ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Теория графов и математическая логика»

Автор

Артамонова Е.А.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения направления бакалавриата 01.03.04 «Прикладная математика».

Автор

ст. преподаватель Артамонова Е.А.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие содержит краткую теорию по всем основным разделам дисциплины «Теория графов и математическая логика. Представлены основные теоретическими положения и понятия, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины, и подробное решение всех типовых заданий. Выбор тематики осуществлялся на основе анализа ФГОС3+ в базовой подготовке бакалавров технических направлений.

Учебное пособие дополняет курс лекций по дисциплине «Теория графов и математическая логика» и будет полезно студентам в самостоятельной работе и при подготовке к текущему, рубежному и итоговому контролю знаний по данной дисциплине в различных формах, в том числе в форме интернет-экзамена, а также при изучении различных смежных дисциплин математического и естественнонаучного цикла.

1. МНОЖЕСТВА.

Множество – это совокупность, класс отличающихся друг от друга объектов, объединенных каким – либо общим свойством.

Объекты, входящие в эту совокупность, называются ***элементами множества***.

Виды множеств:

Конечное множество – множество, состоящее из конечного числа элементов. Причем не важно, известно число элементов множества или нет.

Бесконечное множество – множество, состоящее из бесконечного числа элементов.

Число элементов конечного множества A называется ***мощностью*** и обозначается $|A|$.

Пустое множество – множество, не содержащее ни одного элемента. Обозначение: $\varnothing$.

Универсальное множество – множество, включающее все множества, участвующие в рассматриваемой задаче. Обозначение: $\mathcal{U}$.

Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, то A называют ***подмножеством*** множества B. Обозначают: $A \subset B$.

Множества A и B называются ***равными***, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Обозначают: $A = B$.

Операции над множествами

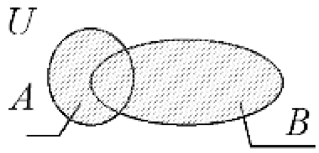
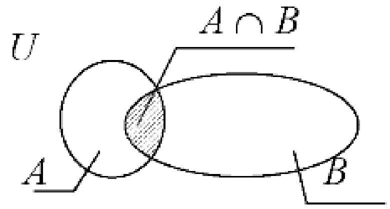
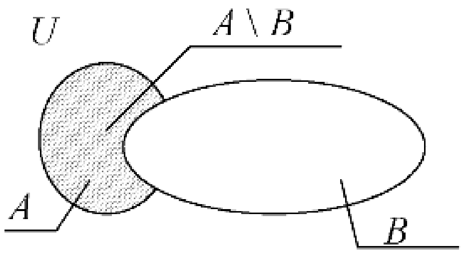
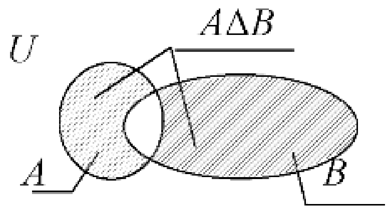
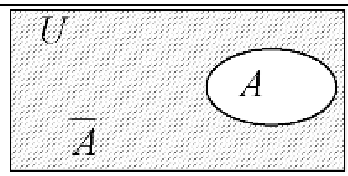
Объединением (суммой) множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cup B$, содержащее в себе все элементы исходных множеств A и B.

Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cap B$ и состоящее из элементов, которые принадлежат и множеству A и множеству B.

Разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \setminus B$ и состоящее из элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.

Если U - универсальное множество и $A \subset U$, то разность $U \setminus A$ называется ***дополнением*** множества A до множества U и обозначается $\overline{A}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \Delta B$ и состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат $A \setminus B$ или $B \setminus A$.

Название операции и обозначение	Определение	Диаграмма
Объединение $C = A \cup B$	$C = \{c \mid c \in A \text{ или } c \in B\}$	
Пересечение $C = A \cap B$	$C = \{c \mid c \in A \text{ и } c \in B\}$	
Разность $C = A - B$ или $C = A \setminus B$	$C = \{c \mid c \in A \text{ и } c \notin B\}$	
Симметричная разность $C = A \oplus B$ или $C = A \Delta B$	$C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	
Дополнение A в U $C = \overline{A}$	$C = U \setminus A$ $C = \{c \mid c \notin A\}$	

Теорема (о количестве подмножеств конечного множества): Если для конечного множества A его мощность равна m, то количество всех подмножеств данного множества, обозначаемое $P(A)$, равна 2^m.

Формула включений – исключений

Для двух множеств: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Для трех множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Прямым (декартовым) произведением множеств A и B называется множество всех пар $(a;b)$ таких, что $a \in A$, $b \in B$. Обозначается: $A \times B$.

Если $A = B$, то $A \times B = A \times A = A^2$ и называется ***декартовым квадратом***.

Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, то $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A^n$ и называется ***декартовой степенью n***.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Под ***высказыванием*** понимают всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, и при этом можно сказать истинно оно или ложно в данных условиях места и времени.

Логическими значениями высказывания являются «истина» и «ложь».

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, называется ***простым*** или ***элементарным***.

Высказывания, которые получаются из элементарных с помощью грамматических связок «не», «и», «или», «если …, то …», «тогда и только тогда», называются ***сложными*** или ***составными***.

Истинное значение высказывания обозначается цифрой – 1, а ложное – цифрой 0.

Логические операции над высказываниями

Отрицание. Отрицанием высказывания x называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если высказывание x истинно. Обозначается: $\bar{x}$. Читается: «не».

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Конъюнкция. Конъюнкцией (логическим умножением) двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания x и y истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно. Обозначается: $x \wedge y$. Читается: «и».

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция. Дизъюнкцией (логическим сложением) двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний x и y истинно, и ложным, если оба они ложны. Обозначается: $x \vee y$. Читается: «или».

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликация. Импликацией двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое считается ложным, если x истинно, а y - ложно, и истинным во всех остальных случаях. Обозначается: $x \to y$. Читается: «если x, то y» или «из x следует y».

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквиваленция. Эквиваленцией двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания x и y либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях. Обозначается: $x \leftrightarrow y$. Читается: «для того, чтобы x, необходимо и достаточно, чтобы y» или «x тогда и только тогда, когда y».

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Штрих Шеффера. Штрихом Шеффера двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое ложно, когда оба высказывания x и y истинны, и истинно во всех остальных случаях. Обозначается: $x|y$.

x	y	$x\|y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Стрелка Пирса. Стрелкой Пирса двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое истинно, когда оба высказывания x и y ложны, и ложно во всех остальных случаях. Обозначается: $x \downarrow y$.

x	y	$x \downarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Двоичное сложение (сложение по модулю 2). Двоичное сложение двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое ложно, когда оба высказывания имеют одинаковые логические значения, и истинно во всех остальных случаях. Обозначается: $x \oplus y$.

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Законы для двоичного сложения:

1) $x \oplus y \equiv y \oplus x$ (коммутативность);
2) $(x \oplus y) \oplus z \equiv x \oplus (y \oplus z)$ (ассоциативность);
3) $x \wedge (y \oplus z) \equiv (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$ (дистрибутивность);
4) $x \oplus 0 \equiv x$, $x \oplus 1 \equiv \bar{x}$ (операции с константами).

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции, называется ***формулой алгебры логики***.

Две формулы алгебры логики *A* и *B* называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в формулы элементарных высказываний. Обозначается *A*=*B*.

Формула *A* называется ***тождественно истинной*** (или ***тавтологией***), если она принимает значение *1* при всех значениях входящих в нее переменных.

Формула *A* называется ***тождественно ложной***, если она принимает значение *0* при всех значениях входящих в нее переменных.

Формула *A* называется ***выполнимой***, если она принимает значения и *0* и *1*.

Основные равносильности алгебры логики

1. Законы идемпотентности: $x \wedge x \equiv x$; $x \vee x \equiv x$.
2. Законы операций с константами: $x \wedge 1 \equiv x$; $x \vee 1 \equiv 1$; $x \wedge 0 \equiv 0$; $x \vee 0 \equiv x$
3. Закон противоречия: $x \wedge \bar{x} \equiv 0$.
4. Закон исключенного третьего: $x \vee \bar{x} \equiv 1$.
5. Закон двойного отрицания: $\bar{\bar{x}} \equiv x$.
6. Законы поглощения: $x \wedge (x \vee y) \equiv x$; $x \vee (x \wedge y) \equiv x$.
7. Закон де Моргана: $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$; $\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$.
8. Законы коммутативности: $x \wedge y \equiv y \wedge x$; $x \vee y \equiv y \vee x$.
9. Законы ассоциативности: $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$;
   $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$.
10. Законы дистрибутивности: $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
    $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
11. Законы выражения одних логических операций через другие:

импликация: $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$;

эквиваленция: $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x) \equiv (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)$;

штрих Шеффера: $x | y \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$;

стрелка Пирса: $x \downarrow y \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$;

двоичное сложение: $x \oplus y \equiv \overline{x \leftrightarrow y}$.

ДНФ.

Формула называется ***элементарной конъюнкцией***, если она является конъюнкцией переменных (простых высказываний) и их отрицаний.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) формулы *А* называется равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

КНФ.

Формула называется ***элементарной дизъюнкцией***, если она является дизъюнкцией переменных (простых высказываний) и их отрицаний.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) формулы *А* называется равносильная ей формула, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

СДНФ.

Свойства совершенства ДНФ:

1. Каждое логическое слагаемое содержит все переменные, входящие в данную формулу.
2. Все логические слагаемые различны.
3. Ни одно слагаемое не содержит одновременно переменную и её отрицание.
4. Ни одно слагаемое не содержит одну и ту же переменную дважды.

Дизъюнктивная нормальная форма, для которой выполняются свойства совершенства называется ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой***.

СКНФ.

Свойства совершенства КНФ:

1. Каждый логический множитель содержит все переменные, входящие в данную формулу.
2. Все логические множители различны.
3. Ни один множитель не содержит одновременно переменную и её отрицание.
4. Ни один множитель не содержит одну и ту же переменную дважды.

Конъюнктивная нормальная форма, для которой выполняются свойства совершенства называется ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой***.

Алгебра Буля

Рассмотрим непустое множество M элементов любой природы $\{x, y, z, \ldots\}$, в котором определены отношение «=» (равно) и три операции: «+» (сложение), «$\cdot$» (умножение) и «$\bar{\ }$» (отрицание), подчиняющиеся следующим аксиомам:

Коммутативные законы: 1а) $x+y=y+x$; 1б) $x\cdot y=y\cdot x$.

Ассоциативные законы: 2а) $x+(y+z)=(x+y)+z$; 2б) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$.

Дистрибутивные законы: 3а) $(x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z)$;

3б) $(x\cdot y)+z=(x+z)\cdot(y+z)$.

Законы идемпотентности: 4а) $x+x=x$; 4б) $x\cdot x=x$.

Закон двойного отрицания: 5) $\bar{\bar{x}}=x$.

Законы де Моргана: 6а) $\overline{x+y}=\bar{x}\cdot\bar{y}$; 6б) $\overline{x\cdot y}=\bar{x}+\bar{y}$.

Законы поглощения: 7а) $x+(y\cdot x)=x$; 7б) $x\cdot(y+x)=x$.

Такое множество M называется ***булевой алгеброй***.

В тех случаях, когда для некоторой системы аксиом удается подобрать конкретные объекты и конкретные соотношения между ними так, что все аксиомы выполняются, говорят, что найдена ***интерпретация*** (или ***модель***) данной системы аксиом.

Функцией алгебры логики n переменных (или ***функцией Буля***) называется функция n переменных, где каждая переменная принимает два значения: *0* и *1*, и при этом функция может принимать только одно из двух значений: *0* или *1*.

Тождественно ложные и тождественно истинные формулы алгебра логики представляют собой постоянные функции, а две равносильные формулы выражают одну и ту же функцию.

Многочлен Жегалкина

Многочленом Жегалкина называется многочлен, являющийся суммой константы и различных одночленов, в которые каждая из переменных входит не выше, чем в первой степени.

Многочлен Жегалкина булевой функции одной переменной:

$f(x_1)=a_0\oplus a_1x_1$.

Многочлен Жегалкина булевой функции двух переменных:

$f(x_1,x_2)=a_0\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus a_{12}(x_1\wedge x_2)$.

Многочлен Жегалкина булевой функции трех переменных:

$f(x_1,x_2,x_3)=a_0\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus a_3x_3\oplus a_{12}(x_1\wedge x_2)\oplus a_{13}(x_1\wedge x_3)\oplus a_{23}(x_2\wedge x_3)\oplus$
$\oplus a_{123}(x_1\wedge x_2\wedge x_3)$.

Коэффициенты a_1, a_2, …, $a_{12\ldots n}$ и свободный член a_0 принимают значения *0* или *1*, а число слагаемых в формуле равно 2^n, где n - число переменных.

Теорема Жегалкина: Каждая булева функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ может быть представлена в виде многочлена Жегалкина и притом единственным образом.

Многочлен Жегалкина называется ***нелинейным***, если он содержит конъюнкции переменных, а если он не содержит конъюнкции переменных, то он называется ***линейным***.

3. ТЕОРИЯ ГРАФОВ.

Граф G – это математический объект, состоящий из множества *вершин* $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ и множеством *ребер* $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$. То есть $G=(X,A)$

Если ребрам графа приданы направления от одной вершины к другой, то такой граф называется *ориентированным* (или орграфом). Ребра ориентированного графа называются дугами. Дуга (x_i,x_j) называется исходящей из вершины x_i и заходящей в вершину x_j.

Если направления ребер не указываются, то граф называется *неориентированным* (или просто графом).

Граф называется *простым*, если каждую пару вершин соединяет не более, чем одно ребро.

Граф, имеющий как ориентированные, так и неориентированные ребра, называется *смешанным*.

Различные ребра могут соединять одну и ту же пару вершин. Такие ребра называют *кратными*.

Граф, содержащий кратные ребра, называется *мультиграфом.*

Неориентированное ребро графа эквивалентно двум противоположно направленным дугам, соединяющим те же самые вершины.

Ребро, соединяющее вершину саму с собой, называется *петлей*.

Граф с кратными ребрами и петлями называется *псевдографом*.

Вершины x_i и x_j называются *инцидентными ребру* a, если эти вершины соединены a (как в случае ориентированного, так и в случае неориентированного ребра).

Две вершины называются *смежными*, если они инцидентны одному и тому же ребру.

Два ребра называются *смежными*, если они имеют общую вершину.

Степенью вершины x_i графа G называется число ребер, инцидентных этой вершине. Обозначается $\deg x_i$.

Вершина, имеющая степень 0, называется *изолированной*.

Вершина, имеющая степень 1, называется *висячей*.

Полустепенью захода вершины x_i (обозначается $d^-(x_i)$) называется число ребер, заходящих в x_i, *полустепенью исхода* x_i ($d^+(x_i)$) – число ребер, выходящих из неё.

Для ориентированного графа верно, что $\deg x_i = d^+(x_i)+d^-(x_i)$.

Граф, степени всех *k* вершин которого одинаковы, называется *однородным графом степени k*.

Подграфом графа G называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G. Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа.

Граф G называется *полным*, если для любой пары вершин x_i и x_j существует ребро (x_i,x_j).

Граф G называется *симметрическим*, если для любой дуги (x_i, x_j) существует противоположно ориентированная дуга (x_j, x_i).

Граф G называется *планарным*, если он может быть изображен на плоскости так, что не будет пересекающихся дуг.

Неориентированный граф $G=(X,A)$ называется *двудольным*, если множество его вершин X можно разбить на два подмножества X_1 и X_2 так, что каждое ребро имеет один конец в X_1, а другой в X_2.

Дополнением данного графа называется граф, состоящий из всех ребер и их концов, которые необходимо добавить к исходному графу, чтобы получить полный граф.

Графы $G_1=(X_1,A_1)$ и $G_2=(X_2,A_2)$ *изоморфны*, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами вершин X_1 и X_2, такое, что любые две вершины одного графа соединены тогда и только тогда, когда соответствующие вершины соединены в другом графе.

Матрицей смежности графа $G=(X,A)$ называется квадратная матрица $A=(a_{ij})$ порядка n (n – число вершин), у которой

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{если} (x_i, x_j)\in A,\\ 0, \text{если} (x_i, x_j)\notin \mathrm{A}.\end{cases}$$

Матрица смежности определяется одинаково для ориентированного и неориентированного графа.

Матрицей инцидентности ориентированного графа называется прямоугольная матрица $B=(b_{ij})$ размера $n\times m$ (n - число вершин, m - число ребер), у которой

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \text{если вершина } x_i \text{ является началом дуги } a_j;\\ -1, \text{если вершина } x_i \text{ является концом дуги } a_j;\\ 0, \text{если вершина } x_i \text{ не инцидентна дуге } a_j.\end{cases}$$

Матрицей инцидентности неориентированного графа называется прямоугольная матрица $B=(b_{ij})$ размера $n\times m$ (n - число вершин, m - число ребер), у которой

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \text{если вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } a_j;\\ 0, \text{если вершина } x_i \text{ не инцидентна ребру } a_j.\end{cases}$$

Маршрутом в неориентированном графе G называется такая последовательность ребер $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что каждые соседние два ребра a_i и a_{i+1} имеют общую инцидентную вершину.

Одно и то же ребро может встречаться в маршруте несколько раз.

Длиной маршрута называется число ребер, входящих в маршрут, причем каждое ребро считается столько раз, сколько оно входит в данный маршрут.

Замкнутый маршрут называется *циклом*.

Маршрут (цикл), в котором все ребра различны, называется *простой цепью* (*простым циклом*).

Маршрут (цикл), в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *элементарной цепью* (*элементарным циклом*).

Граф, в котором найдется маршрут, начинающийся и заканчивающийся в одной вершине, и проходящий по всем ребрам графа ровно один раз, называется *эйлеровым графом*.

Путем ориентированного графа называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей дуги.

Число дуг пути называется *длиной* пути.

Путь называется *контуром*, если его начальная вершина совпадает с конечной вершиной.

Путь (контур), в котором все дуги различны, называется *простым*.

Путь (контур), в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *элементарным*.

Неориентированный граф называется *связным*, если каждая пара различных вершин может быть соединена, по крайней мере одним маршрутом.

Ориентированный граф называется *сильно связным*, если для любых двух его вершин x_i и x_j существует хотя бы один путь, соединяющий их.

Ориентированный граф называется *односторонне связным*, если для любых двух его вершин, по крайней мере, одна достижима из другой.

Компонентой связности неориентированного графа называется его связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа данного графа.

Компонентой сильной связности ориентированного графа называется его сильно связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого сильно связного подграфа данного графа.

Компонентой односторонней связности ориентированного графа называется его односторонне связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого односторонне связного подграфа данного графа.

Пусть $G=(X,A)$ неориентированный граф с множеством вершин $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. Квадратная матрица $S=(s_{ij})$ порядка n, у которой

$$s_{ij}=\begin{cases}1, \text{если вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ принадлежат одной компоненте связности},\\ 0, \text{в противном случае.}\end{cases}$$

называется *матрицей связности* графа G.

Для ориентированного графа квадратная матрица $T=(t_{ij})$, у которой

$$t_{ij}=\begin{cases}1, \text{если существует путь из } x_i \text{ в } x_j,\\ 0, \text{в противном случае}\end{cases}$$

называется *матрицей односторонней связности* (*матрицей достижимости*).

Для ориентированного графа квадратная матрица $S=(s_{ij})$, у которой

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если существует путь из } x_i \text{ в } x_j \text{ и из } x_j \text{ в } x_i, \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

называется *матрицей сильной связности*.

Ориентированный граф называется *нагруженным*, если каждой дуге (x_i, x_j) этого графа сопоставлено некоторое число $w(x_i, x_j) = w_{ij}$, называемое *длиной* (или *весом*, или *стоимостью*) дуги.

Длиной пути s, состоящего из некоторой последовательности дуг (x_i, x_j), называется число $l(s)$, равное сумме длин дуг, входящих в этот путь.

Матрица $W = (w_{ij})$ называется *матрицей весов*, где w_{ij} - вес дуги (x_i, x_j), если дуга (x_i, x_j) существует, а для несуществующих дуг веса обычно помечают нулем или знаком ∞ (в зависимости от поставленной задачи).

Граф называется *разреженным*, когда число дуг достаточно мало по сравнению с числом вершин.

Говорят, что граф G представлен *списком дуг*, если граф задается двумя наборами $\overline{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_R)$ и $\overline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_R)$, где (x_{m_i}, x_{n_i}) - i-я дуга графа G.

Говорят, что граф представлен *структурой смежности*, которая получается составлением для каждой вершины x_i списка ее последователей, то есть всех вершин, с которыми данная вершина образует дуги.

Неориентированным деревом (или *деревом*) называется связный граф без циклов, содержащий n вершин и n-*1* ребер.

Если граф несвязный и не имеет циклов, то каждая его связная компонента будет деревом. Такой граф называется *лесом*.

Остовным деревом связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Пусть граф G имеет n вершин и m ребер. Число $\gamma = m - n + 1$ называется *цикломатическим числом* графа.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Ярыгин А.Н., Ярыгин О.Н.	Лекции и задачи по дискретной математике (от теории к алгоритмам)	Старый Оскол: ТНТ	2012	учебное пособие
Волокитин Г.И., Глушкова В.Н., Ларченко В.В., Мишняков Н.Т.	Элементы дискретной математики для инженера. Математическая логика	ДГТУ. - Ростов н/Д.: ИЦ ДГТУ	2014	учебно-методическое пособие
Ляхницкая О.В., Романенко Е.А.	Математическая логика	ДГТУ.- Ростов н/Д.: ИЦ ДГТУ	2013	учебное пособие
Тютюник Е.Г.	Дискретная математика	ДГТУ.- Ростов н/Д.: ИЦ ДГТУ	2011	учебное пособие
Игошин В.И.	Математическая логика и теория алгоритмов	М.: ACADEMIA	2010	учебное пособие
Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.	Задачи и упражнения по дискретной математике	М.: ФИЗМАТЛИТ	2009	учебное пособие
Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г.	Математическая логика. Курс лекций. Задачник - практикум и решения	СПб.: Лань	2009	учебное пособие
Глухов М.М., Козлитин О.А., Шапошников В.А., Шишков А.Б.	Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов	СПб.: Лань	2008	учебное пособие