ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Логическое моделирование»

Автор
Артамонова Е.А.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения направления бакалавриата 01.03.04 «Прикладная математика». Приведены теоретические материалы по основным темам, соответствующим изучению дисциплины «Логическое моделирование». Приведены образцы решения всех типовых заданий.

Автор

старший преподаватель кафедры
«Прикладная математика»
Артамонова Е.А.

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие содержит теоретический материал по основным разделам дисциплины «Логическое моделирование». Представлены основные теоретическими положения и понятия, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины, и подробное решение всех типовых задач. Выбор тематики осуществлялся на основе анализа ФГОС3+ по подготовке бакалавров технических направлений.

Учебное пособие дополняет курс лекций по дисциплине «Логическое моделирование» и будет полезно студентам в самостоятельной работе и при подготовке к текущему, рубежному и итоговому контролю знаний по данной дисциплине в различных формах, в том числе в форме интернет-экзамена, а также при изучении различных смежных дисциплин математического и естественнонаучного цикла.

1. КЛАССИФИКАЦИЯ ОСНОВНЫХ ТИПОВ КОМБИНАЦИЙ

Комбинаторика – раздел математики, связанный с решением задач выбора и размещения элементов конечного множества в соответствии с заданными правилами.

Каждое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества. Полученные конструкции называются комбинаторными конфигурациями.

Цель комбинаторного анализа заключается в изучении комбинаторных конфигураций, алгоритмов их построения, а также решении задач по их перечислению.

Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух основных правил - правила суммы и правила произведения.

Правило суммы. Пусть A, B – конечные множества, $|A| = n$, $|B| = m$. $|A \cup B| = m + n - |A \cap B|$, следовательно $|A \cup B| = m + n \leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Комбинированная интерпретация.

Если некоторый объект A можно выбрать n способами, а другой объект B можно выбрать m способами, то выбор "либо A, либо B" можно осуществить $n+m$ способами.

Правило произведения. Если мощность $|A| = n$, $|B| = m$, то $|A \times B| = m \cdot n$.

Комбинаторная интерпретация.

Если объект A можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) m способами, то пары объектов A и B можно выбрать $m \times n$ способами.

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ и $|A|$ - число элементов множества A. Составим декартово произведение $A \times B$ множеств A и B, т.е. множество пар (a_i, b_i).

$$a_i \in A, b_i \in B : A \times B = \begin{matrix} \{(a_1,b_1), & (a_1,b_2), & \cdots & (a_1,b_m), \\ (a_2,b_1), & (a_2,b_2), & \cdots & (a_2,b_m), \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_n,b_1), & (a_n,b_2), & \cdots & (a_n,b_m)\} \end{matrix}$$

Тогда правило произведения записывается следующим образом: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Пример. Сколько всего существует двузначных чисел?

Решение. Поскольку в двузначном числе цифра, обозначающая число десятков, должна быть отлична от нуля, то $A = \{1, 2, ..., 9\}$, $B = \{0, 1, 2, ..., 9\}$ и $A \times B = \{10, 11, \dots, 19, \dots, 90, 91, \dots, 99\}$, $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 90$.

Простейшими комбинаторными конфигурациями являются перестановки, размещения и сочетания.

Перестановки.

Пусть $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Перестановкой элементов множества M называется любой упорядоченный набор элементов $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, состоящий из n различных элементов множества M.

Перестановки отличаются друг от друга порядком следования элементов.

Теорема. Число всех перестановок равно $n!$

$P_n = n!$

Доказательство. На первом месте можно разместить n элементов, на втором – любой из оставшихся (n-1) элементов и т.д. Для последнего места остается 1 элемент. В силу правила произведения имеем:

$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$.

Пример. Сколькими способами можно разместить 5 студентов при наличии 5 мест.

$P_5 = 120$.

Размещения.

Пусть множество M состоит из n элементов. Размещением (упорядоченной выборкой) из n элементов по m элементов $(m \leq n)$ называется любой упорядоченный набор элементов $(a_{i1,} a_{i2}, \ldots, a_{in})$, состоящий из m различных элементов множества M.

Теорема. Число размещений n элементов по m элементов обозначается .A_n^m. Справедлива формула:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} P_n = n!$$

Доказательство. Размещение M элементов множества M можно представить, как заполнение некоторых m позиций элементами множества M. При этом первую позицию можно заполнить n способами, вторую позицию (n-1) способами. Последнюю позицию можно заполнить (n-m+1) способами.

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot\ldots\cdot (n-m+1) =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot\ldots\cdot (n-m+1)(n-m)(n-m-1) \cdot\ldots\cdot 1}{(n-m)(n-m-1) \cdot\ldots\cdot 1} == \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример. Из 10 книг производным образом берутся 3 книги и ставятся на полку. Сколько существует способов такой расстановки книг.

$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$.

Заметим, что размещение из n элементов по n элементам представляет собой перестановку, т.е.:

$A_n^m = P_n = n!$

Сочетания.

Сочетанием (неупорядоченной выборкой) из n элементов по m, где $m \leq n$, называется неупорядоченное подмножество множества M, состоящее из n различных элементов.

Теорема. Число сочетаний из n элементов по m обозначается как C_n^m и определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\, m!}$$

Доказательство. Если объединить размещения из n элементов по m, которые состоят из одних и тех же элементов (то есть не учитывать порядка расположения элементов), то получим сочетание из n элементов по m. Так как для каждого такого сочетания можно получить n! размещений. Тогда $A_n^m = m!\, C_n^m$ и, следовательно:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}.$$

Размещением (упорядоченной выборкой) с повторениями из n элементов по m называется любой упорядоченный набор $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, элементы которого могут повторяться. Поскольку в упорядоченном наборе может находиться любой из n элементов, то число размещений с повторениями (обозначение такого числа $\overline{A_n^m}$) равно n^m. Таким образом:

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

Пример. Из чисел 1, 2, 3, 4 составляются трехзначные числа. Сколько чисел можно получить таким образом.

$$\overline{A_4^3} = 4^3 = 64..$$

Сочетанием (неупорядоченной выборкой) с повторениями из n элементов по m элементов называется множество, состоящее из элементов, выбранных m раз из множества M. При этом допускается выбирать элемент повторно.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m обозначается $\overline{C_n^m}$.

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)}{m!\,(n-1)!}$$

Пример. Сколько существует различных результатов бросания двух одинаковых кубиков.

$$\overline{C_6^2} = C_7^2 = \frac{7!}{2!\,5!} = 21$$

Выбор элементов	Упорядоченная	Неупорядоченная
Без повторений	A_n^m	C_n^m
С повторениями	$\overline{A_n^m}$	$\overline{C_n^m}$

2. ЛАТИНСКИЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКИ

Пусть дано множество S из n элементов. Латинский прямоугольник, основанный на множестве S, есть прямоугольная $r \times s$ таблица.

$$A = (a_{ij}).\, i = 1,2,\dots,r;\, j = 1,2,\dots,s.$$

Каждая строка – упорядоченная выборка элементов множества S длины s, каждый столбец – упорядоченная выборка элементов множества S длины r, причем $r \le n$, $s \le n$.

Обозначим элементы S через 1,2,..,n. Предположим, что $s = n$. Тогда латинский прямоугольник содержит в каждой строке перестановку элементов 1,2,..,n. Эти перестановки выбраны так, что ни один столбец не содержит повторяющихся элементов.

Латинский прямоугольник называется нормализованным, если его первая строка записана в естественном порядке 1,2,..,n.

Теорема 1. *Для любых чисел $m \le n$ существует латинский $m \times n$ прямоугольник.*

Доказательство. Будем «заселять» наш m-этажный «дом» с верхнего этажа. На m-м этаже «расселим» числа 1, 2, 3,..., n в их естественном порядке. На *(т—1)*-м этаже «расселение» начнем с двойки: 2, 3,..., *п*,1; на (*т*—2)-м этаже — с тройки: 3, 4, ..., *п,* 1, 2, и так далее; наконец, на *т* -м этаже «расселение» начнем с числа *т: т,т+1, ...» ",* 1. 2,..., *т*—1. Тогда «дом» будет «заселен» так, как это сделано в таблице. Ясно, что при таком «заселении» нет двух одинаковых «жильцов», находящихся на одном «этаже» или в одном «подъезде». Следовательно, перед нами — «*т*-этажный» латинский прямоугольник длиной *п.* Значит, *т*х*п*-прямоугольники существуют.

Перейдем теперь к подсчету числа латинских прямоугольников. Особенно просто решается задача для одноэтажных прямоугольников.

Теорема 2. *Число латинских 1*х*n-прямоугольников равно* $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$

<u>Доказательство.</u> Латинский *1*х*п* – прямоугольник - это просто произвольная перестановка из *п* чисел. Таких перестановок всего *п!* (на первое место ставили любое из *п* чисел, на второе - любое из (*п*-1) оставшихся, на третье - любое из (*п*-2) оставшихся после этого и т. д.).

Перейдем к 2х*n* - прямоугольникам. Верхняя строка этого прямоугольника - любая перестановка.

Нижняя строчка - перестановка, в которой на каждом месте стоит число, не равное числу, стоящему на том же месте в первой перестановке. Если мы произвольным образом переставим столбцы нашего прямоугольника, он останется латинским, и при этом верхнюю перестановку можно сделать любой. Из этого видно, что какую бы конкретную перестановку мы ни взяли, число латинских прямоугольников, у которых верхняя строчка совпадает именно с этой перестановкой, будет одним и тем же для всех перестановок. Назовем латинский 2х*п*-прямоугольник *нормализованным,* если в его верхней строчке числа стоят подряд: 1, 2, 3, ..., (*п-1*), *п.* Из сказанного видно, что число *L*(2, *п)* латинских 2х*п*-прямоугольников равно числу D_n нормализованных латинских 2х*п*-прямоугольников, умноженному на число перестановок *п* чисел, т. е. $L(2,n) = n!\cdot D_n$

Для числа D_n нормализованных латинских 2х*п*-прямоугольников имеется несколько изящных формул.

Теорема 3. (Формула Эйлера).

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

Таблица

1	2	3	…	$n-1$	n
2	3	4	…	n	1
…	…	…	…	…	…
m	$m+1$	$m+2$	…	$m-2$	$m-1$

Это, как говорят, рекуррентная формула: если мы знаем D_1 и D_2, а, очевидно, D_1=0 и D_2=1, то мы можем найти с ее помощью последующие D_n:

$D_3 = 2\cdot(1+0) = 2$

$D_4 = 3\cdot(2+1) = 9$

$D_5 = 4\cdot(9+2) = 44$

$D_6 = 5\cdot(44+9) = 265$

и т. д.

Доказательство. Всякую перестановку можно записать как систему циклов. Это делается так. Пусть, скажем, на 1-м месте стоит k_1, пишем $1 \to k_1$. Если на k_1-м месте стоит k_2, напишем $1 \to k_1 \to k_2$. Затем $1 \to k_1 \to k_2 \to k_3$ и так до тех пор, пока мы снова не дойдем до единицы. Затем берем самое маленькое из чисел, не вошедших в наш цикл, и строим цикл, начиная с него. В конце концов все *n* чисел окажутся стоящими в циклах. Число циклов может быть любым от 1 до *n*, и длина цикла может быть любой от 1 до *n*. Наше условие - что ни одно число не стоит на своем месте - запрещает циклы длиной 1.

Теперь построим по нашей перестановке перестановку длиной *n*-1 или *n*-2 и тоже без циклов длиной 1. Найдем на одном из циклов число *n*. Если длина этого цикла больше двух, мы просто выбросим *n* и соединим «накоротко» *pcq*. Если же *n* входит в цикл длиной 2, например в изображенный на рисунке 5, мы просто выбросим этот цикл и уменьшим все числа от *k+1* до *n-1* на единицу: $k+1 \to k, k+2 \to k+1, \ldots, n-1 \to n-2$.

В первом случае получится перестановка (*n*-1) чисел, во втором случае – перестановка (*n-2*) чисел. Сколькими способами у нас может получиться перестановка (*n-1*) чисел? Ясно, что (*n*-1) способами: чтобы вернуться к перестановке длиной *n,* мы должны разорвать любую стрелку $p \to q$ (а их (*n*-1) пар) и вставить туда *n:* $p \to n \to q$. Сколькими способами получается перестановка (*n-2*) чисел? Снова (*n*-1) способами: мы добавляем цикла $n \leftrightarrow k$, где *k* - любое число от 1 до (*n*-1), и увеличиваем на единицу числа $k, k+1, \ldots, (n-2)$. Значит $D_n = (n-1)D_{n-1} + (n-1)D_{n-2}$

что и требовалось.

Обозначая через *L*(*r, n*) число $r \cdot n$ латинских прямоугольников, а *K*(*r, n*) – число нормализованных $r \cdot n$ латинских прямоугольников.

$L(r,n) = n!K(r,n)$

Задача о перечислении латинских прямоугольников не решена в общем случае.

$$K(2,n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + .. + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \approx n!e^{-1}$$

Формула для *K*(*3, n*) имеет сложное выражение.

Если *s*= *r*= *n*, то латинский прямоугольник называется латинским квадратом порядка *n*.

Латинский квадрат может рассматриваться, как таблица умножения в общих алгебраических системах.

$$L(n, n) = n!(n-1)!I_n$$

I_n – число квадратов порядка *n*, в которых элементы первой строки и первого столбца расположены в естественном порядке.

n	1	2	3	4	5	6	7
I_n	1	1	1	4	56	9408	16947080

Латинские квадраты $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называются ортогональными, если упорядоченная пара $(a_{ij},b_{ij})\neq(a_{kl},b_{kl})$ при $(i,j)\neq(k,l)$, где $i,j,k,l\in S=\{1,2,..,n\}$. где

(a_{ij},b_{ij}) - элемент, расположенный на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца матрицы, полученной наложением латинских квадратов *A* и *B*. Для всех $n>2, n\neq 6$ есть пары ортогональных квадратов. Для *n*= 6 таких пар нет.

Несколько латинских квадратов одного порядка называются попарно ортогональными, если любые 2 из них ортогональные.

Существует ряд методов построения ортогональных латинских квадратов. Они предназначены для получения возможно большого числа попарно ортогональных латинских квадратов порядка *n*. Такие латинские квадраты применяются в математической статистике, теории информации, планировании экспериментов.

3. КОНЕЧНАЯ ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Конечная проективная плоскость π - математическая система, составленная из одних элементов, называемых «точками» и из других элементов, называемых «прямыми».

Точки и прямые связаны отношением инцидентности. Предполагается, что существует определенное соотношение «точка *P* лежит на прямой *L*», или эквивалентное соотношение «прямая *L* проходит через точку *P*».

Это соотношение удовлетворяет постулатам:

1. Две различные точки π лежат на одной прямой π.
2. Две различные прямые проходят через одну и только одну точку π.
3. Существует 4 различных точки π, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой.

Постулаты 1 и 2 являются основными. Постулат 3 служит для того, чтобы исключить некоторые вырожденные системы, удовлетворяющие только 1 и 2.

Из постулатов следует: существует 4 различных прямых π, никакие 3 из которых, не проходят через одну и ту же точку. Таким образом, предложение, относящееся к проективной плоскости имеет двойственное значение, получаемое заменой слов «точка» и «прямая», а также выражений «точка *P* лежит на прямой *L*» и «прямая *L* проходит через точку *P*».

Проективная плоскость π называется <u>конечной</u>, если она содержит конечное число точек.

Число $n\in N$ называется порядком плоскости π. Пусть задана конечная проективная плоскость π порядка *n*. Тогда число точек, лежащих на любой прямой плоскости π также, как и число прямых, проходящих через любую точку плоскости π равно $(n+1)$.

Плоскость π имеет всего n^2+n+1 точек, и столько же прямых. Наименьшая проективная плоскость имеет порядок *n*= 2.

Следующее множество точек 1,2,..,7 образует 7 прямых.

$L_1 = \{1,2,4\}$

$L_2 = \{1,3,5\}$

$L_3 = \{3,4,6\}$

$L_4 = \{4,5,7\}$

$L_5 = \{5,6,1\}$

$L_6 = \{6,7,2\}$

$L_7 = \{7,1,3\}$

4. БЛОК-СХЕМА МНОЖЕСТВА

Блок-схема – система подмножеств конечного множества V, удовлетворяющая следующим условиям:

Она задается упорядоченной парой множеств (V, B), где $V = \{a_1, a_2, .., a_v\}$, $B = \{B_1, B_2, .., B_b\}$

$B_i \subseteq V, i = 1,2,..,b$

Элементы множества V называют элементами блок-схемы. Элементы множества элементы множества B называются блоками.

Элемент a_i и блок B_j называются инцидентными, если $a_i \in B_j$.

Пусть $k_j = |B_j|$- число элементов, инцидентных блоку B_j, r_i – число блоков, инцидентных a_i.

$\lambda_{il} = \left|\{B_j \mid a_i \in B_j, a_l \in B_j\}\right|$- количество блоков, содержащих пару элементов $\{a_i, a_l\}$.

Числа $v, b, r_i, k_j, \lambda_{il}$ называются <u>параметрами</u> блок-схемы.

Если $r_i = r$ (i = 1,2,..,v) и $k_j = k$ (j= 1,2,..,b), $\lambda_{il} = \lambda$ $(i,l = 1,2,..,v)$, то блок-схема называется <u>уравновешенной неполной блок-схемой</u> (BIB- схемой) с параметрами v, b, r, k, λ.

Если среди чисел $\lambda_{il}, (i,l = 1,2,..,v)$ встречаются равно m различных $\lambda_1,..,\lambda_m$, то блок-схема называется <u>частично уравновешенной неполной блок-схемой</u> с m типами связей ($PBIB(m)$-схема).

Всякой блок-схеме с v элементами и b-блоками соответствует <u>матрица инцидентности</u> $A=(c_{ij})$, где c_{ij}= 1, если $a_i \in B_j$ и $c_{ij} = 0$ в противном случае (i = 1,2,..,v), (j= 1,2,..,b)

Параметры BIB-схемы связаны соотношениями:

$vr = kb,$

$\lambda(r-1) = r(k-1)$

Матрица инцидентности здесь удовлетворяет основному матричному соотношению $AA^T = (r-\lambda)E + \lambda I,$ (*)

где E – единичная матрица порядка v, I – матрица порядка v, состоящая сплошь из одних единиц.

Существование матрицы, элементы которой 0 и 1, и удовлетворяющей условию (*) является достаточным условием существования BIB-схемы с заданными характеристиками.

BIB-схема, в которой *b*= *v*(*r* = *k*) называется <u>симметричной блок-схемой</u> или <u>(v, k, λ) – конфигурацией</u>.

Среди *BIB* схем выделяются подклассы:

1. Система Штайнера $(\lambda = 1)$, «система троек Штайнера» ($k = 3$).
2. Адамаровы конфигурации $(v = b = 4t - 1, r = k = 2t - 1, \lambda = t - 1, t \geq 2)$.
3. Проективные конечные геометрии.

Блок-схемы применяются в планировании экспериментов, теории игр, теории кодировании и других областях.

5. МЕТОД ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ

Комбинаторные числа не всегда определяются непосредственно по известным комбинаторным конфигурациям. Часто используются различные способы сведения одних комбинаторных комбинаций к другим. Простейший из этих способов – метод включений и исключений. В этом методе комбинаторная комбинация представляет собой объединение других комбинаторных конфигураций, число которых легко вычислить непосредственно. Таким образом, возникает задача вычисления числа комбинаторных конфигураций в объединении. В простейшем случае справедлива формула.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

<u>Доказательство</u>. Можно выделить три непересекающихся между собой области, тогда

$$A = [A \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B)$$
$$B = [B \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B)$$
$$A \cup B = [A \setminus (A \cap B)] \cup [B \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B)$$

Указанные в этих объединениях множества не пересекаются, поэтому можно воспользоваться правилом суммы для определения их мощности, т.е.

$$|A| = |A \setminus (A \cap B)| + |A \cap B|$$
$$|B| = |B \setminus (A \cap B)| + |A \cap B|$$
$$|A \cup B| = |A \setminus (A \cap B)| + |B \setminus (A \cap B)| + |A \cap B|$$

Подставим из первых двух равенств в 3е, получим

$$|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

В более сложном случае имеет место равенство

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

<u>Доказательство</u>.

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap C \cap B \cap C|) = \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

<u>Пример</u>. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Всего натуральных чисел меньших тысячи 999.Из них

1) $999:3 = 333$ делятся на 3
2) $999:5 = 199$ делятся на 5
3) $999:7 = 142$ делятся на 7

4) $999:(3\times 5)=66$ делятся на 3 и 5
5) $999:(3\times 7)=47$ делятся на 3 и 7
6) $999:(5\times 7)=28$ делятся на 5 и 7
7) $999:(3\times 5\times 7)=9$ делятся на 3, на 5 и на 7

В результате имеем
$X=999-(333+199+142-66-47-28+9)==457$

6. МОЩНОСТЬ ОБЪЕДИНЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Формула, известная как принцип включения и исключения позволяет вычислить мощность объединения множеств, если известны их мощности и мощности их пересечений. А именно, справедлива теорема.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right|+\dots+(-1)^{n-1}\sum_{1\le i_1\le i_2\le\dots\le i_k\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right|+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

<u>Доказательство</u>. Проводится методом математической индукции. При $n=2$ в силу установленного ранее равенства, имеем:

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$$

т.е. теорема справедлива.

Предположим, что формула верна при $n-1$, т.е.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n-1}|A_i|-\sum_{1\le i_1\le i_2\le n-1}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right|+\dots+(-1)^{n-2}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

Тогда при n имеем

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\left|\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\cup A_n\right|=\left|\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right|+|A_n|-\left|\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\cap A_n\right|=$$
$$=\left|\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right|+|A_n|-\left|\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i\cap A_n)\right|$$
$$=\left[\sum_{i=1}^{n-1}|A_i|-\sum_{1\le i_1\le i_2\le n-1}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right|+\dots+(-1)^{n-2}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|\right]+A_n$$
$$-\left[\sum_{i=1}^{n-1}|A_i\cap A_n|-\sum_{1\le i_1\le i_2\le n-1}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_n\right|+\dots+(-1)^{n-2}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|\right]$$
$$=$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n-1}|A_i|+|A_n|\right)-\left(\sum_{1\le i_1\le i_2\le n-1}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right|+\sum_{i=1}^{n-1}|A_i\cap A_n|\right)+\cdots$$
$$+(-1)^{n-2}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$
$$=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right|+\dots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

Т.е. теорема доказана

Рассмотрим следующую ситуацию. Множество A имеет N элементов с n одноместными отношениями $P_1, P_2, \dots, P_n$. Каждый из N элементов может обладать или не обладать любым из этих свойств.

$N_{i_1,\dots,i_k}$ - число элементов, обладающих k свойствами $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_n}$ и может быть некоторыми другими.

$N(0)$ – число элементов, не обладающих ни одним из этих свойств. Это число определяется формулой включений и исключений.

$N(0) = s_0 - s_1 + s_2 + \dots + (-1)^n s_n$

$s_0 = N$

$$s_k = \sum_{1<i_1<i_2<\dots<i_k} N_{i_1,\dots,i_k}, (k = 1,2, \dots, n)$$

Обобщая эту формулу, получаем выражение, позволяющее вычислить число элементов, обладающих R свойствами.

$$N(r) = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k C_{r+k}^{r} S_{r+k}$$

$N(1) = S_1 - 2S_2 + 3S_3$

$S_1 = N_1 + N_2 + N_3$

$S_2 = N_{12} + N_{13} + N_{23}$

$S_3 = N_{123}$

<u>Пример</u>. Сколько положительных чисел от 20 до 1000 делятся ровно на одно из чисел 7,11,13.

На 7 делятся 142 числа, из них на 11 делятся 12 чисел, на 13 – 10 чисел.

На 11 делятся 90 числа, из них на 7 делятся 12 чисел, на 13 – 6 чисел.

На 13 делятся 76 числа, из них на 7 делятся 10 чисел, на 12 – 6 чисел.

120 + 72 + 60 – 4 = 248.

7. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВКЛЮЧЕНИЯ И ИСКЛЮЧЕНИЯ

Рассмотрим применение принципа включения и исключения на следующем примере. Пусть p_n – число всех булевых функций n переменных, т.е. $p_n = |P_2(n)| = 2^{2^n}$

Обозначим $\widetilde{p_n}$ – число булевых функций существенно зависящих от всех n переменных; P_n^i – множество булевых функций, у которых переменная x_i фиктивная.

Тогда: $\widetilde{p_n} = |P_2(n) \setminus (P_n^1 \cup P_n^2 \dots \cup P_n^n|$. Заметим, что $|P_n^i| = 2^{2^{n-1}}$ и $|P_n^{i_1} \cap \dots \cap P_n^{i_k}| = 2^{2^{n-k}}$. Следовательно

$$\widetilde{p_n} = 2^{2^n} - \left[\sum_{i=1}^{n} |P_n^i| - \sum_{1\le i_1 \le i_2 \le n} |P_n^{i_1} \cap P_n^{i_2}| + \dots + (-1)^{n-1} |P_n^1 \cap \dots \cap P_n^n|\right] =$$

$$= 2^{2^n} - [C_n^1 2^{2^{n-1}} - C_n^2 2^{2^{n-2}} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^n * 2] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i 2^{2^{n-i}}$$

Одной из самых больших загадок математики является расположение простых чисел в ряду всех натуральных чисел. Иногда два простых числа идут через одно, (например, 17 и 19, 29 и 31), а иногда подряд идет миллион составных чисел. Сейчас ученые знают уже довольно много о том, сколько простых чисел содержится среди N первых натуральных чисел. В этих подсчетах весьма полезным оказался метод, восходящий еще к древнегреческому ученому Эратосфену. Он жил в третьем веке до новой эры в Александрии.

Эратосфен занимался самыми различными вопросами - ему принадлежат интересные исследования в области математики, астрономии и других наук. Впрочем, такая разносторонность привела его к некоторой поверхностности. Современники несколько иронически называли Эратосфена "во всем второй": второй математик после Евклида, второй астроном после Гиппарха и т.д.

В математике Эратосфена интересовал как раз вопрос о том, как найти все простые числа среди натуральных чисел от 1 до N. Эратосфен считал 1 простым числом. Сейчас математики считают 1 числом особого вида, которое не относится ни к простым, ни к составным числам. Эратосфен придумал для подсчёта простых чисел следующий способ. Сначала вычеркивают все числа, делящиеся на 2 (исключая само число 2). Потом берут первое из оставшихся чисел (а именно 3). Ясно, что это число - простое. Вычеркивают все идущие после него числа, делящиеся на 3. Первым оставшимся числом будет 5. Вычеркивают все идущие после него числа, делящиеся на 5, и т.д. Числа, которые уцелеют после всех вычеркиваний, и являются простыми. Так как во времена Эратосфена писали на восковых табличках и не вычеркивали, а "выкалывали" цифры, то табличка после описанного процесса напоминала решето. Поэтому метод Эратосфена для нахождения простых чисел получил название "решето Эратосфена".

Подсчитаем, сколько останется чисел в первой сотне, если мы вычеркнем по методу Эратосфена числа, делящиеся на 2, 3 и 5. Иными словами, поставим такой вопрос: сколько чисел в первой сотне не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5? Эта задача решается по формуле включения и исключения.

Обозначим через α_1 свойство числа делиться на 2, через α_2 - свойство делимости на 3 и через α_3 - свойство делимости на 5. Тогда $\alpha_1\alpha_2$ означает, что число делится на 6, $\alpha_1\alpha_3$ означает, что оно делится на 10, и $\alpha_2\alpha_3$ - оно делится на 15. Наконец, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ означает, что число делится на 30. Надо найти, сколько чисел от 1 до 100 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, то есть не обладает ни одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. По формуле имеем

$$N(\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3) = 100 - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + N(\alpha_2\alpha_3) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$$

Но чтобы найти, сколько чисел от 1 до N делится на n, надо разделить N на n и взять целую часть получившегося частного. Поэтому

$N(\alpha_1) = 50, N(\alpha_2) = 33, N(\alpha_3) = 20, \ N(\alpha_1\alpha_2) = 16, \ N(\alpha_1\alpha_3) = 10, \ N(\alpha_2\alpha_3) = 3,$

а значит $N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 32.$

Таким образом, 32 числа от 1 до 100 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5. Эти числа и уцелеют после первых трех шагов процесса Эратосфена. Кроме них останутся сами числа 2, 3 и 5. Всего останется 35 чисел. А из первой тысячи после первых трех шагов процесса Эратосфена останется 335 чисел. Это следует из того, что в этом случае $N(\alpha_1) = 500, N(\alpha_2) = 333, N(\alpha_3) = 200, \ N(\alpha_1\alpha_2) = 166, N(\alpha_1\alpha_3) = 100, \ N(\alpha_2\alpha_3) = 66,$ а значит $N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 33.$

8. РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ

Рекуррентным соотношением (уравнением, рекуррентной формулой) называется соотношение вида $a_{n+k} = F(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1})$, которое позволяет вычислить все члены последовательности $a_0, a_1, a_2, ..$, если заданы её первые k членов. k – порядок рекуррентного уравнения.

Примеры. 1) $a_{n+1} = a_n + d$ - арифметическая прогрессия.

2) $a_{n+1} = q \cdot a_n$ - геометрическая прогрессия.

3) $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ - последовательность чисел Фибоначчи.

В случае, когда рекуррентное уравнение линейно и однородно, то есть выполняется соотношение вида

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \cdots + p_k a_n = 0 \quad (p_i = const) \qquad (1)$$

Последовательность $a_0, a_1, a_2, ..$, удовлетворяющая данному уравнению называется возвратной.

Многочлен

$$F_a(x) = x^k + p_1 x^{k-1} + \cdots + p_k \qquad (2)$$

называется характеристическим многочленом для возвратной последовательности $\{a_i\}$.

Корни этого многочлена называются характеристическими. Множество всех последовательностей, удовлетворяющих рекуррентному уравнению (1) называется его общим решением.

Общее решение однородного линейного рекуррентного уравнения имеет аналогию с решением линейного дифференциального уравнения. А именно, справедливы теоремы.

Теорема 1. Пусть λ - корень характеристического многочлена (2), тогда последовательность $\{c\lambda^n\}$, где c – производная константа, удовлетворяет уравнению (1).

Теорема 2. Если $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ - простые корни характеристического многочлена (2), то общее решение рекуррентного уравнения (1) имеет вид:

$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_k\lambda_k^n$, где $c_1, c_2, .., c_k$ – произвольные константы.

Теорема 3. Если λ_i - корень кратности τ_i ($i = 1,2,..,s$) характеристического многочлена (2), то общее решение рекуррентного уравнения (1) имеет вид: $a_n = \sum_{i=1}^{s}(c_{i1} + c_{i2}n + \cdots + c_{i\tau_i}n^{\tau_i - 1})\lambda_i^n$, где c_{ij} – произвольные константы.

Зная общее решение рекуррентного уравнения (1), по начальным условиям $a_0, a_1, .., a_{k-1}$, можно найти неопределенные постоянные c_{ij}, и тем самым получить частное уравнении (1) с данными условиями.

Пример. Найти последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющую рекуррентному уравнению

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$$

$$a_1 = 10,$$

$$a_2 = 16.$$

Характеристический многочлен

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x_1 = 1,$

$x_2 = 3.$

$a_n = c_1 + c_2 \cdot 3^n$

$$\begin{cases} a_1 = c_1 + c_2 \cdot 3 = 10 \\ a_2 = c_1 + c_2 \cdot 9 = 16 \end{cases}$$

$6c_2 = 6,$

$c_2 = 1,$

$c_1 = 7 + 3^n.$

Рассмотрим линейное неоднородное рекуррентное уравнение

$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \ldots + p_k a_n = f(n), (n = 0, 1, 2, \ldots)$ (3)

Пусть $\{b_n\}$ – общее решение однородного уравнения (1). $\{c_n\}$ – частное (конкретное) решение неоднородного уравнения (3).

Тогда последовательность $\{b_n + c_n\}$ образует общее решение уравнения (3). Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 4. Общее решение линейного неоднородного рекуррентного уравнения представляется в виде суммы общего решения соответствующего линейного однородного рекуррентного уравнения и некоторого частного решении неоднородного уравнения.

В результате, задача нахождения общего решения неоднородного уравнения (3) сводится к нахождению его частного решения. В отдельных случаях имеются рецепты нахождении частного решения.

1) Если $f(n) = \beta^n$, (где β не является корнем характеристического уравнения), то частное решение следует искать в виде $c_n = C\beta^n$. Тогда, подставляя его в (3), получаем: $C(\beta^{n+k} + p_1\beta^{n+k-1} + \ldots + p_k\beta^n) = \beta^n$,

$C(\beta^k + p_1\beta^{k-1} + \ldots + p_k)\beta^n = \beta^n.$

Отсюда $C = \frac{1}{\beta^k + p_1\beta^{k-1} + \ldots + p_k} = \frac{1}{P_a(\beta)}$

В результате, частное решение задаётся формулой $c_n = \frac{1}{P_a(\beta)} \cdot \beta^n$

2) Пусть $f(n)$–многочлен степени r от переменной n, и число 1 не является характеристическим корнем. Тогда $P_a(1) = 1 + p_1 + \ldots + p_k \neq 0$ и частное решение следует искать в виде

$$c_n = \sum_{i=0}^{r} d_i n^i.$$

Подставляя c_n в (3) вместо a_n, получаем

$$\sum_{i=0}^{r} d_i (n+k)^i + p_1 \sum_{i=0}^{r} d_i (n+k-1)^i + \ldots + p_k \sum_{i=0}^{r} d_i n^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{r} d_i \left((n+k)^i + p_1 (n+k-1)^i + \ldots + p_k n^i\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{r} d_i (g_1 n^i + \ldots) = f(n)$$

Сравнивая коэффициенты левой и правой частей полученного равенства, найдём соотношения для чисел d_i, позволяющие эти числа определить.

Пример. Найти решение рекуррентного уравнения $a_{n+1} + 2a_n = n + 1$ с начальным условием $a_0 = 1$.

Решение. Рассмотрим характеристический многочлен данного рекуррентного уравнения $P_a(x) = x + 2$.

Его корень $\lambda = -2$. Тогда по теореме 1 общее решение соответствующего однородного рекуррентного уравнения $a_{n+1} + 2a_n = 0$ задаётся формулой $b_n = c(-2)^n$, где c – произвольная константа.

Так как $P_a(1) = 3 \neq 0$, т.е. единица не является корнем характеристического многочлена, а правая часть $f(n) = n + 1$ есть многочлен первой степени, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде полинома первой степени с неопределёнными коэффициентами $c_n = d_0 + d_1 n$, где d_0 и d_1 – неизвестные коэффициенты. Подставив c_n вместо a_n в исходное уравнение, получим $d_0 + d_1(n + 1) + 2(d_0 + d_1 n) = n + 1$ или $3d_1 + (3d_0 + d_1) = n + 1$. Приравнивая коэффициенты левой и правой части последнего равенства, получаем систему уравнений для определения неизвестных d_0 и d_1:

$$\begin{cases} 3d_0 + d_1 = 1 \\ \quad 3d_1 = 1 \end{cases}.$$

Отсюда, находим: $d_0 = \frac{2}{9}$ и $d_1 = \frac{1}{3}$. Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид $c_n = \frac{2}{9} + \frac{1}{3}n$. По теореме 4 получаем общее решение неоднородного рекуррентного уравнения $a_n = b_n + c_n = \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{3}n + c(-2)^n$. Из начального условия $a_0 = 1$, находим $c = \frac{7}{9}$. В результате, окончательно имеем:

$$a_n = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{7}{9}(-2)^n.$$

9. МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Для решения комбинаторных задач могут быть использованы методы математического анализа. Основой этого служит метод производящих функций. Этот метод позволяет достичь изучения свойств последовательностей. Он применяется для перечисления комбинаторных чисел и для установления комбинаторных тождеств.

Исходным пунктом этого метода является последовательность комбинаторных чисел $\{a_k\}$ и последовательность базисных функций $\varphi_k(x), (k = 0,1,\ldots)$.

Рассмотрим формальный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$$

В частности, если последовательность конечна, т.е. $0 \leq k \leq n$, то ряд представляет собой многочлен. При определенных ограничениях, ряд будет сходиться и тогда, в некоторой области он будет задавать функцию

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$$

Функция $F(x)$ называется производящей функцией для заданной последовательности комбинаторных чисел $\{a_k\}$ относительно заданной базисной последовательности функций $\varphi_k(x)$.

Наиболее часто в качестве базисной рассматривается последовательность $\varphi_k(x) = x^k$, (k = 0,1,..). Получающиеся при этом производящие функции называются обычными. Т.е. обычные производящие функции имеют вид:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

В комбинаторном анализе используются также экспоненциальные производящие функции

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$$

Для производящих функций по аналогии со сходящимися рядами определяются операции сложения, умножения, дифференцирования, интегрирования и т.д. при этом x является действительной или комплексной переменной. При выполнении условий сходимости производящие функции являются аналитическими.

10. ПРИМЕРЫ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Получим производящую функцию для конечной последовательности чисел, представляющих собой различное число сочетаний изn элементов - $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$. Известно, что $(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$ и $(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$.Эти равенства являются частными случаями более общей формулы, дающей разложение для $(a+x)^n$. Запишем $(a+x)^n$ в виде $(a+x)^n = (a+x)(a+x)\dots(a+x)$.

Раскроем скобки в правой части этого равенства, причем будем записывать все множители в том порядке, в котором они нам встретятся. Например,$(a+x)^2$ запишем в виде: $(a+x)^2 = (a+x)(a+x) = aa + ax + xa + xx$, а $(a+x)^3$- в виде: $(a+x)^3 = (a+x)(a+x)(a+x) = aaa + aax + axa + axx + xaa + xax + xxa + xxx$.

Видно, что в верхнюю формулу входят все размещения с повторениями, составленные из букв x и a по две буквы в каждом размещении, а в нижнюю формулу - размещения с повторениями из тех же букв, но состоящие из трех букв каждое. То же самое и в общем случае — после раскрытия скобок в формуле мы получим всевозможные размещения с повторениями букв x и a, состоящие из n элементов. Приведем подобные члены. Подобными будут члены, содержащие одинаковое количество букв x (тогда и букв a в них будет поровну). Найдем, сколько будет членов, в которые входит k букв x и, соответственно, $(n-k)$ букв a. Эти члены являются перестановками с повторениями, составленными из k букв x и $(n-k)$ букв a. Поэтому их число равно $P(k, n-k) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Отсюда вытекает, что после приведения подобных членов выражение $x^k a^{n-k}$ войдет с коэффициентом $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Итак, мы доказали, что

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + \dots + C_n^k a^{n-k} x^k + \dots + + C_n^n x^n.$$

Это равенство принято называть формулой бинома Ньютона. Если положить в этом равенстве $a = 1$, то получим

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^k x^k + \dots + + C_n^n x^n.$$

Мы видим, что $(1+x)^n$ является производящей функцией для чисел $C_n^k, k=0,1,\ldots$. С помощью этой производящей функции можно сравнительно просто доказать многие свойства чисел C_n^k.

Пусть $a_k = C_n^k$, (k=0,1,…,n), $\varphi_k(x) = x^k$. Тогда

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k$$

В данном случае в качестве производящей функции выступает бином Ньютона $(1+x)^n$.

Используя заданную производящую функцию, докажем тождество:

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$$

Для этого возьмем тождество $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$

Они эквивалентны следующему

$$\sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i x^i = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)\left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m\right)$$

Сравнивая коэффициенты при x^n, получим

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$$

Числа Фибоначчи – это элементы числовой последовательности, в которой каждый последующий элемент равен сумме двух предыдущих. Т.е. последовательность чисел Фибоначчи задается рекуррентным уравнением:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ и $a_0 = a_1 = 1$

Воспользуемся понятием производящей функции для выражения общего члена чисел Фибоначчи.

Возьмем в качестве последовательности базисных функций $\varphi_n(x) = x^n$.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится при $|x| < \frac{1}{2}$ и определяет производящую функцию

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Помножив данное выражение на x и на x^2, получим:

$$xF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$$x^2F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

Сложив эти два выражения имеем:

$$xF(x) + x^2F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2})x^n + x + 1 - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 1 = F(x) - 1$$

Следовательно

$$(1-x-x^2)F(x)=1.$$

Отсюда получается явный вид производящей функции

$$F(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$$

Корни знаменателя определяются из уравнения $x^2+x-1=0$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Разложим *F(x)* на элементарные дроби, т.е.

$$F(x)=-\frac{1}{x^2+x-1}=-\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)=\frac{A(x_2-x)+B(x_1-x)}{x^2+x-1}$$

$$Ax_2-Ax+Bx_1-Bx=-1, A=-B$$

$$B=\frac{-1}{x_1-x_2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Т.е. получим

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1-x}-\frac{1}{x_2-x}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}+\frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right)$$

Рассмотрим сумму бесконечно убывающих геометрических прогрессий

$$\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n;\ \frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n$$

При $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ и $\left|\frac{x}{x_2}\right|<1$

Следовательно

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n-\frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x_2^{n+1}-x_1^{n+1}}{(x_1x_2)^{n+1}}x^n\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}[(-x_2)^{n+1}-(-x_1)^{n+1}]\,x^n$$

Отсюда

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

11. ФОРМАЛЬНАЯ ЛОГИКА

Формальные модели, позволяют адекватно отображать разнообразные предметные области и операции, применяемые при манипулировании с данными. Методология таких моделей разрабатывается в формальных системах. Математическая логика - одна из наиболее разработанных формальных систем, ее методы успешно применяются для описания и решения задач в Прологе.

В *формальной логике* разрабатываются *методы правильных рассуждений*, представляющих собой цепь умозаключений в логически последовательной форме. Рассуждения в ней изучаются с точки зрения формы, а не смысла.

Например, докажем теорему: «Для того, чтобы сепульки не были хроничны и не бифуркальны одновременно, необходимо и достаточно, чтобы они были не хроничны или не бифуркальны». Эта теорема имеет формальную схему: $(\neg x \vee \neg y) \to \neg(x \& y)$. Легко видеть, что посылка и заключение импликации эквивалентны, следовательно, утверждение является тавтологией. Таким образом, для доказательства этой теоремы не нужно ничего знать о сепульках и их свойствах.

Отвлечение от содержания предложений языка в формальной логике есть результат применения операции абстрагирования к рассуждениям естественного языка. Абстрагирование широко используется в науке для выборочного исследования некоторых аспектов исследуемой проблемы. Современная парадигма научного исследования состоит в том, что формальное изучение любой проблемы начинается с замены реальных объектов их абстрактными представлениями, выбираемыми таким образом, чтобы в этих идеализациях были отражены именно те свойства исходных объектов, которые мы хотим изучать. Абстрагирование позволяет строить формальные модели понятий, процессов и явлений реального мира и далее изучать их с помощью формальных же средств. Именно на основе научного подхода к решению инженерных проблем получено бессчетное число впечатляющих результатов в технике, в связи с чем давно укоренилась поговорка «Нет ничего практичнее хорошей теории».

Одна из задач формальной логики - выявление неоднозначностей и изучение отдельных этапов рассуждений или *выводов*, когда строго шаг за шагом доказывается их правильность независимо от используемой интерпретации.

Формальная система представляет собой совокупность чисто абстрактных объектов (не связанных с внешним миром), в которой представлены правила оперирования множеством символов в чисто синтаксической трактовке без учета смыслового содержания. Формальная система определена, если:

- Задан конечный алфавит.
- Определена процедура построения формул.
- Выделено некоторое множество формул, называемых аксиомами.
- Задано конечное множество правил вывода, которые позволяют получать новые формулы из уже имеющихся формул и аксиом.

Формальное доказательство определяется как конечная последовательность формул, в которой каждая следующая формула является либо аксиомой, либо получена из других формул с помощью правил вывода. Формула называется теоремой, если существует доказательство, в котором она является последней. В частности, всякая аксиома является теоремой. Если формула T является теоремой, это обозначают: $\vdash T$.

Множество формул формальной системы вместе с множеством аксиом и правил вывода образуют формальный язык. Формальный язык отличается от естественного тем, что его конструкции строятся по строго определенным правилам и не допускают двусмысленного толкования.

Зафиксируем некоторое двухэлементное множество. Элементы этого множества обозначаются через 0 и 1, или t (true-истина) и f (false – ложь). *Высказывания* – это переменные, принимающие значения в этом множестве.

n-местной булевой функцией $f^{(n)}$ называется отображение $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, т.е. $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}$ и $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\{0,1\}$.

В соответствии с этим определением наиболее естественным способом задания булевой функции является таблица, которая для функции n переменных содержит 2^nстрок. Каждая строка обозначает один из возможных наборов значений переменных функции. Каждой строке таблица функции сопоставляет значение функции на этом наборе значений переменных из множества $\{0,1\}$. Таким образом, таблица функции содержит n+1 столбец, первые n столбцов соответствуют обозначениям переменных функции, а последний n+1-й столбец – является столбцом значений функции. Строки с наборами значений переменных принято записывать в порядке возрастания десятичного номера соответствующих двоичных наборов, от 0 до 2^n-1. Поэтому при задании функции из записи таблицы функции строки, соответствующие наборам значений переменных можно исключить, и рассматривать только вектор-столбец значений функции. Последнее, в свою очередь, позволяет задавать булеву функцию транспонированным вектором строкой, который получается транспонированием вектора-столбца функции.

Булевы функции одной и двух переменных принять называть *элементарными* булевыми функциями. Некоторые из них получили имена: константы 0 и 1, тождественная функция x, функция отрицания $\neg x$,конъюнкция &, дизъюнкция $\vee$, импликация $\rightarrow$, эквивалентность $\leftrightarrow$, сумма по модулю 2 $\oplus$, штрих Шеффера $|$, стрелка Пирса $\downarrow$. Переменные булевой функции называются пропозициональными переменными. Из пропозициональных переменных и элементарных функций, называемых также логическими связками, строятся формулы по следующему индуктивному правилу:

- Пропозициональная переменная есть формула.
- Если A и B – формулы, то $\neg$A, A$\bullet$И, где $\bullet\in\{\&,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,\oplus,|,\downarrow\}$ – формулы.
- Других формул нет.

Каждой формуле единственным образом соответствует булева функция, которая получается построением таблицы, в которой переменные формулы принимают все возможные наборы значений, а связкам сопоставляются их значения в порядке их выполнения в формуле. Столбец под последней выполняемой связкой и есть вектор функции, задаваемой данной формулой. Это соответствие не является взаимно однозначным, так как одной и той же булевой функции может соответствовать бесконечное множество формул.

Две формулы называются *равносильными*, если им соответствует одна и та же булева функция.

В логике высказываний определяется множество формул, называемых *каноническими.* К ним относятся совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ), совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ), совершенная полиномиальная нормальная форма (СПНФ). Все эти формулы строятся непосредственно по таблице функции. К каноническим представлениям относятся также минимальная дизъюнктивная нормальная форма, минимальная конъюнктивная нормальная форма и полином по модулю 2, для построения которых существуют алгоритмические процедуры.

Функциональная сложность формулы:

- Если A есть высказывание (пропозициональная переменная), то функциональная сложность A равна 0.
- Функциональная сложность формулы $A \bullet B$, где $\bullet \in \{\&, \vee, \rightarrow, \neg\}$, равна k_1+k_2+1, где k_1, k_2 сложности формул A и B соответственно. Таким образом, функциональная сложность формулы есть число вхождений в нее пропозициональных связок.

Множество формул логики высказываний образует язык логики высказываний, который обозначается PL. В языке PL определяется множество аксиом и правил, в соответствии с которыми можно производить равносильные преобразования формул. Основным правилом преобразования формул языка PL является правило подстановки: Если A_C – формула логики высказываний, в которую входит подформула C, и D – формула, равносильная C, то заменяя вхождения подформулы C на формулу D в формуле A, получаем формулу, равносильную исходной. Это правило служит основанием для аналитического построения канонических формул из произвольных формул логики высказываний.

Формула, принимающая значение 1 (истина) при всех наборах значений переменных, называется тождественно истинной или *тавтологией.* Формула, принимающая значение 0 на всех наборах значений переменных, называется тождественно ложной или *противоречием.*

Используя аксиомы и тождества логики высказываний можно формализовать получение выводов из фактов.

Пример. Рассмотрим рассуждение: «Если бы он не сказал ей, она бы и не узнала. А не спроси она его, он и не сказал бы ей. Но она узнала. Следовательно, она спросила». Обозначим приведенные высказывания (факты) следующим образом: a: он сказал ей, b: она узнала, c: она спросила. Тогда приведенное рассуждение можно записать формулой: $(\neg a \rightarrow \neg b)\&(\neg c \rightarrow \neg a)\&b \rightarrow c$. Можно показать, что это тавтология.

Таким образом, в логике высказываний определен алфавит, правила образования формул, определена система аксиом и правил, позволяющих строить новые формулы, т.е. язык PL образует формальную систему.

Одной из главных проблем логики, сформулированных еще Аристотелем, является разработка методов определения того, *является ли заключительное утверждение истинным при условии истинности приведенных фактов единственно в силу формальной структуры рассуждения*, а не исходя из *смысла* утверждения и фактов, из которых утверждение построено. Логическое следствие можно считать *новым знанием, полученным из уже известных фактов.*

12.ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

1. *Формула* R *является логическим следствием формул* $F_1, F_2, \ldots, F_k$ *тогда и только тогда, когда формула* $F_1 F_2 \ldots F_k \rightarrow R$ *общезначима*.

   Доказательство. Пусть R является логическим следствием формулы $F_1 F_2 \ldots F_k$. Докажем общезначимость импликации. Если все формулы $F_1, F_2, \ldots, F_k$ истинны в некоторой интерпретации, то импликация также истинна, так как R является след- ствием из этого множества формул и истинна.. Если же в множестве этих формул хотя бы одна ложна, то импликация также истинна. Следовательно, импликация общезначима.

2. *Формула R является логическим следствием формул* $F_1, F_2, \ldots, F_k$ *тогда и только тогда, когда формула* $F_1 F_2 \ldots F_k \neg R$ *невыполнима*.

   Доказательство. Так как формула $F_1 F_2 \ldots F_k \rightarrow R$ общезначима, то ее отрицание невыполнимо. По правилу де Моргана получаем доказательство.

Как, анализируя формулу, представленную в нормальной форме, можно сделать вывод о ее общезначимости или невыполнимости? Пусть формула представлена в ДНФ, т.е. в виде дизъюнкции конъюнктов (конъюнкций литералов произвольного ранга). В этом случае легче сделать вывод о *невыполнимости ДНФ*. ДНФ невыполнима тогда и только тогда, когда невыполним каждый из конъюнктов. Последнее возможно только в том случае, когда каждый конъюнкт содержит пару противоположных литералов. Аналогично можно использовать представление формулы в виде КНФ, но для определения *общезначимости* функции. Очевидными следствиями предыдущих теорем являются:

3. Чтобы формула R была логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_k$, необходимо и достаточно, чтобы каждый дизъюнкт КНФ представления формулы $F_1 F_2 \ldots F_k \rightarrow R$ содержал пару противоположных литералов.
4. Чтобы формула R была логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_k$, необходимо и достаточно, чтобы каждый конъюнкт ДНФ представления формулы $F_1 F_2 \ldots F_k \neg R$ содержал пару противоположных литералов.

Пример. Докажем правильность рассуждения в приведенном выше примере: «Сказал, спросила, узнала», приведением к ДНФ.

$\neg((\neg a \rightarrow \neg b)\&(\neg c \rightarrow \neg a)\&b \rightarrow c) = (a \neg b)\&(c \vee \neg a)\&b\&\neg c = (ac\neg b\neg c) \vee (cb\neg b\neg c) \vee (\neg a \neg bb\neg c)$.

Поскольку каждый конъюнкт содержит пару противоположных литералов,. Эта формула невыполнима. Следовательно, схема рассуждения «Сказал, спросила, узнала» правильна. Заметим. Что это доказательство много проще, чем построение и анализ таблиц истинности.

13. МЕТОД РЕЗОЛЮЦИИ

Этот метод использует тот факт, что, если некоторая формула является *невыполнимой*, то наиболее сильное следствие этой формулы – константа **False (0).** Предложенный в 1965 году Дж. Робинсоном метод резолюции позволяет получить максимально сильное следствие множества формул с помощью систематической процедуры последовательного построения логических следствий формулы, называемых *резольвентами*. Иными словами, метод резолюции обладает свойством полноты: для формулы Ф следствие **False** будет обязательно получено, если Ф невыполнима.

Теорема. Пусть B – логическое следствие формулы A. Тогда $A \& B \equiv A$.

Доказательство. Пусть условие теоремы выполнено. Тогда A→B=1. Отсюда

$$A \equiv A\&1 \equiv A\&(A \rightarrow B) \equiv A(\overline{A} \vee B) \equiv (A\&\overline{A}) \vee (A\&B) \equiv 0 \vee A\&B \equiv A\&B.$$

Резольвентой двух дизъюнктов $D1 \vee L$ *и* $D2 \vee \neg L$ *называется дизъюнкт*

D1∨D2.

Теорема. Резольвента является логическим следствием порождающих ее дизъюнктов.

Доказательство. Легко показать, что формула $(D1\vee L)\&(D2\&\neg L)\rightarrow(D1\vee D2)$ общезначима. Это доказывает теорему.

Метод резолюций доказательства невыполнимости формулы Ф состоит в том, что формула Ф представляется в КНФ и к ней конъюнктивно присоединяются все возможные резольвенты ее дизъюнктов и получаемых в процессе доказательства резольвент. Полнота метода резолюций состоит в том, что он *гарантирует* получение для формулы Ф следствия **0**, если Ф невыполнима. Если же в результате перебора всех возможных резольвент формулы Ф пустая резольвента не найдена, то формула Ф не является невыполнимой.

Метод резолюций есть фактически правило присоединения к рассуждению, в состав которого входят два утверждения $A\rightarrow B$ и $\neg A\rightarrow C$ их следствия – утверждения $B\vee C$. Действительно, первое утверждение гарантирует, что если А истинно, то В тоже истинно. Второе – если А ложно, то С истинно. Очевидно, в любом случае, либо В, либо С истинно, следовательно, $B\vee C$ истинно, и добавление этого нового утверждения к исходному рассуждению не меняет его смысла.

Доказательство методом резолюции близко к словесному доказательству от противного.

Пусть S множество дизъюнктов. Резолютивный вывод С из S есть такая последовательность C_1, C_2, …, C_k дизъюнктов, что $\forall i$: $C_i \in S$ или является резольвентой дизъюнктов, предшествующих C_i. Вывод пустого дизъюнкта называется *опровержением* S.

14. ЛОГИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Логическим исчислением, или просто **исчислением**, называют совокупность, которая включает в себя: алфавит, синтаксические правила построения формул в алфавите, аксиомы (общезначимые исходные формулы), правила вывода по аксиомам производных формул или теорем.

В исчислении высказываний исходный алфавит языка PL расширяется за счет еще одного символа - $\vdash$, который читается "выводимо" или "доказуемо". Правила вывода $\alpha \vdash \beta$ имеют дело непосредственно с формулами, а не с таблицами истинности, позволяя по истинности одних формул делать вывод об истинности других формул. Символы α,β в правиле вывода обозначают одну или несколько формул; α называется *условием,* а β - *следствием.* Если в условии или следствии формул несколько, то они записываются через запятую. Нас прежде всего будут интересовать только такие правила вывода, с помощью которых на основании истинности всех формул, входящих в условие правила вывода, можно при любой интерпретации сделать заключение об истинности всех формул, входящих в следствие правила вывода. Обычно такие правила называют *состоятельными*. Доказательство состоятельности правила вывода можно осуществить с помощью таблицы истинности, каждая строка которой соответствует одной из моделей условия, а общее число строк совпадает с числом всех моделей условия. Если всем этим условиям соответствуют истинные следствия, то правило является состоятельным.

Понятие формулы в исчислении высказываний определяется, как и в логике высказываний. Если $U_1, U_2, \ldots, U_k$, B, G - формулы , то выражения вида $U_1, U_2, \ldots, U_k \vdash B$ называются *секвенциями*.

- $U_1, U_2, \ldots, U_k \vdash B$, где k>0, читается "из $U_1, U_2, \ldots, U_k$ следует B",
- $\vdash B$ читается "B доказуема",
- $U_1, U_2, \ldots, U_k \vdash$ "система $U_1, U_2, \ldots, U_k$ - противоречива".

Правилом вывода называется выражение вида $\frac{\Sigma_1,\ldots,\Sigma_k}{\Sigma}$, где $\Sigma_1,\Sigma_2,\ldots,\Sigma_k$ - произвольные секвенции; Σ называется *непосредственным следствием* из множества секвенций $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k$ *по данному правилу вывода.*

Исчисление секвенций определяется схемой аксиом и правилами вывода.

Аксиомой называется выражение, получающееся из схемы аксиом подстановкой вместо атома конкретной формулы.

Вывод в ИС- это конечная последовательность секвенций, $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k$ такая, что для каждого i ($1 \le i \le k$) Σ_i есть либо аксиома, либо непосредственное следствие предыдущих секвенций по правилам вывода.

Секвенция Σ называется *выводимой в ИС,* если существует вывод в ИС, оканчивающийся Σ.

Правило $\frac{\Sigma_1,\Sigma_2,\ldots,\Sigma_k}{\Sigma}$ называется *допустимым в ИС,* если из выводимости $\Sigma_1,\Sigma_2,\ldots,\Sigma_k$ следует выводимость секвенции Σ.

Нашей ближайшей задачей будет описание механизма, порождающего все тавтологии.

Для большей наглядности формулировок мы будем рассматривать кроме формул также последовательности формул и секвенции вида $\Gamma \vdash \Phi$, где Г - последовательность формул, возможно пустая, Ф - формула. Высказывание входит в секвенцию, если оно входит в левую или правую часть секвенции.

Истинность секвенции: секвенция истинна, если при любых значениях входящих в нее высказываний из того, что все формулы, входящие в левую часть получили значение 1 (стали истинными), формула в правой части секвенции также стала истинной. Секвенция с пустой левой частью истинна, если правая часть тождественно истинна. Остальные секвенции назовем ложными.

Например, секвенция $(A\to B), (B\to C), (C\to X) \vdash (A\to X)$ истинна. Напротив, секвенция $(X \vee (У\to X)) \vdash Z$ - ложна.

Легко заметить, что истинность секвенции $\Phi_1\ \Phi_2\ \ldots\ \Phi_S \vdash \Phi$ равносильна тому, что формула $(\Phi_1\to (\Phi_2\to \ldots \to(\Phi_S\to\Phi) \ldots)$ - является тавтологией.

Легко видеть, что любая секвенция вида $\Phi \vdash \Phi$, где Ф - формула, истинна. Эта секвенция является единственной аксиомой исчисления секвенций.

Исчисление ИС определяется следующей схемой аксиом и правилами вывода (где символы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma$ – конечные последовательности формул, возможно пустые, U, A, B, C –произвольные формулы).

Схема аксиом: U |– U.

Использование аксиом и правил вывода позволяет получать новые истинные секвенции и новые допустимые правила вывода, которые становятся допустимыми в исчислении секвенций.

Примеры

1. Вывести секвенцию |– (U→U).

♠ Для доказательства истинности секвенции необходимо построить вывод, в котором доказываемая секвенция окажется последней. Начнем доказательство с аксиомы:

Σ_1 : U |– U; Далее воспользовавшись правилом 5 (введение →) получаем: Σ_2: |– U→U. ♦

2. Вывести секвенцию (U → B), (B → C), U |– C.

♠ Σ_1: U |– U (аксиома),
Σ_2: (U→B) |– (U→B) (аксиома б),
Σ_3: U, (U→B) |– B (правило 6, Σ_1, Σ_2),
Σ_4: (B →C) |–(B→C) (аксиома),
Σ_5: U, (U→B), (B→C) |– C (правило 6, Σ_3, Σ_4),
Σ_6: (U→B), U, (B→C) |– C (правило 12, Σ_5),
Σ_7: (U→B), (B→C), U |– C (правило 12, Σ_6). ♦

Высказывания являются абстрактными объектами, которые мы хотим интерпретировать с помощью *семантики*. Это означает, что нас интересует определение условий, при которых высказывание является истинным или ложным.

Означиванием назовем произвольную функцию F: Q→{f, t}, где Q – множество атомов (высказываний) языка логики высказываний (PL). Атомами в PL являются высказывания, которым поставлены в соответствие пропозициональные переменные. Таким образом, означивание приписывает истинностные значения атомам языка, что соответствует присваиванию аргументам формулы всех возможных наборов значений.

Истинностным означиванием (булевым означиванием) множества формул S назовем функцию V: S→{f, t}, определяющую истинностные значения формул, образованных с помощью логических связок, на всех возможных наборах значений переменных.

Формула A∈S называется *тавтологией*, если для каждого истинностного означивания V верно, что V(A) = t. Для тавтологий используется обозначение: ╞ A.

Формула A называется *выполнимой,* если существует такое истинностное означивание V, что ∃A:V(A)=t. Про такое истинностное означивание говорят, что оно *подтверждает* высказывание A.

Формула A, для которой ∀V: V(A)=f, называется *противоречием*.

Для определения истинностного означивания формулы языка PL достаточно построить таблицу истинности этой формулы.

15. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Методы доказательств – это алгоритмические процедуры, следуя которым, можно установить, является ли формула тавтологией, и выполнимо ли множество формул.

При помощи семантических таблиц Бета (далее просто семантические таблицы) можно исследовать условия истинности или ложности данного высказывания.

Пусть К – формула языка логики высказываний LP. Обозначим tK и fK соответственно истинность и ложность высказывания К. При этом tK и fK называются *помеченными формулами.*

Семантическая таблица – это дерево, вершинами которого является помеченная формула и ее помеченные подформулы.

Атомарные семантические таблицы – это семантические таблицы для элементарных булевых функций $\{\&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \ldots\}$, Рис. 1, σ_1 и σ_2 – произвольные формулы.

Семантическая таблица составного высказывания К строится индуктивно, исходя из семантических таблиц высказываний, составляющих К.

- Построение семантической таблицы для составного высказывания начинаем с того, что записываем помеченную формулу tK или fK в корень семантической таблицы.
- Если какая-то часть таблицы уже построена, находим в множестве его висячих вершин *особые,* т.е. соответствующие атомарным формулам; продолжаем построение таблицы атомарными семантическими таблицами для каждой из атомарных формул. Вершина семантической таблицы называется *особой*, если она встречается как корень некоторой атомарной семантической таблицы. В противном случае, вершина называется *обычной.*
- Ветвь семантической таблицы называется *противоречивой*, если в ней для некоторого атома Р встречаются помеченные формулы tP и fP, являющиеся вершинами этой ветви.
- Семантическая таблица называется *замкнутой*, если каждая ее непротиворечивая ветвь заканчивается обычной вершиной. В противном случае семантическая таблица называется *незамкнутой.*
- *Семантическая таблица противоречива, если каждая ее ветвь противоречива.* Если замкнутая семантическая таблица с корнем fK противоречива, а это означает, что мы пытались всеми возможными способами сделать высказывание К ложным и не сумели, то К – тавтология.

  Доказательством или выводом по Бету высказывания К называется замкнутая противоречивая семантическая таблица, в корне которой помещена помеченная формула fK.
- Замкнутая противоречивая таблица, имеющая в качестве корня tK, называется *опровержением по Бету* высказывания К.
- Говорят, что высказывание К *доказуемо* или *выводимо по Бету*, если оно имеет доказательство по Бету. Высказывание называется *опровержимым по Бету*, если *существует опровержение К по Бету.* Факт, что К доказуемо по

Бету обозначается $\vdash_B$ К.

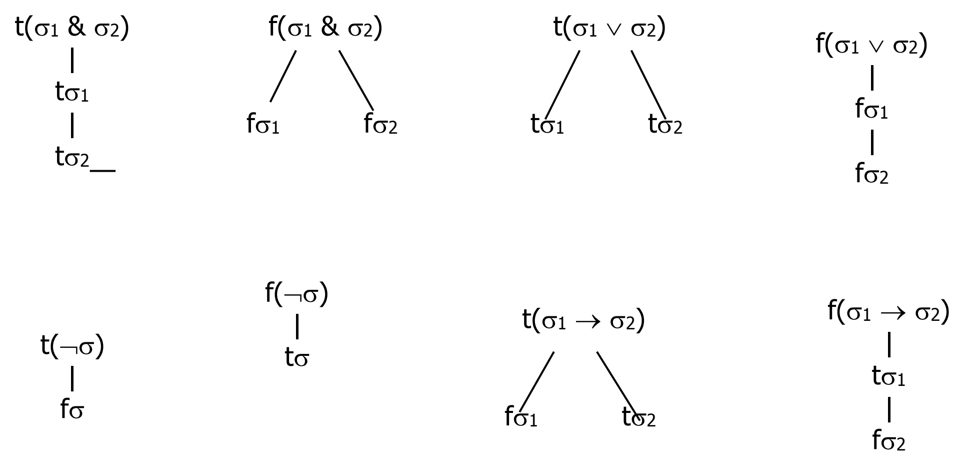

Рисунок 1. Семантические таблицы атомарных формул

На Рис.2 приведен пример замкнутой семантической таблицы, в которой ветвь χ_1 противоречива, а остальные ветви не противоречивы. Следовательно, данная формула выполнима.

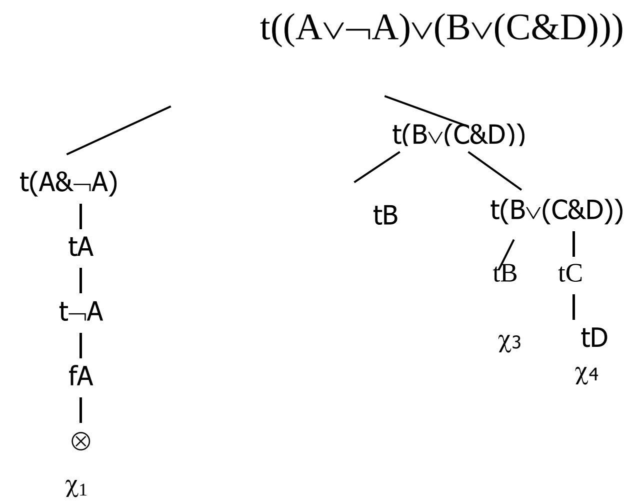

Рисунок 2 Пример замкнутой семантической таблицы

Пример 1. Пусть К=(А→(В→А))∨(В&(¬В)). В формуле К присутствуют атомы А и В. Построим семантическую таблицу с корнем tK, т.е. докажем, что существует опровержение формулы К по Бету. Построение приведено на рис.3.

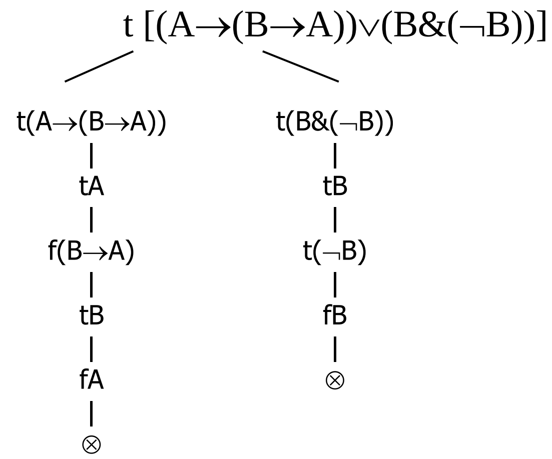

Рисунок 3 Семантическая таблица, опровергающая формулу.

Пример 2. Предположим, что истинны высказывания:

1. Джордж любит Марию, или Джордж любит Екатерину;
2. Если Джордж любит Марию, то он любит Екатерину.

Кого же Джордж любит?

Обозначим символом М высказывание «Джордж любит Марию» и символом К высказывание «Джордж любит Екатерину». Тогда высказывание 1 эквивалентно $M\vee$ К, а высказывание 2 эквивалентно $M\to K = \neg M\vee K$. Обозначим $A=(M\vee K)\&(\neg M\vee K)$. По условию примера предполагается, что А истинно. Мы хотим узнать, любит ли Джордж Екатерину, т.е., верно ли tK. Предположим, что он ее не любит, т.е. верно fK. Построим семантическую таблицу с корнем fK.

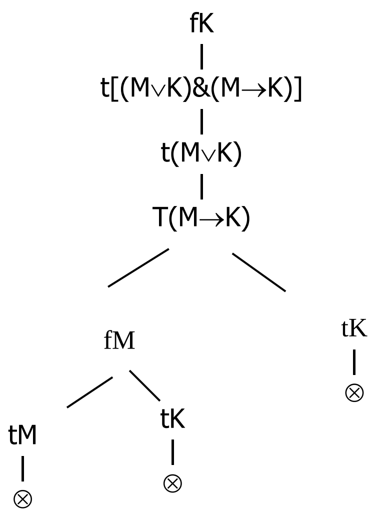

Рисунок 4. Противоречивая замкнутая семантическая таблица

Полученная таблица оказалась противоречивой. Т.е. Джордж любит Екатерину. Если бы мы построили семантчскую таблицу с помеченной формулой fM в корне, то получили бы непротиворечивую таблицу и, следовательно, не смогли бы определить, любит Джордж Марию или нет!

16. АКСИОМАТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Логика высказываний может быть представлена как аксиоматическая система с логическими аксиомами и правилами вывода. Аксиомы – это некоторые тавтологии, а правило вывода R *выводит* высказывание σ из последовательности высказываний $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$. Система аксиом логики высказываний:

A1: $\varphi \to (\tau \to \varphi)$.

A2: $(\varphi \to (\tau \to \sigma)) \to ((\varphi \to \tau) \to (\phi \to \sigma))$.

A3: $(\neg\varphi \to \neg\tau) \to (\tau \to \varphi)$.

Заметим, что высказывания *φ, τ, σ* могут быть произвольными. Из этой системы аксиом можно получить неограниченное число аксиом. Легко проверить, что все эти аксиомы являются правильно построенными формулами языка PL и, конечно, тавтологиями.

Мы будем использовать единственное правило вывода, которое называется Modus Ponens. Оно обозначается следующим образом:

$\varphi, \varphi\to\tau \vdash \tau$.

Символ $\vdash$ обозначает выводимость в аксиоматической системе. Новые высказывания получаются из трех указанных аксиом и правила Modus Ponens.

Пример. Докажем, что $\vdash A\to A$.

♠ Из A1 получим $\vdash A\to((B\to A)\to A)$. (1)

Вторую аксиому запишем в виде:

$\vdash (A\to((B\to A)\to A)\to(((A\to(B\to A))\to(A\to A))$. (2)

Из (1) и (2) по правилу Modus Ponens, получаем, что

$\vdash (A\to(B\to A))\to(A\to A)$. (3)

Вновь используя аксиому A1 и правило Modus Ponens, заключаем ,что

$\vdash A\to A$.

Следовательно, высказывание $A\to A$ выводимо в нашей аксиоматической системе.

Индуктивное определение доказательства высказывания аксиоматическим методом.

Пусть S – множество высказываний.

1. *Доказательством (выводом) из S* называется такая конечная последовательность высказываний $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$., что $\forall i : i = \overline{1, n}$ верно:

   a. $\sigma_i \in S$ или
   b. σ_i – аксиома или
   c. σ_i получено из σ_j, σ_k, где $1\le j$, $k\le i$, по правилу Modus Ponens.

2. Высказывание называется *доказуемым (выводимым) из множества высказываний S*, если существует такое доказательство $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$. из S, что σ_n совпадает с σ. Выводимость высказывания σ из множества высказываний S обозначается: S $\vdash \sigma$.

3. Высказывание σ называется *доказуемым (выводимым)*, если ├ σ, т.е. выводима в аксиоматической системе при помощи правила Modus Ponens.
4. *Теоремой* является любое высказывание, присутствующее в доказательстве.

Следующая теорема является основной в теории доказательств.
<u>Терема дедукции</u>. *Пусть S – множество высказываний, K, L – высказывания. Тогда*
$S\cup\{K\} \vdash L \;\Leftrightarrow\; S \vdash K\to L$.
Примем эту теорему без доказательства.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ «ЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

Вариант №1

Отметьте номер правильного ответа на бланке ответов

Задания и варианты ответов

1. В урне находится пять занумерованных шаров. Из урны по одному извлекают два шара. Сколько значений принимает сумма номеров извлеченных шаров?
   1)2; 2) 10; 3) 12; 4)8.
2. Сколько различных значений принимает двухзначное число?
   1)64; 2)81; 3) 90; 4) 100 .
3. Сколько различных значений принимает трехзначное число?
   1)625; 2) 891; 3) 1000 ; 4) 900 .
4. Найти резольвенту дизъюнктов $A \vee H$ и $B \vee \overline{H}$?
   1) $R = A \vee B$; 2) $R = A \wedge B$; 3) H; 4) B.
5. Найти логическое следствие формул $A \to B, A \to \overline{B}$.
   1) $R = \overline{B}$; 2) $R = B$;3) $R = A$; 4) $R = \overline{A}$.
6. Найти логическое следствие формул $\overline{A} \to B, A \to C$
   1) B ;2) C; 3) $R = B \vee C$; 4) $R = A \vee B$.
7. Найти логическое следствие формулы $A \to A$.
   1) **R= true** ; 2) R=false; 3)R=A ; 4)R=B .
8. Найти логическое следствие формулы $A \to \overline{A}$.
   1) $R = true$; 2) $R = false$; 3) $R = A$;4) $R = \overline{A}$.
9. Найти логическое следствие формулы $\overline{A} \to A$.
   1) $R = A$; 2) $R = false$; 3) $R = \overline{A}$;4) $R = B$.
10. Найти логическое следствие формул $A \to B, \overline{A} \to B$
    1) $R = A \vee B$; **2)** $R = A \vee B$; 3) $R = \overline{B}$; 4) $R = B$.
11) Определить логическое следствие из формулы $A \wedge \overline{A}$.
    1) R= false; 2) R= true ; 3) R=A ; 4) $R = \overline{A}$.
12. Найти логическое следствие формул $A \to B, \overline{B} \to \overline{A}$.
    1) $R = \overline{B}$; 2) $R = \overline{\overline{A} \vee B}$; 3) $R = A \to B$; 4) $R = A$.
13. Определить логическое следствие из формулы $A \vee \overline{A}$.
    1) R= true ; 2) R=false ; 3) R=A; 4) R=C
14. Найти логическое следствие формул $A \to B, \overline{B}$.
    1) $R = \overline{B}$; 2) $R = false$;3) $R = \overline{A}$; 4) $R = A$.

15. В секретном замке на оси находится три диска, каждый диск разделен на 9 секторов, на которых написаны различные цифры. Сколь трехзначных кодов обеспечивает замок? 1) 625; 2)729 ; 3)900 ; 4)1000.

16. Сколько имеется различных способов распределения всех трех различных грузов в пяти пунктах назначения при условии, что в пункте назначения размещается не более одного груза?

1) 60; 2) 65 ; 3) 70 ; 4) 75.

17. Найти число размещений пяти различных пассажиров в трех различных вагонах пассажирского поезда. При условии, что порядок размещения пассажиров в вагоне безразличен. 1) 27;2) 15;3) 125; 4)243.

18. Сколько различных шестизначных чисел можно составить, используя цифру 2 дважды, цифру 4 трижды, цифру 1один раз? 1)81; 2) 60; 3)24; 4)120 .

19.Сколько можно изготовить костей домино, используя числа 0,1,2,3?

1) 12; 2) 9;3) 11; 4) 10 .

20. Сколько целых решений, исключая отрицательные числа, имеет линейное уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 2$? 1) 6; 2) 4; 3) 8; 4)12.

21. Сколько различных коммутаций существует при соединении двух четырехпроводных линий? 1)2; 2) 6; 3) 120; 4) 24 .

22 . Сколько различных коммутаций в виде беспорядков существует при соединении двух трех проводных линий? 1)1; 2) 2 ; 3) 3 ;4) 4 .

23. Дано множество выражений:

$$W = \{ P(f(x),g(y),a),P(f(x),z,a),P(f(x),g(y),c).$$

Определить номер позиции рассогласования.

1) 8; 2)6; 3)9; 4)10.

24. Дано множество выражений

$$W = \{ P(f(x),g(y),a),P(f(x),z,a),P(f(x),g(y),c).$$

Определить множество рассогласования.

1) $d(W) = \{ g(y),z \}$.2) $d(W) = \{ g(z),z \}$. 3) $d(W) = \{ z \}$. 4) $d(W) = \{ g(y) \}$.

25. Пример. Дано множество выражений

$$W = \{ P(x,g(x)),P(z,g(x)),P(y,g(x)) \}.$$

Требуется найти наиболее общий унификатор этого множества.

1) $\delta_1 = \{ z/x, y/x \}$; 2) $\delta_1 = \{ z/x \}$; 3) $\delta_1 = \{ y/x \}$; 4) $\delta_1 = \{ z/y, y/x \}$.

Вариант №2

Отметьте номер правильного ответа на бланке ответов.

Задания и варианты ответов

1. В урне находится пять занумерованных шаров. Из урны по одному извлекают три шара. Сколько значений принимает сумма номеров извлеченных шаров?

1) 10 ; 2)12 ; 3)11 ; 4) 7.

2. Сколько различных значений принимает четырехзначное число?

1) 10000; 2) 9000; 3)8981; 4) 8999.

3. Сколько различных значений принимает пятизначное число?

1) 90000 ; 2) 89999 ; 3) 99999 ; 4) 10000 .

4. Найти резольвенту дизъюнктов $A \vee C$ и $\overline{A} \vee B$?

1) $R = A \vee B$; 2) $R = \overline{A} \vee B$; 3) $R = \overline{C} \vee B$; 4) $R = C \vee B$.

5. Найти логическое следствие формул $\overline{A} \to B, \overline{A} \to \overline{B}$?

1) $R = \overline{B}$; 2) $R = B$; 3) $R = \overline{A}$; 4) $R = A$.

6. Найти логическое следствие формул $\overline{A} \to \overline{B}, A \to \overline{C}$?

1) $R = \overline{B} \vee \overline{C}$; 2) ; $R = \overline{B} \vee \overline{\overline{C}}$ 3) $R = B \vee C$; 4) $R = B \vee \overline{C}$.

7. Найти логическое следствие формулы $A \to (A \vee A)$?

1) $R = \overline{A}$; 2) $R = A$; 3) **R= false**; 4) **R= true.**

8. Найти логическое следствие формулы $(A \wedge A) \to \overline{A}$?

1) $R = false$; 2) $R = true$; 3) $R = A$; 4) $R = \overline{A}$.

9. Найти логическое следствие формулы $\overline{A} \to (A \wedge A)$.

1) $R = false$; 2) $R = true$; 3) $R = A$; 4) $R = \overline{A}$.

10. Найти логическое следствие формул $A \to (B \vee false), \overline{A} \to B$?

1) $R = B$; 2) $R = \overline{B}$; 3) $R = A$; 4) $R = \overline{A}$.

11. Определить логическое следствие из формулы $C \wedge (\overline{C} \vee false)$?

1) $R = \overline{C}$; 2) **R= false**; 3) $R = C$; 4) **R= true**.

12. Найти логическое следствие формул $(A \wedge A) \to B, \overline{B} \to \overline{A}$?

1) $R = \overline{A} \vee B$; 2) $R = \overline{A}$; 3) $R = B$; 4) $R = A \to B$.

13. Определить логическое следствие из формулы $A \vee B \vee \overline{A}$?

1) **R= A** ; 2) **R= true** ; 3) **R= false** ; 4) **R=B** .

14. Найти логическое следствие формул $(A \vee A) \to B, \overline{B}$?

1) $R = A$; 2) $R = \overline{A}$; 3) $R = B$; 4) $R = \overline{B}$.

15. В секретном замке на оси находится три диска, каждый диск разделен на 7 секторов, на которых написаны различные цифры. Сколь трехзначных кодов обеспечивает замок?

1) 49; 2) 343; 3)300; 4)743.

16. Сколько имеется различных способов распределения трех различных специалистов на шести предприятиях при условиях, что на предприятие направляется не более одного специалиста, и все специалисты должны быть распределены?

1)120; 2)100; 3)18; 4) 36 .

17. Найти число размещений трех различных пассажиров в пяти различных вагонах пассажирского поезда. При условии, что порядок размещения пассажиров в вагоне безразличен.

1)49; 2) 81; 3) 100; 4) 125 .

18. Сколько различных семизначных чисел можно составить, используя цифру 2 дважды, цифру 3 трижды, цифру 1один раз, цифру 4 один раз?

1) 225 ; 2) 420 ; 3) 341 ; 4) 523 .

19. Сколько можно изготовить костей домино, используя числа 0,1,2,3,5?

1) 21; 2) 15; 3) 16 ; 4) 12 .

20. Сколько целых решений, исключая отрицательные числа, имеет линейное уравнение ? $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$.

1) 6 ; 2) 15 ; 3)12 ; 4) 10 .

21. Сколько различных коммутаций существует при соединении двух пятипроводных линий? 1) 24 ; 2) 120; 3) 99; 4) 100 .

22. Сколько различных коммутаций в виде беспорядков существует при соединении двух двухпроводных линий? 1) 0; 2) 3; 3) 2; 4)1 .

23.Дано множество выражений

$$W = \{ P(f(x),z,a),P(f(x),z,a),P(f(x),g(y),c).$$

Определить номер позиции рассогласования.

1) 3 ; 2) 8 ; 3) 9 ; 4) 7.

24.Дано множество выражений

$$W = \{ P(f(x),z,a),P(f(x),z,a),P(f(x),g(y),c).$$

Определить множество рассогласования.

1) $d(W) = \{ g(y) \}$; 2) $d(W) = \{ g(y),z \}$;3) $d(W) = \{ y \}$;4) $d(W) = \{ g(x),z \}$

25. Пример. Дано множество выражений

$$W = \{ P(x, g(x)), P(t_1, g(x), P(t_2, g(x)).$$

Требуется найти наиболее общий унификатор этого множества.

1) $\delta = \{ g(t_1)/x, t_2/x \}$; 2) $\delta = \{ t_1/x, t_2/x \}$; 3) $\delta = \{ t_2/x \}$; 4) $\delta = \{ t_1/x \}$.

Вариант 3

1. В урне находится пять занумерованных шаров. Из урны по одному извлекают два шара. Сколько значений принимает сумма номеров извлеченных шаров?

$$C_5^2 = 10.$$

2.Сколько различных значений принимает двухзначное число?

9*10=90.

3.Сколько различных значений принимает трехзначное число?

9*10*10=900.

4. Найти резольвенту дизъюнктов $A \vee H$ и $B \vee \overline{H}$?

$$R = A \vee B.$$

5.Найти логическое следствие формул $A \to B, A \to \overline{B}$.

$\overline{A} \vee B, \overline{A} \vee \overline{B}$ $R = \overline{A} \vee \overline{A} = \overline{A}$ $R = \overline{A}$.

6. Найти логическое следствие формул $\overline{A} \to B, A \to C$

$A \vee B, \overline{A} \vee C$ $R = B \vee C$.

7. Найти логическое следствие формулы $A \to A$.

$A \to A = A \vee \overline{A} = \text{true}$ **R= true.**

8. Найти логическое следствие формулы $A \to \overline{A}$.

$A \to \overline{A} = \overline{A} \vee \overline{A} = \overline{A}$ $R = \overline{A}$.

9. Найти логическое следствие формулы $\overline{A} \to A$.

$\overline{A} \to A = A \vee A = A$ $R = A$.

10. Найти логическое следствие формул $A \to B, \overline{A} \to B$

$\overline{A} \vee B, A \vee B$ $R = B \vee B = B$ $R = B$.

11. Определить логическое следствие из формулы $A \wedge \overline{A}$.

$A \wedge \overline{A} = \text{false}$ **R= false.**

12. Найти логическое следствие формул $A \to B, \overline{B} \to \overline{A}$.

$\overline{A} \vee B, \overline{A} \vee B$ $(\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B) \wedge \overline{\overline{A} \vee B} = \text{false}$,

$R = \overline{A} \vee B = A \to B$

13. Определить логическое следствие из формулы $A \vee \overline{A}$.

$A \vee \overline{A} = \text{true}$ **R= true.**

14. Найти логическое следствие формул $A \to B, \overline{B}$.

$\overline{A} \vee B = B \vee \overline{A}, \overline{B} = \overline{B} \vee \text{false}$ $R = \overline{A} \vee \text{false} = \overline{A}$ $R = \overline{A}$.

15. В секретном замке на оси находится три диска, каждый диск разделен на 9 секторов, на которых написаны различные цифры. Сколь трехзначных кодов обеспечивает замок?

9*9*9=81*9=729.

16.Сколько имеется различных способов распределения всех трех различных грузов в пяти пунктах назначения при условии, что в пункте назначения размещается не более одного груза.

$$A_5^3 = 5*4*3 = 20*3 = 60.$$

17. Найти число размещений пяти различных пассажиров в трех различных вагонах пассажирского поезда. При условии, что порядок размещения пассажиров в вагоне безразличен.

$$Ar_n^k = n^k = 3^5 = 9*9*3 = 81*3 = 243.$$

18. Сколько различных шестизначных чисел можно составить, используя цифру 2 дважды, цифру 4 трижды, цифру 1один раз?

P_6(2,3,1)=6!/(2!*3!*1!)= 6*5*4*3*2/ (6*2)=6*5*2=60.

19. Сколько можно изготовить костей домино, используя числа 0,1,2,3?

$$Co_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{4+2-1}^2 = C_5^2 = 10.$$

20. Сколько целых решений, исключая отрицательные числа, имеет линейное уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 2$.

$$Co_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6.$$

21. Сколько различных коммутаций существует при соединении двух четырехпроводных линий?

4!=24.

22. Сколько различных коммутаций в виде беспорядков существует при соединении двух трех проводных линий?

2.

23.Дано множество выражений

$$W = \{ P(f(x), g(y), a), P(f(x), z, a), P(f(x), g(y), c).$$

Определить номер позиции рассогласования.

8.

24. Дано множество выражений

$$W = \{ P(f(x), g(y), a), P(f(x), z, a), P(f(x), g(y), c).$$

Определить множество рассогласования.

$$d(W) = \{ g(y), z \}.$$

25. Пример. Дано множество выражений

$$W = \{ P(x, g(x)), P(z, g(x)), P(y, g(x))\}.$$

Требуется найти наиболее общий унификатор этого множества.

$$\delta_1 = \{ z/x, y/x \}$$

Вариант 4

1. В урне находится пять занумерованных шаров. Из урны по одному извлекают три шара. Сколько значений принимает сумма номеров извлеченных

шаров?

$$C_5^3 = 10.$$

2.Сколько различных значений принимает четырехзначное число?

9*10*10*10=9000.

3.Сколько различных значений принимает пятизначное число?

9*10*10*10*10=90000.

4. Найти резольвенту дизъюнктов $A \vee C$ и $\overline{A} \vee B$?

$$R = C \vee B.$$

5.Найти логическое следствие формул $\overline{A} \to B, \overline{A} \to \overline{B}$.

$A \vee B, A \vee \overline{B}$ $\quad R = A \vee A = A \quad R = A$.

6. Найти логическое следствие формул $\overline{A} \to \overline{B}, A \to \overline{C}$

$A \vee \overline{B}, \overline{A} \vee \overline{C} \quad R = \overline{B} \vee \overline{C}$.

7. Найти логическое следствие формулы $A \to (A \vee A)$.

$A \to A \vee A) = A \vee \overline{A} = true$ **R= true.**

8. Найти логическое следствие формулы $(A \wedge A) \to \overline{A}$.

$(A \wedge A) \to \overline{A} = \overline{A} \vee \overline{A} = \overline{A}$ $\quad \mathrm{R} = \overline{\mathrm{A}}$.

9. Найти логическое следствие формулы $\overline{A} \to (A \wedge A)$.

$\overline{A} \to (A \wedge A) = A \vee A = A$ $\quad \mathrm{R} = \mathrm{A}$.

10. Найти логическое следствие формул $A \to (B \vee false), \overline{A} \to B$

$\overline{\mathrm{A}} \vee \mathrm{B}, \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \quad \mathrm{R} = \mathrm{B} \vee \mathrm{B} = \mathrm{B} \quad \mathrm{R} = \mathrm{B}$.

11. Определить логическое следствие из формулы $C \wedge (\overline{C} \vee false)$.

$C \wedge \overline{C} = false$ **R= false.**

12. Найти логическое следствие формул $(A \wedge A) \to B, \overline{B} \to \overline{A}$.

$\overline{\mathrm{A}} \vee \mathrm{B}, \overline{\mathrm{A}} \vee \mathrm{B}$ $\quad (\overline{\mathrm{A}} \vee \mathrm{B}) \wedge (\overline{\mathrm{A}} \vee \mathrm{B}) \wedge \overline{\overline{\mathrm{A}} \vee \mathrm{B}} = \mathrm{false}$,

$\mathrm{R} = \overline{\mathrm{A}} \vee \mathrm{B} = \mathrm{A} \to \mathrm{B}$

13. Определить логическое следствие из формулы $A \vee B \vee \overline{A}$.

$A \vee \overline{A} \vee B = true$ **R= true.**

14. Найти логическое следствие формул $(A \vee A) \to B, \overline{B}$.

$\overline{\mathrm{A}} \vee \mathrm{B} = \mathrm{B} \vee \overline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{B}} \vee \mathrm{false} \quad \mathrm{R} = \overline{\mathrm{A}} \vee \mathrm{false} = \overline{\mathrm{A}} \quad \mathrm{R} = \overline{\mathrm{A}}$.

15. В секретном замке на оси находится три диска, каждый диск разделен на 7 секторов, на которых написаны различные цифры. Сколь трехзначных кодов обеспечивает замок?

7*7*7=49*7=343.

16.Сколько имеется различных способов распределения трех различных специалистов на шести предприятиях при условиях, что на предприятие направляется не более одного специалиста, и все специалисты должны быть распределены .

$$A_6^3 = 6 * 5 * 4 = 30 * 4 = 120..$$

17. Найти число размещений трех различных пассажиров в пяти различных вагонах пассажирского поезда. При условии, что порядок размещения пассажиров в вагоне безразличен.

$$Ar_n^k = n^k = 5^3 = 125.$$

18. Сколько различных семизначных чисел можно составить, используя цифру 2 дважды, цифру 3 трижды, цифру 1один раз, цифру 4 один раз?

P₆(2,3,1)=7!/(2!*3!*1!*1!)=7* 6*5*4*3*2/ (6*2)=7*6*5*2=420.

19. Сколько можно изготовить костей домино, используя числа 0,1,2,3,5?

$$Co_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{5+2-1}^2 = C_6^2 = 15.$$

20. Сколько целых решений, исключая отрицательные числа, имеет линейное уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$.

$$Co_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{4+2-1}^2 = C_5^2 = 10.$$

21. Сколько различных коммутаций существует при соединении двух пятипроводных линий?

5!=120

22. Сколько различных коммутаций в виде беспорядков существует при соединении двух двухпроводных линий?

1.

23.Дано множество выражений

$$W = \{ P(f(x),z,a),P(f(x),z,a),P(f(x),g(y),c).$$

Определить номер позиции рассогласования.

8.

24. Дано множество выражений

$$W = \{ P(f(x),z,a),P(f(x),z,a),P(f(x),g(y),c).$$

Определить множество рассогласования.

$$d(W) = \{ g(y),z \}.$$

25. Дано множество выражений

$$W = \{ P(x,g(x)),P(t_1,g(x),P(t_2,g(x)).$$

Требуется найти наиболее общий унификатор этого множества.

$$\delta = \{ t_1/ x,t_2 / x \}.$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Автор	Название	Издательство	Год издания	Вид издания
Ярыгин А. Н.	Лекции и задачи по дискретной математике	Старый Оскол: ТНТ	2012	Учебное пособие
Волокитин Г.И., Глушкова В.Н., Ларченко В.В., Мишняков Н.Т.	Элементы дискретной математики для инженера. Математическая логика	Ростов н/Д.: ИЦ ДГТУ	2014	учебно-методическое пособие
Дехтярь М. И.	Лекции по дискретной математике	М.: ИНТУИТ	2016	Учебное пособие
Седых И. А.	Математическая логика и теория алгоритмов	Липецк: ЛГТУ	2014	учебно-методическое пособие
Ляхницкая О.В., Романенко Е.А.	Математическая логика	Ростов н/Д.: ИЦ ДГТУ	2013	Учебное пособие
Яблонский С. В.	Введение в дискретную математику	М.:Высш.шк.	2008 2006 2002	Учебное пособие
Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.	Задачи и упражнения по дискретной математике	М.: ФИЗМАТЛИТ	2009	Учебное пособие