех типовых заданий. Выбор тематики осуществлялся на основе анализа ФГОСЗ+ по дисциплине «Математические основы прогнозирования» в базовой подготовке бакалавров технических направлений.

Учебное пособие дополняет курс лекций по дисциплине «Математические основы прогнозирования» и будет полезно студентам в самостоятельной работе и при подготовке к текущему, рубежному и итоговому контролю знаний по данной дисциплине в различных формах, а также при изучении различных смежных дисциплин математического и естественнонаучного цикла.

1. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

1.1. УНИВЕРСАЛЬНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ В РЕЖИМЕ ОНЛАЙН

Рассматривается следующая задача прогнозирования: предсказатель получает в режиме онлайн некоторую числовую последовательность исходов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \dots$. При этом предсказателю не известно распределение вероятностей источника, генерирующего эту последовательность. Задачей предсказателя является вычисление оценок вероятностей p_n будущих событий ω_n по уже известным $n - 1$ исходам $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$.

Число p_n может рассматриваться как вероятность события $\omega_n = 1$ в том случае, когда ω_i принимают значения 0 или 1. Легко видеть, что в этом случае число p_n также является математическим ожиданием случайной величины ω_n .

В случае конечного числа исходов величина p_n может быть вектором вероятностей всех возможных исходов.

Исторически первой процедурой универсального прогнозирования является правило Лапласа.¹ Эта процедура использует гипотезу о том, что исходы ω_i порождаются некоторым источником, который генерирует их независимо друг от друга с одной и той же вероятностью единицы, равной p .

Пусть исходы ω_i принадлежат множеству $\{0, 1\}$. Мы также предполагаем, что в каждый момент времени $i = 1, 2, \dots$ исход ω_i порождается независимо от предыдущих исходов с неизвестными нам постоянными вероятностями $p = P\{\omega_i = 1\}$ и $q = P\{\omega_i = 0\} = 1 - p$. Необходимо оценивать эти вероятности в режиме онлайн на основе статистики предыдущих исходов.

Пусть мы наблюдаем исходы $\omega^n = \omega_1, \dots, \omega_n$, в которых имеется n_1 единиц и n_2 нулей, $n_1 + n_2 = n$. Вероятность получить такую последовательность исходов равна $p^{n_1}(1 - p)^{n_2}$, если вероятность единицы равна p . Так как истинная вероятность p неизвестна, рассмотрим байесовскую смесь вероятностей последовательности длины n по всем возможным p :

$$P(\omega^n) = \int_0^1 p^{n_1}(1 - p)^{n_2} dp.$$

Значение этого интеграла легко вычислить.

Лемма 1.1.

$$\int_0^1 p^{n_1}(1 - p)^{n_2} dp = \frac{1}{(n + 1) \binom{n}{n_1}}.$$

Лаплас рассматривал задачу вычисления вероятности события, которое заключается в том, что солнце взойдет завтра, если известно, что оно всходило каждый день последние 5000 лет (1826251 дней). Эта задача находится на границе применимости частотной интерпретации вероятности, так как не выполнено условие повторяемости данного опыта. Кроме того, известная последовательность состоит из одних восходов. Тем не менее, для того, чтобы выразить степень нашей субъективной неопределенности о значении p этой вероятности, мы считаем все значения p равновероятными. Согласно формуле, приведенной далее, вероятность рассматриваемого события будет равна $\frac{1826252}{1826253}$.

Доказательство. Проверим это равенство обратной индукцией по n_1 .

При $n_1 = n$ имеем

$$\int_0^1 p^n dp = \frac{1}{(n+1)}.$$

Предположим, что

$$\int_0^1 p^{n_1+1}(1-p)^{n_2-1} dp = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{n_1+1}}.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 p^{n_1}(1-p)^{n_2} dp &= \frac{n-n_1}{n_1+1} \int_0^1 p^{n_1+1}(1-p)^{n_2-1} dp = \\ &= \frac{n-n_1}{n_1+1} \frac{1}{(n+1)\binom{n}{n_1+1}} = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{n_1}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Условная вероятность события $\omega_{n+1} = 1$ при известных исходах $\omega^n = \omega_1, \dots, \omega_n$ равна

$$P\{\omega_{n+1} = 1 | \omega^n\} = \frac{P(\omega^{n+1})}{P(\omega^n)} = \frac{\frac{1}{(n+2)\binom{n+1}{n_1+1}}}{\frac{1}{(n+1)\binom{n}{n_1}}} = \frac{n_1+1}{n+2}.$$

Таким образом, получаем правило Лапласа:

$$\begin{aligned} P\{\omega_{n+1} = 1 | \omega^n\} &= \frac{n_1+1}{n+2}, \\ P\{\omega_{n+1} = 0 | \omega^n\} &= \frac{n_2+1}{n+2}. \end{aligned}$$

Качество такой процедуры прогнозирования можно оценивать с помощью какой-нибудь функции потерь. Пример такой функции потерь – логарифмическая функция потерь:

$$L_p(\omega^n) = -\ln(p^{n_1}(1-p)^{n_2}).$$

Из теории информации известно, что эта величина с точностью до 1 совпадает со средним количеством двоичных битов, необходимых для кодирования последовательностей ω^n , состоящих из n_1 единиц и n_2 нулей и порожденных источником с вероятностью 1 равной p .

Нетрудно проверить, что

$$\sup_{0 \leq p \leq 1} p^{n_1}(1-p)^{n_2} = \left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1} \left(\frac{n_2}{n}\right)^{n_2}$$

Для правила Лапласа

$$L(\omega^n) = -\ln P(\omega^n) = -\ln \int_0^1 p^{n_1}(1-p)^{n_2} dp.$$

Допустим, что последовательность ω^n порождена источником с вероятностно-

стью 1 равной p_0 . Тогда для произвольной последовательности ω^n выполнено

$$\begin{aligned} L(\omega^n) - L_{p_0}(\omega^n) &\leq \\ L(\omega^n) - \inf_{0 \leq p \leq 1} L_p(\omega^n) &= \ln \frac{\sup_{0 \leq p \leq 1} p^{n_1} (1-p)^{n_2}}{\int_0^1 p^{n_1} (1-p)^{n_2} dp} = \\ &= \ln \frac{\binom{n_1}{n}^{n_1} \binom{n_2}{n}^{n_2}}{\frac{1}{(n+1) \binom{n}{n_1}}} \leq \ln(n+1) \end{aligned}$$

Таким образом, используя для кодирования вероятности, вычисленные по правилу Лапласа, мы истратим $\ln(n+1)$ дополнительных битов по сравнению с длиной оптимального кода, т.е. кода, построенного на основе истинной вероятности p_0 источника, порождающего исходы ω_i .

Другой, более точный, метод прогнозирования был предложен Кричевским и Трофимовым. Рассматривается байесовская смесь вероятностей последовательности длины n по всем возможным p

с плотностью $1/(\pi\sqrt{p(1-p)})$:

$$P(\omega^n) = \int_0^1 \frac{p^{n_1} (1-p)^{n_2}}{\pi \sqrt{p(1-p)}} dp.$$

В этом случае условная вероятность 1 после n наблюдений $\omega^n = \omega_1, \dots, \omega_n$ равна

$$P(1|\omega^n) = \frac{n_1 + 1/2}{n + 1}.$$

Имеет место оценка:

$$\int_0^1 \frac{p^{n_1} (1-p)^{n_2}}{\pi \sqrt{p(1-p)}} dp \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \binom{n_1}{n}^{n_1} \binom{n_2}{n}^{n_2}.$$

Эти утверждения предлагаются далее.

Отсюда получаем оценку на дополнительное число битов при кодировании с использованием прогнозирования по методу Кричевского и Трофимова:

$$\begin{aligned} L(\omega^n) - \inf_{0 \leq p \leq 1} L_p(\omega^n) &= \ln \frac{\sup_{0 \leq p \leq 1} p^{n_1} (1-p)^{n_2}}{\int_0^1 \frac{p^{n_1} (1-p)^{n_2}}{\pi \sqrt{p(1-p)}} dp} \leq \\ &\leq \ln \frac{\binom{n_1}{n}^{n_1} \binom{n_2}{n}^{n_2}}{\frac{1}{2\sqrt{n}} \binom{n_1}{n}^{n_1} \binom{n_2}{n}^{n_2}} \leq \ln(2\sqrt{n}) = \frac{1}{2} \ln n + \ln 2 \end{aligned}$$

В этой оценке регрет асимптотически в два раза меньше, чем в соответствующей оценке для метода Лапласа.

1.2. КАЛИБРУЕМОСТЬ ПРОГНОЗОВ

В том случае, когда отсутствует гипотеза о механизме порождения исходов ω_i , для оценки качества прогнозов используются целевые функционалы (функции потерь), которые выбираются исходя из конкретных задач, для решения которых производится прогнозирование.

Типичным примером задачи на прогнозирование является задача предсказания погоды на завтра, например, событие $\omega_n = 1$ может интерпретироваться как дождь в n -й день, а число p_n – как его вероятность, вычисленная на основе наблюдений погоды $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ за предыдущие $n - 1$ дней.

Предсказатель погоды считается хорошо калибруемым, если дождь случается так же часто, как он прогнозируется предсказателем. Например, если дождь случается в 80% всех дней, для которых предсказатель давал прогноз $p_n = 0.8$, и т.д. Величина среднего отклонения частоты исходов ω_n от прогнозов p_n , где $p_n \approx p^*$, для различных значений p^* может использоваться как тест для выявления «плохих» предсказателей.

В предыдущем примере $p_n \in [0,1]$. Можно рассматривать последовательности данных более общего характера. Например, пусть $\omega_n = S_n$ – цена некоторого финансового инструмента в некоторые последовательные моменты времени $n = 1, 2, \dots$. Цена имеет стохастический характер изменения. В практических приложениях иногда трудно восстановить параметры модели, управляющей изменением цены. Кроме этого, эти параметры могут изменяться со временем. Число p_n рассматривается как прогноз «среднего значения» этой величины на шаге n .

В разделе 3.3 мы будем рассматривать как бинарные исходы $\omega_n \in \{0,1\}$, так и вещественные исходы, лежащие в единичном интервале: $\omega_n \in [0,1]$; число p_n лежит в единичном отрезке $[0,1]$.

Если бы задача восстановления истинных значений вероятностей p_i решалась традиционными статистическими методами, то мы бы предполагали, что исходы генерируются с помощью некоторой вероятностной меры P , т.е.

$$p_n = P(\omega_n = 1 | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}) \text{ при } n = 1, 2, \dots$$

– условная вероятность события $\omega_n = 1$ при известных значениях $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$. В этом случае предсказатель должен был бы решать классическую задачу математической статистики – восстановление вероятностной меры P по наблюдениям. Обычно при этом класс возможных мер сильно ограничивается на основе некоторой априорной информации об источнике. Например, предполагается, что распределение принадлежит заданному параметрическому классу и мы должны по наблюдениям восстановить некоторый неизвестный параметр этой меры.

Однако на практике мы часто имеем дело с единственной исторической последовательностью исходов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \dots$ и не имеем представления о механизмах, генерирующих эту последовательность. Мы даже можем не знать, являются ли эти механизмы стохастическими.

FOR $n = 1, 2, \dots$

Предсказатель анонсирует прогноз $p_n \in [0, 1]$.

Природа анонсирует исход $\omega_n \in \{0, 1\}$.

ENDFOR

Рис. 1.1: Протокол игры с детерминированными предсказаниями

В данной главе предположение о наличии такой меры P не используется. В условиях отсутствия меры возникает естественная трудность – неизвестно, каким образом оценивать качество прогнозов. Требуется критерии качества, использующие только последовательность данных, получаемую предсказателем в режиме онлайн.

Тем не менее, можно указать метод прогнозирования произвольной последовательности $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$, удовлетворяющий так называемым тестам на *калибруемость*.

Приведенное выше правило проверки предсказателя погоды можно записать в следующем виде: для любого действительного числа $p^* \in [0, 1]$ выполнено

$$\frac{\sum_{i=1 \& p_i \approx p^*}^n \omega_i}{\sum_{i=1 \& p_i \approx p^*}^n 1_{p_i \approx p^*}} \approx p^*, \quad (1.1)$$

если знаменатель отношения (1.1) стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$. Здесь мы использовали символ \approx приближенного равенства, потому что на практике число p^* можно задавать только с некоторой точностью. Условие $p_i \approx p^*$ требует дальнейшего уточнения.

Уточним схему действий *Предсказателя* и *Природы* в виде протокола игры с участием этих двух игроков, который представлен на рис. 1.1.

Предсказатель и *Природа* могут использовать всю информацию, которая известна на момент его или ее действия. В частности, на шаге n *Природа* может использовать прогноз p_n анонсированный *Предсказателем*; *Предсказатель* не знает исход ω_n , так как к моменту выдачи прогноза p_n *Природа* еще не анонсировала свой исход.

Приведем точное определение калибруемости, предложенное Дейвидом. Рассмотрим произвольные подынтервалы $I = [a, b], (a, b), [a, b), (a, b)$ интервала $[0, 1]$ и их характеристические функции

$$I(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \in I \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Последовательность прогнозов p_1, p_2, \dots *калибруется* на бесконечной последовательности $\omega_1, \omega_2, \dots$, если для характеристической функции $I(p)$ каждого подынтервала $[0, 1]$ *калибровочная ошибка* стремится к нулю, т.е.

$$\frac{\sum_{i=1}^n I(p_i)(\omega_i - p_i)}{\sum_{i=1}^n I(p_i)} \rightarrow 0, \quad (1.2)$$

если знаменатель отношения (1.2) стремится к бесконечности при $n \rightarrow$

∞ . Характеристическая функция $I(p_i)$ определяет некоторое правило выбора, которое определяет те номера исходов i , для которых мы вычисляем отклонение прогноза p_i от соответствующего исхода ω_i .

Простые соображения показывают, что никакой алгоритм, вычисляющий прогнозы на основании прошлых исходов, не может всегда выдавать калибруемые прогнозы. А именно, для произвольного такого алгоритма f можно определить последовательность $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots$ так, что

$$\omega_i = \begin{cases} 1, & \text{если } p_i < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

где $p_i = f(\omega_1, \dots, \omega_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots$. Легко видеть, что для интервала $I = [0, \frac{1}{2})$ или для интервала $I = [\frac{1}{2}, 1)$ условие калибруемости (1.2) нарушается.

Данная последовательность $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots$ является простейшим примером «адаптивно враждебной» стратегии *Природы*. При генерации очередного исхода ω_i согласно приведенному выше протоколу *Природа* уже знает наш прогноз p_i и использует это знание для формирования очередного исхода.

Подобные трудности предсказания оказались преодолимыми с помощью понятия рандомизированных прогнозов. Пусть $P[0,1]$ – множество всех вероятностных мер на отрезке $[0,1]$.

FOR $n = 1, 2, \dots$

Предсказатель анонсирует распределение вероятностей $P_n \in P([0,1])$.

Природа анонсирует исход $\omega_n \in \{0,1\}$.

Генератор случайных чисел анонсирует случайное число \tilde{p}_n распределенное согласно мере P_n .

ENDFOR

Рис. 1.2: Протокол игры с рандомизированными предсказаниями

Протокол игры с детерминированными предсказаниями, приведенный на рис. 1.1, заменяется на протокол игры с рандомизированными предсказаниями – рис. 1.2. При этом вводится вспомогательный игрок – *Генератор случайных чисел*. *Природа*, при выборе очередного исхода ω_n , может использовать распределение вероятностей анонсированное *Предсказателем*, но прогноз p_n скрыт от нее. Поэтому ход *Генератора случайных чисел* помещен в протоколе после хода *Природы*.

Обозначаем $\omega^{n-1} = \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$. Вероятностные распределения P_n в общем случае зависящие от ω^{n-1} порождают распределение вероятностей $\Pr = \prod_{n=1}^{\infty} P_n$ на множестве всех бесконечных последовательностей прогнозов $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots$, где $\tilde{p}_i \in [0,1]$, $i = 1, 2, \dots$. Бесконечная последовательность $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots$ является параметром этого распределения.

Заметим, что такая мера Pr существует и в гораздо более общем случае, а именно, когда каждый исход ω_n является измеримой функцией от последовательности $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n-1}$ для всех n .²

В этом случае, для любого n определено семейство вероятностных мер $P_n(d\tilde{p}_n; \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n-1})$ (вероятностных ядер), зависящих от параметров $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n \in [0, 1]$. В частности, определена начальная мера $P_1(d\tilde{p}_1)$.

По этому семейству для любого n определяется вероятностная мера Q_n на $[0, 1]^n$ следующим образом. Для любого борелевского множества $A \subseteq [0, 1]^n$ определим

$$Q_n(A) = \int P_1(d\tilde{p}_1) \int P_2(d\tilde{p}_2; \tilde{p}_1) \dots \int P_n(d\tilde{p}_n; \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n-1}) 1_A(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n),$$

где

$$1_A(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n) = \begin{cases} 1 & \text{если } (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n) \in A \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По теореме Ионеско–Тулъчи о продолжении меры существует вероятностная мера Pr на множестве $[0, 1]^\infty$ всех бесконечных траекторий $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots$ такая, что

$$Q_n(A) = \text{Pr}(A \times [0, 1]^\infty)$$

для всех n и всех борелевских $A \subseteq [0, 1]^n$.

В частности, можно для любого подынтервала $I \subseteq [0, 1]$ рассматривать вероятность Pr события (1.2).

Фостер и Воора, а также Какаде и Фостер построили алгоритм для вычисления калибруемых рандомизированных предсказаний для случая когда исходы ω_i принимают конечное число значений.

Приведем этот результат для случая когда исходы ω_i принимают только два значения 0 и 1: для произвольного значения параметра $\Delta > 0$, алгоритм генерирует рандомизированные предсказания так что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(\tilde{p}_i)(\omega_i - \tilde{p}_i) \right| \leq \Delta$$

выполнено с Pr -вероятностью 1, где траектории прогнозов $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots$ определены по вероятностной мере Pr , а $I(p)$ – характеристическая функция произвольного подынтервала $[0, 1]$.

Версия этого алгоритма для случая $\omega_i \in [0, 1]$ будет приведена в следующем разделе 1.3.

² Согласно протоколу представленному на рис. 1.2, Природа наблюдает на шаге n значения прогнозов $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n-1}$, выдаваемых Генератором случайных чисел на прошлых шагах. При этом значение прогноза \tilde{p}_n ей недоступно.

1.3. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КАЛИБРУЕМЫХ ПРОГНОЗОВ

Приведем некоторый модернизированный вариант рандомизированного алгоритма Какаде и Фостера. Пусть $\omega_1, \omega_2, \dots$ – произвольная последовательность элементов $\{0, 1\}$ или $[0, 1]$, поступающая в режиме онлайн. Построим алгоритм для вычисления случайной величины, выдающей прогноз $p_n \in [0, 1]$ будущего значения ω_n по начальному фрагменту $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$. Основное требование к таким прогнозам: они должны с вероятностью 1 удовлетворять условию калибруемости. Соответствующее распределение вероятностей является внутренним по отношению к алгоритму и строится в процессе конструкции.

Предварительно разобьем интервал значений прогнозов $[0, 1]$ на равные части длины $\Delta = 1/K$ с помощью рациональных точек $v_i = i\Delta$, где $i = 0, 1, \dots, K$. Пусть V обозначает множество всех этих точек. Любое число $p \in [0, 1]$ представляется в виде линейной комбинации граничных точек подынтервала разбиения, содержащего p :

$$p = \sum w_v(p)v = w_{v_{i-1}}(p)v_{i-1} + w_{v_i}(p)v_i,$$

где $p \in [v_{i-1}, v_i]$, $i = p/\Delta + 1$,

и

$$w_{v_{i-1}}(p) = 1 - \frac{p - v_{i-1}}{\Delta}, \quad w_{v_i}(p) = \frac{v_i - p}{\Delta}.$$

Полагаем $w_v(p) = 0$ для всех остальных значений $v \in V$.

В дальнейшем детерминированный прогноз p , выдаваемый алгоритмом, приведенным далее, будет округляться до v_{i-1} с вероятностью $w_{v_{i-1}}(p)$ и до v_i с вероятностью $w_{v_i}(p)$.

Сначала построим алгоритм, выдающий детерминированные прогнозы.

Пусть прогнозы p_1, \dots, p_{n-1} уже определены (пусть $p_1 = 0$). Вычислим прогноз p_n .

Рассмотрим вспомогательную величину

$$n-1$$

$$\mu_{n-1}(v) = \sum_{i=1} w_v(p_i)(\omega_i - p_i).$$

Имеем

$$\begin{aligned} (\mu_n(v))^2 = & (\mu_{n-1}(v))^2 + 2w_v(p_n)\mu_{n-1}(v)(\omega_n - p_n) + \\ & +(w_v(p_n))^2(\omega_n - p_n)^2. \end{aligned}$$

Суммируем (1.3) по v :

$$\sum_{v \in V} (\mu_n(v))^2 = \sum_{v \in V} (\mu_{n-1}(v))^2 + 2(\omega_n - p_n) \sum_{v \in V} w_v(p_n) \mu_{n-1}(v) + \sum_{v \in V} (w_v(p_n))^2 (\omega_n - p_n)^2 \quad (1.4)$$

Изменим порядок суммирования в сумме вспомогательных величин

$$\begin{aligned}
 & \sum_{v \in V} w_v(p) \mu_{n-1}(v) = \\
 &= \sum_{v \in V} w_v(p) \sum_{i=1}^{n-1} w_v(p_i) (\omega_i - p_i) = \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{v \in V} w_v(p) w_v(p_i) \right) (\omega_i - p_i) = \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} (\bar{w}(p) \cdot \bar{w}(p_i)) (\omega_i - p_i) = \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} K(p, p_i) (\omega_i - p_i),
 \end{aligned}$$

где $\bar{w}(p) = (w_1, \dots, w_{v_K}) = (0, \dots, w_{v_{i-1}}(p), w_{v_i}(p), \dots, 0)$ -вектор вероятностей

округления, $p \in [v_{i-1}, v_i]$, и

$$K(p, p_i) = (\bar{w}(p) \cdot \bar{w}(p_i)) \quad (1.5)$$

– скалярное произведение соответствующих векторов (ядро). По определению $K(p, p_i)$ – непрерывная функция.

Второй член правой части равенства (1.4) при подходящем значении p_n всегда можно сделать меньшим или равным нулю.

Действительно, в качестве p_n берем корень $p_n = p$ уравнения

$$\sum_{v \in V} w_v(p) \mu_{n-1}(v) = \sum_{i=1}^{n-1} K(p, p_i) (\omega_i - p_i) = 0, \quad (1.6)$$

если он существует. В противном случае если левая часть уравнения (1.6) (которая является непрерывной по p функцией) больше нуля для всех значений p_n , то полагаем $p_n = 1$, если она меньше нуля, то полагаем $p_n = 0$. Определенное таким образом значение p_n выдаем в качестве детерминированного прогноза.

Третий член (3.4) ограничен числом 1. Действительно, так как $|\omega_i - p_i| < 1$ для всех i , имеем для произвольного n

$$\sum_{v \in V} (w_v(p_n))^2 (\omega_n - p_n)^2 \leq \sum_{v \in V} w_v(p_n) = 1.$$

Отсюда и по (1.4), если последовательно выбирать прогнозы p_i согласно указанному правилу, получим

$$\sum_{v \in V} (\mu_n(v))^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{v \in V} (w_v(p_i))^2 (\omega_i - p_i)^2 \leq n. \quad (1.7)$$

Пусть теперь p_i^* – случайная величина, принимающая значения $v \in V$ с вероятностями $w_v(p_i)$ (на самом деле, для каждого p ненулевыми являются только значения $w_v(p)$ для двух соседних границ подынтервала разбиения, содержащего детерминированный прогноз p_i). Пусть также $I(p)$ – характеристическая функция произвольного подынтервала $[0, 1]$. Для любого i математическое ожидание случайной величины $I(p_i^*)(\omega_i - p_i^*)$ равно ³

$$E(I(p_i^*)(\omega_i - p_i^*)) = \sum_{v \in V} w_v(p_i) I(v) (\omega_i - v). \quad (1.8)$$

Согласно усиленному мартингалльному закону больших чисел с вероятностью 1 :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(p_i^*)(\omega_i - p_i^*) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(I(p_i^*)(\omega_i - p_i^*)) \right| \rightarrow 0 \quad (1.9)$$

при $n \rightarrow \infty$.

По определению детерминированного прогноза p_i и функции $w_v(p)$

$$\left| \sum_{v \in V} w_v(p_i) I(v) (\omega_i - v) - \sum_{v \in V} w_v(p_i) I(v) (\omega_i - p_i) \right| < \Delta \quad (1.10)$$

для каждого i .

Применяем неравенство Коши–Буняковского к векторам $\{\mu_n(v) : v \in V\}$ и $\{I(v) : v \in V\}$, учитываем (3.10), и получаем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \sum_{v \in V} w_v(p_i) I(v) (\omega_i - p_i) \right| = \\ & = \left| \sum_{v \in V} I(v) \sum_{i=1}^n w_v(p_i) (\omega_i - p_i) \right| \leq \\ & \leq \sqrt{\sum_{v \in V} (\mu_n(v))^2} \sqrt{\sum_{v \in V} I(v)} \leq \\ & \leq \sqrt{Kn}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $K = 1/\Delta$ - число подынтервалов разбиения.

Используя (1.10) и (1.11), получаем верхнюю оценку для абсолютной величины суммы математических ожиданий (1.8) :

³ В случае когда ω_i есть функция от значений прошлых прогнозов, здесь имеется ввиду условное математическое ожидание относительно случайных величин p_1^*, \dots, p_{i-1}^* .

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i)(\omega_i - \tilde{p}_i)) \right| = \\
 & = \left| \sum_{i=1}^n \sum_{v \in V} w_v(p_i) I(v)(\omega_i - v) \right| \leq \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

$$\leq \Delta n + \sqrt{n/\Delta} \quad (1.13)$$

для всех n .

Из (1.12) и (1.9) получаем, что с Pr -вероятностью 1 :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(\tilde{p}_i)(\omega_i - \tilde{p}_i) \right| \leq \Delta. \quad (1.14)$$

Сформулируем результаты этого раздела в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Для каждого $\Delta > 0$ можно построить алгоритм, выдающий рандомизированные прогнозы, такой что для любого подынтервала $I \subseteq [0, 1]$ неравенство*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(\tilde{p}_i)(\omega_i - \tilde{p}_i) \right| \leq \Delta$$

выполнено почти всюду, где $I(p)$ – характеристическая функция этого подынтервала.

Если в процессе конструкции в определенные моменты времени n_s , $s = 1, 2, \dots$, изменять $\Delta = \Delta_s$ так что $\Delta_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, можно достичь асимптотически точного результата:

Теорема 3.2. *Можно построить алгоритм, выдающий рандомизированные прогнозы, такой что для любого подынтервала $I \subseteq [0, 1]$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(\tilde{p}_i)(\omega_i - \tilde{p}_i) = 0$$

почти всюду.

1.4. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЯДРОМ

Существуют два подхода к универсальному прогнозированию:

- универсальное прогнозирование, при котором в качестве прогноза выдается распределение вероятностей на множестве возможных прогнозов (в частности, в случае бинарных последовательностей множество возможных прогнозов состоит из двух элементов, как в предыдущем разделе); при этом в качестве правил выбора используются произвольные подынтервалы единичного интервала;

- универсальное прогнозирование, при котором прогноз является детерминированным, однако в качестве правил выбора разрешается использовать только гладкие приближения к характеристическим функциям подынтервалов единичного интервала.

В первом случае последовательность прогнозов удовлетворяет условию калибруемости с вероятностью единица. Во втором случае условие калибруемости просто выполнено для последовательности детерминированных прогнозов с гладкими весами.

Можно показать, что оба эти подхода, по существу, эквивалентны.

Второй метод прогнозирования будет рассмотрен в этом разделе.

Метод построения алгоритмов универсального прогнозирования, предложенный в работах Фостера и Вооры, а также Какаде и Фостера, был обобщен В. Вовком на случай произвольных ядер в работах. В этом разделе мы представим основную идею этого обобщения.

Сформулируем задачу прогнозирования в виде некоторой игры между игроками: *Природа*, *Предсказатель* и *Скептик*.

В этой игре прогнозы будут детерминированными, подобно прогнозам p_i , которые вычисляются в виде корней уравнений типа (1.6) в разделе 1.3. Мы рассмотрим более общую постановку, а именно, введем дополнительную информацию – *сигналы*.

Задано множество сигналов $X \subseteq \mathbb{R}^m$ – множество m -мерных векторов $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$, на котором рассматривается обычная m -мерная евклидова норма

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}.$$

Сигналы можно интерпретировать как дополнительную информацию, которая поступает *Предсказателю* в режиме онлайн.

Полагаем начальный выигрыш *Скептика* $K_0 = 1$. Игра регулируется следующим протоколом.

FOR $n = 1, 2, \dots$

Природа анонсирует сигнал $\bar{x}_n \in X$.

Скептик анонсирует непрерывную по p функцию $S_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Предсказатель анонсирует прогноз $p_n \in [0, 1]$.

Природа анонсирует исход $y_n \in \{0, 1\}$. *Скептик* вычисляет свой выигрыш на шаге n игры

$$K_n = K_{n-1} + S_n(p_n)(y_n - p_n).$$

ENDFOR

Следующая теорема показывает, что *Предсказатель* имеет стратегию, при которой выигрыш *Скептика* не возрастает.

Теорема 3.3. *Предсказатель имеет стратегию, при которой $K_0 > K_1 > \dots > K_n > \dots$*

Доказательство. Стратегия *Предсказателя* заключается в следующем.

На произвольном шаге n игры *Предсказатель* вычисляет свой прогноз p_n следующим образом. Если $S_n(p)$ положительно для всех $p \in [0, 1]$, то полагаем $p_n = 1$. Если $S_n(p)$ отрицательно для всех $p \in [0, 1]$, то полагаем $p_n = 0$. В противном случае из теоремы о промежуточных значениях следует, что уравнение

$$S_n(p) = 0, \quad (1.15)$$

рассматриваемое относительно p , имеет корень. В этом случае *Предсказатель* выбирает в качестве p_n один из таких корней.

Легко видеть, что при таком выборе p_n выигрыш *Скептика* всегда не возрастает, как бы он не выбирал непрерывную по p функцию $S_n(p)$, т.е. всегда выполнено

$$K_0 > K_1 > \dots > K_n > \dots$$

для всех n . 4

Мы будем использовать ядро $K((p, \bar{x}), (p', \bar{x}'))$ - симметричную положительно определенную вещественную гладкую функцию на $([0, 1] \times X)^2$. Пример ядра – гауссово ядро:

$$K((p, \bar{x}), (p', \bar{x}')) = \exp \left(-\frac{(p - p')^2}{\sigma_1^2} - \frac{\|\bar{x} - \bar{x}'\|^2}{\sigma_2^2} \right), \quad (1.16)$$

где σ_1, σ_2 – параметры ядра.

Рассмотрим следующую стратегию *Скептика*, которая будет вынуждать *Предсказателя* делать на каждом шаге n «хорошо калибруемые» прогнозы:

$$S_n(p) = \sum_{i=1}^{n-1} K((p, \bar{x}_n), (p_i, \bar{x}_i)) (y_i - p_i).$$

Пусть *Предсказатель* использует стратегию, описанную в теореме 3.3. Тогда выигрыш *Скептика* за N шагов игры удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_N - \mathcal{K}_0 &= \sum_{n=1}^N S_n(p_n)(y_n - p_n) = \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{n-1} K((p_n, \bar{x}_n), (p_i, \bar{x}_i))(y_i - p_i)(y_n - p_n) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N K((p_n, \bar{x}_n), (p_i, \bar{x}_i))(y_i - p_i)(y_n - p_n) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N K((p_n, \bar{x}_n), (p_n, \bar{x}_n))(y_n - p_n)^2. \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

Согласно результатам существуют гильбертово пространство признаков \mathcal{H} и отображение

$\Phi : [0, 1] \times X \rightarrow \mathcal{H}$ такое, что

$$K(a, b) = (\bar{\Phi}(a) \cdot \bar{\Phi}(b))$$

при $a, b \in [0, 1] \times X$, где « \cdot » – скалярное произведение в пространстве \mathcal{H} (далее $\|\cdot\|$ – соответствующая норма).

Величина

$$c_{\mathcal{H}} = \sup_a \|\bar{\Phi}(a)\|$$

называется константой вложения (embedding constant). Мы рассматриваем ядра, для которых соответствующая величина конечна: $c_{\mathcal{H}} < \infty$.

Перепишем (1.17) в виде

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_N - \mathcal{K}_0 &= \frac{1}{2} \left\| \sum_{n=1}^N \bar{\Phi}(p_n, \bar{x}_n)(y_n - p_n) \right\|^2 - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \|\bar{\Phi}(p_n, \bar{x}_n)(y_n - p_n)\|^2. \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

По предположению

$$c_{\mathcal{H}} = \sup_{p, \bar{x}} \|\bar{\Phi}(p, \bar{x})\| < \infty.$$

По теореме 3.3 неравенство $\mathcal{K}_N - \mathcal{K}_0 \leq 0$ выполнено для всех N . Тогда из (1.18) следует

$$\frac{1}{2} \left\| \sum_{n=1}^N \bar{\Phi}(p_n, \bar{x}_n)(y_n - p_n) \right\|^2 \leq \frac{1}{2} N C^2. \quad (1.19)$$

Неравенство (1.19) перепишем в виде

$$\left\| \sum_{n=1}^N \bar{\Phi}(p_n, \bar{x}_n)(y_n - p_n) \right\| \leq \sqrt{N} C. \quad (1.20)$$

Иными словами, средняя ошибка алгоритма предсказания ограничена

$$\frac{1}{N} \left\| \sum_{n=1}^N \bar{\Phi}(p_n, \bar{x}_n)(y_n - p_n) \right\| \leq \frac{C}{\sqrt{N}}.$$

Используя полученную оценку средней ошибки алгоритма предсказания, получим результат о калибруемости, аналогичный результату из раздела 1.3. Для этого возьмем в качестве ядра какое-нибудь семейство гладких приближений к характеристическим функциям одноэлементных множеств $\{(p^*, \bar{x}^*)\}$, где $(p^*, \bar{x}^*) \in [0, 1] \times X$, т.е. семейство функций вида

$$K((p^*, \bar{x}^*), (p, \bar{x})) = I_{(p^*, \bar{x}^*)}(p, \bar{x}). \quad (1.21)$$

Примером такого семейства $I_{p^*}(p)$ является семейство гауссовых ядер типа (3.16).

Для прогнозов p_i будет выполнено

Следствие 1.1.

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I_{(p^*, \bar{x}^*)}(p_n, \bar{x}_n)(y_n - p_n) \right| \leq \frac{C^2}{\sqrt{N}} \quad (1.22)$$

для каждой точки $(p^*, \bar{x}^*) \in [0, 1] \times X$.

Доказательство. По свойству ядра существует такая функция $\Phi(p, \bar{x})$ со значениями в некотором гильбертовом пространстве признаков H , что

$$K((p^*, \bar{x}^*), (p, \bar{x})) = I_{(p^*, \bar{x}^*)}(p, \bar{x}) = (\bar{\Phi}(p^*, \bar{x}^*) \cdot \bar{\Phi}(p, \bar{x})).$$

Применим неравенство Коши–Буняковского к неравенству (1.20) и получим

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^N I_{(p^*, \bar{x}^*)}(p_n, \bar{x}_n)(y_n - p_n) \right| = \\ & = \left| \left(\left(\sum_{n=1}^N \bar{\Phi}(p_n, \bar{x}_n)(y_n - p_n) \right) \cdot \bar{\Phi}(p^*, \bar{x}^*) \right) \right| \leq \\ & \leq \left\| \sum_{n=1}^N \bar{\Phi}(p_n, \bar{x}_n)(y_n - p_n) \right\| \|\bar{\Phi}(p^*, \bar{x}^*)\| \leq C^2 \sqrt{N}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем (1.22).

Величина

$$\sum_{n=1}^N I_{(p^*, \bar{x}^*)}(p_n, \bar{x}_n)$$

является гладким аналогом числа пар (p_n, x_n) , находящихся в «мягкой» окрестности пары (p^*, \bar{x}^*) .

Неравенство (1.22) можно переписать в виде

$$\left| \frac{\sum_{n=1}^N I_{(p^*, \bar{x}^*)}(p_n, \bar{x}_n)(y_n - p_n)}{\sum_{n=1}^N I_{(p^*, \bar{x}^*)}(p_n, \bar{x}_n)} \right| \leq \frac{C^2 \sqrt{N}}{\sum_{n=1}^N I_{(p^*, \bar{x}^*)}(p_n, \bar{x}_n)}. \quad (1.23)$$

Оценка (1.23) имеет смысл при

$$\sum_{n=1}^N I_{(p^*, \bar{x}^*)}(p_n, \bar{x}_n) \gg \sqrt{N},$$

т.е. сходимость частот к прогнозам будет иметь место только в подпоследовательностях «статистически значимой» длины.

Представленный в этом разделе алгоритм универсального прогнозирования можно легко реализовать в виде компьютерной программы.

1.5. УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ТОРГОВАЯ СТРАТЕГИЯ

В этом разделе мы рассмотрим финансовое приложение метода построения хорошо калибруемых предсказаний. Алгоритмическая торговля (Algorithmic trading) – это формализованный процесс совершения торговых операций на финансовых рынках по заданному алгоритму с использованием специализированных компьютерных систем (торговых роботов).

Теоретико-информационный подход к построению универсальных торговых стратегий был основан Ковером и Ордентлихом, которые предложили алгоритм для построения “универсального” динамического портфеля акций. Свойство универсальности этого алгоритма заключается в том, что он является “наилучшим” в целом классе торговых стратегий. Алгоритм Ковера динамически перераспределяет деньги между несколькими акциями в зависимости от их текущей доходности так, что получаемый им доход оказывается асимптотически не меньшим, чем доход от любой постоянной стратегии вложения в эти акции. При этом не делается никаких стохастических предположений о поведении временных рядов цен акций. Полученные результаты имеют смысл при любом характере изменения цен акций.

Точная постановка и алгоритм Ковера будут приведены в рамках более общей теории, а в этом разделе мы приведем другой алгоритм подобного рода для алгоритмической торговли с одной акцией. Это алгоритм также будет давать асимптотически наибольший доход по сравнению с любой “не слишком сложной” торговой стратегией.

Данная стратегия будет использовать хорошо калибруемые прогнозы цен акции. Метод предсказания будет основан на комбинации метода построения рандомизированных предсказаний из раздела 1.3 и метода предсказаний с использованием ядер из раздела 1.4. В основе всего этого подхода лежит понятие калибруемости предсказаний, предложенное Дэвидом и ранее рассмотренное в разделе 1.2. Мы обобщим его для более широкого класса правил выбора.

Основной результат этого раздела – теорема 1.4 – утверждает, что предлагаемая в этом разделе торговая стратегия является универсальной – она является асимптотически наилучшей в классе всех стратегий, представленных

непрерывными функциями от входной информации. Подробно этот метод и соответствующие численные эксперименты представлены в статье Вьюгина и Трунова.

Предположим, что вещественные значения S_1, S_2, \dots , которые мы будем интерпретировать как цены некоторой акции, поступают в режиме онлайн. Мы также предполагаем, что они ограничены и нормированы так, что $0 \leq S_i \leq 1$ для всех i .

В процессе торговли на финансовом рынке трейдеры покупают и продают акции. Мы считаем, число C покупаемых или продаваемых единиц финансового инструмента может принимать любое вещественное значение. Допускается возможность покупать отрицательное число акций: при $C > 0$, купить $-C$ акций эквивалентно продаже C акций, продать $-C$ акций эквивалентно покупке C акций. Мы также допускаем, что каждый трейдер может одалживать деньги в неограниченном количестве.

Под стратегией мы понимаем некоторый алгоритм (может быть рандомизированный), который в начале каждого раунда i игры выдает число C_i единиц финансового инструмента, которое необходимо купить (если это число положительное или равное нулю) или продать (если оно отрицательное). В конце этого же раунда трейдер продает купленные единицы или покупает проданные в том же количестве, соответственно. Таким образом, за i -й раунд игры капитал трейдера увеличивается (уменьшается) на величину $C_i(S_i - S_{i-1})$.

Проведем сравнение двух типов торговых стратегий на финансовом рынке в виде протокола игры с двумя типами трейдеров: на шаге i *Трейдер M* использует рандомизированную стратегию – он покупает случайное число акций \tilde{M}_i , которое вычисляется некоторым рандомизированным алгоритмом; *Трейдер D* – представитель широкого класса трейдеров, он покупает $D(x_i)$ акций, где D – произвольная непрерывная функция, определенная на единичном отрезке $[0, 1]$, а x_i – число из отрезка $[0, 1]$, в котором закодирована входная информация и которое выдается трейдерам прежде чем они применят свои методы. Таким образом, C_i равно \tilde{M}_i для *Трейдера M* и равно $D(x_i)$ для *Трейдеров D* второго типа.

Вещественное число x_i , как и в разделе 1.4, будет также называться *сигналом* или *дополнительной информацией*. Число x_i принадлежит $[0, 1]$ и в нем может быть закодирована любая числовая информация. Например, это может быть даже будущая цена акции S_i .

Каждый *Трейдер D* использует на шаге i только информацию x_i – он покупает (или продает) $D(x_i)$ единиц акции. Стратегия этого типа будет называться *стационарной*.

Для *Трейдера M* данная игра является игрой с полной информацией. Алгоритм *Трейдера M* будет использовать все значения S_{j-1} и x_j при $j \leq i$.

Прошлые цены акции, сигналы и сделанные предсказания также можно закодировать в сигнале x_i , поэтому *Трейдер D* может использовать эту информацию. Здесь имеется ограничение – функция D должна быть непрерывной.

Рандомизация. Стратегия *Трейдера M* является рандомизированной. Напомним метод рандомизации из раздела 3.3. Пусть K – произвольное натуральное число. Разбиваем интервал $[0,1]$ на K равных подынтервалов длины $\Delta = 1/K$ с помощью рациональных точек $v_i = i\Delta$, где $i = 0, 1, \dots, K$. Пусть V – множество этих точек. Любое число $p \in [0,1]$ может быть представлено в виде линейной комбинации двух граничных точек подынтервала, содержащего p :

$$p = \sum_{v \in V} w_v(p)v = w_{v_{i-1}}(p)v_{i-1} + w_{v_i}(p)v_i, \quad (1.24)$$

где $p \in [v_{i-1}, v_i]$, $i = \lfloor p/\Delta \rfloor + 1$, $w_{v_{i-1}}(p) = 1 - (p - v_{i-1})/\Delta$ и $w_{v_i}(p) = (v_i - p)/\Delta$. Определим $w_v(p) = 0$ для всех остальных $v \in V$.

Пусть \tilde{p} равно v_{i-1} с вероятностью $w_{v_{i-1}}(p)$ и равно v_i с вероятностью $w_{v_i}(p)$.

Обозначим $\vec{w}^-(p) = (w_v(p) : v \in V)$ – вектор этих вероятностей. Говорим, что мы округляем число p до v_{i-1} с вероятностью $w_{v_{i-1}}(p)$ и до v_i с вероятностью $w_{v_i}(p)$.

Для $z, z^0 \in [0,1]$ определим скалярное произведение $K(z, z^0) = (\vec{w}^-(z) \cdot \vec{w}^-(z^0))$, которое является ядром.

В дальнейшем мы будем рассматривать переменную точность округления, а именно, будет задана последовательность параметров $\Delta_1 > \Delta_2 > \dots \rightarrow 0$. На каждом шаге конструкции мы будем округлять числа вышеуказанным способом с точностью до одного из таких Δ_i . Такой способ случайного округления будет называться *последовательной рандомизацией*.

Универсальная торговая стратегия. Определим универсальную торговую стратегию в виде последовательности случайных величин \tilde{M}_i , $i = 1, 2, \dots$. Для того, чтобы построить такую стратегию, на каждом раунде i вычисляем прогноз p_i будущего значения цены согласно алгоритму, который будет приведен на рис. 1.4 ниже. Рандомизирует это число, т.е., определим соответствующую случайную величину \tilde{p}_i .

Подчеркнем, что протоколе, представленном на рис. 1.3, реализация случайной величины \tilde{M}_i скрыта от Рынка когда он анонсирует цену S_i . Рынок может знать метод рандомизации и вычислять вероятности событий $\tilde{M}_i = 1$ и $\tilde{M}_i = -1$.

Мы также рандомизируем предыдущее (уже известное трейдерам) значение цены S_{i-1} , т.е., определим соответствующую случайную величину \tilde{S}_{i-1} .

После всех этих приготовлений, определим \tilde{M}_i согласно протоколу, приведенному на рис. 1.3.

Говорим, что в случае $\tilde{M}_i > 0$ *Трейдер M* переходит на длинную позицию; он переходит на короткую позицию, в противном случае. То же самое относится к *Трейдеру D*.⁴

⁴ Длинная позиция на финансовом рынке – это приобретение ценных бумаг в начале раунда игры с целью их продажи в конце раунда в расчете на увеличение их стоимости.

Полагаем $\mathcal{K}_0^D = 0$ и $\mathcal{K}_0^M = 0$.

FOR $i = 1, 2, \dots$

Рынок анонсирует сигнал $x_i \in [0, 1]$.

Определим точность случайного округления на шаге i : $\Delta = \Delta_s$, где $n_s < i \leq n_{s+1}$ (последовательности n_s и Δ_s , $s = 1, 2, \dots$, определены ниже после неравенства (1.47) в доказательстве Теоремы 1.5 далее).

Вычисляем прогноз p_i с помощью алгоритма, приводимого ниже на рис. 1.4, с входным параметром Δ .

Получаем рандомизированное значение прогноза: \tilde{p}_i .

Получаем рандомизированное значение цены: \tilde{S}_{i-1} .

Треjder M покупает \tilde{M}_i акций по цене \tilde{S}_{i-1} за каждую, где

$$\tilde{M}_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}, \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Треjder D покупает $D(x_i)$ акций по цене \tilde{S}_{i-1} за каждую, где D – произвольная непрерывная функция на $[0, 1]$.

Рынок объявляет цену S_i акции.

Треjder M продает \tilde{M}_i акций по цене S_i и обновляет значение своего кумулятивного выигрыша: $\mathcal{K}_i^M = \mathcal{K}_{i-1}^M + \tilde{M}_i(S_i - S_{i-1})$.

Треjder D продает $D(x_i)$ акций по цене S_i и обновляет значение своего кумулятивного выигрыша: $\mathcal{K}_i^D = \mathcal{K}_{i-1}^D + D(x_i)(S_i - S_{i-1})$.

ENDFOR

Рис. 1.3: Протокол игры

Мы допускаем, что трейдеры могут одалживать деньги и акции в неограниченном количестве. По окончании серии раундов игры мы оценим выигрыш (или долг) каждого из трейдеров.

Центральным моментом стратегии \tilde{M}_i является рандомизированный алгоритм для вычисления предсказаний \tilde{p}_i . Этот алгоритм будет представлен на рис. 1.4.

Треjder M может покупать или продавать только одну акцию. Поэтому для сравнения эффективности стратегий трейдеров необходимо нормировать стратегию *Трейдера D*. Рассмотрим норму $\|D\|_+$, где D – произвольная непрерывная функция определенная на единичном отрезке $[0, 1]$.

Далее мы будем использовать величину $\|D\|_+ = \max\{1, \|D\|_\infty\}$ в качестве нормирующего множителя.

Предполагаем, что значения $S_1, S_2, \dots \in [0, 1]$ и $x_1, x_2, \dots \in [0, 1]$ подаются последовательно в режиме онлайн в рамках протокола, представленного на рис 1.3.

Основной результат этого раздела представим в виде теоремы 1.4, которая утверждает, что, с вероятностью 1, средний выигрыш универсальной торго-

вой стратегии асимптотически не меньше чем средний выигрыш любой стационарной торговой стратегии, отнесенный на одну акцию:

Теорема 1.4. Можно построить алгоритм для вычисления предсказаний такой, что для любой непрерывной функции D асимптотическое соотношение:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\mathcal{K}_n^M - \|D\|_+^{-1} \mathcal{K}_n^D) \geq 0 \quad (1.25)$$

выполнено почти всюду относительно распределения вероятностей, порожденного методом рандомизации.

Заметим, что требование (1.25) для всех D эквивалентно требованию выполнения неравенства:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\mathcal{K}_n^M - \mathcal{K}_n^D) \geq 0$$

для всех D таких, что $\|D\|_\infty \leq 1$.

Поскольку условие (1.25) асимптотической оптимальности *Трейдера M* выполнено и относительно тривиальной стратегии: $D(x) = 0$ для всех x , эта стратегия является также и *асимптотически безрисковой*:

Следствие 1.2. Универсальная стратегия Трейдера M является асимптотически безрисковой:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{K}_n^M}{n} \geq 0$$

выполнено почти всюду.

1.6. КАЛИБРУЕМОСТЬ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

В этом разделе мы приведем и изучим алгоритм для вычисления хорошо калибруемых предсказаний, которые будут использоваться для определения торговой стратегии \tilde{M}_i .

Мы рассмотрим правила выбора подпоследовательностей более общего вида чем те, которые рассматривались в разделах 1.2 и 1.3. Для произвольного подмножества $S \subseteq [0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ определим

$$I_S(p, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (p, x) \in S, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $p, x \in [0, 1]$. В разделе мы будем использовать множества типа $S = \{(p, x) : p > x\}$ и $S = \{(p, x) : p \leq x\}$.

Гильбертовы пространства, порожденные воспроизводящие ядром. В качестве первого этапа доказательства теоремы 1.4 мы покажем, что для произвольного гильбертова пространства RKHS можно определить стратегию \tilde{M}_i , которая является универсальной для класса всех стационарных стра-

тегий, задаваемых функциями из этого пространства. После этого, используя универсальное пространство RKHS, мы перенесем свойство универсальности на произвольные стратегии, задаваемые непрерывными функциями.

Напомним, что гильбертово пространство F функций, определенных на множестве X называется RKHS на X , если функционал $f \rightarrow f(x)$ является непрерывным для каждого $x \in X$. Обозначаем $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ норму на пространстве F .

Также определяется $c_{\mathcal{F}}(x) = \sup_{\|f\|_{\mathcal{F}} \leq 1} |f(x)|$.

Константа вложения пространства F определяется: $c_{\mathcal{F}} = \sup_x c_{\mathcal{F}}(x)$.

Мы будем рассматривать RKHS F на $X = [0,1]$ с конечной константой вложения: $c_{\mathcal{F}} < \infty$. Важный пример такого пространства RKHS – соболевское пространство $F = H^1([0,1])$, которое состоит из абсолютно непрерывных функций $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ с $\|f\|_{\mathcal{F}} < \infty$, где $\|f\|_{\mathcal{F}} = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt + \int_0^1 (f'(t))^2 dt}$.

Для такого пространства $c_{\mathcal{F}} = \sqrt{\coth 1} = \sqrt{\frac{1+e^{-2}}{1-e^{-2}}}$.

Пусть F – некоторое пространство RKHS на X со скалярным произведением $(f \cdot g)$ для $f, g \in F$. По теореме Рисса–Фишера для любого $x \in X$ существует $k_x \in F$ такое, что $f(x) = (k_x \cdot f)$ для всех $f \in F$. Тогда воспроизводящее ядро определяется как $K(x,y) = (k_x \cdot k_y)$.

В обратную сторону, любое ядро $K(x,y)$ определяет некоторое каноническое пространство RKHS F , а также отображение $\Phi: X \rightarrow F$, так что $K(x,y) = (\Phi(x) \cdot \Phi(y))$.

Пусть F – некоторое гильбертово пространство RKHS на $[0,1]$ с конечной константой вложения $c_{\mathcal{F}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ – соответствующая норма и $R(x,x^0)$ – ядро на $[0,1]$.

Предполагаем, что последовательность $S_1, S_2, \dots \in [0,1]$ вещественных чисел и последовательность $x_1, x_2, \dots \in [0,1]$ сигналов поступают последовательно согласно протоколу, представленному на рис. 1.3.

Теорема 1.5. Пусть $\epsilon > 0$. Можно построить алгоритм для вычисления прогнозов p_1, p_2, \dots такой, что выполнены следующие условия:

- для любого $\delta > 0$, для любого подмножества $S \subseteq [0,1]^2$ и для любого n , с вероятностью не менее $1 - \delta$,

$$\left| \sum_{i=1}^n I_S(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) \right| \leq \leq 18n^{3/4+\epsilon}(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{1/4} + \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}} \quad (1.26)$$

где $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots$ – соответствующие рандомизации p_1, p_2, \dots и $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots$ – рандомизации чисел z_1, z_2, \dots , где $z_i = S_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$;

• для любого $D \in \mathcal{F}$

$$\left| \sum_{i=1}^n D(x_i)(S_i - p_i) \right| \leq \|D\|_{\mathcal{F}} \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n} \quad (1.27)$$

для всех n .

• для любого подмножества $S \subseteq [0, 1]^2$, с вероятностью 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_S(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) = 0 \quad (1.28)$$

Доказательство. План доказательства следующий. Сначала по заданному $\Delta > 0$ мы модифицируем рандомизированный алгоритм из раздела 1.3 и объединим его с алгоритмом из раздела 1.4. Прогнозы модифицированного алгоритма будут калиброваться относительно расширенных правил выбора на последовательности S_1, S_2, \dots с точностью до Δ . После этого, мы применим этот алгоритм в условиях переменной точности округления: $\Delta \rightarrow 0$, так что будут выполнены условия теоремы.

Предложение 1.1. *При предположениях теоремы 1.5 можно построить алгоритм для вычисления прогнозов такой, что выполнено неравенство (1.27) для всех D из RKHS \mathcal{F} и для всех n . Также для любого $\delta > 0$, любого $S \subseteq [0, 1]^2$ и любого n , с вероятностью не менее $1 - \delta$, будет выполнено:*

$$\left| \sum_{i=1}^n I_S(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) \right| \leq \Delta n + 2\sqrt{\frac{n(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)}{\Delta}} + \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}$$

Доказательство. Предположим, что детерминированные прогнозы p_1, \dots, p_{n-1} уже определены (полагаем $p_1 = 1/2$). Вычислим теперь детерминированный прогноз p_n и случайно округлим его до \tilde{p}_n .

Разбиение $V = \{v_0, \dots, v_K\}$ и вероятности случайного округления были определены по (1.24). Далее, мы округляем детерминированный прогноз p_n до v_{i-1} с вероятностью $w_{v_{i-1}}(p_n)$ и до v_i с вероятностью $w_{v_i}(p_n)$. Мы также случайным образом округляем $z_n = S_{n-1}$ до v_{s-1} с вероятностью $w_{v_{s-1}}(z_n)$ и до v_s с вероятностью $w_{v_s}(z_n)$, где $z_n \in [v_{s-1}, v_s]$.

Пусть $W_v(p_n, z_n) = w_{v^1}(p_n)w_{v^2}(z_n)$, где $v = (v^1, v^2)$ and $v^1, v^2 \in V$, и $W(p_n, z_n) = (W_v(p_n, z_n) : v \in V^2)$ – вектор, задающий вероятностное распределение на $V^2 = V \times V$. Определим соответствующее ядро: $K(p, z, p^0, z^0) = (W(p, z) \cdot W(p^0, z^0))$.

По определению ядро $R(x, x^0)$ можно представить в виде скалярного произведения в пространстве признаков: $R(x, x^0) = (\Phi(x) \cdot \Phi(x^0))$. Рассмотрим функцию

$$U_n(p) = \sum_{i=1}^{n-1} (K(p, z_n, p_i, z_i) + R(x_n, x_i))(S_i - p_i). \quad (1.29)$$

Алгоритм для вычисления детерминированных предсказаний p_1, p_2, \dots представлен на рис. 1.4

Продолжим доказательство предложения 1.1. Пусть прогнозы p_1, p_2, \dots вычислены с помощью этого алгоритма (см. рис. 1.4).

Определим $p_1 = 1/2$. Инициализируем параметр Δ .

FOR $n = 1, 2, \dots$

Определим

$$U_n(p) = \sum_{i=1}^{n-1} (K_1(p, x_n, p_i, x_i) + K_2(z_n, z_i))(S_i - p_i).$$

Если $U_n(p) > 0$ для всех $p \in [0, 1]$, то определим $p_n = 1$;

Если $U_n(p) < 0$ для всех $p \in [0, 1]$, то определим $p_n = 0$.

В противном случае, пусть p_n есть какой-либо корень уравнения $U_n(p) = 0$ (такой корень существует по теореме о промежуточном значении).

ENDFOR

Рис. 1.4: Алгоритм для вычисления детерминированных предсказаний

По определению прогноза p_n в алгоритме, представленном на рис. 1.4, для любого n и исхода S_n выполнено $U(p_n)(S_n - p_n) \leq 0$.

Тогда, как легко видеть, для любого N :

$$\begin{aligned}
 0 &\geq \sum_{n=1}^N U_n(p_n)(S_n - p_n) = \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{n-1} (K(p_n, z_n, p_i, z_i) + R(x_n, x_i)) \times \\
 &\quad \times (S_i - p_i)(S_n - p_n) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N K(p_n, z_n, p_i, z_i)(S_i - p_i)(S_n - p_n) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (K(p_n, z_n, p_n, z_n)(S_n - p_n))^2 + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N R(x_n, x_i)(S_i - p_i)(S_n - p_n) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (R(x_n, x_n)(S_n - p_n))^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \left\| \sum_{n=1}^N W(p_n, z_n)(S_n - p_n) \right\|^2 - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \|W(p_n, z_n)\|^2 (S_n - p_n)^2 + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left\| \sum_{n=1}^N \Phi(x_n)(S_n - p_n) \right\|_{\mathcal{F}}^2 - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \|\Phi(x_n)\|_{\mathcal{F}}^2 (S_n - p_n)^2
 \end{aligned}$$

Здесь в строке (1.31), $\|\cdot\|$ – евклидова норма, а в строке (1.32), $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ – норма на \mathcal{F} .

Так как $(S_n - p_n)^2 \leq 1$ для всех n и

$$\begin{aligned}
 \|W(p_n, z_n)\|^2 &= \sum_{v \in V^2} (W_v(p_n, z_n))^2 \leq \\
 &\leq \sum_{v \in V^2} W_v(p_n, z_n) = 1,
 \end{aligned}$$

вычитаемая сумма в строке (1.31) ограничена сверху числом N .

Так как $\|\Phi(x_n)\|_{\mathcal{F}} = c_{\mathcal{F}}(x_n)$ и $c_{\mathcal{F}}(x) \leq c_{\mathcal{F}}$ для всех x , вычитаемая сумма в строке (1.32) ограничена сверху величиной $c_{\mathcal{F}}^2 N$. В результате получаем:

$$\left\| \sum_{n=1}^N W(p_n, z_n)(S_n - p_n) \right\| \leq \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)N} \quad (1.33)$$

$$\left\| \sum_{n=1}^N \Phi(x_n)(S_n - p_n) \right\|_{\mathcal{F}_n} \leq \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)N} \quad (1.34)$$

для всех N .

Обозначим:

$$\bar{\mu}_n = \sum_{i=1}^n W(p_i, z_i)(S_i - p_i).$$

По (3.33), $\|\bar{\mu}_n\| \leq \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n}$ для всех n .

Пусть $\mu_n^- = (\mu_n(v) : v \in V^2)$. По определению для любого v :

$$\mu_n(v) = \sum_{i=1}^n W_v(p_i, z_i)(S_i - p_i). \quad (1.35)$$

Вставляем величину $I(v)$ в сумму (1.35), где I – характеристическая функция произвольного подмножества $S \subseteq [0, 1]^2$, суммируем по $v \in V^2$ и изменяем порядок суммирования. Применяем неравенство Коши–Буняковского для векторов $\bar{I} = (I(v) : v \in V^2)$, $\mu_n^- = (\mu_n(v) : v \in V^2)$ в евклидовой норме и получаем:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \sum_{v \in V^2} W_v(p_i, z_i) I(v)(S_i - p_i) \right| = \\ & = \left| \sum_{v \in V^2} I(v) \sum_{i=1}^n W_v(p_i, z_i)(S_i - p_i) \right| = \\ & = |\langle \bar{I}, \bar{\mu}_n \rangle| \leq \|\bar{I}\| \cdot \|\bar{\mu}_n\| \leq \sqrt{|V^2|(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n} \end{aligned} \quad (1.36)$$

для всех n , где $|V^2| = (1/\Delta + 1)^2 \leq 4/\Delta^2$ – число элементов разбиения.

Пусть \tilde{p}_i – случайная величина, принимающая значения $v \in V$ с вероятностями $w_v(p_i)$. Напомним, что \tilde{z}_i – случайная величина, принимающая значения $v \in V$ с вероятностями $w_v(z_i)$.

Пусть $S \subseteq [0, 1]^2$ и I – характеристическая функция этого множества. Для любого i математическое ожидание случайной величины $I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)$ равно

$$\begin{aligned} & E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) = \\ & = \sum_{v \in V^2} W_v(p_i, z_i) I(v)(S_i - v^1), \end{aligned} \quad (1.37)$$

где $v = (v^1, v^2)$.

Используя следствие из неравенства Хефдинга – Азумы мы получаем, что для любых $\delta > 0$, S и n , с вероятностью $1 - \delta$:

$$\left| \sum_{i=1}^n I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) - \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}. \quad (1.38)$$

По определению детерминированного прогноза, суммы:

$$\sum_{v \in V^2} W_v(p_i, z_i) I(v)(S_i - p_i) \text{ и } \sum_{v \in V^2} W_v(p_i, z_i) I(v)(S_i - v^1)$$

различаются не более чем на Δ для всех i , где $v = (v^1, v^2)$. Суммируя (1.37) по $i = 1, \dots, n$ и используя неравенство (1.36), получаем:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| = \\ & = \left| \sum_{i=1}^n \sum_{v \in V^2} W_v(p_i, z_i) I(v)(S_i - v^1) \right| \leq \\ & \leq \Delta n + 2\sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n/\Delta^2} \end{aligned} \quad (1.39)$$

для всех n .

По (1.38) и (1.39) для любых S и n , имеем с вероятностью $1 - \delta$:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) \right| \leq \\ & \leq \Delta n + 2\sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n/\Delta^2} + \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

По неравенству Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^N D(x_n)(S_n - p_n) \right| = \\ & = \left| \sum_{n=1}^N (S_n - p_n)(D \cdot \Phi(x_n)) \right| = \\ & = \left| \left(\sum_{n=1}^N (S_n - p_n)\Phi(x_n) \cdot D \right) \right| \leq \\ & \leq \left\| \sum_{n=1}^N (S_n - p_n)\Phi(x_n) \right\|_{\mathcal{F}} \cdot \|D\|_{\mathcal{F}} \leq \\ & \leq \|D\|_{\mathcal{F}} \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)N}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Переходим теперь к заключительному этапу доказательства теоремы 1.5.

Выражение $\Delta n + 2\sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n/\Delta^2}$ из оценок (1.39) и (1.40) принимает свое минимальное значение при $\Delta = \sqrt{2}(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{1}{4}}$. В этом случае, правая часть неравенства (1.39) равна

$$\Delta n + 2\sqrt{n(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)/\Delta^2} = 2\Delta n = 2\sqrt{2}(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}}n^{\frac{3}{4}}. \quad (1.41)$$

Далее, будем использовать верхнюю оценку $2\Delta n$ для (1.39).

Для получения оценки (3.26) выберем монотонную последовательность чисел $\Delta_1 > \Delta_2 > \dots$, так что $\Delta_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Также будем использовать возрастающую последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots$. Для произвольного s на шагах $n_s \leq n < n_{s+1}$ мы будем использовать для рандомизации разбиение интервала $[0,1]$ на подинтервалы длины Δ_s . Начинаем наши последовательности с $n_1 = 1$ и $\Delta_1 = 1$.

Определим числа n_2, n_3, \dots так, что неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq 4(s+1)\Delta_s n \quad (1.42)$$

выполнено для всех $n_s \leq n \leq n_{s+1}$ и для всех $s > 1$.

Мы определим эту последовательность с помощью метода математической индукции по s . Допустим, что n_s ($s > 1$) уже определено так, что неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq 4s\Delta_{s-1}n \quad (1.43)$$

выполнено для всех $n_{s-1} \leq n \leq n_s$. Допустим, что также выполнено дополнительное неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n_s} E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq 4s\Delta_s n_s \quad (1.44)$$

Определим n_{s+1} . Рассмотрим предсказания p_i (\tilde{p}_i – их рандомизированные значения), вычисленные с помощью определенного выше алгоритма при дискретизации $\Delta = \Delta_{s+1}$. Первые n_s из этих предсказаний не будем использовать (точнее, они появляются только в оценках (1.45) и (1.46); обозначим их $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_s}$). Добавим все предсказания p_i для $i > n_s$ к предсказаниям, полученным на предыдущих шагах индукции. Пусть n_{s+1} такое, что выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=1}^{n_{s+1}} E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{n_s} E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| + \\
 & + \left| \sum_{i=n_s+1}^{n_{s+1}} E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) + \sum_{i=1}^{n_s} E(I(\hat{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \hat{p}_i)) \right| + \\
 & + \left| \sum_{i=1}^{n_s} E(I(\hat{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \hat{p}_i)) \right| \leq 4(s+1)\Delta_{s+1}n_{s+1}. \quad (1.45)
 \end{aligned}$$

Здесь первая сумма из правой части неравенства (1.45) ограничена $4s\Delta_s n_s$ по предположению индукции (1.44). Вторая и третья суммы ограничены величинами $2\Delta_{s+1}n_{s+1}$ и $2\Delta_{s+1}n_s$, соответственно, где $\Delta = \Delta_{s+1}$ определена так, что выполнено (1.41).

Это следует из (1.39) и выбора n_s .

Тогда предположение индукции (1.44) выполнено при

$$n_{s+1} \geq \frac{2s\Delta_s + \Delta_{s+1}}{\Delta_{s+1}(2s+1)} n_s.$$

Подобным образом получаем

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{n_s} E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| + \\
 & + \left| \sum_{i=n_s+1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) + \sum_{i=1}^{n_s} E(I(\hat{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \hat{p}_i)) \right| + \\
 & + \left| \sum_{i=1}^{n_s} E(I(\hat{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \hat{p}_i)) \right| \leq 4(s+1)\Delta_s n \quad (1.46)
 \end{aligned}$$

при $n_s < n \leq n_{s+1}$. Здесь первая сумма из правой части неравенства также ограничена: $4s\Delta_s n_s \leq 4s\Delta_s n$ по предположению индукции (1.44). Вторая и третья суммы ограничены $2\Delta_{s+1}n \leq 2\Delta_s n$ и $2\Delta_{s+1}n_s \leq 2\Delta_s n$, соответственно. Это следует из (1.39) и выбора Δ_s . Индуктивное предположение (1.43) выполнено.

По (1.42) для произвольного s выполнено

$$\left| \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq 4(s+1)\Delta_s n \quad (1.47)$$

для всех $n > n_s$, если Δ_s удовлетворяет условию $\Delta_{s+1} \leq \Delta_s(1 - \frac{1}{s+2})$ для всех s .

Покажем, что последовательности n_s и Δ_s удовлетворяющие этим условиям, существуют.

Пусть $\epsilon > 0$ и $M = \lceil 2/\epsilon \rceil$, где $\lceil r \rceil$, есть наименьшее целое число больше или равное r .

Определим $n_s = (s + M)^M$ и $\Delta_s = \sqrt{2}(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}} n_s^{-\frac{1}{4}}$. Нетрудно проверить, что в этом случае все условия, наложенные на n_s и Δ_s , выполнены для всех достаточно больших s ; пусть они будут выполнены при всех $s > s_0$.

Переопределим $n_i = n_{s_0}$ для всех $1 \leq i \leq s_0$. Заметим, что неравенства (1.43) и (1.44) выполнены для таких n_i тривиальным образом. В оценке (1.43) для всех $n_s \leq n < n_{s+1}$ выполнено

$$\begin{aligned}
 & 4(s+1)\Delta_s n \leq 4(s+M)\Delta_s n_{s+1} = \\
 & = 4\sqrt{2}(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}}(s+M)(s+M+1)^M (s+M)^{-\frac{M}{4}} \leq \\
 & \leq 18(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}} n_s^{\frac{3}{4} + 2/M} \leq \\
 & \leq 18(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}} n_s^{\frac{3}{4} + \epsilon}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\left| \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq 18(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{1/4} n^{3/4 + \epsilon} \quad (1.48)$$

для всех n .

Положим $V_i = I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) - E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i))$ и $\gamma = \sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{2}{\delta}}$, где $\delta > 0$. Здесь E – символ условного математического ожидания относительно $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{i-1}$. Случайные величины V_i образуют мартингал-разность относительно последовательности $\tilde{p}_1, \tilde{z}_1, \tilde{p}_2, \tilde{z}_2, \dots$

Согласно неравенству Хефдинга–Азумы для любого $\gamma > 0$:

$$P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \right| > \gamma \right\} \leq 2e^{-2n\gamma^2} \quad (1.49)$$

для всех n .

Комбинируя (1.48) с (1.49), получим, что для любых $\delta > 0$, S и n , с вероятностью $1 - \delta$, выполнено

$$\left| \sum_{i=1}^n I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) \right| \leq 18(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{1/4} n^{3/4 + \epsilon} + \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}.$$

Соотношение (1.28) может быть получено из неравенства (1.26) с помощью леммы Бореля–Кантелли. Теорема 1.5 доказана.

1.7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4

На каждом шаге i вычисляем детерминированный прогноз p_i согласно алгоритму, приведенному в разделе 3.5.1, и, после этого, переходим к его рандомизации \tilde{p}_i используя параметры:

$\Delta = \Delta_s = \sqrt{2}(c_{\mathcal{F}} + 1)^{\frac{1}{4}}(s+M)^{-\frac{1}{4}}$ и $n_s = (s+M)^M$, где $n_s \leq i < n_{s+1}$. Пусть также \tilde{S}_{i-1} – рандомизированная прошлая цена S_{i-1} финансового инструмента. В теореме 1.5, $z_i = S_{i-1}$ и $\tilde{z}_i = \tilde{S}_{i-1}$.

При данном методе рандомизации имеют место следующие верхние оценки;

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=1}^n I(\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1})(\tilde{S}_{i-1} - S_{i-1}) \right| \leq \sum_{t=0}^s (n_{t+1} - n_t) \Delta_t \leq \\
 & \leq 4(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}} n_s^{\frac{3}{4}} \leq 4(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}} n^{\frac{3}{4}}, \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

где $n_s \leq n < n_{s+1}$.

Пусть $D(x)$ – произвольная функция из RKHS \mathcal{F} . Очевидным образом, оцен-

ка (1.50) верна, если мы заменим $I(\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1})$ на $\|D\|_+^{-1}D(x_i)$. Для простоты, мы приведем оценки для случая, когда $D(x) > 0$ для всех x и

$$\tilde{M}_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Используем обозначения:

$$(3.51)$$

$$\nu_1(n) = 4(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}} n^{\frac{3}{4}},$$

$$(3.52)$$

$$\nu_2(n) = 18n^{\frac{3}{4}+\epsilon}(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}.$$

$$(3.53)$$

$$\nu_3(n) = \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n}$$

Далее все суммы предполагаются для $i = 1, \dots, n$. Мы также используем неравенство Хефдинга–Азумы.

Для произвольного $\delta > 0$, с вероятностью $1 - \delta$, имеет место следующая цепь равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n^M &= \sum_{i=1}^n \tilde{M}_i(S_i - S_{i-1}) = \sum_{\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}} (S_i - S_{i-1}) = \\ &= \sum_{\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}} (S_i - \tilde{p}_i) + \sum_{\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}} (\tilde{p}_i - \tilde{S}_{i-1}) + \sum_{\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}} (\tilde{S}_{i-1} - S_{i-1}) \not\geq 3.54 \end{aligned}$$

$$\geq \sum_{\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}} (\tilde{p}_i - \tilde{S}_{i-1}) - \nu_1(n) - \nu_2(n) \not\geq 3.55$$

$$\geq \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(\tilde{p}_i - \tilde{S}_{i-1}) - \nu_1(n) - \nu_2(n) =$$

$$= \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(p_i - S_{i-1}) + \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(\tilde{p}_i - p_i) -$$

$$- \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(\tilde{S}_{i-1} - S_{i-1}) - \nu_1(n) - \nu_2(n) \not\geq 3.56$$

$$\geq \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(p_i - S_{i-1}) - 3\nu_1(n) - \nu_2(n) \not\geq 3.57$$

$$= \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(S_i - S_{i-1}) -$$

$$- \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(S_i - p_i) - 3\nu_1(n) - \nu_2(n) \not\geq 3.58$$

$$\geq \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(S_i - S_{i-1}) -$$

$$- 3\nu_1(n) - \nu_2(n) - \|D\|_+^{-1} \|D\|_{\mathcal{F}} \nu_3(n) =$$

$$= \|D\|_+^{-1} \mathcal{K}_n^D - 3\nu_1(n) - \nu_2(n) - \|D\|_+^{-1} \|D\|_{\mathcal{F}} \nu_3(n).$$

При переходе от (1.54) к (1.55) были использованы неравенство (1.26) из теоремы 1.5 и оценка (1.50); по этой причине, были вычтены члены (1.51) и (1.52). При переходе от (1.56) к (1.57) дважды была применена оценка (1.50); по этой причине член (1.50) был вычтен дважды. При переходе от (1.57) к (1.58) было использовано неравенство (1.27) из теоремы 1.5; таким образом,

был вычтен член (1.53).

Таким образом, существует такая константа $c > 0$, что для любого $\delta > 0$ и для любого n , с вероятностью $1 - \delta$, выполнено

$$\mathcal{K}_n^M \geq \|D\|_+^{-1} \mathcal{K}_n^D - cn^{\frac{3}{4}+\epsilon} - \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}. \quad (1.59)$$

Неравенство (1.25) будет следовать из (1.59). Для доказательства используем лемму Бореля-Кантелли. Эта лемма утверждает, что если для некоторой последовательности событий A_n ряд $\sum P(A_n)$ сходится, то вероятность того, что событие A_n происходит для бесконечно многих n равна 0.

Для того, чтобы применить эту лемму, вернемся к исходной форме неравенства Хефдинга. Обозначим $\gamma = \sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{2}{\delta}}$. Тогда $\delta = 2e^{-2n\gamma^2}$. Перепишем (1.59) в форме:

$$\frac{1}{n} \mathcal{K}_n^M - \|D\|_+^{-1} \frac{1}{n} \mathcal{K}_n^D \geq -cn^{-\frac{1}{4}+\epsilon} - \gamma. \quad (1.60)$$

Согласно (1.59), для любых n и $\gamma > 0$, неравенство (1.60) не выполнено с вероятностью $2e^{-2n\gamma^2}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\gamma^2}$ сходится при $\gamma > 0$, по лемме Бореля-Кантелли, при фиксированном $\gamma > 0$, неравенство (1.60) может нарушаться не более чем для конечного числа различных n . Отсюда следует, что событие:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\mathcal{K}_n^M - \|D\|_+^{-1} \mathcal{K}_n^D) \geq 0$$

выполнено почти всюду.

Теорема 1.4 доказана для произвольной неотрицательной функции $D \in F$. Доказательство утверждения для произвольной неположительной функции $D \in F$, а также для функций общего вида, аналогично.

Мы расширим полученные асимптотические оценки для любой непрерывной функции $D(x)$ с помощью универсального ядра и соответствующего канонического RKHS.

Гильбертово пространство RKHS F на X называется *универсальным*, если X – компактное метрическое пространство и любая непрерывная функция f на X может быть аппроксимирована в метрике $\|\cdot\|_{\infty}$ функцией из F с произвольной точностью: для любого $\epsilon > 0$ существует $D \in F$ такая, что $\sup_{x \in X} |f(x) - D(x)| \leq \epsilon$

Мы будем использовать $X = [0, 1]$. Соболевское пространство $F = H^1([0, 1])$ является универсальным RKHS.

Существование универсального RKHS на $[0, 1]$ позволяет получить полную версию теоремы 1.4:

Можно построить алгоритм для вычисления детерминированных предсказаний p_i и метод последовательной рандомизации такие, что соответствующая рандомизированная торговая стратегия \tilde{M}_i выигрывает на одну единицу финансового инструмента не меньше, чем любая нетривиальная непрерывная стационарная стратегия f . Точнее неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\mathcal{K}_n^M - \|f\|_+^{-1} \mathcal{K}_n^f) \geq 0 \quad (1.61)$$

выполнено почти всюду относительно распределения вероятностей, порожденного последовательной рандомизацией.

Этот результат непосредственно следует из неравенства (3.59) и возможности как угодно точно аппроксимировать любую непрерывную функцию f на $[0, 1]$ с помощью функции D из универсального (соболевского) RKHS F .

Торговая стратегия M_i , удовлетворяющая (1.61), называется *универсально состоятельной*.

Заметим, что свойство универсальной состоятельности (1.61) является асимптотическим и ничего не утверждает о скорости сходимости в случае произвольной непрерывной функции f . Оценка скорости сходимости (1.59) была получена для функций из более специальных пространств RKHS.

2. ЭЛЕМЕНТЫ СРАВНИТЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Задача принятия правильного рационального решения является центральной в науке и практике. Решение принимается на основе некоторых наблюдаемых данных. Как и в предыдущей главе, мы будем рассматривать задачу прогнозирования параметров какого-либо процесса. Только теперь мы будем оценивать правильность наших прогнозов руководствуясь иными принципами. Мы также не будем использовать никаких предположений о природе механизма генерации прогнозируемой последовательности.

Правильный прогноз или правильное решение ведут к меньшим потерям, чем неправильные. При традиционном статистическом подходе мы оцениваем потери при наших прогнозах в сравнении с некоторой идеальной моделью принятия правильных решений, которая обычно основана на некоторой статистической модели, описывающей наблюдаемые данные. При традиционном подходе сначала оцениваются параметры статистической модели на основе наблюдений, а потом производится прогноз на основе этой модели при оцененных параметрах.

При сравнительном подходе вместо одной идеальной модели рассматривается набор возможных моделей, которые называются конкурирующими экспертными стратегиями, или просто, экспертами. Множество таких экспертных стратегий может быть конечным или бесконечным и даже несчетным. Используя исходы, поступающие в режиме онлайн, экспертные стратегии производят прогнозы будущего исхода. Прогнозирующий алгоритм может наблюдать прогнозы конкурирующих экспертных стратегий и оценивать их эффективность в прошлом. После этого алгоритм делает свой прогноз.

Результаты прогнозов нашего алгоритма сравниваются с результатами прогнозов экспертных алгоритмов. Обычно производится сравнение потерь нашего алгоритма за некоторый период прогнозирования с потерями наилучшего на ретроспективе экспертного алгоритма.

Сравнение может производиться как в наихудшем случае, а так же в среднем, если наш алгоритм использует рандомизацию. Заметим, что распределение вероятностей, которое использует рандомизированный алгоритм, является внутренним вспомогательным распределением алгоритма; оно не имеет

никакого отношения к источнику, генерирующему исходы. Мы сами генерируем случайные числа для нашего алгоритма.

Обсудим также типы процессов, генерирующих данные, для которых будут рассматриваться наши методы прогнозирования. Поведение некоторых процессов не зависит от прогнозов предсказателя. Такие процессы часто рассматриваются в классической механике, физике. Например, погода не зависит от предсказателя погоды. Приводимые ниже методы работают так же и в случае, когда характеристики процесса зависят от предсказаний. Это так называемый случай «адаптивно враждебной природы». Например, данное предположение является естественным при прогнозировании финансового рынка. Рассматриваемые алгоритмы будут эффективно работать во всех этих случаях.

2.1. АЛГОРИТМ ВЗВЕШЕННОГО БОЛЬШИНСТВА

В этом разделе мы рассмотрим простейшие алгоритмы, выдающие точное предсказание будущего исхода. Имеется два возможных исхода 0 и 1. Имеются N экспертов (стратегий), которые на каждом шаге выдают предсказания $p_t^i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, N$.

Изучающий алгоритм обзвевает в режиме онлайн бинарную последовательность $\omega_1, \dots, \omega_{t-1}$ и прогнозы экспертов p_1^i, \dots, p_t^i , $i = 1, \dots, N$, и предсказывает будущий исход $p_t \in \{0, 1\}$.

Предварительно рассмотрим случай, когда один из экспертов i точно предсказывает будущий исход: $p_t^i = \omega_t$ для всех t .

Рассмотрим так называемый «Алгоритм большинства». Алгоритм определяет на каждом шаге $t = 1, 2, \dots$ множество всех экспертов, которые ни разу не сделали ошибку на предыдущих шагах:

$$B_t = \{i : p_j^i = \omega_j \text{ при всех } 1 \leq j \leq t-1\}$$

Алгоритм большинства выдает прогноз $p_t = 1$, если большинство ранее ни разу не ошибавшихся экспертов выдают 1 в качестве такого прогноза, в противном случае $p_t = 0$. Точнее,

$$p_t = \begin{cases} 1, & \text{если } |\{i : i \in B_t, p_t^i = 1\}| \geq |B_t|/2, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 2.1. Допустим, что существует эксперт i такой, что $p_t^i = \omega_t$ для всех t . Тогда «Алгоритм большинства» делает не более чем $\lceil \log_2 N \rceil$ ошибок, где N – число экспертов.⁵

Доказательство. Если «Алгоритм большинства» делает ошибку на шаге t , то число ранее никогда не ошибавшихся экспертов уменьшается по крайней

⁵ Здесь $\lceil r \rceil$ обозначает наименьшее целое большее или равное r .

мере вдвое: $|B_{t+1}| \leq \lceil |B_t|/2 \rceil$. По предположению $|B_t| > 1$ для всех t . Отсюда число уменьшений величины $|B_t|$ в два раза не превосходит $\lceil \log_2 N \rceil$.

Рассмотрим теперь случай, когда эксперта, точно угадывающего будущие исходы, не существует. В этом случае рассмотрим «Алгоритм взвешенного большинства», который был предложен Литтлстоуном и Вармутом.

Приведем протокол игры на предсказания с экспертами (см. рис. 2.1). Участники игры: *Эксперт i* , $i = 1, \dots, N$, *Статистик*, *Природа*. Каждому участнику игры в момент его действия

FOR $t = 1, 2, \dots, T$

Эксперт i выдает прогноз $p_t^i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, N$

Статистик выдает прогноз p_t алгоритма $WMA(\epsilon)$:

IF $\sum_{i:p_t^i=0} w_t^i > \sum_{i:p_t^i=1} w_t^i$

THEN $p_t = 0$

ELSE $p_t = 1$

ENDIF

Природа выдает исход $\omega_t \in \{0, 1\}$

Статистик производит пересчет весов экспертов:

Пусть $E_t = \{i : p_t^i \neq \omega_t\}$ – множество всех экспертов i , которые выдали ошибочный прогноз на шаге t .

Уменьшаем веса таких экспертов:

$$w_{t+1}^i = \begin{cases} (1 - \epsilon)w_t^i, & \text{если } i \in E_t, \\ w_t^i, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ENDFOR

Рис. 4.1: Алгоритм $WMA(\epsilon)$

доступна информация о всех действиях других игроков в моменты, предшествующие данному. Говорим, что это игра с полной информацией.

Пусть ϵ – параметр.

Пусть $L_T^i = \sum |p_t^i - \omega_t|$ – число всех ошибок *Эксперта i* , $L_T = \sum |p_t - \omega_t|$ – число всех ошибок *Статистика*, т.е. алгоритма $WMA(\epsilon)$ на T шагах.

Теорема 2.2. Для любого i выполнено

$$L_T \leq \left(\frac{2}{1 - \epsilon} \right) L_T^i + \left(\frac{2}{\epsilon} \right) \ln N$$

для всех t .

Доказательство. Пусть $W_t = \sum_{i=1}^N w_t^i$. Пусть $m = \min_{1 \leq i \leq N} L_T^i$ – число ошибок наилучшего эксперта на T шагах. Пусть этот минимум достигается для эксперта i . Тогда вес эксперта i корректировался не более m раз. Тогда

$$W_t > w_t^i \geq (1 - \epsilon)^m \quad (2.1)$$

для всех t таких, что $1 \leq t \leq T$.

С другой стороны, если наш алгоритм делает ошибку на шаге t , то

$$\sum_{i \in E_t} w_t^i \geq W_t/2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W_{t+1} &= \sum_{i \in E_t} (1 - \epsilon)w_t^i + \sum_{i \notin E_t} w_t^i = \\ &= \sum_{i=1}^N w_t^i - \epsilon \sum_{i \in E_t} w_t^i \leq \\ &\leq W_t \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

По определению $W_{t+1} \leq W_t$ для любого t . Отсюда для любого $T > 0$ имеем

$$\frac{W_T}{W_0} = \prod_{t=0}^{T-1} \frac{W_{t+1}}{W_t} \leq \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^M, \quad (2.2)$$

где $M = L_T$ – общее число ошибок алгоритма $WMA(\epsilon)$ на первых T шагах.

Заметим, что

$$W_0 = \sum_i w_0^i = N$$

Из (2.1) и (2.2) следует

$$\frac{(1 - \epsilon)^m}{N} < \frac{W_T}{W_0} \leq \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^M.$$

Вычисляем натуральный логарифм от обеих частей этого неравенства, проводим следующие переходы:

$$\begin{aligned} m \ln(1 - \epsilon) - \ln N &< M \ln \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \\ m \ln(1 - \epsilon) - \ln N &< -\frac{\epsilon}{2}M \\ m \ln \left(\frac{1}{1 - \epsilon}\right) + \ln N &> \frac{\epsilon}{2}M \\ m \left(\frac{2}{\epsilon}\right) \ln \left(\frac{1}{1 - \epsilon}\right) + \left(\frac{2}{\epsilon}\right) \ln N &> M \\ \left(\frac{2}{1 - \epsilon}\right) m + \left(\frac{2}{\epsilon}\right) \ln N &> M, \end{aligned} \quad (2.3)$$

Вторая строка (2.3) получена из первой с помощью неравенства $\ln(1 + x) \leq x$, которое имеет место при $x > -1$.

Последняя строка (2.3) получено из предпоследней с помощью неравенства

$$\frac{1}{y} \ln \left(\frac{1}{1-y} \right) \leq \frac{1}{1-y}.$$

Это неравенство получается из неравенства $\ln(1+x) \leq x$ путем подстановки $x = y/(1-y)$.

Теорема 2.2 показывает, что алгоритм взвешенного большинства WMA ошибается не более чем почти в два раза больше, чем наилучший эксперт.

Теорема 2.1 является частным случаем теоремы 2.2.

Исторически, по-видимому, это первый алгоритм такого рода. Он был предложен Литлстоуном и Вармутом в 1989 году и назывался Weighted Majority Algorithm. Несколько позже, в 1990 году, В.Г. Вовк предложил более общий агрегирующий алгоритм (Aggregating Algorithm) и понятие смешиваемой функции потерь, которые работают для игр более общего типа.

2.2. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕРЬ В РЕЖИМЕ ОНЛАЙН

В этом разделе мы рассмотрим простейшую модель и алгоритм оптимального следования за экспертами в режиме онлайн для того случая, когда нам доступны только величины потерь экспертов на каждом шаге (какая-либо конкретная функция потерь отсутствует). Этот алгоритм бы предложен Фройндом и Шапире.

Типичный пример такой задачи: распределитель имеет нескольких друзей, делающих ставки на скачках и выигрывающих или теряющих на каждом шаге некоторые суммы. Распределитель располагает на каждом шаге некоторой суммой, которую он хочет распределить между друзьями с целью получить максимальный выигрыш (или минимальные потери). Естественный критерий оценки успешности стратегии распределителя – его выигрыш, с некоторой точностью, должен быть не меньше чем у наиболее удачливого друга.

Процесс предсказания представим в форме протокола некоторой игры с полной информацией. Участники игры: стратегии или *Эксперты*, $1, 2, \dots, N$, а также *Распределитель*. Цель *Распределителя* построить стратегию, потери которой были бы не намного больше, чем потери наилучшего эксперта.

На каждом шаге игры $t = 1, 2, \dots, T$ распределитель определяет вектор распределения стратегий $p_t^- = (p_t^1, \dots, p_t^N)$, где $p_t^1 + \dots + p_t^N = 1$ и $p_t^i > 0$ при $i = 1, 2, \dots, N$. После этого каждая из стратегий объявляет свои потери на шаге t – число l_t^i , где $i = 1, 2, \dots, N$. Потери распределителя на шаге t равны смеси потерь экспертов на этом шаге

$$(\bar{p}_t \cdot \bar{l}_t) = \sum_{i=1}^N p_t^i l_t^i,$$

где $\bar{l}_t = (l_t^1, \dots, l_t^N)$ – вектор потерь всех стратегий на шаге t .

Мы будем предполагать, что потери экспертов на каждом шаге ограничены, например, $l_t^i \in [0, 1]$ для всех i и t .

В случае ограниченных на каждом шаге потерь нет принципиальной разницы между алгоритмами, которые добиваются минимальных потерь, и алгоритмами, которые добиваются максимального выигрыша; можно от потерь l_t на каждом шаге перейти к выигрышу $1 - l_t$ и обратно.

Кумулятивные потери *Эксперта* i на шагах $t = 1, 2, \dots, T$ равны

$$L_T^i = \sum_{t=1}^T l_t^i.$$

Соответственно, кумулятивные потери *Распределителя* на шагах $t = 1, 2, \dots, T$ равны

$$L_T = \sum_{t=1}^T (\bar{p}_t \cdot \bar{l}_t).$$

Цель *Распределителя* заключается в выборе такой стратегии распределения \bar{p}_t , $t = 1, 2, \dots, T$, чтобы минимизировать величину $R_T = L_T - \min L_T^i$.

Для решения этой задачи рассмотрим алгоритм $Hedge(\beta)$. Его параметром является число $\beta \in (0, 1)$, и вектор весов $\bar{w}_1 = (w_1^1, \dots, w_1^N)$. Предполагаем,

что начальные веса всех экспертов удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^N w_1^i = 1$.

Основной технический результат для алгоритма $Hedge(\beta)$ представлен в следующей лемме.

Лемма 2.1. Для любой последовательности векторов потерь $\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_T$ экспертных стратегий $1, \dots, N$ выполнено неравенство

$$\ln \left(\sum_{i=1}^N w_{T+1}^i \right) \leq -(1 - \beta)L_T \quad (2.3)$$

где L_T – потери алгоритма распределения $Hedge(\beta)$ за T шагов.

Доказательство. Из выпуклости экспоненты имеет место неравенство $\beta^r \leq 1 - (1 - \beta)r$ при всех $r \in [0, 1]$ и

$0 < \beta < 1$. Используя

FOR $t = 1, 2, \dots, T$

Распределитель вычисляет распределение экспертных стратегий:

$$\bar{p}_t = \frac{\bar{w}_t}{\sum_{i=1}^N w_t^i}. \quad (2.4)$$

Эксперт i объявляет свои потери l_t^i , $i = 1, 2, \dots, N$. Пусть $\bar{l}_t = (l_t^1, \dots, l_t^N)$ – вектор потерь всех стратегий на шаге t .

Распределитель подсчитывает свои потери: $l_t = (\bar{p}_t \cdot \bar{l}_t)$. Распределитель производит пересчет весов экспертных стратегий:

$$w_{t+1}^i = w_t^i \beta^{l_t^i} \quad (2.5)$$

для $i = 1, \dots, N$.

ENDFOR

Рис. 4.2: Алгоритм *Hedge*(β)

это неравенство и комбинируя (2.4) и (2.5), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N w_{t+1}^i &= \sum_{i=1}^N w_t^i \beta^{l_t^i} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N w_t^i (1 - (1 - \beta)l_t^i) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^N w_t^i \right) (1 - (1 - \beta)(\bar{p}_t \cdot \bar{l}_t)). \end{aligned}$$

2.7)

Последовательно применяя (2.7) при $t = 1, \dots, T$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N w_{T+1}^i &\leq \\ &\leq \prod_{t=1}^T (1 - (1 - \beta)(\bar{p}_t \cdot \bar{l}_t)) \leq \\ &\leq \exp \left(-(1 - \beta) \sum_{t=1}^T (\bar{p}_t \cdot \bar{l}_t) \right). \end{aligned}$$

Здесь было использовано неравенство $1 + x \leq \exp(x)$ для всех x .

Мы также использовали свойство $\sum_{i=1}^N w_1^i = 1$ для начальных весов.

Отсюда немедленно следует утверждение леммы.

По (2.6) имеем

$$L_T \leq \frac{-\ln \left(\sum_{i=1}^N w_{T+1}^i \right)}{1 - \beta}. \quad (2.8)$$

Из определения весов (2.5) следует

$$w_{T+1}^i = w_1^i \prod_{t=1}^T \beta^{l_t^i} = w_1^i \beta^{L_T^i}.$$

2.9)

Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема 2.3. Для любой последовательности векторов потерь $\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_T$ экспертных стратегий $i = 1, \dots, N$ для произвольных i и T выполнено неравенство

$$L_T \leq \frac{-\ln(w_1^i) - L_T^i \ln \beta}{1 - \beta}. \quad (2.10)$$

В случае конечного числа экспертов естественно положить начальные веса экспертных стратегий равными $w_1^i = \frac{1}{N}$ для всех i . Тогда (2.10) можно переписать в виде

$$L_T \leq \frac{\ln(1/\beta)}{1 - \beta} \min_i L_T^i + \frac{\ln N}{1 - \beta}. \quad (2.11)$$

Неравенство (2.11) можно интерпретировать как то, что кумулятивные потери распределительного алгоритма $Hedge(\beta)$ не превосходят потерь наилучшего эксперта, умноженных на константу $\frac{\ln(1/\beta)}{1 - \beta}$ плюс «регрет» $\frac{\ln N}{1 - \beta}$.

В работе показано, что оценка (2.11) является неулучшаемой. А именно имеет место теорема.

Теорема 2.4. Пусть B – произвольный алгоритм распределения потерь с произвольным числом экспертов. Допустим, что существуют такие положительные действительные числа a и c , что для произвольного числа N стратегий и для любой последовательности векторов потерь $\bar{l}^1, \dots, \bar{l}^T$ экспертных стратегий, где $\bar{l}^t = (l_1^t, \dots, l_N^t)$ при $t = 1, \dots, T$, выполнено неравенство

$$L_T(B) \leq c \min_i L_T^i + a \ln N.$$

Тогда для всех $\beta \in (0, 1)$ будет выполнено одно из неравенств:

$$c \geq \frac{\ln(1/\beta)}{1 - \beta} \quad \text{или} \quad a \geq \frac{1}{1 - \beta}.$$

За счет подбора параметра β можно добиться перераспределения констант так, чтобы мультипликативный множитель в (2.11) стал равным единице за счет увеличения аддитивного множителя.

Лемма 2.2. Допустим, что $0 \leq L \leq \tilde{L}$ и $0 \leq R \leq \tilde{R}$. Пусть также $\beta = g(\tilde{L})$

$$R^i), \text{ где } g(x) = (1 + \sqrt{2/x})^{-1}. \text{ Тогда}$$

$$-\frac{\ln \beta}{1-\beta}L + \frac{1}{1-\beta}R \leq L + \sqrt{2\tilde{L}\tilde{R}} + R. \quad (2.12)$$

Доказательство. Мы будем использовать следующее неравенство: $-\ln \beta \leq \frac{1-\beta^2}{2\beta}$ при $\beta \in (0, 1]$. Следующая цепочка преобразований приводит к нужному результату:

$$\begin{aligned} L \frac{-\ln \beta}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta}R &\leq L \frac{1+\beta}{2\beta} + \frac{1}{1-\beta}R = \\ &= \frac{1}{2}L \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{1-\beta}R = \\ &= L + \frac{1}{2}L \sqrt{\frac{2\tilde{R}}{\tilde{L}}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2\tilde{R}}{\tilde{L}}}}}R \leq \\ &\leq L + \sqrt{\frac{1}{2}\tilde{L}\tilde{R}} + R + R \sqrt{\frac{\tilde{L}}{2\tilde{R}}} \leq \\ &\leq L + \sqrt{2\tilde{L}\tilde{R}} + R. \end{aligned}$$

Так как мы предполагали, что $0 \leq l_t^i \leq 1$ для всех i и t , кумулятивные потери каждого эксперта ограничены:

$L_T^i \leq T$ для всех i и T . Поэтому можно в неравенстве (2.12) положить $\tilde{L} = T$. Полагаем также $\tilde{R} = \ln N$. Тогда по лемме 2.2

$$L_T \leq \min_i L_T^i + \sqrt{2T \ln N} + \ln N$$

где L_T – кумулятивные потери алгоритма $Hedge(\beta)$ за T шагов.

Недостатком этой оценки является то, что параметр β зависит от горизонта T .

Несколько более точные оценки потерь смешивающего алгоритма будут получены в следующих разделах, где потери экспертов и смешивающего алгоритма на каждом шаге будут вычисляться в виде функции от решения эксперта (предсказания) и исхода природы.

2.3. АЛГОРИТМ СЛЕДОВАНИЯ ЗА ВОЗМУЩЕННЫМ ЛИДЕРОМ

В этом разделе мы рассмотрим другой общий подход к задаче оптимального распределения потерь – алгоритм следования за возмущенным лидером – «Follow the Perturbed Leader – FPL». Этот алгоритм еще называется алгоритмом Ханнана по имени его первооткрывателя, а также статью Калаи и Вемпала и монографию Сеза-Бианки и Лугоши. Дальнейшее изучение этого алгоритма проводилось Хуттером и Поландом [20], которые обобщили его на счетный класс экспертов.

При данном подходе мы выбираем наилучшего в прошлом предсказателя – лидера. Для того, чтобы нейтрализовать «враждебные» воздействия природы, мы рандомизируем кумулятивные потери экспертов перед выбором наилучшего эксперта. На каждом шаге алгоритм следования за возмущенным лиде-

ром несет те же потери, что и выбранный эксперт. Цель алгоритма – получить кумулятивные потери, которые не превосходят потери наилучшего эксперта с точностью до некоторой ошибки – регрета. Регрет нашего алгоритма имеет тот же порядок, что и алгоритм оптимального распределения потерь или алгоритм взвешенного большинства.

Предсказания с экспертами происходят следующим образом. На каждом шаге t эксперты $i = 1, \dots, N$ несут потери s_t^i . Мы предполагаем, что потери экспертов на каждом шаге t ограничены:

$$0 \leq s_t^i \leq 1 \text{ для всех } i \text{ и } t.$$

В начале очередного шага t *Статистик* наблюдает кумулятивные потери экспертов $s_{1:t-1}^i = s_1^i + \dots + s_{t-1}^i$ за прошлые шаги $< t$, $i = 1, \dots, N$. *Статистик* принимает решение следовать за одним из этих экспертов, скажем за экспертом i . В конце шага *Статистик* несет те же потери, что и выбранный эксперт i : $s_t = s_t^i$. Кумулятивные потери эксперта исчисляются в виде $s_{1:t} = s_{1:t-1} + s_t = s_{1:t-1} + s_t^i$.

Легко привести пример игры с двумя экспертами, который показывает, что простое следование за наилучшим экспертом может привести к большим потерям *Статистика*, значительно превышающим потери каждого из экспертов.

Пусть потери каждого эксперта на шагах $t = 0, 1, \dots, 6$ есть $s_{0,1,2,3,4,5,6}^1 = (\frac{1}{2}, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$ and $s_{0,1,2,3,4,5,6}^2 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$. Ясно, что в этом случае простой алгоритм «следования за лидером» всегда будет принимать неправильное решение и его кумулятивные потери на каждом шаге будут как минимум в два раза больше чем потери каждого эксперта.

В том случае, когда потери экспертов на каждом шаге ограничены, можно бороться с подобными явлениями путем рандомизации кумулятивных потерь экспертов и только после этого выбирать наилучшего эксперта.

Алгоритм FPL выдает в качестве предсказания номер эксперта i , для которого является минимальной величина

$$s_{1:t-1}^i - \frac{1}{\epsilon} \zeta^i,$$

где это *параметр обучения*, и ζ^i , $i = 1, \dots, N$, $t = 1, 2, \dots$, есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин распределенных согласно экспоненциальному закону с плотностью $p(x) = \exp\{-x\}$, $x > 0$.

Заметим, что можно выбрать эти случайные величины перед процессом обучения алгоритма.

Мы будем использовать свойства экспоненциального распределения: $P\{\zeta > a\} = e^{-a}$ и $P\{\zeta > a + b\} = e^{-b}P\{\zeta > a\}$ для всех неотрицательных значений a и b . Эти и другие свойства экспоненциального распределения предлагаются в виде задач.

На шаге t игры каждые из N экспертов несет потери $s_t^i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, N$; кумулятивные потери эксперта i исчисляются

$$s_{1:t}^i = s_{1:t-1}^i + s_t^i.$$

Пусть $\epsilon_t = a/\sqrt{t}$ для всех t , где константа a будет уточнена далее. Мы предполагаем, что $s_0^i = v_0 = 0$ для всех i и $\epsilon_0 = \infty$.

Псевдокод FPL алгоритма представлен на рис. 2.3.

Пусть $s_{1:T} = \sum s_t^{J_t}$ – кумулятивные потери алгоритма FPL на шагах $\leq T$.

В следующей ниже теореме дается верхняя оценка среднего значения кумулятивных потерь алгоритма FPL.

Теорема 2.5. *Математическое ожидание кумулятивных потерь алгоритма FPL с переменным параметром обучения ϵ_t =FOR $t = 1, \dots, T$*

Статистик выбирает эксперта, имеющего наименьшие возмущенные кумулятивные потери на шагах $< t$:

$$I_t = \operatorname{argmin}_{i=1,2,\dots,N} \left\{ s_{1:t-1}^i - \frac{1}{\epsilon_t} \xi^i \right\}.$$

Эксперт i несет потери s_t^i for $i = 1, \dots, N$.

Статистик несет потери $s_t = s_t^{J_t}$.

ENDFOR

Рис. 2.3: Псевдокод FPL алгоритма

$\sqrt{\frac{2 \ln N}{t}}$ ограничено сверху кумулятивными потерями наилучшего эксперта плюс регрет:

$$E(s_{1:T}) \leq \min_i s_{1:T}^i + 2\sqrt{2T \ln N} \quad (2.13)$$

Доказательство. Анализ оптимальности алгоритма FPL основан на сравнении его потерь с потерями вспомогательного алгоритма IFPL (Infeasible FPL) (рис. 2.4).

Алгоритм IFPL делает свои предсказания на основе использования величин $s_{1:t}^i, i = 1, \dots, N$, которые еще неизвестны *Статистике* в начале шага t . По этой причине данный алгоритм физически не реализуем и служит только для анализа потерь алгоритма FPL.

Математическое ожидание одношаговых на шаге t и кумулятивных потерь алгоритмов FPL и IFPL на шаге T обозначим

$$l_t = E(s_t^{I_t}) \text{ и } r_t = E(s_t^{J_t}),$$

$$l_{1:T} = \sum_{t=1}^T l_t \text{ и } r_{1:T} = \sum_{t=1}^T r_t,$$

соответственно, где $s_t^{I_t}$ – потери алгоритма FPL на шаге t и $s_t^{J_t}$ – потери алгоритма IFPL на шаге t , символ E обозначает математическое ожидание.

Напомним, что $I_t = \operatorname{argmin}_i \{ s_{1:t-1}^i - \frac{1}{\epsilon_t} \xi^i \}$ и $J_t = \operatorname{argmin}_i \{ s_{1:t}^i - \frac{1}{\epsilon_t} \xi^i \}$.

FOR $t = 1, \dots, T$

Статистик выбирает эксперта, имеющего наименьшие возмущенные кумулятивные потери на шагах $6 t$:

$$J_t = \operatorname{argmin}_{i=1,2,\dots,N} \left\{ s_{1:t}^i - \frac{1}{\epsilon_t} \xi^i \right\}.$$

Эксперт i несет потери s_t^i for $i = 1, \dots, N$.

Статистик несет потери $s_t^{J_t}$.

ENDFOR

Рис. 2.4: Псевдокод IFPL алгоритма

Лемма 2.3. Средние кумулятивные потери алгоритмов FPL и IFPL удовлетворяют неравенству:

$$l_{1:T} \leq r_{1:T} + \sum_{t=1}^T \epsilon_t \quad (2.14)$$

для всех T .

Доказательство. Пусть c_1, \dots, c_N – произвольные неотрицательные действительные числа. Для произвольного

$1 \leq j \leq N$ определим числа m_j и m'_j :

$$\begin{aligned} m_j &= \min_{i \neq j} \left\{ s_{1:t-1}^i - \frac{1}{\epsilon_t} c_i \right\} \leq \\ &\leq \min_{i \neq j} \left\{ s_{1:t-1}^i + s_t^i - \frac{1}{\epsilon_t} c_i \right\} = \\ &= \min_{i \neq j} \left\{ s_{1:t}^i - \frac{1}{\epsilon_t} c_i \right\} = m'_j. \end{aligned}$$

Производим сравнение условных вероятностей:

$$P\{I_t = j | \xi^i = c_i, i \neq j\} \text{ и } P\{J_t = j | \xi^i = c_i, i \neq j\}$$

Имеет место следующая цепочка равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} &P\{I_t = j | \xi^i = c_i, i \neq j\} = \\ &= P\left\{ s_{1:t-1}^j - \frac{1}{\epsilon_t} \xi^j \leq m_j | \xi^i = c_i, i \neq j \right\} = \\ &= P\left\{ \xi^j \geq \epsilon_t (s_{1:t-1}^j - m_j) | \xi^i = c_i, i \neq j \right\} \leq \\ &\leq e^{\epsilon_t} P\left\{ \xi^j \geq \epsilon_t (s_{1:t-1}^j - m_j + 1) | \xi^i = c_i, i \neq j \right\} \leq \\ &\leq e^{\epsilon_t} P\left\{ \xi^j \geq \epsilon_t (s_{1:t-1}^j + s_t^j - m_j) | \xi^i = c_i, i \neq j \right\} \leq \\ &\leq e^{\epsilon_t} P\left\{ \xi^j \geq \epsilon_t (s_{1:t}^j - m'_j) | \xi^i = c_i, i \neq j \right\} = \\ &= e^{\epsilon_t} P\left\{ s_{1:t}^j - \frac{1}{\epsilon_t} \xi^j \leq m'_j | \xi^i = c_i, i \neq j \right\} = \\ &= e^{\epsilon_t} P\{J_t = j | \xi^i = c_i, i \neq j\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

При переходе от 3-й строки к 4-й мы использовали неравенство $P\{\xi > a +$

$b\} \leq e^b P\{\xi > a\}$ для случайной величины ξ , распределенной согласно экспоненциальному закону, где a и b – произвольные неотрицательные вещественные числа.

Так как эти оценки имеют место при всех условиях c_i , они также имеют место в безусловном виде:

$$P\{I_t = j\} \leq e^{\epsilon t} P\{J_t = j\}, \quad (2.16)$$

для всех $t = 1, 2, \dots$ и $j = 1, \dots, N$.

Суммируем (4.16) по $t = 1, \dots, T$ и получим неравенство:

$$l_t = E(s_t^{I_t}) = \sum_{j=1}^T s_t^j P\{I_t = j\} \leq e^{\epsilon t} \sum_{j=1}^T s_t^j P\{J_t = j\} = e^{\epsilon t} r_t$$

Неравенство $l_t - r_t \leq \epsilon_t l_t$ следует из неравенства $r_t > e^{-r} l_t > (1-r)l_t$ при $r \leq 1$.

Суммируем эти неравенства по $t = 1, \dots, T$ и берем во внимание $0 \leq l_t \leq 1$ для всех t . В результате получим

$$l_{1:T} \leq r_{1:T} + \sum_{t=1}^T \epsilon_t \leq r_{1:T} + 2a\sqrt{T}.$$

Лемма доказана.

В следующей лемме мы получим верхнюю границу средних кумулятивных потерь алгоритма IFPL.

Лемма 2.4. *Математическое ожидание кумулятивных потерь алгоритма IFPL ограничено сверху*

$$r_{1:T} \leq \min_i s_{1:T}^i + \frac{\ln N}{\epsilon_T} \quad (2.17)$$

для всех T .

Доказательство. Введем в этом доказательстве $\mathbf{s}_t = (s_t^1, \dots, s_t^N)$ – вектор одношаговых потерь экспертов и $\mathbf{s}_{1:t} = (s_{1:t}^1, \dots, s_{1:t}^N)$ – вектор кумулятивных потерь экспертов. Пусть также $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^N)$ – вектор координатами которого являются экспоненциально распределенные случайные величины.

Рассмотрим вспомогательные векторы:

$$\tilde{\mathbf{s}}_t = \mathbf{s}_t - \xi \left(\frac{1}{\epsilon_t} - \frac{1}{\epsilon_{t-1}} \right) \quad (2.18)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}_{1:t} = \mathbf{s}_{1:t} - \frac{1}{\epsilon_t} \xi \quad (2.19)$$

при $t = 1, 2, \dots$

Для произвольного вектора $\mathbf{s} = (s^1, \dots, s^N)$ и единичного вектора $\mathbf{d} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ обозначим

$$M(\mathbf{s}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{a} \in D} \{\mathbf{d} \cdot \mathbf{s}\},$$

где $D = \{(0, \dots, 1), \dots, (1, \dots, 0)\}$ – множество, состоящее из N размерности N и “ \cdot ” – скалярное произведение.

По определению $M(\mathbf{s})$ есть единичный вектор, i -я координата которого равна 1, где $s^i = \min s^j$. Если имеется более одного такого i , то полагаем $M(\mathbf{s})$ равным наименьшему из них. По определению $(M(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{s}) = \min s^j$.

По определению алгоритма IFPL

$$r_{1:T} = E \left(\sum_{t=1}^T M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:t}) s_t \right).$$

Таким образом, нам необходимо оценить сумму под знаком математического ожидания.

Предварительно покажем, что

$$\sum_{t=1}^T M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:t}) \cdot \tilde{\mathbf{s}}_t \leq M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:T}) \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1:T}. \quad (2.20)$$

Доказательство проводим методом математической индукции по T . Для $T = 1$ утверждение очевидно. Для того, чтобы сделать шаг индукции от $T - 1$ к T сделаем два замечания.

Имеем $\tilde{\mathbf{s}}_{1:T} = \tilde{\mathbf{s}}_{1:T-1} + \tilde{\mathbf{s}}_T$ по определению, а также

$$M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:T}) \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1:T-1} > M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:T-1}) \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1:T-1},$$

так как правая часть этого неравенства равна минимальной координате вектора $\tilde{\mathbf{s}}_{1:T-1}$, тогда как левая его часть равна координате, которая выбиралась по другому критерию.

Соединяем оба эти замечания вместе и получаем утверждение индукции (2.20) для шага T используя предположение индукции для шага $T - 1$:

$$\begin{aligned} M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:T}) \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1:T} &= M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:T}) \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1:T-1} + M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:T}) \cdot \tilde{\mathbf{s}}_T > \\ &> M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:T-1}) \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1:T-1} + M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:T-1}) \cdot \tilde{\mathbf{s}}_T > \\ &> \sum M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:t}) \cdot \tilde{\mathbf{s}}_t. \end{aligned}$$

Вспоминая определение (2.18) вектора $\tilde{\mathbf{s}}_t$, мы можем переписать (2.20) следующим образом:

$$\sum_{t=1}^T M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:t}) \cdot \mathbf{s}_t \leq M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:T}) \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1:T} + \sum_{t=1}^T M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:t}) \cdot \xi \left(\frac{1}{\epsilon_t} - \frac{1}{\epsilon_{t-1}} \right) \quad (2.21)$$

Аналогично, используя определение (2.19) вектора $\tilde{\mathbf{s}}_{1:t}$ и то что критерий выбора координаты вновь был изменен, получаем неравенство

$$\begin{aligned} M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:T}) \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1:T} &\leq M(\mathbf{s}_{1:T}) \cdot \left(\mathbf{s}_{1:T} - \frac{\xi}{\epsilon_T} \right) = \\ &= \min_{\mathbf{d} \in D} \{ \mathbf{d} \cdot \mathbf{s}_{1:T} \} - \frac{M(\mathbf{s}_{1:T}) \cdot \xi}{\epsilon_T}. \end{aligned}$$

(2.22)

По определению $(M(\mathbf{s}_{1:T}) \cdot \xi) = \xi^k$ для некоторого k .

Так как $E(\xi) = 1$ для экспоненциально распределенной случайной величины ξ , математическое ожидание вычитаемого члена в (2.22) равно

$$E\left(\frac{M(\mathbf{s}_{1:T}) \cdot \xi}{\epsilon_T}\right) = \frac{1}{\epsilon_T} E(\xi^k) = \frac{1}{\epsilon_T}. \quad (2.23)$$

Второй член (2.21) удовлетворяет

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T (M(\tilde{\mathbf{s}}_{1:t}) \cdot \xi) \left(\frac{1}{\epsilon_t} - \frac{1}{\epsilon_{t-1}} \right) \leq \\ & \leq \sum_{t=1}^T \max_{1 \leq i \leq N} \xi^i \left(\frac{1}{\epsilon_t} - \frac{1}{\epsilon_{t-1}} \right) = \frac{1}{\epsilon_T} \max_{1 \leq i \leq N} \xi^i. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь мы использовали свойство $\epsilon_t < \epsilon_{t-1}$ для всех t .

Мы будем использовать верхнюю оценку для математического ожидания максимума экспоненциально распределенных случайных величин:

$$0 \leq E(\max_{1 \leq i \leq N} \xi^i) \leq 1 + \ln N. \quad (2.25)$$

Действительно, для экспоненциально распределенных случайных величин ξ^i , $i = 1, \dots, N$, выполнено

$$\begin{aligned} P\{\max_i \xi^i \geq a\} &= P\{\exists i (\xi^i \geq a)\} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N P\{\xi^i \geq a\} = N \exp\{-a\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Для произвольной неотрицательной случайной величины η выполнено

$$E(\eta) = \int_0^{\infty} P\{\eta \geq y\} dy. \quad (2.27)$$

Доказательство этого соотношения предоставляется читателю в виде задачи. Тогда по (2.26) имеем

$$\begin{aligned} & E(\max_i \xi^i - \ln N) = \\ &= \int_0^{\infty} P\{\max_i \xi^i - \ln N \geq y\} dy \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} N \exp\{-y - \ln N\} dy = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $E(\max_i \xi^i) \leq 1 + \ln N$. Согласно (2.25) математическое ожидание (2.24) ограничено сверху числом $\frac{1}{\epsilon_T}(1 + \ln N)$.

Комбинируя оценки (2.21)–(2.24) и (2.23), получим

$$\begin{aligned}
 r_{1:T} &= E \left(\sum_{t=1}^T M(\tilde{s}_{1:t}) \cdot \mathbf{s}_t \right) \leq \\
 &\leq \min_i s_{1:T}^i + \frac{\ln N}{\epsilon_T}.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы.

Неравенство (2.14) леммы 2.3 и неравенство (2.17) леммы 2.4 влекут неравенство

$$\begin{aligned}
 E(s_{1:T}) &\leq \min_i s_{1:T}^i + a \sum_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{a} \ln N \sqrt{T} \leq \\
 &\leq \min_i s_{1:T}^i + 2a\sqrt{T} + \frac{1}{a} \ln N \sqrt{T}.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

для всех T . Минимизируем (2.29) по a , получим оптимальное значение $a = 2\ln N$. Таким образом, мы получили оценку (2.13) теоремы

$$E(s_{1:T}) \leq \min_i s_{1:T}^i + 2\sqrt{2T \ln N}.$$

Теорема доказана.

Мы также получим следствие этой теоремы. В этом следствии, используя варианты неравенство Хефдинга, мы заменим оценку для среднего значения на вероятностную оценку для кумулятивных потерь.

Для этого нам необходимо усложнить рандомизацию, применяемую в алгоритме FPL. Прежде мы на каждом шаге использовали одну и ту же последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ζ^1, \dots, ζ^N . Мы модифицируем алгоритмы FPL и IFPL следующим образом. Рассмотрим бесконечную последовательность серий независимых одинаково распределенных согласно экспоненциальному закону случайных величин $\xi_1^t, \dots, \xi_N^t, t = 1, 2, \dots$, так, что все эти случайные величины рассматриваемые вместе независимы.

В алгоритме FPL на рис. 4.3 на шаге t мы будем возмущать каждого эксперта с помощью серии случайных величин ξ_t^1, \dots, ξ_t^N . Статистик выбирает эксперта, имеющего наименьшие возмущенные кумулятивные потери на шагах $< t$:

$$I_t = \operatorname{argmin}_{i=1,2,\dots,N} \left\{ s_{1:t-1}^i - \frac{1}{\epsilon_t} \xi_t^i \right\}.$$

Аналогичное изменения вносим в алгоритм IFPL.

В этом случае одношаговые потери $s_t, t = 1, 2, \dots$, алгоритма FPL будут независимыми случайными величинами.

Доказательства леммы 4.3 остается тем же, доказательство леммы 2.4 изменяется незначительно, надо только в неравенствах (2.21), (2.22) и (2.24) сразу рассмотреть математическое ожидание от обеих их частей и использовать то, что $E(\xi_t^i) = 1$ для всех i и t .

Следствие 2.1. Для произвольного $\delta > 0$ с вероятностью $1 - \delta$ выполнено

неравенство:

$$s_{1:T} \leq \min_i s_{1:T}^i + 2\sqrt{2T \ln N} + \sqrt{\frac{T}{2} \ln \frac{1}{\delta}}. \quad (2.30)$$

Алгоритм FPL является асимптотически состоятельным (или состоятельным по Ханнану):

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (s_{1:T} - \min_{i=1, \dots, N} s_{1:T}^i) \leq 0 \quad (2.31)$$

с вероятностью 1.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения мы используем вариант неравенство Чернова из следствия 2.5:

Пусть X_1, X^6, \dots – последовательность независимых случайных величин таких, что при всех $i = 1, 2, \dots$ выполнено $0 \leq X_i \leq 1$. Тогда для любого $\epsilon > 0$:

$$P \left\{ \sum_{i=1}^T X_i - E \sum_{i=1}^T X_i > \epsilon \right\} \leq \exp \left(-\frac{2\epsilon^2}{T} \right). \quad (2.32)$$

Полагаем $\delta = \exp \left(-\frac{2\epsilon^2}{T} \right)$. Отсюда $\epsilon = \sqrt{\frac{T}{2} \ln \frac{2}{\delta}}$. При $X_t = s_t$ из неравенства (2.32) следует, что с вероятностью $1 - \delta$:

$$\sum_{t=1}^T s_t \leq E(s_{1:T}) + \sqrt{\frac{T}{2} \ln \frac{1}{\delta}}$$

Из этого неравенства и оценки (2.13) теоремы 2.5 получаем неравенство (2.30).

Для доказательства утверждения (2.31) мы применим другой вариант (2.61) неравенства Чернова:

$$P \left\{ \left| \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (X_i - E(X_i)) \right| > \epsilon \right\} \leq 2 \exp(-2T\epsilon^2). \quad (2.33)$$

Здесь полагаем $X_t = s_t$. Так как ряд экспонент в правой части этого неравенства сходится, по лемме Бореля–Кантелли:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (s_{1:T} - E(s_{1:T})) = 0$$

с вероятностью 1. Из этого соотношения и оценки (2.13) теоремы 2.5 получаем неравенство (2.31) для верхнего предела.

При доказательстве теоремы 2.5 и следствия 2.1 мы предполагали, что потери s_t^i экспертов на каждом шаге t не зависят от номеров экспертов I_t^0 , выбранных Статистиком на шагах $t^0 < t$.

Можно показать, что следствие 2.1 верно и в случае экспертов, потери которых на каждом шаге t зависят от значений случайных величин I_t^0 при $t^0 < t$. В этом случае случайные величины $X_t = s_t = s_t^{I_t^0}$ не будут независимыми, но величины $X_t - E(X_t | X_1, \dots, X_{t-1})$ образуют мартингал-разность относительно последовательности случайных величин X_1, X_2, \dots , и мы можем применить соответ-

⁶ В данном протоколе это эквивалентно предположению о том, что потери экспертов s_1^i, s_2^i, \dots при $i = 1, \dots, N$ заданы заранее и предъявляются Статистике по шагам согласно протоколу.

ствующее неравенство Хефдинга– Азумы и усиленный мартингальный закон больших чисел. В частности, условие асимптотической состоятельности (2.31) также выполнено и в этом случае.

2.4. АЛГОРИТМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ВЗВЕШИВАНИЯ ЭКСПЕРТНЫХ РЕШЕНИЙ

Напомним, что \mathbb{R} – это множество всех вещественных (действительных) чисел. Пусть Ω – множество исходов, Γ – множество решений или предсказаний (прогнозов), Θ – множество параметров (экспертных стратегий, экспертов). Предполагаем, что Θ – конечное множество, $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$. В этой главе Ω – произвольное множество объектов любой природы.

Оценка принятого решения (или предсказания) $\gamma \in \Gamma$ при исходе $\omega \in \Omega$ производится с помощью функции потерь $\lambda(\omega, \gamma)$, принимающей неотрицательные действительные значения. Далее мы будем предполагать, что значения функции потерь лежат в отрезке $[0, 1]$.

Рассматривается игра с полной информацией между игроками: *Статистик*, *Эксперты* θ , где $\theta \in \Theta$ и *Природа*. Игра происходит в соответствии со следующим протоколом:

FOR $t = 1, 2, \dots$

Эксперты $\theta \in \Theta$ анонсируют предсказания: $\zeta_t^\theta \in \Gamma$.

Статистик принимает свое решение: $\gamma_t \in \Gamma$.

Природа анонсирует исход: $\omega_t \in \Omega$.

Эксперты $\theta \in \Theta$ вычисляют свои суммарные потери на шаге t игры:

$$L_t(\theta) = L_{t-1}(\theta) + \lambda(\omega_t, \zeta_t^\theta).$$

Статистик вычисляет свои суммарные потери на шаге t игры:

$$L_t = L_{t-1} + \lambda(\omega_t, \gamma_t).$$

Здесь $L_0(\theta) = L_0 = 0$ для всех θ .

ENDFOR

Протокол определяет порядок действий (ходы) игроков. Каждый игрок может при определении своего действия использовать всю информацию, которая известна к началу его хода.

Целью *Статистика* является выбор такой последовательности прогнозов $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, чтобы для каждого t его суммарные потери L_t были бы с некоторой степенью точности не больше чем суммарные потери наиболее эффективного эксперта, т.е. не больше чем $\inf L_t(\theta)$.

Природа может быть *враждебной* по отношению к *Статистику*: выдаваемые ею исходы ω_t могут зависеть от прогнозов γ_t , так как *Природа* выдает исход ω_t тогда, когда прогноз γ_t уже выдан *Статистиком*.

Количественной оценкой метода прогнозирования является кумулятивный *регрет* относительно эксперта θ :

$$R_{\theta, T} = \sum_{t=1}^T (\lambda(\omega_t, \gamma_t) - \lambda(\omega_t, \xi_t^\theta)) = L_T - L_T(\theta). \quad (2.34)$$

Цель метода предсказания заключается в том, чтобы

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (L_T - \inf_{\theta} L_T(\theta)) \leq 0. \quad (2.35)$$

Заметим, что здесь не исключается тот случай, когда *Статистик* может предсказывать даже лучше, чем эксперт, имеющий наименьшие потери.

Прогнозы будут элементами n -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^n . Таким образом, их можно складывать и умножать на вещественные числа.

Подмножество Z евклидова пространства \mathbb{R}^n называется *выпуклым*, если для любых точек $z, z^0 \in Z$ и любого числа $0 \leq p \leq 1$ точка $pz + (1-p)z^0 \in Z$.

Функция $h(z)$, определенная на выпуклом множестве Z , называется *выпуклой*, если ее надграфик $\{(x, y) : y > h(x)\}$ – выпуклое множество. Это эквивалентно тому, что если для любых $z, z^0 \in Z$ и любого числа $0 \leq p \leq 1$ выполнено неравенство $h(pz + (1-p)z^0) \leq ph(z) + (1-p)h(z^0)$. (2.36)

Заданы множества исходов Ω и множество прогнозов Γ . Задана некоторая функция потерь $\lambda(\omega, \gamma)$.

Пусть множество экспертов конечно: $\Theta = \{1, \dots, N\}$. В этом разделе предполагаем, что множество прогнозов Γ – выпуклое подмножество \mathbb{R}^n , а функция потерь $\lambda(\omega, \gamma)$ является выпуклой по прогнозу γ .

Простейший алгоритм взвешивания экспертных прогнозов вычисляет прогноз *Статистика* по формуле

$$\gamma_t = \frac{\sum_{i=1}^N w_{i,t-1} \xi_t^i}{\sum_{j=1}^N w_{j,t-1}} = \sum_{i=1}^N w_{i,t-1}^* \xi_t^i, \quad (2.37)$$

где $\xi_t^i \in \mathbb{R}^n$ – прогноз i -го эксперта на шаге t , $w_{i,t-1}$, $i = 1, \dots, N$, – веса, приписанные экспертам на шаге t ,

$$w_{i,t-1}^* = \frac{w_{i,t-1}}{\sum_{j=1}^N w_{j,t-1}} \quad (2.38)$$

– нормированные веса. Так как Γ – выпуклое множество, $\gamma_t \in \Gamma$ для всех t .

В алгоритме экспоненциального взвешивания в качестве весов экспертов

берут величины

$$w_{i,t-1} = e^{-\eta L_{i,t-1}}, \quad (2.39)$$

$i = 1, \dots, N$, где $L_{i,t-1}^i$ – суммарные потери i -го эксперта на шагах от 1 до $t-1$, $\eta > 0$ – некоторый параметр – *параметр обучения*.

В этом случае прогноз *Статистика* вычисляется по формуле

$$\gamma_t = \frac{\sum_{i=1}^N \xi_t^i e^{-\eta L_{i,t-1}^i}}{\sum_{j=1}^N e^{-\eta L_{j,t-1}^j}} = \sum_{i=1}^N w_{i,t-1}^* \xi_t^i, \quad (2.40)$$

где

$$w_{i,t-1}^* = \frac{e^{-\eta L_{i,t-1}^i}}{\sum_{j=1}^N e^{-\eta L_{j,t-1}^j}} \quad (2.41)$$

– вес эксперта i , $i = 1, \dots, N$.

Оптимальные свойства алгоритма экспоненциального взвешивания изучаются в следующей теореме.

Теорема 2.6. *Допустим, что функция потерь $\lambda(\omega, \gamma)$ является выпуклой по второму аргументу и принимает значения в $[0, 1]$. Тогда для любых $\eta > 0$, T и $\omega_1, \dots, \omega_T \in \Omega$ кумулятивная ошибка алгоритма экспоненциального взвешивания удовлетворяет неравенству*

$$L_T - \min_{i=1, \dots, N} L_T^i \leq \frac{\ln N}{\eta} + \frac{T\eta}{8}. \quad (2.42)$$

При $\eta = \sqrt{\frac{8 \ln N}{T}}$ верхняя оценка имеет вид: $\sqrt{\frac{1}{2} T \ln N}$.

Доказательство. Определим вспомогательные величины

$$W_t = \sum_{i=1}^N w_{i,t} = \sum_{i=1}^N e^{-\eta L_t^i}, \quad (2.43)$$

$$W_0 = N.$$

В доказательстве будет использоваться *неравенство Хефдинга*, которое сформулировано и доказано в виде леммы. Эта лемма утверждает следующее: пусть X – случайная величина и $a \leq X \leq b$. Тогда для произвольного $s \in \mathbb{R}$

$$\ln E(e^{sX}) \leq sE(X) + \frac{s^2(b-a)^2}{8},$$

где E – математическое ожидание.

Доказательство теоремы будет основано на сравнении нижней и верхней оценок величины $\ln \frac{W_T}{W_0}$.

Нижняя оценка получается следующим образом. Заметим, что так как $w_{i,0} = 1$ для всех $i = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned}
 \ln \frac{W_T}{W_0} &= \ln \left(\sum_{i=1}^N e^{-\eta L_T^i} \right) - \ln N \geq \\
 &\geq \ln \left(\max_{i=1, \dots, N} e^{-\eta L_T^i} \right) - \ln N = \\
 &= -\eta \min_{i=1, \dots, N} L_T^i - \ln N.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Верхняя оценка величины $\ln \frac{W_T}{W_0}$ получается с помощью следующих выкладок. Имеем для произвольного t

$$\begin{aligned}
 \ln \frac{W_t}{W_{t-1}} &= \ln \frac{\sum_{i=1}^N e^{-\eta \lambda(\omega_t, \xi_t^i)} e^{-\eta L_{t-1}^i}}{\sum_{i=1}^N e^{-\eta L_{t-1}^i}} = \\
 &= \ln \frac{\sum_{i=1}^N w_{i,t-1} e^{-\eta \lambda(\omega_t, \xi_t^i)}}{\sum_{j=1}^N w_{j,t-1}} = E(e^{-\eta \lambda(\omega_t, \xi_t^i)})
 \end{aligned}, \tag{2.45}$$

где математическое ожидание рассматривается относительно распределения вероятностей:

$$w_{i,t-1}^* = \frac{w_{i,t-1}}{\sum_{j=1}^N w_{j,t-1}},$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Применим неравенство Хефдинга, полагаем $a = 0$, $b = 1$, случайная величина X принимает значение $\lambda(\omega_t, \xi_t^i)$ с вероятностью $w_{i,t-1}^*$. Используем также выпуклость функции потерь $\lambda(\omega, \gamma)$ по второму аргументу. В результате получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
 \ln \frac{W_t}{W_{t-1}} &\leq -\eta \frac{\sum_{i=1}^N w_{i,t-1} \lambda(\omega_t, \xi_t^i)}{\sum_{j=1}^N w_{j,t-1}} + \frac{\eta^2}{8} \leq \\
 &\leq -\eta \lambda \left(\omega_t, \frac{\sum_{i=1}^N w_{i,t-1} \xi_t^i}{\sum_{j=1}^N w_{j,t-1}} \right) + \frac{\eta^2}{8} = \\
 &= -\eta \lambda(\omega_t, \gamma_t) + \frac{\eta^2}{8},
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

где γ_t – прогноз по алгоритму экспоненциального смешивания (2.40).

Отсюда, суммируя (4.46) по $t = 1, \dots, T$, получим

$$\ln \frac{W_T}{W_0} = \sum_{i=1}^T \ln \frac{W_t}{W_{t-1}} \leq -\eta L_T + \frac{\eta^2}{8} T. \tag{2.47}$$

Используя нижнюю оценку (2.44) и верхнюю оценку (2.47), получим

$$L_T \leq \min_{i=1, \dots, N} L_T^i + \frac{\ln N}{\eta} + \frac{\eta}{8} T. \quad (2.48)$$

Теорема доказана.

Напомним, что при $\eta = \sqrt{8 \ln N / T}$ верхняя оценка имеет вид: $\sqrt{\frac{1}{2} T \ln N}$. Очевидный недостаток при выборе параметра η заключается в том, что для его выбора надо фиксировать величину T – горизонт, до которого делается предсказание.

Значительно более лучшая оценка, основанная на использовании переменного параметра обучения, приведена в следующем разделе.

2.5. АЛГОРИТМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ВЗВЕШИВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ ОБУЧЕНИЯ

Рассмотрим технически более сложную конструкцию алгоритма экспоненциального взвешивания с переменным параметром обучения, предложенную Алексеем Черновым. В отличие от версии этого алгоритма, представленной в разделе 2.4, нам не надо знать горизонт прогнозирования T . Оценка регрета алгоритма является равномерной относительно T .

Далее, L_T^i – суммарные потери i -го эксперта за первые T шагов, \hat{L}_T – суммарные потери *Статистика*.

Множество экспертов конечно: $\Theta = \{1, \dots, N\}$, множество прогнозов Γ – выпуклое подмножество \mathbb{R}^n , а функция потерь $\lambda(\omega, \gamma)$ является выпуклой по прогнозу γ .

Модифицируем алгоритм экспоненциального взвешивания – в качестве весов экспертов берем величины

$$w_{i,t-1} = e^{-\eta_t L_{t-1}^i},$$

$i = 1, \dots, N$, где L_{t-1}^i – суммарные потери i -го эксперта на шагах от 1 до $t-1$, $\eta_t > 0$ – переменный параметр обучения.

В этом случае можно добиться равномерной по шагам верхней оценки ошибки предсказания.

Теорема 2.7. Для любой последовательности положительных вещественных чисел $\eta_1 > \eta_2 > \dots$, для любого $n > 1$ и для любых $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$, ошибка (регрет) алгоритма экспоненциального взвешивания с переменным параметром обучения η_t удовлетворяет неравенству

$$\hat{L}_T - \min_{i=1, \dots, N} L_T^i \leq \frac{\ln N}{\eta_T} + \frac{1}{8} \sum_{t=1}^T \eta_t. \quad (2.49)$$

В частности, для $\eta_t = \sqrt{\frac{4 \ln N}{t}}$, $t = 1, \dots, n$, выполнено

$$\hat{L}_T - \min_{i=1, \dots, N} L_T^i \leq \sqrt{T \ln N}.$$

Доказательство. На шаге t Статистик вычисляет свое предсказание по формуле $\hat{p}_t = \sum_{i=1}^N \xi_t^i w_{i,t-1} / W_{t-1}$, где $w_{i,t-1} = e^{-\eta_t L_{t-1}^i}$ и $W_{t-1} = \sum_{j=1}^N w_{j,t-1}$. Из выпуклости функции λ по второму аргументу получаем

$$\lambda(\omega_t, \hat{p}_t) \leq \sum_{i=1}^N \frac{w_{i,t-1}}{W_{t-1}} \lambda(\omega_t, \xi_t^i).$$

Применяем неравенство Хефдинга и получаем

$$e^{-\eta_t \sum_{i=1}^N \frac{w_{i,t-1}}{W_{t-1}} \lambda(\omega_t, \xi_t^i)} \geq \sum_{i=1}^N \frac{w_{i,t-1}}{W_{t-1}} e^{-\eta_t \lambda(\omega_t, \xi_t^i) - \eta_t^2 / 8}$$

Перепишем это неравенство в виде

$$e^{-\eta_t \lambda(\omega_t, \hat{p}_t)} \geq \sum_{i=1}^N \frac{w_{i,t-1}}{W_{t-1}} e^{-\eta_t \lambda(\omega_t, \xi_t^i) - \eta_t^2 / 8}. \quad (2.50)$$

Введем вспомогательные величины

$$s_{i,t-1} = e^{-\eta_{t-1} L_{t-1}^i + \eta_{t-1} (\hat{L}_{t-1} - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{t-1} \eta_k)}$$

и заметим, что

$$\frac{w_{i,t-1}}{W_{t-1}} = \frac{\frac{1}{N} (s_{i,t-1})^{\frac{\eta_t}{\eta_{t-1}}}}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{N} (s_{j,t-1})^{\frac{\eta_t}{\eta_{t-1}}}}. \quad (2.51)$$

Докажем, что $\sum_{j=1}^N \frac{1}{N} s_{j,t} \leq 1$ математической индукцией по t . При $t = 0$ это утверждение выполнено, так как $s_{i,0} = 1$ для всех i . Допустим, что $\sum_{j=1}^N \frac{1}{N} s_{j,t-1} \leq 1$. Тогда

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{N} (s_{j,t-1})^{\frac{\eta_t}{\eta_{t-1}}} \leq \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{N} s_{j,t-1} \right)^{\frac{\eta_t}{\eta_{t-1}}} \leq 1, \quad (2.52)$$

так как функция $x \rightarrow x^\alpha$ вогнутая и монотонная по $x > 0$ и $\alpha \in [0, 1]$ и так как $0 \leq \eta_t \leq \eta_{t-1}$. Используя (2.52) в качестве границы знаменателя из правой части (2.51), получим $w_{i,t-1} / W_{t-1} \geq (s_{i,t-1})^{\frac{\eta_t}{\eta_{t-1}}} / N$. Комбинируя это с (2.50), получим

$$e^{-\eta_t \lambda(\hat{p}_t, y_t)} \geq \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} (s_{i,t-1})^{\frac{\eta_t}{\eta_{t-1}}} e^{-\eta_t \lambda(\omega_t, \xi_t^i) - \eta_t^2 / 8}.$$

Заметим, что

$$s_{i,t} = (s_{i,t-1})^{\frac{\eta_t}{\eta_{t-1}}} e^{-\eta_t \lambda(\omega_t, \xi_t^i) + \eta_t \lambda(\omega_t, \hat{p}_t) - \eta_t^2 / 8}.$$

Отсюда получим $\sum_{j=1}^N \frac{1}{N} s_{j,t} \leq 1$.

Так как для произвольного i выполнено

$$\frac{1}{N} s_{i,n} \leq \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} s_{j,n} \leq 1,$$

получаем

$$-\eta_n L_n^i + \eta_n \left(\hat{L}_n - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \eta_k \right) \leq \ln N,$$

отсюда следует (2.49).

2.6. РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ ПРОГНОЗЫ

Заданы множества исходов Ω и множество прогнозов Γ . Имеется N экспертов. Задана некоторая функция потерь $\lambda(\omega, \gamma)$. В этом разделе мы не предполагаем, что функция потерь выпуклая по второму аргументу.

Напомним протокол детерминированной игры на предсказания с использованием экспертных прогнозов.

Пусть $L_0 = 0$, $L_0^i = 0$, $i = 1, \dots, N$.

FOR $t = 1, 2, \dots$

Эксперт i анонсирует прогноз: $\xi_t^i \in \Gamma$, $i = 1, \dots, N$.

Статистик анонсирует прогноз: $\gamma_t \in \Gamma$.

Природа анонсирует исход: $\omega_t \in \Omega$.

Эксперт i вычисляет свои суммарные потери на шаге t игры: $L_t = L_{t-1}^i + \lambda(\omega_t, \xi_t^i)$, где $i = 1, \dots, N$.

Статистик вычисляет свои суммарные потери на шаге t игры: $L_t = L_{t-1} + \lambda(\omega_t, \gamma_t)$.

ENDFOR

Каждый игрок может при определении своего действия использовать всю информацию, которая известна к началу его хода. Потери *Статистика* на шагах $t = 1, \dots, T$ равны

$$L_T = \sum_{t=1}^T \lambda(\omega_t, \gamma_t).$$

Потери эксперта i на шагах $t = 1, \dots, T$ равны

$$L_T^i = \sum_{t=1}^T \lambda(\omega_t, \xi_t^i).$$

Пример. Приведем пример, который показывает, что в некоторых играх с невыпуклой по прогнозу функцией потерь $\lambda(\omega, \gamma)$ любой метод детерминированных предсказаний имеет недопустимо большую ошибку, которая растет линейно с ростом длины периода предсказания.

Рассмотрим простую игру с двумя экспертами 1 и 2. Пространства исходов и прогнозов совпадают: $\Omega = \Gamma = [1, 2]$. Потери при предсказании γ и исходе ω равны: $\lambda(\omega, \gamma) = 1_{\{\omega \neq \gamma\}}$ – характеристическая функция множества $\{(\omega, \gamma) : \gamma \neq \omega\}$.

Легко проверить, что эта функция потерь не является выпуклой по прогнозу.

Заметим, что для любой детерминированной стратегии *Статистика* $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ существует такая последовательность исходов $\omega_1, \omega_2, \dots$, что потери *Статистика* максимальны, т.е. $L_T = T$ для всех T . Действительно, *Природа* может определить для всех $t = 1, 2, \dots$:

$$\omega_t = \begin{cases} 2, & \text{если } \gamma_t = 1, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим двух экспертов, один из которых – эксперт 1, всегда предсказывает $\xi_t^1 = 1$, а другой – эксперт 2, всегда предсказывает $\xi_t^2 = 2$, $t = 1, 2, \dots$. Пусть L_t^i – потери i -го эксперта, $i = 1, 2$.

Заметим, что *Статистик* при прогнозе $\gamma_t = 1$ просто следует решению эксперта 1, а при прогнозе $\gamma_t = 2$ – следует решению эксперта 2.

Легко видеть, что, так как для последовательности исходов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T$ число единиц или число двоек будут не больше чем $T/2$, у одного из экспертов потери будут не более чем $T/2$. Поэтому $\min_{i=1,2} L_T^i \leq T/2$ для всех T .

Таким образом, для любой стратегии *Статистика* «адаптивно враждебная» *Природа* может предоставить последовательность $\omega_1, \omega_2, \dots$ такую, что

$$L_T - \min_{i=1,2} L_T^i \geq T/2$$

для всех T .

Приведенный пример показывает, что для некоторых невыпуклых функциях потерь *Природа* может выдавать последовательность исходов так, что при любых детерминированных действиях *Статистика* его регрет $> T/2$ за любой период игры T .

Данную проблему *Статистик* может преодолеть с помощью рандомизации прогнозов. Точнее прогнозами будут смешанные стратегии – распределения вероятностей на множестве всех детерминированных прогнозов. Вместо функции потерь будет рассматриваться ее математическое ожидание, к которому мы применим результаты раздела 2.2.

Пусть теперь на каждом шаге t игры *Статистик* выдает прогноз в виде смешанной стратегии – распределения вероятностей $p_t = \{p_{1,t}, \dots, p_{N,t}\}$ на множестве экспертов $\{1, \dots, N\}$.

Протокол рандомизированной игры представлен на рис. 2.5.

Мы вводим в протокол еще одного игрока – *Генератора случайных чисел*, который будет генерировать номер эксперта из множества $\{1, \dots, N\}$ согласно заданному *Статистиком* распределению вероятностей. *Природа* может использовать это распределение вероятностей, но не может использовать номер эксперта, выбранного согласно этому распределению. Поэтому мы помещаем в протоколе ход *Генератора случайных чисел* после хода *Природы*. *Генератор случайных чисел* относительно произвольного распределения вероятностей можно реализовать на основе генератора Пусть $L_0 = 0, L_0^i = 0, i = 1, \dots, N$.

FOR $t = 1, 2, \dots$

Эксперт i анонсирует прогноз: $\xi_t^i \in \Gamma, i = 1, \dots, N$.

Статистик анонсирует распределение вероятностей: $p_{1,t}, \dots, p_{N,t}$ на множестве экспертов $\{1, \dots, N\}$.

Природа анонсирует исход: $\omega_t \in \Omega$.

Генератор случайных чисел анонсирует эксперта: $i_t \in \{1, \dots, N\}$ с вероятностью $p_{i,t}$.

Эксперт i вычисляет свои суммарные потери на шаге t игры:

$$L_t^i = L_{t-1}^i + \lambda(\omega_t, \xi_t^i),$$

где $i = 1, \dots, N$.

Статистик вычисляет свои суммарные потери на шаге t игры:

$$L_t = L_{t-1} + \lambda(\omega_t, \xi_t^{i_t}).$$

ENDFOR

Рис. 2.5: Протокол игры с рандомизированными предсказаниями равномерно распределенных случайных чисел следующим образом.

Вводим случайные переменные I_t , так что $I_t = i$ тогда и только тогда, когда

$$U_t \in \left[\sum_{j=1}^{i-1} p_{j,t}, \sum_{j=1}^i p_{j,t} \right],$$

где величины U_1, U_2, \dots – независимые равномерно распределенные в единичном отрезке случайные величины. Из определения следует, что $P\{I_t = i\} = p_{i,t}$ для всех t .

В такой игре потери *Статистика* $\lambda(\omega_t, \xi_t^{I_t})$ являются случайной величиной. В этом случае качество предсказания *Статистика* измеряется также случайной величиной – случайным регретом:

$$L_T - \min_{i=1, \dots, N} L_T^i = \sum_{t=1}^T \lambda(\omega_t, \xi_t^{I_t}) - \min_{i=1, \dots, N} \sum_{t=1}^T \lambda(\omega_t, \xi_t^i). \quad (2.53)$$

Рассмотрим постановку, при которой целью *Статистика* является минимизация математического ожидания регрета (2.53):

$$\begin{aligned} & E(L_T - \min_{i=1, \dots, N} L_T^i) = \\ &= \sum_{t=1}^T E(\lambda(\omega_t, \xi_t^{I_t})) - \min_{i=1, \dots, N} \sum_{t=1}^T \lambda(\omega_t, \xi_t^i) = \\ &= \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \lambda(\omega_t, \xi_t^i) p_{i,t} - \min_{i=1, \dots, N} \sum_{t=1}^T \lambda(\omega_t, \xi_t^i). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Будем вычислять распределение вероятностей на множестве экспертов с помощью соотношений (2.4) из раздела 2.2. На шаге t определим

$$p_{i,t} = \frac{\sum_{\beta^s=1}^{t-1} l_s^i}{\sum_{j=1}^N \sum_{\beta^s=1}^{t-1} l_s^j}, \quad (2.55)$$

где $l_s^i = \lambda(\omega_s, \xi_s^i)$ при $i = 1, \dots, N$, $0 < \beta < 1$.

Алгоритм вычисления вероятностных стратегий (2.55) будет называться *вероятностным алгоритмом экспоненциального взвешивания*.

Из леммы 2.2 следует

Теорема 2.8. Пусть L_T – случайные кумулятивные потери алгоритма $Hedge(\beta)$ за T шагов при $\beta = g(T \ln N)$, где $g(x) = (1 + \sqrt{2/x})^{-1}$. Тогда имеет место оценка математического ожидания случайных потерь вероятностного алгоритма экспоненциального взвешивания

$$E(L_T) \leq \min_i L_T^i + \sqrt{2T \ln N} + \ln N. \quad (2.56)$$

Далее, аналогично тому как было получено утверждение (2.31), следствия 2.1 мы докажем следующие два следствия.

Следствие 2.2. Пусть $0 < \delta < 1$. Тогда регрет вероятностного алгоритма экспоненциального взвешивания с вероятностью $1 - \delta$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \lambda(\omega_t, \xi_t^{I_t}) - \min_{i=1, \dots, N} \sum_{t=1}^T \lambda(\omega_t, \xi_t^i) &\leq \\ &\leq \sqrt{2T \ln N} + \ln N + \sqrt{\frac{1}{2} T \ln \frac{1}{\delta}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства этого утверждения мы используем вариант неравенство Чернова (2.60) из следствия 2.5.

Из независимости последовательных рандомизаций следует, что случайные величины

$$X_t = \lambda(\omega_t, \xi_t^{I_t}) - E(\lambda(\omega_t, \xi_t^{I_t}))$$

являются независимыми.⁷

Поэтому для их сумм $S_T = \sum X_t$ выполнено неравенство

$$P\{S_T > c\} \leq e^{-\frac{2c^2}{T}},$$

где c – произвольное положительное число. Отсюда для произвольного $\delta > 0$ выполнено неравенство

$$P\left\{S_T > \sqrt{\frac{1}{2} T \ln \frac{1}{\delta}}\right\} \leq \delta.$$

Утверждение следствия теперь прямо следует из этого неравенства и неравенств (2.54) и (2.56).

⁷ Здесь мы также как и при доказательстве теоремы 2.5 для простоты предполагаем, что прогнозы ξ_t^i экспертов и исходы ω_t природы на каждом шаге t не зависят от номеров экспертов I_t , выбранных генератором случайных чисел на шагах $t^0 < t$ (но могут зависеть от ранее выбранных статистиком распределений вероятностей).

Пусть в игре на предсказания с использованием экспертов $i = 1, \dots, N$ некоторый предсказатель выдает рандомизированные прогнозы ξ_1, ξ_2, \dots , а i -й эксперт выдает прогнозы ξ_1^i, ξ_2^i, \dots , где $i = 1, \dots, N$.

Предсказатель называется *состоятельным по Ханнану*, если

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T \lambda(\omega_t, \xi_t) - \min_{i=1, \dots, N} \sum_{t=1}^T \lambda(\omega_t, \xi_t^i) \right) \leq 0 \quad (2.57)$$

с вероятностью 1.

Следующее следствие доказывается точно также как утверждение (2.31) следствия 2.1.

Следствие 2.3. *Вероятностный алгоритм экспоненциального взвешивания является состоятельным по Ханнану.*

Поясним, как соотносится пример, приведенный в начале этого раздела, со следствием 2.3. В примере *Статистик* при прогнозе $\gamma_t = 1$ на шаге t просто следует решению эксперта $i_t = 1$, а при прогнозе $\gamma_t = 2$ - следует решению эксперта $i_t = 2$. Получаем бесконечную траекторию выбираемых экспертов: i_1, i_2, \dots При рандомизированном выборе экспертов вероятность выбрать эту траекторию, а также любую другую, на которой нарушается условие (2.57), равна 0.

Сравнение с теоремой 2.2 показывает, что рандомизированный алгоритм, примененный к простой функции потерь, имеет примерно (в зависимости от выбора параметра β) в два раза меньшую оценку ошибки, чем детерминированный алгоритм взвешенного большинства WMA.

2.7. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Приведем несколько замечательных неравенств, которые неоднократно используются в доказательствах теорем. Основным таким неравенством будет неравенство Хефдинга.

Лемма 2.5. *Пусть X – случайная величина и $a \leq X \leq b$. Тогда для произвольного $s \in \mathbb{R}$*

$$\ln E(e^{sX}) \leq sE(X) + \frac{s^2(b-a)^2}{8}. \quad (2.58)$$

Доказательство. Так как $\ln E(esX) = sE(X) + \ln E(es(X-E(X)))$,

достаточно доказать, что для любой случайной величины X с $E(X) = 0$, $a \leq X \leq b$, будет

$$E(esX) \leq es^2(b-a)^2/8. \text{ Из выпуклости экспо-}$$

ненты имеем

$$e^{sx} \leq \frac{x-a}{b-a} e^{sb} + \frac{b-x}{b-a} e^{sa}$$

при $a \leq x \leq b$.

Обозначим $p = \frac{a}{b-a}$. Так как $E(X) = 0$, то применяя математическое ожидание к обеим частям этого неравенства, получим при $x = X$:

$$\begin{aligned} E(e^{sX}) &\leq -\frac{a}{b-a} e^{sb} + \frac{b}{b-a} e^{sa} = \\ &= (1-p + pe^{s(b-a)}) e^{-ps(b-a)} = e^{\phi(u)}, \end{aligned}$$

где $u = s(b-a)$, $\phi(u) = -pu + \ln(1-p + pe^u)$. Производная $\phi(u)$ по u равна

$$\phi'(u) = -p + \frac{p}{p + (1-p)e^{-u}}.$$

Имеем $\phi(0) = \phi'(0) = 0$. Кроме того,

$$\phi''(u) = \frac{p(1-p)e^{-u}}{(p + (1-p)e^{-u})^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Действительно, обозначим $q = (1-p)e^{-u}$. Тогда надо доказать неравенство $\frac{pq}{(p+q)^2} \leq \frac{1}{4}$, которое следует из $(p-q)^2 > 0$.

По формуле Тейлора для некоторого $\theta \in [0, u]$ получаем

$$\phi(u) = \phi(0) + u\phi'(0) + \frac{u^2}{2}\phi''(\theta) \leq \frac{u^2}{8} = \frac{s^2(b-a)^2}{8},$$

так как $u = s(b-a)$. Лемма доказана.

Рассмотрим несколько следствий, разъясняющих значение этого неравенства.

Следствие 2.4. Пусть X – случайная величина такая, что $P\{a \leq X \leq b\} = 1$. Тогда

$$P\{|X - E(X)| > c\} \leq 2e^{-\frac{2c^2}{(b-a)^2}}. \quad (2.59)$$

Доказательство. Предварительно напомним неравенство Маркова. Пусть X – случайная величина, $X > 0$. Из

$$E(X) = \int X dP \geq \int_{\{X>c\}} X dP \geq cP\{X > c\}$$

следует, что $P\{X > c\} \leq E(X)/c$.

Используя это неравенство и неравенство (2.58), получим

$$P\{X - E(X) > c\} = P\{e^{s(X-E(X))} > e^{cs}\} \leq e^{-cs + \frac{s^2(b-a)^2}{8}}$$

для всех s . Находим минимум правой части по s . Он достигается при $s =$

$4c/(b-a)^2$. Отсюда получаем

$$P\{X - E(X) > c\} \leq e^{-\frac{2c^2}{(b-a)^2}}.$$

Аналогично получаем

$$P\{X - E(X) < -c\} \leq e^{-\frac{2c^2}{(b-a)^2}}.$$

Окончательно получаем

$$P\{|X - E(X)| > c\} \leq 2e^{-\frac{2c^2}{(b-a)^2}}.$$

Более известным является следующее следствие из этой леммы – неравенство Чернова.⁸

Следствие 4.5. Пусть X_1, X_2, \dots – последовательность независимых случайных величин таких, что при всех $i = 1, 2, \dots$ выполнено $P\{a_i \leq X_i \leq b_i\} = 1$. Тогда для любого $\epsilon > 0$:

$$P\left\{\sum_{i=1}^n X_i - E \sum_{i=1}^n X_i > \epsilon\right\} \leq \exp\left(-\frac{2\epsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right) \quad (2.60)$$

а также

$$P\left\{\sum_{i=1}^n X_i - E \sum_{i=1}^n X_i < -\epsilon\right\} \leq \exp\left(-\frac{2\epsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right).$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству следствия 2.4. Из неравенства Маркова и неравенства (2.58) получаем

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) > \epsilon\right\} &\leq \\ &\leq \frac{E\left(\exp\left(s \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))\right)\right)}{\exp(s\epsilon)} = \end{aligned}$$

⁸ Для удобства иногда используем обозначение $\exp(x) = e^x$.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\prod_{i=1}^n E(\exp(s(X_i - E(X_i))))}{\exp(\epsilon s)} \leq \\
 &\leq \frac{\prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{s^2(b_i - a_i)^2}{8}\right)}{\exp(\epsilon s)} \leq \\
 &\leq \exp\left(-\epsilon s + \frac{s^2 \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}{8}\right) \leq \\
 &\leq \exp\left(-\frac{2\epsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right).
 \end{aligned}$$

При переходе от второй строки к третьей мы использовали независимость случайных величин X_1, X_2, \dots .

При переходе от предпоследней строки к последней строке мы использовали минимизацию по s . Второе неравенство получается аналогичным образом.

Из этого следствия можно получить оценку скорости сходимости для закона больших чисел.

Следствие 2.6. Пусть X_1, X_2, \dots – последовательность независимых случайных величин таких, что при всех $i = 1, 2, \dots$ выполнено $P\{a_i \leq X \leq b_i\} = 1$. Тогда для любого $\epsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))\right| > \epsilon\right\} \leq 2 \exp\left(-\frac{2n^2 \epsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right).$$

Если $a_i = 0, b_i = 1$ для всех i , то

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))\right| > \epsilon\right\} \leq 2 \exp(-2n\epsilon^2). \quad (2.61)$$

Последовательность случайных величин V_1, V_2, \dots называется мартингал-разностью относительно последовательности случайных величин X_1, X_2, \dots , если для любого $i > 1$ величина V_i есть функция от X_1, \dots, X_i и

$$E(V_{i+1} | X_1, \dots, X_i) = 0$$

с вероятностью 1. Следующее неравенство называется неравенством Хефдинга–Азумы.

Лемма 2.6. Пусть V_1, V_2, \dots – мартингал-разность относительно последовательности случайных величин X_1, X_2, \dots , кроме этого, $V_i \in [A_i, A_i + c_i]$ для некоторой случайной величины A_i , измеримой относительно X_1, \dots, X_i , и неко-

торой последовательности положительных констант c_i . Если $S_k = \sum V_i$, то для любого $s > 0$

$$E(e^{sS_n}) \leq e^{(s^2/8) \sum_{i=1}^k c_i^2}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} E(e^{sS_n}) &= E(e^{sS_{n-1}} E(e^{sV_n} | X_1, \dots, X_{n-1})) \leq \\ &\leq E(e^{sS_{n-1}} e^{s^2 c_n^2 / 8}) = \\ &= e^{s^2 c_n^2 / 8} E(e^{sS_{n-1}}). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Здесь при переходе от первой строки ко второй была использована лемма 2.5.

Результат леммы получается путем итерации неравенства (2.62).

Следующее следствие доказывается аналогично следствию 2.4.

Следствие 2.7. Пусть V_1, V_2, \dots – мартингал-разность относительно последовательности случайных величин X_1, X_2, \dots , кроме этого, $V_i \in [A_i, A_i + c_i]$ для некоторой случайной величины A_i , измеримой относительно X_1, \dots, X_i , и некоторой последовательности положительных констант c_i . Если $S_n = \sum V_i$, то

для $n > 0$ любого

$$P\{|S_n| > c\} \leq 2 \exp\left(-\frac{2c^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$$

Доказательство. Используем неравенство Маркова

$$P\{X > c\} \leq E(X)/c$$

и неравенство (2.58). Получим для произвольного n :

$$P\{S_n > c\} = P\{e^{sS_n} > e^{cs}\} \leq \exp\left(-cs + \frac{s^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{8}\right)$$

для всех s . Находим минимум правой части по s . Он достигается при $s = 4c / \sum_{i=1}^n c_i^2$. Отсюда получаем

$$P\{S_n > c\} \leq \exp\left(-\frac{2c^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2}\right). \quad (2.63)$$

Аналогично получаем

$$P\{S_n < -c\} \leq \exp\left(-\frac{2c^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2}\right).$$

Окончательно получаем

$$P\{|S_n| > c\} \leq 2 \exp\left(-\frac{2c^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2}\right).$$

Следствие 2.8. В условиях следствия 2.7, где к тому же $c_i = 1$ для всех i , получаем

$$P\left\{\frac{1}{n}|S_n| > c\right\} \leq 2e^{-2nc^2}. \quad (2.64)$$

Так как ряд экспонент в правой части неравенства (2.64) сходится, по лемме Бореля–Кантелли получим

Следствие 2.9. В условиях следствия 2.7, где к тому же выполнено $B_1 < c_i < B_2$ для всех i , для некоторых положительных констант B_1, B_2 получаем усиленный мартингальный закон больших чисел:

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0\right\} = 1. \quad (2.65)$$

2.8. УСИЛЕНИЕ ПРОСТЫХ КЛАССИФИКАТОРОВ – БУСТИНГ

В этом разделе рассматривается метод усиления простых классификаторов, который называется *бустинг* (Boosting). Этот метод основан на комбинировании примитивных «слабых» классификаторов в один «сильный». Под «силой» классификатора в данном случае подразумевается эффективность (качество) решения задачи классификации, которое обычно измеряется средним числом ошибок классификации на обучающей выборке.

Будет изучаться алгоритм AdaBoost (от английских слов «адаптивность» и «усиление»), предложенный Фройндом и Шапире. Этот алгоритм был успешно использован во многих областях, в частности, в задаче поиска лиц на изображении. Рассматриваемый метод усиления простых классификаторов применяется во многих задачах и до сих пор является объектом множества как прикладных так и теоретических исследований.

Алгоритм AdaBoost. В этом разделе алгоритм оптимального распределения потерь, изложенный в разделе 2.2, будет применен к решению задачи усиления алгоритмов классификации.

Напомним задачу построения классификатора. Предсказатель получает выборку, $S = ((\bar{x}_1, y_1), \dots, (\bar{x}_l, y_l))$, где $\bar{x}_i \in X$ и $y_i \in Y$. Мы предполагаем, что $Y = \{0, 1\}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – подмножество n -мерного евклидова векторного пространства. Мы также предполагаем, что для всех i пары (\bar{x}_i, y_i) одинаково и независимо распределены согласно неизвестному нам распределению веро-

ятностей P на $X \times Y$.

Строгий алгоритм машинного обучения для произвольных $\epsilon, \delta > 0$ при обучении на достаточно большой случайной выборке S с вероятностью $1 - \delta$ выдает гипотезу классификации h_S , которая имеет ошибку обобщения не более ϵ . Кроме этого, время работы такого алгоритма должно полиномиальным образом зависеть от $1/\epsilon, 1/\delta$ и размера выборки.

Слабый алгоритм машинного обучения по определению должен удовлетворять тем же свойствам, за исключением того, что то же самое выполнено для хотя бы одного $\epsilon \leq \frac{1}{2} - \gamma$, где $\gamma > 0$ – константа.

Здесь будет рассматриваться только задача построения гипотезы классификации h_S по обучающей выборке S . Проблема оценки ее предсказательной способности не будет обсуждаться.

Пусть $D(i)$ – произвольное распределение вероятностей на индексах (элементах) выборки. По определению $D(i) > 0$ для всех i и

$$\sum D(i) = 1.$$

Естественный пример такого распределения – равномерное распределение на элементах выборки: $D(i) = 1/l$ для всех i .

Ошибка обучения классификатора h на обучающей выборке S относительно распределения D определяется как

$$\epsilon = D\{i : h(\bar{x}_i) \neq y_i\} = \sum_{i:h(\bar{x}_i) \neq y_i} D(i).$$

В частности, при распределении $D(i) = 1/l$ ошибка обучения равна доле числа неправильных классификаций объектов:

$$\epsilon = |\{i : h(\bar{x}_i) \neq y_i\}|/l.$$

Некоторые алгоритмы классификации позволяют использовать распределение $D(i)$ на элементах обучающей выборки в качестве входного параметра. В противном случае, можно использовать ресэмплинг обучающей выборки. Ресэмплинг заключается в том, что мы формируем новую выборку, в которой каждая пара (\bar{x}_i, y_i) встречается с частотой $D(i)$. Для этого, с помощью генератора случайных чисел, мы выбираем элементы из старой выборки согласно распределению $D(i)$.

В этом разделе мы решаем частный случай общей задачи – мы рассмотрим метод усиления слабого алгоритма классификации на обучающей выборке. Будет приведен алгоритм AdaBoost (предложенный Фройндом и Шапире [18]). Этот алгоритм является *мета-алгоритмом*, он перестраивает произвольный слабый алгоритм классификации, имеющий ошибку обучения $\epsilon \leq \frac{1}{2} - \gamma$, в сильный алгоритм, имеющий как угодно малую ошибку обучения (все ошибки – относительно распределения D).

Алгоритм AdaBoost:

Вход алгоритма: выборка $S = ((\bar{x}_1, y_1), \dots, (\bar{x}_l, y_l))$, распределение D на $\{1, \dots, l\}$, слабый алгоритм классификации WeakLearn.

Определим начальные значения весов: $w_1^i = D(i)$ для $i = 1, \dots, l$.
FOR $t = 1, \dots, T$

1) Полагаем $i = 1, \dots, l$ при

$$p_t^i = \frac{w_t^i}{\sum_{j=1}^l w_t^j}$$

2) Вызываем алгоритм WeakLearn, в котором $D(i) = p_t^i$ для всех i и который возвращает гипотезу классификации h_t .

3) Вычисляем ошибку обучения классификатора h_t :

$$\epsilon_t = \sum_{i=1}^l p_t^i |h_t(\bar{x}_i) - y_i|$$

4) Полагаем $\beta_t = \epsilon_t / (1 - \epsilon_t)$.

5) Определим адаптированные веса при $i = 1, \dots, l$:

$$w_{t+1}^i = w_t^i \beta_t^{1 - |h_t(\bar{x}_i) - y_i|}$$

ENDFOR

Результат работы алгоритма: выдать гипотезу – индикаторную функцию:

$$h(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(\bar{x}) \geq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где пороговая функция f определяется в виде линейной комбинации гипотез алгоритма WeakLearn

$$f(\bar{x}) = \sum_{t=1}^T q_t h_t(\bar{x}),$$

с весами

$$q_t = \frac{\ln(1/\beta_t)}{\sum_{t=1}^T \ln(1/\beta_t)},$$

при $t = 1, \dots, T$.

Приведенный алгоритм представляет собой некоторую версию алгоритма оптимального распределения потерь в режиме онлайн $Hedge(\beta)$ (см. раздел 2.2), в котором параметр β динамически изменяется по шагам алгоритма. Кроме того, рассматривается двойственная версия этого алгоритма. В данном алгоритме веса приписываются не стратегиям, а элементам выборки. Так как теперь потери на шаге t измеряются величиной $l_t^i = 1 - |h_t(\bar{x}_i) - y_i|$, такие потери равны нулю, если гипотеза h_t неправильно классифицирует объект x_i , и они максимальны (единица), если классификация – правильная. Соответственно, вес неправильной классификации растет, а вес правильной классификации уменьшается. Таким образом, алгоритм AdaBoost выделяет примеры, на которых алгоритм WeakLearn дает неправильные классификации и заставляет его обучаться на этих примерах.

При анализе будет существенно использоваться свойство слабого алго-

ритма WeakLearn – при любом распределении на элементах выборки его ошибка обучения меньше чем $1/2$ на некоторую положительную величину γ .

Результат работы алгоритма AdaBoost оценивается в следующей теореме.

Теорема 2.9. *Предположим, что слабый алгоритм классификации WeakLearn при его вызовах алгоритмом AdaBoost на шагах $t = 1, \dots, T$ выдает гипотезы с ошибками обучения $\epsilon_1, \dots, \epsilon_T$ (относительно соответствующих распределений, заданных в векторном виде $p^{-1} = D, p^{-2}, \dots, p^{-T}$). Тогда ошибка обучения*

$$\epsilon = D\{h(\bar{x}_i) \neq y_i\} = \sum_{h(\bar{x}_i) \neq y_i} D(i)$$

результатирующей гипотезы h , выданной алгоритмом AdaBoost после T шагов работы, ограничена

$$\epsilon \leq 2^T \prod_{t=1}^T \sqrt{\epsilon_t(1 - \epsilon_t)}. \quad (2.66)$$

Доказательство. Так же, как в доказательстве лемм 2.1 и 2.2 из раздела 2.2, мы оценим сверху и снизу величину $\sum_{i=1}^l w_{T+1}^i$. Имеем верхнюю оценку:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l w_{t+1}^i &= \sum_{i=1}^l w_t^i \beta_t^{1 - |h_t(\bar{x}_i) - y_i|} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^l w_t^i (1 - (1 - \beta_t)(1 - |h_t(\bar{x}_i) - y_i|)) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^l w_t^i \right) (1 - (1 - \beta_t)(1 - \epsilon_t)). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Используя (2.67) T раз, получим

$$\sum_{i=1}^l w_{T+1}^i \leq \prod_{t=1}^T (1 - (1 - \beta_t)(1 - \epsilon_t)). \quad (2.68)$$

Здесь было использовано определение ошибки обучения ϵ_t алгоритма WeakLearn на шаге t :

$$\epsilon_t = \sum_{i=1}^l p_t^i |h_t(\bar{x}_i) - y_i| = \sum_{i=1}^l \left(\frac{w_t^i}{\sum_{j=1}^l w_t^j} \right) |h_t(\bar{x}_i) - y_i|$$

Лемма 2.7. *Результатирующий классификатор h делает ошибку на объекте \bar{x}_i тогда и только тогда, когда*

$$\prod_{t=1}^T \beta_t^{-|h_t(\bar{x}_i) - y_i|} \geq \left(\prod_{t=1}^T \beta_t \right)^{-1/2}. \quad (2.69)$$

Доказательство. Действительно, это утверждение прямо следует из определения классификатора h в случае, когда $y_i = 0$, так как в таком случае $\beta_t^{-|h_t(\bar{x}_i) - y_i|} = \beta_t^{-h_t(\bar{x}_i)}$ для всех t . По определению равенство $h(\bar{x}_i) = 1$ может

быть тогда и только тогда, когда

$$\sum_{t=1}^T \ln(1/\beta_t) h_t(\bar{x}_i) \geq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(1/\beta_t) \quad (2.70)$$

Неравенство (4.70) эквивалентно неравенству (2.69).

Пусть теперь $y_i = 1$. Тогда $h_t(\bar{x}_i) \leq y_i$ для всех t . Поэтому $\beta_t^{-|h_t(\bar{x}_i) - y_i|} = \beta_t^{1 - h_t(\bar{x}_i)}$ для всех t . В этом случае для всех $1 \leq t \leq T$

$$\beta_t^{-|h_t(\bar{x}_i) - y_i|} = \beta_t^{-1 + h_t(\bar{x}_i)} \quad (2.71)$$

Равенство $h(x_i) = 0$ по определению возможно только при

$$\prod_{t=1}^T \beta_t^{-h_t(\bar{x}_i)} < \left(\prod_{t=1}^T \beta_t \right)^{-1/2} \quad (2.72)$$

Неравенство (2.72) эквивалентно неравенству

$$\prod_{t=1}^T \beta_t^{h_t(\bar{x}_i)} > \left(\prod_{t=1}^T \beta_t \right)^{1/2} \quad (2.73)$$

Неравенство (2.73) с учетом равенства (2.71) эквивалентно неравенству (2.69) леммы. Лемма доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы, заметим, что по определению

$$w_{T+1}^i = D(i) \prod_{t=1}^T \beta_t^{1 - |h_t(\bar{x}_i) - y_i|} \quad (2.74)$$

По лемме 2.7 из (2.69) и (2.74) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l w_{T+1}^i &\geq \sum_{i: h(\bar{x}_i) \neq y_i} w_{T+1}^i \geq \\ &\geq \left(\sum_{i: h(\bar{x}_i) \neq y_i} D(i) \right) \left(\prod_{t=1}^T \beta_t \right)^{1/2} = \\ &= \epsilon \left(\prod_{t=1}^T \beta_t \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Где ϵ – ошибка обучения результирующего классификатора h относительно распределения D .

Комбинируя (2.68) и (2.75), получим

$$\epsilon \leq \prod_{t=1}^T \frac{1 - (1 - \beta_t)(1 - \epsilon_t)}{\sqrt{\beta_t}} \quad (2.76)$$

Так как элементы произведения (2.76) неотрицательны, можно минимизировать по β_t каждый сомножитель отдельно. Приравниваем к нулю производную по β_t :

$$\frac{d}{d\beta_t} \left(\frac{1 - (1 - \beta_t)(1 - \epsilon_t)}{\sqrt{\beta_t}} \right) = 0$$

и получаем: $\beta_t = \epsilon_t / (1 - \epsilon_t)$. Подстав-

(2.76) и получаем (2.66). Теорема доказана.

Следствие 2.10. *Ошибка обучения результирующего классификатора h удовлетворяет неравенству*

$$\epsilon = D\{i : h(\bar{x}_i) \neq y_i\} \leq \exp\left(-2 \sum_{t=1}^T \gamma_t^2\right), \quad (2.77)$$

где $\epsilon_t = \frac{1}{2} - \gamma_t$, $\gamma_t > 0$ при $t = 1, \dots, T$.

В случае, когда $\gamma_t = \gamma$ для всех t , неравенство (2.77) упрощается до

$$\epsilon \leq \exp(-2T\gamma^2). \quad (2.78)$$

Доказательство. Действительно, в оценке (2.66) теоремы 2.9 при $\epsilon_t = \frac{1}{2} - \gamma_t$ будет

$$2\sqrt{\epsilon_t(1 - \epsilon_t)} = \sqrt{1 - 4\gamma_t^2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq \prod_{t=1}^T \sqrt{1 - 4\gamma_t^2} = \\ &= \exp\left(\sum_{t=1}^T \frac{1}{2} \ln(1 - 4\gamma_t^2)\right) \leq \\ &\leq \exp\left(-2 \sum_{t=1}^T \gamma_t^2\right). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Неравенство (2.77) доказано.

Оценка (2.78) представляет собой обычную экспоненциально убывающую оценку ошибки обучения типа неравенства Хефдинга.

Неравенство (2.78) позволяет оценить число итераций алгоритма AdaBoost, необходимых для достижения ошибки обучения результирующего классификатора h :

$$T \geq \frac{1}{2\gamma^2} \ln \frac{1}{\epsilon}.$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Азарова Л.В., Теория игр и принятие решений, Ростов н/Д.: ИЦ ДГТУ, учебно-методическое пособие, 2016

Беккенбах Э., Введение в неравенства, М.: Мир, 1965

Горелик А.Л., Методы распознавания, М. : Высш. шк., Учебное пособие, 2004

Гуськов А.В., Милевский К. Е., Надежность технических систем и техногенный риск, Новосибирск: НГТУ, Учебник, 2012

Стронгин Р.Г., Исследование операций. Модели экономического поведения, М.: ИНТУИТ, Учебное пособие, 2016