ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие
по дисциплине

«Нечеткое информационное моделирование»

Авторы
Димитров В.П.
Борисова Л.В.
Нурутдинова И.Н.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения направления бакалавриата 01.03.04 «Прикладная математика».

Авторы

декан факультета Приборостроение и
техническое регулирование
Димитров В.П.,
профессор, д.т.н.,
заведующая кафедрой
«Менеджмент и бизнес-технологии»
Борисова Л.В.
профессор, д.т.н.,
Доцент, к. ф.-м.н,
доцент кафедры
«Прикладная математика»
Нурутдинова И.Н.

Оглавление

Введение

Наиболее поразительным свойством человеческого интеллекта является способность принимать правильные решения в обстановке неполной и нечеткой информации. Построение моделей приближенных рассуждений человека и использование их в компьютерных системах будущих поколений представляет сегодня одну из важнейших проблем науки.

При изучении сложных систем, где человек играет существенную роль, действует так называемый принцип несовместимости [1]: для получения существенных выводов о поведении сложной системы необходимо отказаться от высоких стандартов точности и строгости, которые характерны для сравнительно простых систем, и привлекать к ее анализу подходы, которые являются приближенными по своей природе. При попытке формализовать человеческие знания исследователи столкнулись с проблемой, затруднявшей использование традиционного математического аппарата для их описания. Существует целый класс описаний, оперирующих качественными характеристиками объектов *(много, мало, сильный, очень* и т. п.) Эти характеристики обычно размыты и не могут быть однозначно интерпретированы, однако содержат важную информацию (например, «Одним из возможных признаков гриппа является *высокая* температура»).

Категория нечеткости и связанные с ней модели и методы очень важны с мировоззренческой точки зрения, поскольку с их появлением стало возможно подвергать количественному анализу те явления, которые раньше либо могли быть учтены только на качественном уровне, либо требовали использования весьма грубых моделей.

Значительное продвижение в этом направлении сделано примерно 35 лет тому назад профессором Калифорнийского университета (Беркли) Лотфи А. Заде (Lotfi A. Zadeh). Его работы легли в основу моделирования интеллектуальной деятельности человека и явились начальным толчком к развитию новой математической теории.

Что же предложил Заде? Во-первых, он расширил классическое понятие множества, допустив, что характеристическая функция (функция принадлежности элемента множеству) может принимать любые значения в интервале (0;1), а не только значения 0 либо 1. Такие множества были названы им нечеткими (fuzzy). Л.Заде определил также ряд операций над нечеткими множествами и предложил обобщение известных методов логического вывода modus ponens и modus tollens.

Введя затем, понятие лингвистической переменной и допустив, что в качестве ее значений (термов) выступают нечеткие множества, Л.Заде создал аппарат для описания процессов интеллектуальной деятельности, включая нечеткость и неопределенность выражений. Вот точка зрения Л.Заде: "Я считаю, что излишнее стремление к точности стало оказывать действие, сводящее на нет теорию управления и теорию систем, так как оно приводит к тому, что исследования в этой области сосредоточиваются на тех и только тех проблемах, которые поддаются точному решению. В результате многие классы важных проблем, в которых данные, цели и ограничения являются слишком сложными или плохо определенными для того, чтобы допустить точный математический анализ, оставались и остаются в стороне по той причине, что они не поддаются математической трактовке. Для того чтобы сказать что-либо существенное для проблем подобного рода, мы должны отказаться от наших требований точности и допустить результаты, которые являются несколько размытыми или неопределенными".

Математическая теория нечетких множеств позволяет описывать нечеткие понятия и знания, оперировать этими знаниями и делать нечеткие выводы. Основанные на этой теории методы построения компьютерных нечетких систем существенно расширяют области применения компьютеров.

Нечеткая Логика - в основном многозадачная логика, которая позволяет определять промежуточные значения между стандартными оценками подобно *Да/Нет, Истина/Ложь, Черное/Белое,* и т.д. Понятия подобно *"довольно теплый"* или *"довольно холодный"* могут быть сформулированы математически и обработаны компьютерами. Таким образом, сделана попытка применить человекоподобное мышление в программировании компьютера.

В последнее время нечеткое управление является одной из самых активных и результативных областей исследований применения теории нечетких множеств. Нечеткое управление оказывается особенно полезным, когда технологические процессы являются слишком сложными для анализа с помощью общепринятых количественных методов, или когда доступные источники информации интерпретируются качественно, неточно или неопределенно. Экспериментально показано, что нечеткое управление дает лучшие результаты, по сравнению с результатами, получаемыми при общепринятых алгоритмах управления. Нечеткие методы помогают управлять домной и прокатным станом, автомобилем и поездом, распознавать речь и изображения, проектировать роботов, обладающих осязанием и зрением. Нечеткая логика, на которой основано нечеткое управление, ближе по духу к человеческому мышлению и естественным языкам, чем традиционные логические системы. Нечеткая логика обеспечивает эффективные средства отображения неопределенностей и неточностей реального мира. Наличие математических средств отражения нечеткости исходной информации позволяет построить модель, адекватную реальности.

Выделяют следующие виды неопределенности:

1. Неопределенность, случайность:

1.1 события и (или) состояние среды, обусловленные случайностью;

1.2 явления, неподдающиеся анализу и измерению со сколь угодно боль- шой точностью.

2. Нечеткость:

2.1 нечеткость как следствие субъективности или индивидуальности человека;

2.2 нечеткость или неясность в процессах мышления и умозаключения:

2.2.1 – нечеткое или неточное заключение;

2.2.2 – неясность вследствие сложности и (или) многообразия выводов.

3. Нечеткость или неясность, сопутствующая естественным языкам:

3.1 нечеткость описания или представления;

3.2 неясность, связанная со сложностью и (или) многообразием семантик и структур естественных языков.

4. Расплывчатость или смутность рисунков, картин или сцен:

4.1 расплывчатость рисунков и картин;

4.2 неясность, возникающая в процессе интерпретации рисунков или картин.

5. Неясность вследствие структурной сложности и (или) многообразия информации

Определим, когда целесообразно применять нечеткую логику, а когда - нет.

Применение нечеткого управления эффективно ...

- Для очень сложных процессов, когда имеется сложная математическая модель
- Для нелинейных процессов
- Если должна выполняться обработка экспертных знаний

Применение нечеткого управления не имеет смысла, если ...

- Стандартная теория управления дает удовлетворяющий результат
- Легко разрешимая и адекватная математическая модель уже существует
- Проблема не разрешима

1. Что такое нечеткие множества?

В классической математике мы хорошо знакомы с тем, что мы называем четкие множества. В обычной теории множеств существуют несколько способов задания множества. Одним из них является задание с помощью характеристической функции, определяемой так. Пусть U - *универсальное множество*, из элементов которого образованы все остальные множества, рассматриваемые в настоящей задаче, например множество всех целых чисел, множество всех гладких функций, заданных на действительной оси, и т.д. В дальнейшем в качестве универсального множества будет, как правило, использовано множество всех действительных чисел. *Характеристическая функция множества* - это функция, значения которой указывают, является ли X элементом множества A. Особенностью этой функции является бинарный характер ее значений, т.е. 1 или 0.

Рассмотрим, например множество X всех вещественных чисел между 0 и 10, которые будем называть предметной областью. Определим подмножество A из X всех вещественных чисел в диапазоне между 5 и 8. A = [5,8]. Покажем множество A в виде характеристической функции, то есть эта функция присваивает значение 1 или 0 каждому элементу в X, в зависимости от того, находится ли элемент в подмножестве или нет (рис. 1).

Другими словами, если характеристическая функция элементов, равна 1, то эти элементы, принадлежат множеству A, а элементы, у которых характеристическая функция равна 0 - не принадлежат множеству A. Это понятие применимо для достаточно многих областей приложений. Но мы можем легко найти ситуации, где этот метод испытывает недостаток в гибкости.

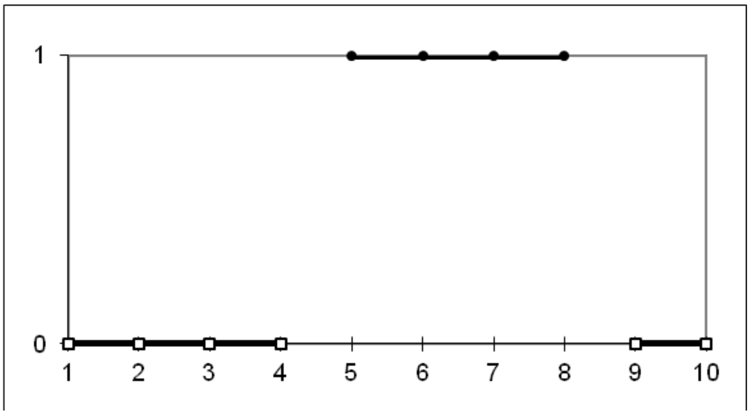

Рис. 1 – Пример характеристической функции четкого множества

Например, рассмотрим множество молодежи. Формально обозначим: B = {множество молодежи}. Так как возраст начинается с 0 лет, то отрицательный диапазон этого набора должен быть пуст. Верхнюю границу диапазона определить довольно трудно. Для начала мы установим верхнюю границу диапазон, например, 20 лет. Следовательно, мы получаем B как четкий интервал: B = [0,20] . Теперь возникает вопрос: почему кто-то на его 20-ом дне рождения *молодой*, а на следующий день *не молодой*? Очевидно, это - структурная проблема, поскольку, если мы возьмем другой интервал от 20 до любой произвольной отметки, мы можем задать тот же самый вопрос.

Более естественный способ задавать набор B состоит в том, чтобы ослабить строгое разделение между понятиями молодой и не молодой. Мы может делать это, позволяя не только (четкое) решение "*ДА, он/она находится в наборе молодежи*, или *НЕТ, он/она не находится в наборе молодежи*", но и применяя более гибкие фразы, например, "*он/она принадлежит немного больше к набору молодежи* или *НЕТ, он/она почти не принадлежит к набору молодежи*". Рассмотрим формальное описание данной идеи. Прямой способ обобщить это понятие состоит в том, чтобы учитывать больше значений между 0 и 1. Фактически возможны многие варианты между 0 и 1, а именно числовой интервал I = [0, 1]. Интерпретация чисел (см. рис. 1), назначенных теперь ко всем элементам предметной области более трудна. Конечно, снова 1, присвоенная элементу, означает, что элемент находится во множестве B, а 0 - что элемент не определен во множестве B. Все другие значения означают частичную принадлежность к множеству B. Реализацию данной идеи рассмотрим на примере множество молодежи. На рис. 2 изображена характеристическая функция. Из рисунка 2 видно, что в 25 лет вы все еще молоды, но не на все 100%, а всего на 50.

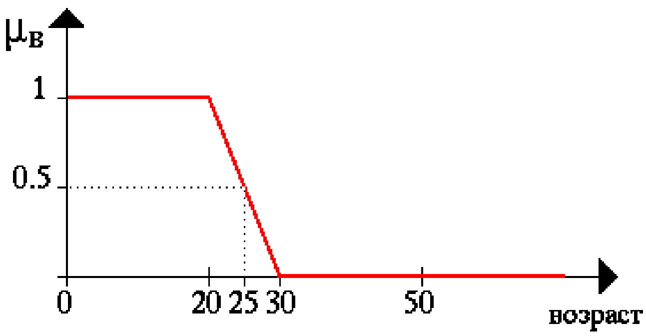

Рис. 2 – Характеристическая функция множества молодежи

2. Нечеткое множество и нечеткое отношение

Рассмотрим универсальное множество $U=\{u\}$. Нечетким множеством *A* на множестве *U* называется совокупность пар

$$\mathrm{A}=\{<\mu_{\mathrm{A}}(u),u>\},\qquad (1)$$

где $\mu_{\mathrm{A}}: U\rightarrow[0,1]$ — отображение множества *U* в единичный отрезок [0, 1], называемое функцией принадлежности (ФП) нечеткого множества А. Значение функции принадлежности $\mu_{\mathrm{A}}(u)$ для элемента $u\in U$ будем называть степенью принадлежности. Для упрощения записи будем считать, что выражению (1) эквивалентны выражения

$$\mathrm{A}=\bigcup_{u\in U}\mu_{\mathrm{A}}(u)/u=\bigcup_{u\in U}\mu_a^A/u=\bigcup_{u\in U}\mu_u/u \qquad (2)$$

Переменная *и* называется базовой. Верхний индекс в (2) будем опускать там, где это не приведет к неоднозначности.

Точки 0 и 1 представляют собой соответственно низшую и высшую степень принадлежности элемента к определенному подмножеству.

Точкой перехода нечеткого множества А называется элемент ***и*** множества *U*, для которого $\mu_{\mathrm{A}}(u)$=0.5.

Интерпретацией степени принадлежности $\mu_{\mathrm{A}}(u)$ является субъективная мера того, насколько элемент $u\in U$ соответствует понятию, смысл которого формализуется нечетким множеством *А*. Другими словами "величина $\mu_{\mathrm{A}}(u)$ обозначает субъективную оценку степени принадлежности *u* к множеству А, например $\mu_{\mathrm{A}}(u)$=0,8 означает, что u на 80% принадлежит А". Следовательно, могут существовать "моя ФП", "твоя ФП", "ФП эксперта".

ФП, во-первых, имеет субъективный характер и, во-вторых, может интерпретироваться на основе понятия вероятности. В рамках вероятностной трактовки значение $\mu_{\mathrm{A}}(U)$ функции принадлежности нечеткого множества *А* для любого элемента $u\in U$ понимается как вероятность того, что лицо принимающее решение (ЛПР) отнесет элемент u к множеству *А.* Данная интерпретация позволяет установить, с каким объектом «работают» теория нечетких множеств и базирующийся на ней лингвистический подход к обработке неопределенной информации.

Поскольку до недавнего времени практически единственным средством формализации неопределенной информации являлась теория вероятностей, важно отметить, что объектом теории нечетких множеств не является функция плотности вероятности или функция распределения. Это связано, в частности, с тем, что для первой обязательно условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$,

а для второй — свойство не убывания на отрезке [0, 1]. Как первое, так и второе свойства не обязательны для ФП по ее определению. Таким образом, требуется специальный аппарат, который позволял бы обрабатывать информацию, формализованную с помощью нечетких множеств.

Носителем нечеткого множества *A* называется множество

$$S_A = \{u \in U : \mu_A(u) > 0\}. \quad (3)$$

Иными словами, носителем нечеткого множества A является подмножество S_A универсального множества X, для элементов которого ФП μ_A строго больше нуля.

В качестве примера рассмотрим нечеткое множество A_3, соответствующее нечеткому понятию «небольшой запас деталей на складе». Носителем данного нечеткого множества является конечное множество S{10, 11, …, 40}, каждый элемент которого представляет собой определенное количество деталей.

A_3={0,05/10;0,1/11; 0,2/12; 0,3/13; 0,4/14; 0,5/15;
0,7/16; 0,8/19; 1,0/20; 1,0/21;…; 1,0/33; 0,9/0,34;
0,8/35; 0,6/36; 0,4/37; 0,3/38; 0,2/39; 0,1/40}.

Отсюда следует, что в решаемой задаче управления запасами для конкретного ЛПР понятию «небольшой запас деталей на складе» полностью соответствует запас объемом от 20 до 33 деталей, в меньшей степени – запасы от 11 до 19 и от 34 до 40 деталей. Запас объемом меньше 10 и больше 40 деталей понятием «небольшой» охарактеризован быть не может.

Для практических приложений носители нечетких множеств всегда ограничены. Так, носителем нечеткого множества допустимых режимов для системы может служить четкое подмножество (интервал), для которого степень допустимости не равна нулю (рис. 3).

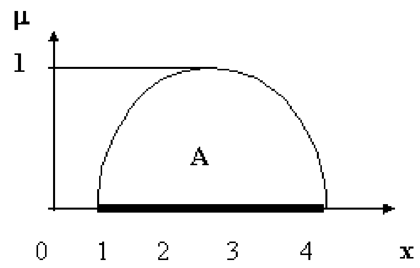

Рис. 3 – Понятие носителя нечеткого множества (выделен жирной чертой)

Высотой *d* нечеткого множества A называется максимальное значение ФП этого множества $d = \max\limits_{u \in U} \mu_A(u)$. Если *d* = 1, то нечеткое множество называется нормальным.

Ниже будут рассматриваться только нормальные нечеткие множества, так как если нечеткое множество не нормально, то его всегда можно превратить в нормальное, разделив все значения ФП на ее максимальное значение.

Пусть $V = \{v\}$ – другое универсальное множество. Нечетким отношением R на множестве $U \times V$ называется совокупность пар

$$R = \bigcup_{(u,v) \in U \times V} \mu_R(u,v)/(u,v), \tag{4}$$

Где μ_R: $U \times V \to [0, 1]$ –нечеткого отношения R, имеющая тот же смысл, что и ФП нечеткого множества. Приведенное определение легко обобщается на n-мерный случай.

Сравнивая выражения (1) и (4), можно видеть, что нечеткое отношение – это нечеткое множество с векторной базовой переменной. Примерами нечетких отношений могут служить такие, как «*X* примерно равен У», «*X* значительно больше У», «*A* существенно предпочтительнее, чем В».

3. Нечеткая и лингвистическая переменные

Нечеткая переменная определяется кортежем $\langle X, U, \tilde{X} \rangle$, где *X* — наименование нечеткой переменной; $U = \{u\}$ — область ее определения, или универсальное множество; $\tilde{X} = \bigcup\limits_{u \in U} \mu_u / u$ — нечеткое множество на *U*, описывающее ограничение на возможные числовые значения нечеткой переменной *X*.

Лингвистическая переменная (ЛП) определяется кортежем

$$\langle \beta; T; U; G; M \rangle, \tag{6}$$

где β – наименование ЛП; T – множество ее значений, или термов, представляющих собой наименования нечетких переменных, областью определения каждой из которых является множество U. Например, для ЛП, представленной на рис. 3, $T = \{T_1, T_2, T_3\}$, $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < u_+$, $U = [u_0, u_+]$. Пару точек (u_0, u_+) будем называть граничной парой. В дальнейшем без особой необходимости не будем различать переменную и ее наименование. Множество T будем называть базовым терм-множеством ЛП; G — синтаксическая процедура, описывающая процесс образования из множества T новых, осмысленных для данной задачи значений ЛП. Множество $\mathrm{T}^* = \mathrm{T} \bigcup \mathrm{G}(\mathrm{T})$ назовем расширенным терм-множеством ЛП; M — семантическая процедура, позволяющая приписать каждому новому значению, образуемому процедурой G, некоторую семантику путем формирования соответствующего нечеткого множества, т. е. отобразить новое значение в нечеткую переменную.

Рассмотрим пример ЛП. Пусть ЛПР оценивает посадочную скорость летательных аппаратов с помощью понятий «малая», «небольшая», «средняя», «высокая». При этом максимальная посадочная скорость равна 300 км/ч. Формализация такого описания может быть проведена с помощью лингвистической переменной <СКОРОСТЬ, {МАЛАЯ, НЕБОЛЬШАЯ, СРЕДНЯЯ, ВЫСОКАЯ}, [0, 300], G, M>, где G — процедура перебора элементов базового терм-множества, M — процедура экспертного опроса.В общем случае взаимосвязь лингвистической и нечеткой переменных графически может быть представлена как показано на рис. 4. Здесь $T=\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$, $u_0 < u_2 < u_1 < u_4 < u_3 < u_6 < u_5 < u_7$, $U = [u_0, u_7]$. Пара точек (u_0, u_1) называется граничной парой.

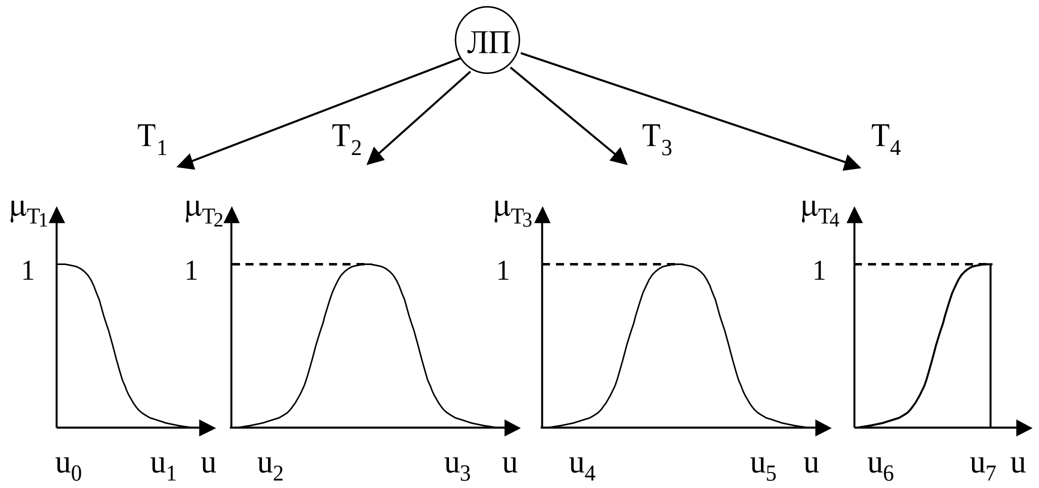

Рис. 4. – Взаимосвязь лингвистической и нечеткой переменных

4. Нечеткие числа и функции

В зависимости от характера множества *U* ЛП могут быть разделены на числовые и нечисловые. Числовой называется ЛП, у которой $U \subset R^1$, где $R^1 = (-\infty, \infty)$, и которая имеет измеримую базовую переменную.

Нечеткие переменные, соответствующие значениям числовой ЛП, будем называть нечеткими числами. Если $|U| < \infty$, то нечеткие числа будем считать дискретными, если же $|U| = |R^1|$ — то непрерывными. Приведенная выше ЛП СКОРОСТЬ является числовой, а нечеткие переменные из ее терм-множества — непрерывными нечеткими числами.

Примером нечисловой ЛП может служить переменная СЛОЖНОСТЬ, формализующая понятие «сложность разработки», со значениями НИЗКАЯ, СРЕДНЯЯ, УМЕРЕННАЯ, ВЫСОКАЯ.

К ФП нечетких чисел обычно предъявляется ряд требований, которые обсуждаются в § 3.1, 3.2.

Пусть $U = \{u\}$, $V = \{v\}$ — два универсальных множества; $F(U)$ — система всех нечетких множеств, заданных на *U*. Используя данные обозначения, определяем три типа функций:

четкая функция нечеткого аргумента

$$\mathrm{H}_1 : F(U) \to V, \tag{7}$$

нечеткая функция четкого аргумента

$$\mathrm{H}_2 : U \to F(V), \tag{8}$$

нечеткая функция нечеткого аргумента

$$\mathrm{H}_3 : F(U) \to F(V), \tag{9}$$

Использование основных понятий лингвистического подхода —ЛП и нечеткого множества — с целью формализации нечетких описаний элементов задач принятия решений, а именно критериев, предпочтений ЛПР, случайных исходов, качественных зависимостей между параметрами альтернатив и оценками исходов, приводит к необходимости рассмотрения лингвистических критериев и отношений предпочтения, лингвистических вероятностей, нечетких свидетельств.

5. Нечеткие высказывания, правила их преобразования

Нечеткими высказываниями назовем высказывания следующего вида:

1) высказывание <β есть α>, где β — наименование лингвистической переменной, отражающей некоторый объект или параметр реальной действительности, относительно которой производится утверждение α, являющееся ее нечеткой оценкой (нечеткой переменной). Например, (давление большое). В высказывании <толщина равна 14 мм> значение α = 14 мм является четкой оценкой лингвистической переменной β: <толщина>;

2) высказывания вида <β есть mα> , <β есть Qα>, <Qβ есть mα>, <mβ есть Qα>, при этом m называется модификатором (ему соответствуют такие слова, как ОЧЕНЬ, БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ, НЕЗНАЧИТЕЛЬНЫЙ, СРЕДНИЙ и др.), Q - квантификатором (ему соответствуют слова типа БОЛЬШИНСТВО, НЕСКОЛЬКО, МНОГО, НЕМНОГО, ОЧЕНЬ МНОГО и др.). Например, <давление очень большое>, <большинство значений параметра очень мало>;

3) высказывания, образованные из высказываний 1-го и 2-го видов и союзов И; ИЛИ; ЕСЛИ. . ., ТО. . .; ЕСЛИ. . ., ТО . . . ИНАЧЕ. Например, <ЕСЛИ давление большое, ТО толщина не мала>.

Необходимо отметить, что отождествление данных союзов с логическими операциями конъюнкций, дизъюнкций, отрицанием и импликацией возможно только при предварительном рассмотрении опроса коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности высказываний, образующих предложения.

Предположим, имеются некоторые высказывания $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$ относительно ситуации A. Пусть рассматриваемые высказывания имеют вид $\tilde{C}$: <β есть α_C> и $\tilde{D}$: <β есть α_D>, где α_C и α_D - нечеткие переменные, определенные на универсальном множестве U = {u}

Истинность высказывания $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$ относительно $\tilde{C}$ есть значение функции T($\tilde{D}$ / $\tilde{C}$), определяемое степенью соответствия высказываний $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$. В формальной записи T ($\tilde{D}/\tilde{C}$) = {< $\mu_T(\tau)$ /τ}, где ($\forall$u $\in$ U) ($\tau = \mu_{\tilde{D}}(u)$); $\mu_T(\tau)$ = max $\mu_{\tilde{C}}(u)$, $U^/$ = {u $\in$ U| $\mu_D(u) = \tau$ }, u $\in$ U}, при этом $\mu_{\tilde{D}}$ и $\mu_{\tilde{C}}$ – ФП нечётких переменных $\alpha_{\tilde{C}}$ и $\alpha_{\tilde{D}}$; $\mu_T(\tau)$ – ФП значения истинности; $\tau \in [0,1]$ – область её определения. Иными словами, истинностью, нечеткого высказывания D относительно нечеткого высказывания $\tilde{C}$ является нечеткое множество T($\tilde{D}/\tilde{C}$), определенное на интервале [0,1], такое, что для любого $\tau \in [0,1]$

значение ее ФП равно наибольшему значению $\mu_{\tilde{C}}(u)$ по всем u, при которых $\mu_{\tilde{D}}(u) = \tau$.

Пример 1. Предположим, что сформулировано высказывание $\tilde{D}$:<β находится близко к 5>, в то время как $\tilde{C}$: <β имеет значение приблизительно 6>. Пусть $\alpha_{\tilde{D}}$ есть "близко к 5", α_{C}· есть "приблизительно 6" суть нечеткие переменные с нечеткими множествами:

$C_{\tilde{C}}$ = {<0,1/2>, <0,3/3>, <0,7/4>, <1/5>,
<0,8/6>, <0,6/7>, <0,3/8>, <0,1/9>,
<0,8/6>, <0,6/7>, <0,3/8>, <0,1/9> };
$C_{\tilde{D}}$ = {<0,1/3>, <0,4/4>, <0,8/5>, <1/6>,
<0,7/7>, <0,4/8>, <0,3/9>, <0,1/10>}.

В этом случае U = { 2, 3_4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 } . Тогда истинность высказывания *D* относительно *C* будет иметь следующий вид:

$T(\tilde{D}/\tilde{C})$ = {<0,1/0>, <0,3/0,1>, <0,4/0,3>,
<0,7/0,6>, <0,4/0,7>, <1/0,8>, <0,8/1>}.

6. Построение функций принадлежности

Для использования в моделях принятия решений информации, формализованной на основе теории нечетких множеств, необходимы процедуры построения соответствующих ФП. Различные методы построения ФП нечетких множеств классифицируются по четырем аспектам:

1) предполагаемый вид области определения нечеткого множества: числовая – дискретная (a) или непрерывная (b) – и нечисловая (c);

2) применяемый способ экспертного опроса: индивидуальный (d_1), групповой (d_2);

3) тип используемой экспертной информации: порядковая (e_1), кардинальная (e_2);

4) интерпретация данных экспертного опроса: вероятностная (D), детерминированная (N).

Рассмотрим, например, процедуру $\langle b, d_1, e_2, N \rangle$ построения ФП для термов ЛП с числовой областью определения на основе метода равноделения. ЛПР поочередно предъявляется несколько пар точек. При каждом предъявлении ЛПР должно назвать точку, для которой степень принадлежности находится посередине между степенями принадлежности точек, входящих в предъявленную пару.

На практике используется также процедура построения ФП, которая основана на их представлении в виде функций от плотности вероятности четких случайных границ между термами лингвистической переменной. Определять ФП можно не только с помощью процедур непосредственного опроса экспертов, но и на основе функций распределения F_1 и F_2 с дальнейшим использованием выражения, полученного для $\mu_A(x)$. Сами функции F_1 и F_2 могут быть построены на основе либо статистических данных, либо экспертного опроса.

Для построения ФП используются: а) стандартный набор графиков; б) метод попарных сравнений; в) метод деления значений ФП пополам; г) метод равнокажущихся интервалов; д) метод последовательных интервалов; е) неизменная базовая переменная.

6.1. Построение функции принадлежности одним экспертом

Рассмотрим нечеткое понятие "возраст". Определим «возраст» как лингвистическую переменную (ЛП). Базовый набор значений ЛП "возраст" определим как (рис. 5):

В - {младенческий, детский, юный, молодой, зрелый, преклонный, старый}. Для ЛП "возраст" базовая шкала – это числовая шкала от 0 до 120, обозначающая количество прожитых лет, а функция принадлежности определяет, насколько мы уверены в том, что данное количество лет можно отнести к данной категории возраста.

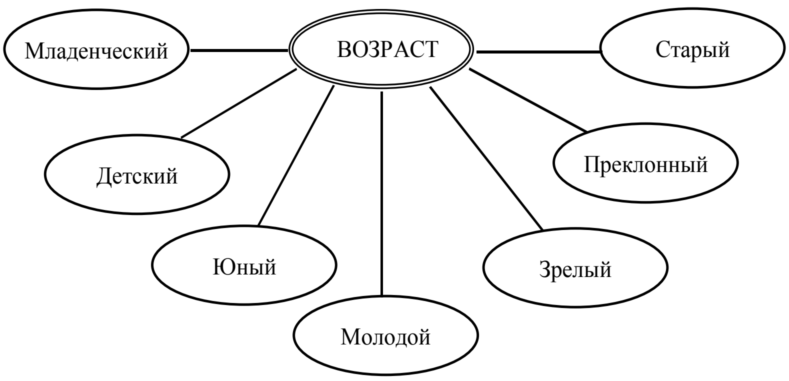

Рис. 5 – Базовый набор значений ЛП "возраст"

На рис. 6 отражено, как одни и те же значения базовой шкалы могут участвовать в определении различных нечетких множеств (НМ). Например, определить значение НМ "младенческий возраст" можно так. Рис. 7 иллюстрирует оценку НМ экспертом, который ребенка до полугода с высокой степенью уверенности относит к младенцам (μ = 1). Дети до четырех лет причисляются к младенцам тоже, но с меньшей степенью уверенности (0,5< μ <0,9), а в десять лет ребенка называют так только в очень редких случаях – к примеру, для девяностолетней бабушки и 15 лет может считаться младенчеством.

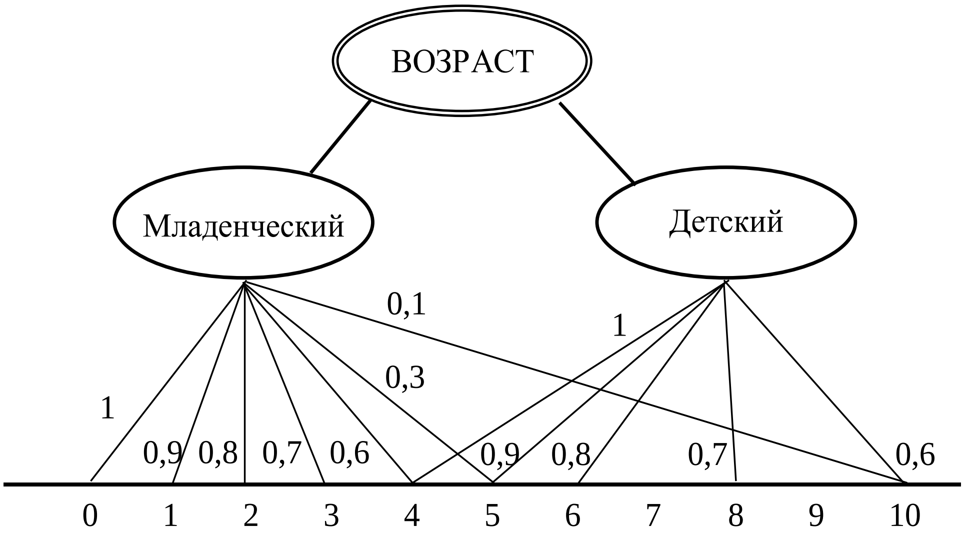

Рис. 6 – Базовая шкала ЛП "возраст"

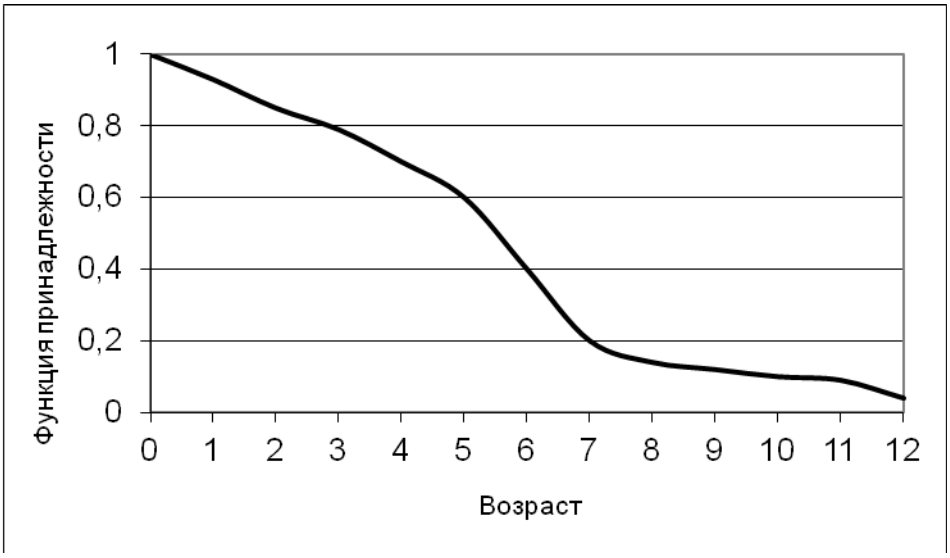

Рис. 7 – ФП терма лингвистической переменной "младенческий возраст"

6.2. Построение функции принадлежности с использованием метода экспертной оценки

С помощью ФП можно отразить мнение одного или нескольких экспертов. Это связано с неспособность человека формулировать свое количественное впечатление в виде однозначного числа. Предположим, что имеется m экспертов, часть из которых на вопрос о принадлежности элемента $x \in X$ нечеткому множеству A отвечает положительно. Обозначим их число n_1. Другая часть экспертов $n_2 = m - n_1$ отвечает на этот вопрос отрицательно. Тогда принимаем, что функция принадлежности может быть описана выражением

$$\mu_A(x) = \frac{n_1}{n_1 + n_2}. \qquad (10)$$

Пример 2. Пусть имеется множество X={1, 2, 3, 4, 5, 6} и требуется построить нечеткое множество А формализующее нечеткое понятие "намного больше двух". Решение задачи может выглядеть так. Допустим, что результаты опроса шести экспертов дали такие результаты (табл. 1). Причем если на вопрос о принадлежности элемента $x \in X$ нечеткому множеству А эксперт отвечает положительно, то в таблицу заносим знак "+", если отрицательно, то знак " – ". Обозначим число положительных знаков как n_1, а число отрицательных знаков как $n_2 = m - n_1$.

Таблица 1 – Результат опроса экспертов

Эксперты	X					
	1	2	3	4	5	6
1	–	–	–	+	+	+
2	–	–	–	+	+	+
3	–	–	+	+	+	+
4	–	–	–	–	–	+
5	–	–	–	–	+	+
6	–	–	–	+	+	+
n_1=	0	0	1	4	5	6
n_2=	6	6	5	2	1	0

Используя формулу (10), определяем ФП:

$$\mu_A(x_1) = \frac{0}{6} = 0; \qquad \mu_A(x_2) = \frac{0}{6} = 0; \qquad \mu_A(x_3) = \frac{1}{6} = 0{,}17;$$

$$\mu_A(x_4) = \frac{4}{6} = 0{,}67; \quad \mu_A(x_5) = \frac{5}{6} = 0{,}83; \quad \mu_A(x_6) = \frac{6}{6} = 1.$$

Тогда формальная запись нечеткого множества А будет такой:

$$A < \frac{0}{1}; \frac{0}{2}; \frac{0{,}17}{3}; \frac{0{,}67}{4}; \frac{0{,}83}{5}; \frac{1}{6} >$$

Полученная ФП проиллюстрирована на рис. 8.

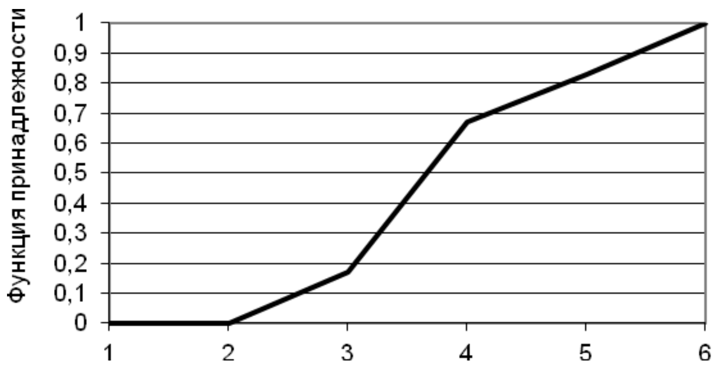

Рис. 8 – Функция принадлежности для примера

6.3. Методика построения функции принадлежности

Методику построения ФП рассмотрим на модельном примере: "Определить семантику и термы ЛП "Вероятность". Методика решения задачи предусматривает выполнение этапов:

1 этап. Определение термов ЛП.

В нашем случае это могут быть, например, "Вероятность большая"; "Вероятность средняя"; "Вероятность малая".

2 этап. Ранжирование термов.

В данном случае можно выполнить ранжирование типа "по возрастанию". Таким образом, результатом выполнения этапа будет последовательность:

1 – "Вероятность малая"; 2 – "Вероятность средняя"; 3 –"Вероятность большая".

3 этап. Определение интервалов термов (то есть назначение левой и правой границ интервала). В каждом конкретном случае эти границы будут различны. В нашем примере ЛП "Вероятность" имеет крайнюю левую границу 0, а крайнюю правую – 1 (по своей сути вероятность меняется от 0 до 1, т.е. вероятность невозможного события равна 0, а вероятность достоверного события равна 1). Промежуточные значения выбираются на основе субъективного суждения. Предположим, что граничные пары значений термов установлены такими, как представлены в табл. 2.

Таблица 2 – Левая и правая границы интервалов термов

Номер и наименование терма	Левая граница	Правая граница
1 "Вероятность малая"	0	0,4
2 "Вероятность средняя"	0,2	0,8
3 "Вероятность большая"	0,6	1,0

4 этап. Графическое изображение установленных границ интервалов термов (рис. 9).

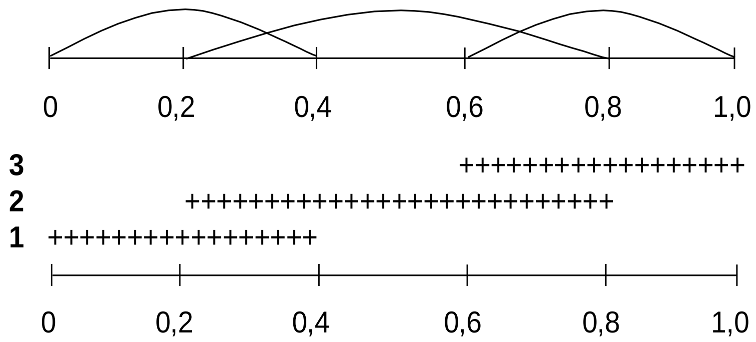

Рис. 9 – Границы интервалов

5 этап. Корректировка границ интервалов термов (необязательный этап).

6 этап. Выбор метода построения ФП. В данном примере используем метод деления значений ФП пополам.

7 этап. Определение семантики терма лингвистической переменной.

7.1. Рассмотрим 1-й терм: "Вероятность малая". Для него определим значения ФП в граничных точках интервала. В граничной точке 0,0 ФП равна 1, так как если вероятность равна нулю, то она естественно малая и ФП принимает максимальное значение. В граничной точке 0,4 ФП равна 0, так как ранее на основе субъективного суждения мы приняли, что при P>0,4 вероятность не может быть малой.

Граничные значения интервала	0,0	0,4
Значения ФП	1	0

Графическая иллюстрация граничных точек показана на рисунке 10 а.

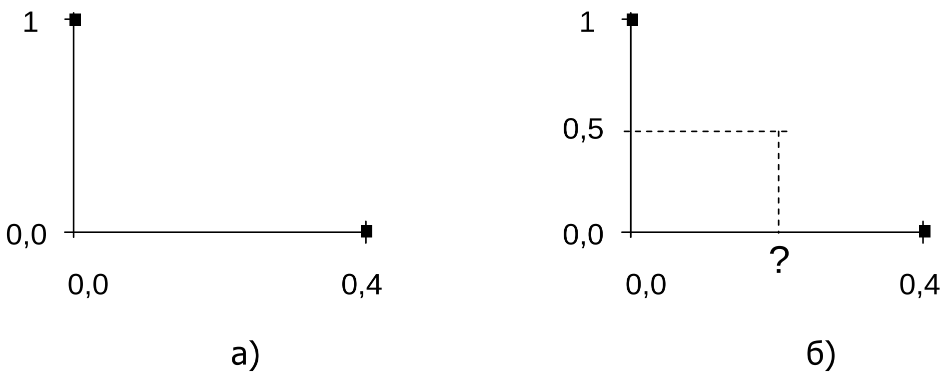

Рис. 10 – Значения ФП в граничных точках

Нахождение значений ФП в данном интервале. Для этого можно использовать 3, 5, 7, 9 кратное разбиение интервала (следует помнить, что чем больше кратность разбиения, тем выше точность построения ФП).

Для простоты воспользуемся 3-х кратным разбиением. Методика разбиения состоит в следующем:

- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,5) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,0 и 0,4. Графическая иллюстрация постановки задачи приведена на рис. 10б. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,35 (рис. 11а).
- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,25) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,35 и 0,4. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,38 (рис. 11б).

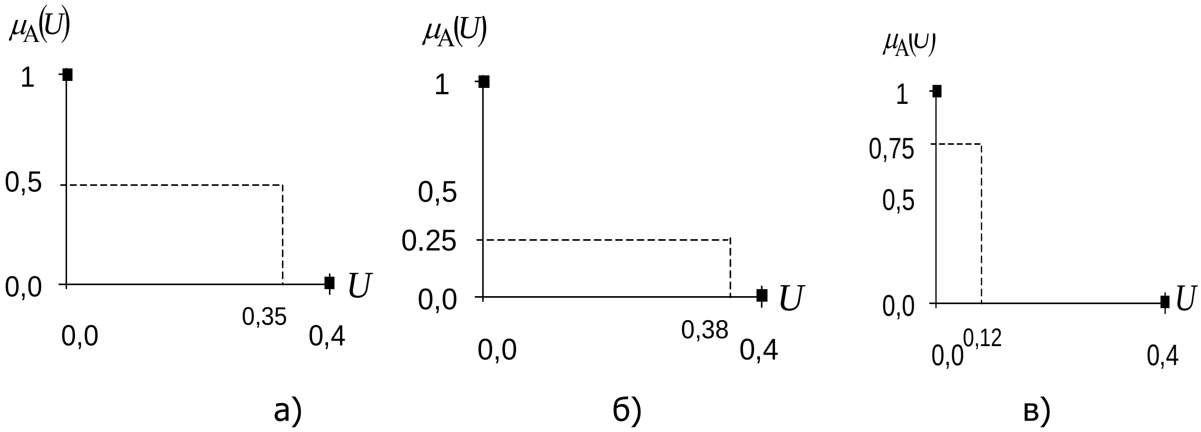

Рис. 11 – Значения аргумента, при котором ФП принимает значение
а) 0,5; б) 0,25; в) 0,75

- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,75) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,0 и 0,35. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,12 (рис. 11в).

Таким образом, результаты выполнения предыдущих действий для данного терма (рис. 12) будут такими:

Значения аргумента	0,0	0,12	0,35	0,38	0,40
Степени принадлежности	1,0	0,75	0,50	0,25	0,0

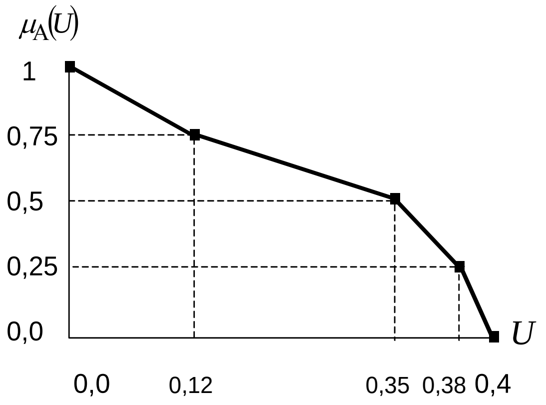

Рис. 12 – Графическое изображение результатов для терма "вероятность малая"

7.2. Рассмотрим 2-й терм и определим семантику терма "Вероятность средняя". Для него определим значения ФП в граничных точках. В этом случае значения ФП равны 0, так как и меньше P < 0,2 и при P > 0,8 вероятность не может считаться средней.

Граничные значения интервала	0,2	0,8
Значения ФП	0	0

Графически эти значения показаны на рис. 13.

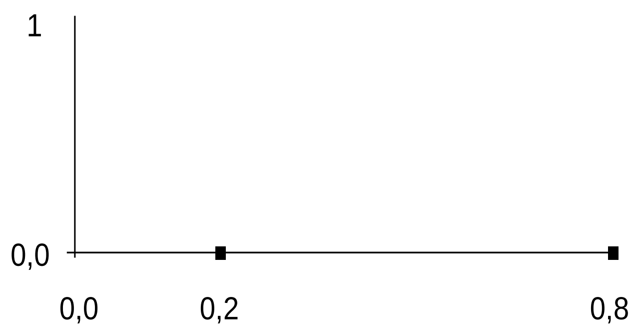

Рис. 13 – Значения ФП в граничных точках для терма "Вероятность средняя"

Нахождение значений ФП в данном интервале. Для простоты воспользуемся 3-х кратным разбиением. Методика разбиения состоит в следующем:

- назначьте значение аргумента, при котором ФП уже равна 1, и значение аргумента, при котором она еще равна 1. Предположим, это будут значения аргумента равные 0,3 и 0,7 (рис. 14).

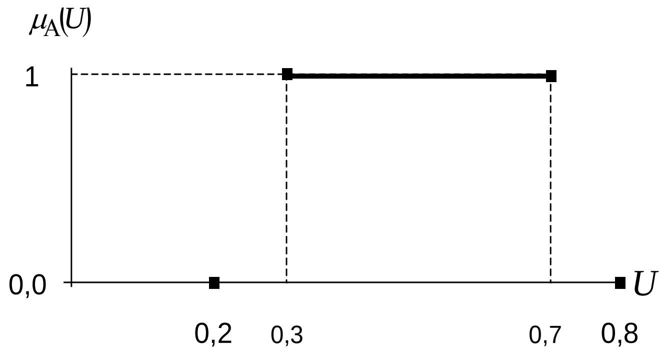

Рис. 14 – Значения аргумента, при котором фп принимает значение 1,0

- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,5) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,2 и 0,3. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,27.
- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,75) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,27 и 0,3. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,282.
- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,25) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,2 и 0,27. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,24.

Рассмотрим правый полуинтервал для терма "Вероятность средняя".

- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,5) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,7 и 0,8. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,74.
- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,75) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,7 и 0,74. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,72.
- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,25) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,74 и 0,8. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,76.

Таким образом, результаты выполнения предыдущих действий для терма "Вероятность средняя" будут такими (рис. 15):

Значения аргумента	0,2	0,24	0,27	0,282	0,3	0,7	0,72	0,74	0,76	0,8
Степени принадлежности	0,0	0,25	0,50	0,750	1,0	1,0	0,75	0,5	0,25	0

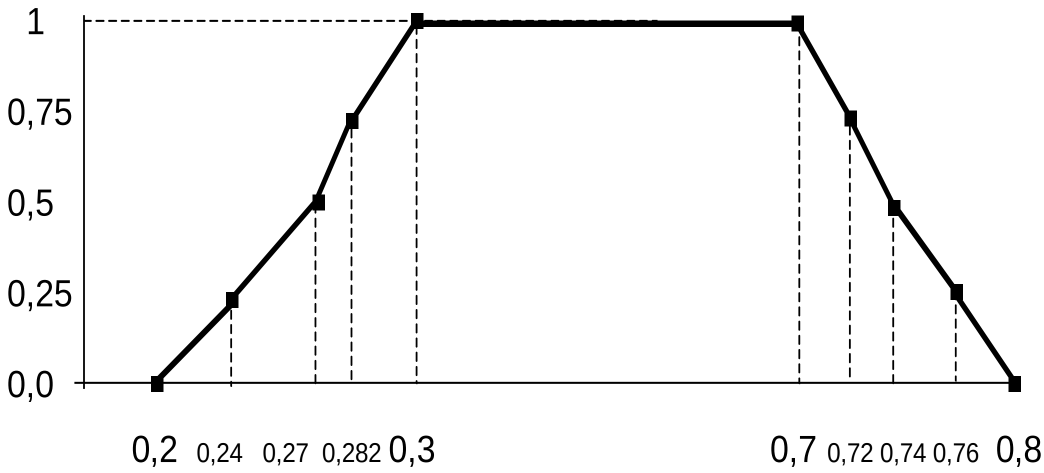

Рис. 15 – Вид ФП для терма "Вероятность средняя"

7.3. Рассмотрим 3-й терм и определим семантику терма "Вероятность большая". Для него определим значения ФП в граничных точках (рис. 16):

Граничные значения	0,6	1,0
Значения ФП	0	1

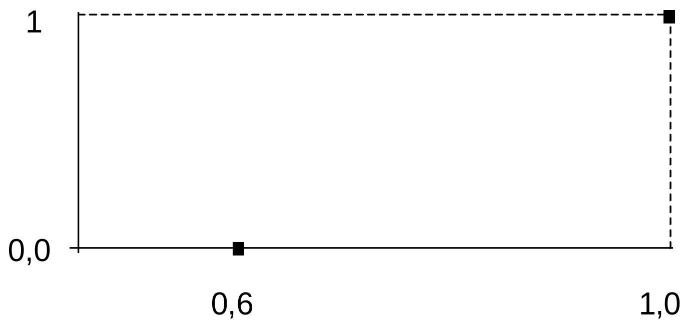

Рис. 16 – Значения ФП в граничных точках для терма "Вероятность большая"

Нахождение значений ФП в данном интервале.

Методика выполнения данного этапа аналогична 7.1, поэтому представим только конечные результаты.

- значение аргумента, для которого значение ФП (0,5) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,6 и 1,0 равно 0,7.
- значение аргумента, для которого значение ФП (0,25) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,6 и 0,7 равно 0,64.
- значение аргумента, для которого значение ФП (0,75) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,7 и 1,0 равно 0,85.

Таким образом, результаты выполнения расчетов для данного терма будут такими (рис. 17):

Значения аргумента	0,6	0,64	0,7	0,85	1,0
Степени принадлежности	0,0	0,250	0,500	0,750	1,0

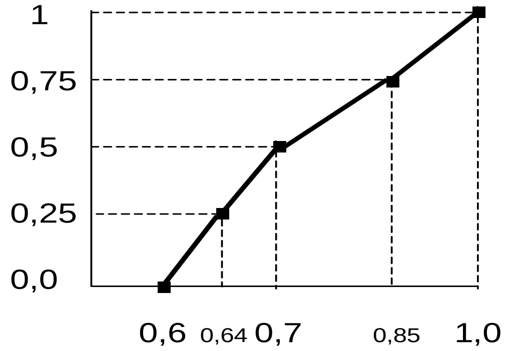

Рис. 17 – Вид ФП для терма "Вероятность большая"

Вывод. Таким образом, в результате выполнения всех этапов можно построить ФП лингвистической переменной "Вероятность" (рис. 18).

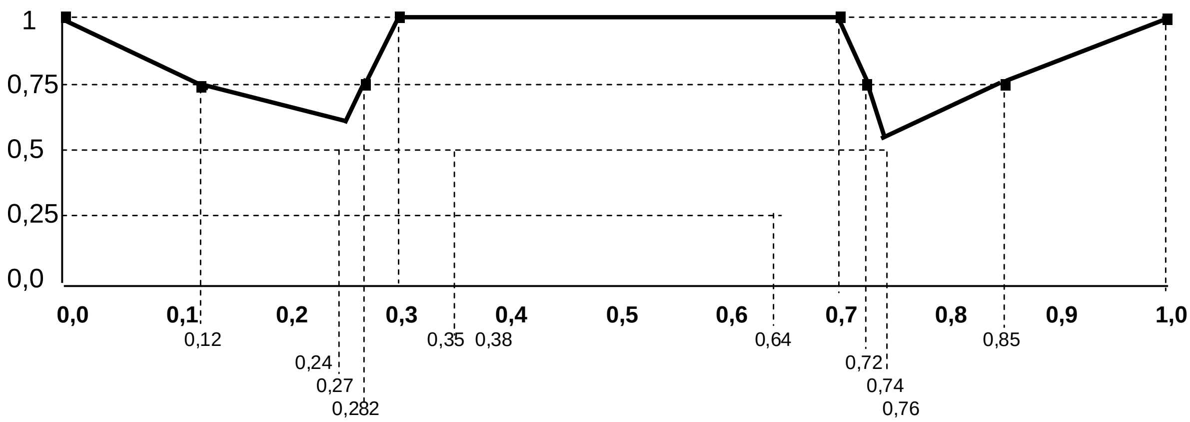

Рис. 18 – Общий вид ФП лингвистической переменной "Вероятность"

6.4. Косвенный метод построения функции принадлежности

Одним из возможных методов построения ФП является метод, основанный на количественном сравнении степеней принадлежности индивидуальным ЛПР. Результатом опроса ЛПР является матрица $B = \|b_{ij}\|$ размера n×n, где n – число точек u_i, в которых сравниваются значения ФП. Элемент b_{ij} матрицы *B* является субъективной оценкой отношения $\mu_A(u_i)/\mu_A(u_j)$ и показывает, во сколько раз, по мнению ЛПР, $\mu_A(u_i)$больше $\mu_A(u_j)$. Величина назначается в соответствии с балльной шкалой, значения которой интерпретируются в соответствии со шкалой интенсивности.

По определению $b_{ii}=1$ и с целью согласования оценок ЛПР устанавливается, что $b_{ji}=\dfrac{1}{b_{ij}}$. Значения ФП $\mu_A(u_1),\ldots,\mu_A(u_n)$ в точках $u_1,\ldots,u_n$ определяются на основе решения задачи о нахождении собственного вектора матрицы *B*:

$$BW^T = \nu_{\max} W \,,$$

где $\nu_{\max}$ – максимальное собственное число матрицы *B;* $W=(w_1,\ldots,w_n)$ – соответствующий собственный вектор; ^{т} – символ транспонирования.

Поскольку матрица *B* является положительной по построению, решение этой задачи всегда существует и является единственным. Можно показать, что в этом случае

$$\mu_A(u_i)=\frac{w_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i}\,.$$

При этом значения ФП $\mu_A(u_i)$ оказываются измеренными в шкале отношений. Описанный метод обладает рядом достоинств:

- применяемая в методе процедура парных сравнений является достаточно простой для ЛПР, поскольку она не навязывает ему априорных ограничений, например не требует транзитивности суждений;

- метод допускает наблюдаемую на практике несогласованность оценок эксперта (имеется в виду, что $b_{ij}b_{jk}\neq b_{ik}$) и вместе с тем позволяет учесть и оценить ее введением коэффициента несогласованности. Если $\lambda=0$, то наблюдается ситуации полной согласованности суждений; чем больше λ, тем больше несогласованность суждений ЛПР;

- решение задачи о собственном векторе приводит к измерению ФП в шкале отношений.

6.5. Построение функции принадлежности с использованием типовых функций

В соответствии с данным методом вид функции задается аксиоматически, а ее параметры непосредственно оцениваются ЛПР. Например, в случае треугольной формы функции принадлежности ЛПР указывает такие ее параметры u_1, u_2, u_3, при которых она принимает единичные и нулевые значения,

т. е. $\mu_A(u_2)=1$, и для всех $u\le u_1, u\ge u_3$ имеет место $\mu_A(u)=0$.

Параметрическое представление ФП является компактным, обеспечивает простоту построения их на практике, однако связано с исследованием адекватности используемых форм (треугольной, трапециевидной, колоколообразной и др.) и соответствующих аналитических описаний ФП.

Конкретный вид ФП определяется на основе различных дополнительных предположений о свойствах этих функций (симметричность, монотонность, непрерывность первой производной и т.д.) с учетом специфики имеющейся неопределенности.

Для построения значений ФП используются функции (рис. 19–25):

1)
$$\mu\ (x,a,b)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad x\le a\\ \dfrac{b-x}{b-a}, & \text{если} \quad a<x<b\\ 0, & \text{если} \quad x\ge b\end{cases} \tag{11}$$

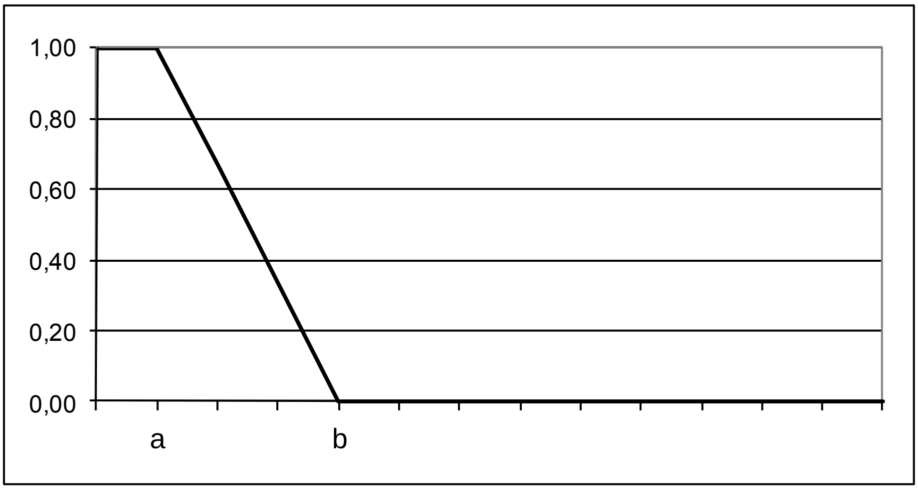

Рис. 19 – ФП для выражения (11)

2)
$$\mu_1(x,a,b)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если} \quad a<x<b\\ 1, & \text{если} \quad x\ge b\end{cases} \tag{12}$$

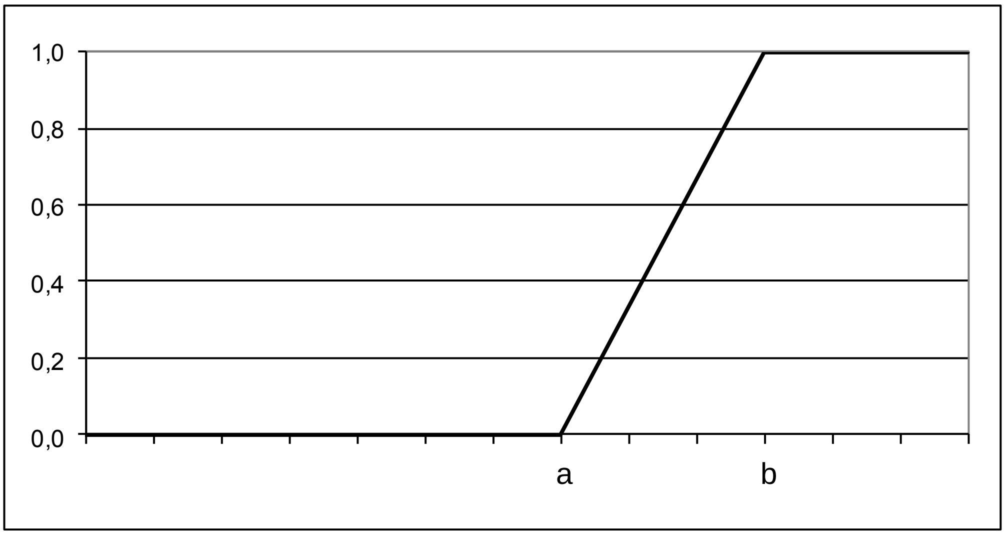

Рис. 20 – ФП для выражения (12)

3)
$$\mu_1(x,a,b,c)=\begin{cases}0, & если \quad x\le a\\ \dfrac{x-a}{c-a}, & если \quad a<x\le c\\ \dfrac{b-x}{b-c}, & если \quad c<x<b\\ 0, & если \quad x\ge b\end{cases} \qquad (13)$$

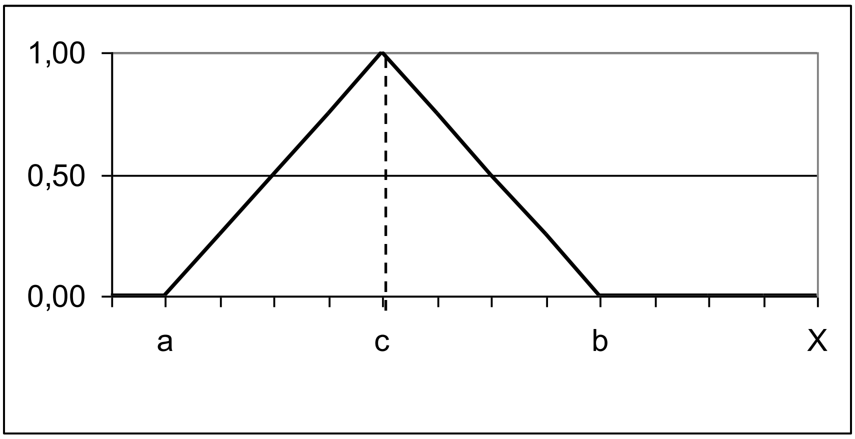

Рис. 21 – ФП для выражения (13)

4)
$$\mu_3(x,a,b,c,d)=\begin{cases}0, & если \quad x\le a\\ \dfrac{x-a}{c-a}, & если \quad a<x<c\\ 1, & если \quad c\le x\le d\\ \dfrac{b-x}{b-d}, & если \quad d<x<b\\ 0, & если \quad x\ge b\end{cases} \qquad (14)$$

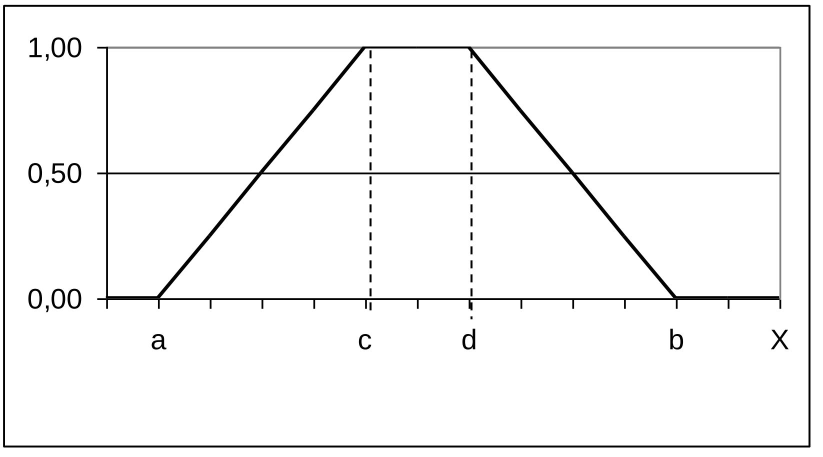

Рис. 22 – ФП для выражения (14)

5)
$$\mu_2(x,a,b,c)=\begin{cases}1, & если \quad x\le c\\ \{1+[a(x-c)]^{b}\}^{-1}, & если \quad x>c\end{cases} \qquad (15)$$

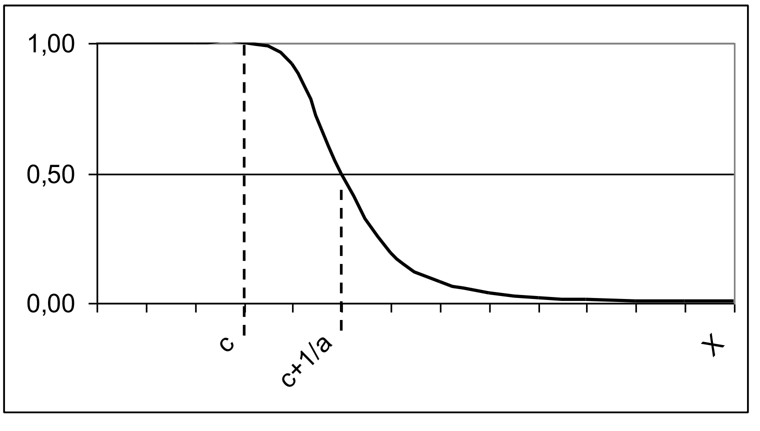

Рис. 23 – ФП для выражения (15)

6)
$$\mu_4(x,a,b)=\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2b^2}\right] \qquad (16)$$

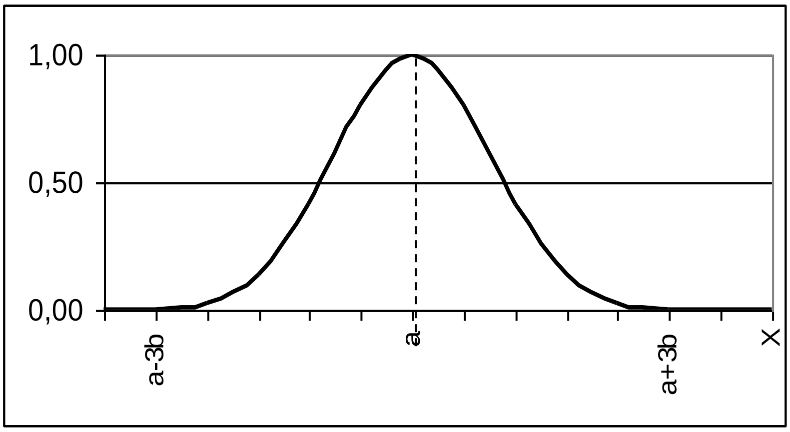

Рис. 24 – ФП для выражения (16)

7) $$\mu_5(x,a,b)=\{1+\exp[-a(x-b)]\}^{-1} \qquad (17)$$

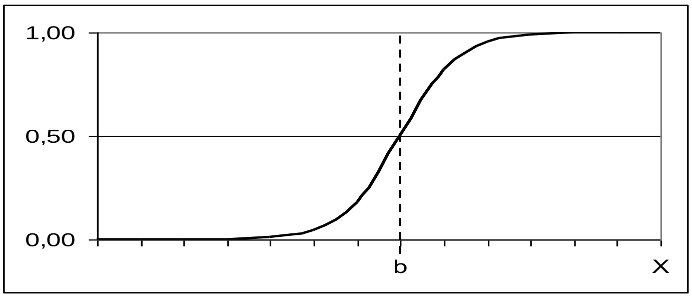

Рис. 25 – ФП для выражения (17)

7. Операции над нечеткими множествами

Подобно операциям над четкими множествами, нечеткие множества также можно пересекать, объединять и инвертировать. Л. Заде предложил оператор минимума для пересечения и оператор максимума для объединения двух нечетких множеств. Видно, что эти операторы совпадают с объединением и пересечением, если мы рассматриваем только степени принадлежности 0 и 1.

7.1. Операция объединения

Объединением нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется множество:

$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\{<\mu_{A\cup B}(x)/x>\}$, где $(\forall x\in X)\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$.

Предположим, на интервале [0; 0,4] ФП описывается выражением (11), а на интервале [0,2; 0,8] – выражением (14). Графическое изображение функции (11) при a=0 и b=0,4 приведено на рис. 26, а функции (14) при a=0,2; c=0,3; d=0,7; b=0,8 –

на рис. 27. Тогда результат выполнения операции объединения будет иметь вид, изображенный на рис. 28.

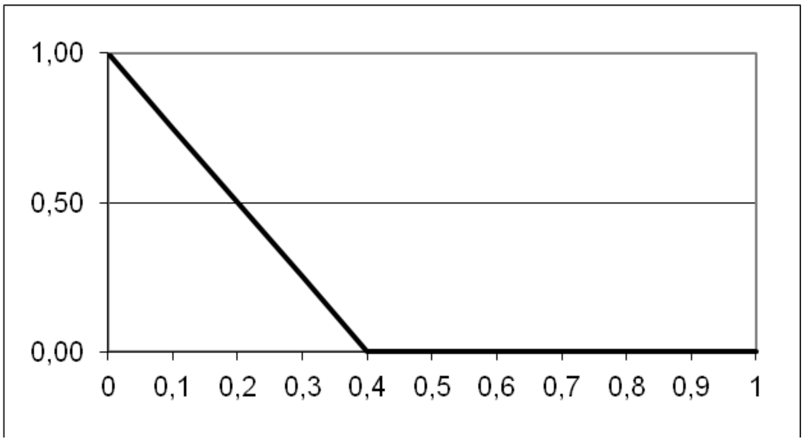

Рис. 26 – ФП для выражения (11) при a=0 и b=0,4

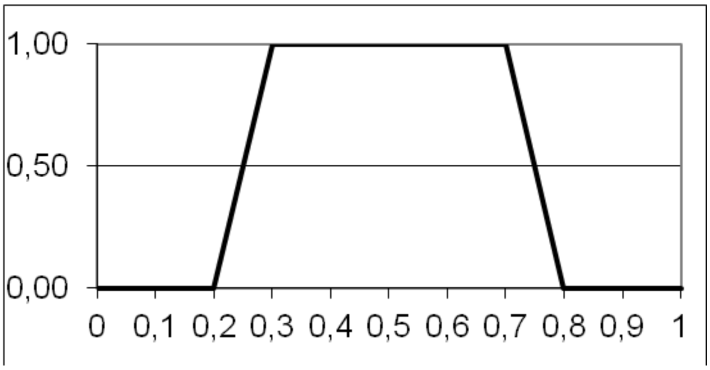

Рис. 27 – ФП для выражения (14) при a=0,2; c=0,3; d=0,7; b=0,8

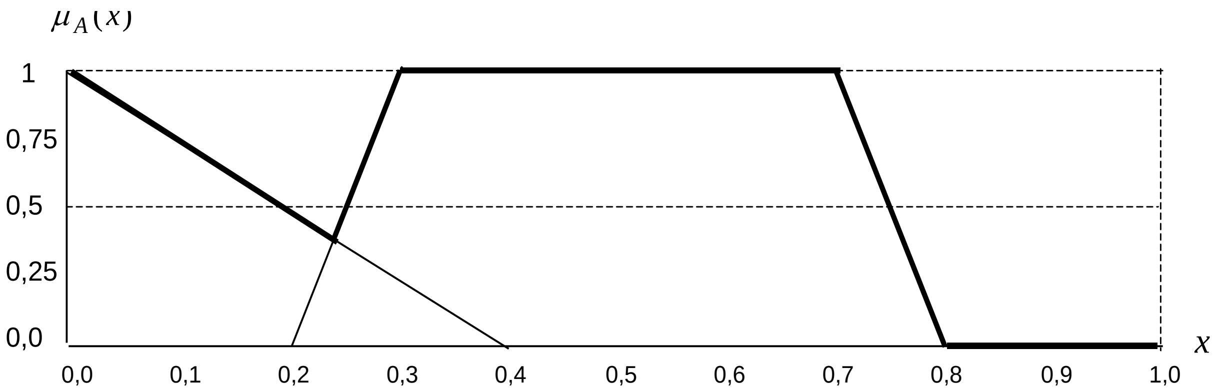

Рис. 28 – Результат выполнения операции объединения

7.2. Операция пересечения

Пересечением нечетких множеств Ã и B̃ называется множество:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{< \mu_{A \cap B}(x) / x >\}, \text{где } (\forall x \in X) \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Для условий предыдущего примера результат операции пересечения будет иметь вид (рис. 29):

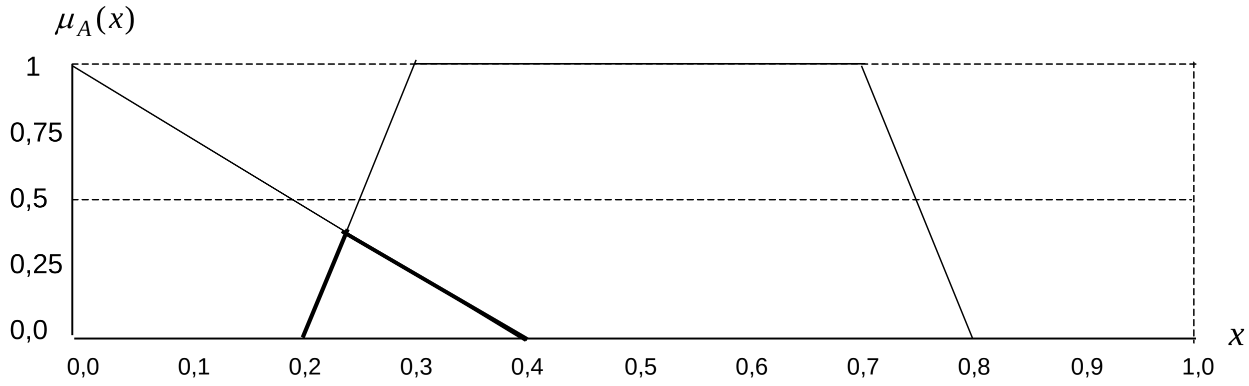

Рис. 29 – Результат выполнения операции пересечения

7.3. Операция дополнения

Дополнением нечеткого множества Ã называется множество

$\neg\tilde{A} = \{< \mu_{\bar{A}}(x)/x >\}$, где $(\forall x \in X)(\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x))$.

Носителем нечёткого множества $\neg\tilde{A}$ будет являться множество $S_{\neg\tilde{A}} = X \setminus S_{\tilde{A}}$, т. е. множество тех элементов $x \in X$, для которых ФП $\mu_A(x) \neq 1$.

Предположим, на интервале от [0,1; 0,5] ФП описывается выражением (13). Графическое изображение функции (13) при a=0,1 c=0,3 и b=0,5 приведено на рис. 30. На этом же рисунке приведена и функция $\mu_{\bar{A}}(x)$

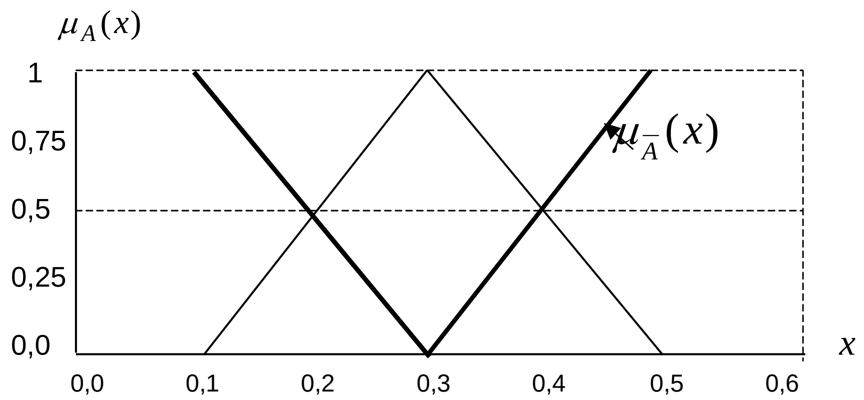

Рис. 30 – Результат выполнения операции дополнения

8. Метод анализа иерархий

Для иллюстрации этапов получения решения задачи с помощью метода анализа иерархий (МАИ) рассмотрим гипотетический пример. Для уборки зерновых культур необходимо приобрести зерноуборочный комбайн. На рынке имеются машины нескольких фирм одинакового целевого назначения. Какой зернокомбайн выбрать в соответствии с потребностями покупателя? Другими словами необходимо оценить весомость критериев к машине, которыми пользуется потребитель.

Рекомендуется такая последовательность этапов при решении задачи.

1. Очертите проблему и определите, что вы хотите узнать.

2. Постройте иерархию, начиная с вершины (цели - с точки зрения управления), через промежуточные уровни (критерии, по которым зависят последующие уровни) к самому нижнему уровню (который обычно является перечнем альтернатив).

3. Постройте матрицу попарных сравнений для второго уровня.

4. Проверить согласованность, используя отклонение λ_{max} от n.

Схема иерархии для рассматриваемой задачи приведена на рис. 31. На первом (высшем) уровне находится общая цель: "Зернокомбайн". На втором уровне находятся показатели (критерии), уточняющие цель.

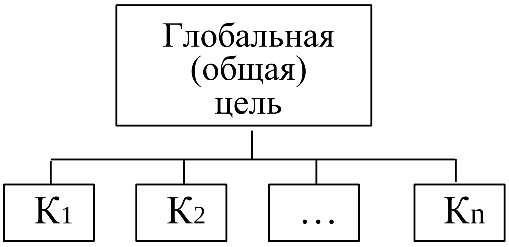

Рис. 31 – Схема иерархии для решения проблемы выбора зернокомбайна

Примечание 1. В примере на втором уровне рассматриваются четыре критерия. Такое количество выбрано лишь для иллюстрации метода и не связано с сутью рассматриваемой проблемы – выбора лучшего зернокомбайна.

Примечание 2. Издавна известны магические свойства числа семь. Так вот в МАИ для проведения обоснованных численных сравнений не рекомендуется сравнивать более чем 7 $\pm$ 2 элементов. Если же возникает потребность в расширении уровней 2 и 3, то следует использовать принцип иерархической декомпозиции. Другими словами если число критериев, например, превышает десятки, то необходимо элементы сгруппировать в сравниваемые классы приблизительно из семи элементов в каждом.

После выполнения работ на этапе иерархического представления проблемы необходимо установить приоритеты критериев. Для количественного определения сравнительной важности факторов в проблемной ситуации необходимо составить матрицу попарных сравнений. Эта матрица представлена в табл. 3.

Таблица 3 – Общий вид матрицы попарных сравнений

Общее удовлетворение машиной	A_1	A_2	A_3	. . .	A_N
A_1	1/1	w_1/w_2	w_1/w_3	. . .	w_1/w_n
A_2	w_2/w_1	1/1	w_2/w_3	. . .	w_2/w_n
A_3	w_3/w_1	w_3/w_2	1/1	. . .	w_3/w_n
. . .	. . .	. . .	. . .	1/1	. . .
A_N	w_n/w_1	w_n/w_2	w_n/w_3	. . .	1/1

Здесь A_1, A_2, A_3, ..., A_n- множество из n элементов; w_1, w_2, w_3, ..., w_n- соответственно их веса или интенсивности.

Примечание 1. Цель составления подобной матрицы заключается в определении факторов с наибольшими величинами важности, чтобы затем сконцентрировать внимание на них при решении проблемы или разработке плана действий.

Примечание 2. Если ожидается, что w_1, w_2,..., w_n – неизвестны заранее (а это очень распространенная ситуация), то попарные сравнения элементов производятся с использованием субъективных суждений, численно оцениваемых по шкале (табл. 4).

Таблица 4 – Шкала относительной важности

Интенсивность относительной важности	Определение	Объяснения
1	Равная важность	Равный вклад двух видов деятельности в цель
3	Умеренное превосходство одного над другим	Опыт и суждения дают легкое превосходство одному виду деятельности над другим
5	Существенное или сильное превосходство	Опыт и суждения дают сильное превосходство одному виду деятельности над другим
7	Значительное превосходство	Одному виду деятельности дается настолько сильное превосходство, что оно становится практически значительным
9	Очень сильное превосходство	Очевидность превосходства одного вида деятельности над другим подтверждается наиболее сильно
2, 4, 6, 8	Промежуточные решения между двумя соседними суждениями	Принимаются в компромиссном случае

Примечание 3. Следует подчеркнуть, что в МАИ по соглашению сравнивается относительная важность левых элементов матрицы с элементами наверху. Поэтому если элемент слева важнее, чем элемент наверху, то в клетку заносится положительное целое (от 1 до 9); в противном случае – обратное число (дробь, например, 1/5). Относительная важность любого элемента, сравниваемого с самим собой, равна 1; поэтому диагональ матрицы (табл. 3) содержит только единицы. Наконец, обратными величинами заполняют симметричные клетки, т.е. если элемент A_1 воспринимается как слегка более важный. (3 на шкале) относительно элемента A_2, то считается, что элемент A_2 слегка менее важен (1/3 по шкале) относительно элемента A_1.

Составим матрицу попарных сравнений для нашей задачи (табл. 5).

Таблица 5 – Матрица попарных сравнений, построенная на основе субъективных суждений

Общее удовлетворение комбайном	Пр.	П.з.	Нар.	Р.т.	Ст.
Производительность	1/1	5/1	4/1	5/1	3/1
Потери зерна	1/5	1/1	1/2	2/1	1/2
Наработка	1/4	2/1	1/1	1/1	1/4
Расход топлива	1/5	1/2	1/1	1/1	1/2
Стоимость	1/3	2/1	4/1	2/1	1/1

Одним из способов определения приоритетов является вычисление геометрического среднего. Это можно сделать, перемножая элементы в каждой строке и извлекая корень n-й степени, где n – число элементов. Полученный таким образом столбец чисел нормализуется делением каждого числа на сумму всех чисел. Последовательность расчета составляющих вектора приоритетов приведена в табл. 6, а результат для нашего примера - в табл. 7.

Таблица 6 – Расчет вектора приоритетов

	A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	Оценки компонент собственного вектора по строкам	Нормализация результата
A_1	$\frac{w_1}{w_1}$	$\frac{w_1}{w_2}$	$\frac{w_1}{w_3}$	$\frac{w_1}{w_4}$	$\sqrt[n]{\frac{w_1}{w_1}\cdot\frac{w_1}{w_2}\cdot\frac{w_1}{w_3}\cdot\frac{w_1}{w_4}}=a$	$\frac{a}{a+b+c+d}=X_1$

A2	$\frac{w_2}{w_1}$	$\frac{w_2}{w_2}$	$\frac{w_2}{w_3}$	$\frac{w_2}{w_4}$	$\sqrt[n]{\frac{w_2}{w_1}\cdot\frac{w_2}{w_2}\cdot\frac{w_2}{w_3}\cdot\frac{w_2}{w_4}}=b$	$\frac{b}{a+b+c+d}=X_2$
A3	$\frac{w_3}{w_1}$	$\frac{w_3}{w_2}$	$\frac{w_3}{w_3}$	$\frac{w_3}{w_4}$	$\sqrt[n]{\frac{w_3}{w_1}\cdot\frac{w_3}{w_2}\cdot\frac{w_3}{w_3}\cdot\frac{w_3}{w_4}}=c$	$\frac{c}{a+b+c+d}=X_3$
A4	$\frac{w_4}{w_1}$	$\frac{w_4}{w_2}$	$\frac{w_4}{w_3}$	$\frac{w_3}{w_4}$	$\sqrt[n]{\frac{w_4}{w_1}\cdot\frac{w_4}{w_2}\cdot\frac{w_4}{w_3}\cdot\frac{w_4}{w_4}}=d$	$\frac{d}{a+b+c+d}=X_4$

Таблица 7 – Функция принадлежности

Общее удовлетворение комбайном	Вектор приоритетов, X_i
Производительность	0,491
Потери зерна	0,099
Наработка	0,104
Расход топлива	0,086
Стоимость	0,220

Необходимо проверить согласованность локальных приоритетов. Информацию о степени нарушения численной и порядковой согласованности дает индекс согласованности (ИС). Для улучшения согласованности рекомендуется поиск дополнительной информации и пересмотр данных, использованных при построении шкалы. Вместе с матрицей парных сравнений можно определить меру оценки степени отклонения от согласованности. Когда такие отклонения превышают установленные пределы, тому, кто проводит суждения, следует перепроверить их в матрице.

ИС в каждой матрице вычисляется так: сначала суммируется каждый столбец суждений, затем сумма первого столбца умножается на значение первой компоненты нормализованного вектора приоритетов, сумма второго столбца – на вторую компоненту и т.д. Затем полученные числа суммируются. Таким образом, находится λ_{max} – наибольшее собственное значение матрицы суждений А. ИС определяется формулой:

$$ИС=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1},$$

где n – число сравниваемых элементов.

Отношение согласованности (ОС) определяется как частное от деления ИС и числа, соответствующего случайной согласованности матрицы того же порядка (табл. 8). Величина ОС должна быть порядка 10% или менее, чтобы быть приемлемой. В не-которых случаях можно допустить 20%, но не более. Если ОС выходит из этих пределов, то участникам нужно исследовать задачу и уточнить свои суждения. В нашем примере ИС = 0,0512; ОС = 4,57%, что является хорошим результатом.

Таблица 8 – Средние согласованности для случайных матриц разного порядка

Размер матрицы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайная согласованность	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Согласованность всей иерархии можно найти, перемножая каждый индекс согласованности на приоритет соответствующего критерия и суммируя полученные числа. Результат затем делится на выражение такого же типа, но со случайным индексом согласованности, соответствующим размерам каждой взвешенной приоритетами матрицы. Приемлемым является значение ОС около 10% или менее. В противном случае качество суждений следует улучшить, возможно, пересмотрев способ, следуя которому задаются вопросы при проведении парных сравнений. Если это не поможет улучшить согласованность, то, вероятно, задачу следует более точно структурировать, т.е. сгруппировать аналогичные элементы под более значащими критериями. Потребуется возврат к этапу 2, хотя пересмотра могут потребовать только сомнительные части иерархии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.- 165 с.
2. Кофман Л. Введение в теорию нечётких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. 432 с.
3. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта/А.Н. Аверкин, И.З. Батыршин, А.Ф. Блишун, В.Б. Силов, В.Б. Тарасов. Под ред. Д.А. Поспелова.- М.: Наука, 1986.- 312 с.
4. Димитров В.П. Борисова Л.В. Введение в теорию нечетких множеств. / учеб. пособие. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2009. – 84 с.
5. Борисова Л.В., Димитров В.П., Нурутдинова И.Н. О методике представления нечётких экспертных знаний // Вестник Донского государственного технического университета. 2014. Т. 14. № 4 (79). С. 93-102. http://science.donstu.ru/apex/f?p=381:39:6717046100545:::NO:P39_FILE_ID:94486618736979214