ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Методические указания
по дисциплине

«Механика природных сред»

Автор
Пожарский Д.А.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения направления бакалавриата 01.03.04 «Прикладная математика».

Автор

профессор, д.ф.-м.н.,
заведующий кафедрой
«Прикладная математика»
Пожарский Д.А.

Оглавление

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

В методических указаниях кратко изложены основные уравнения механики природных сред и методы их решения.

1. Основные уравнения трехмерной теории упругости для изотропного тела. Уравнения Ламе [1–6]:

$$(1-2\nu)\Delta\mathbf{u}+\mathrm{grad}\theta=b\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{u},\quad \theta=\mathrm{div}\mathbf{u}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор полного перемещения, зависящий от радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и времени t, ν – коэффициент Пуассона, $b=\rho(1-2\nu)/G$, ρ – плотность материала, G – модуль сдвига. В уравнении (1) и далее массовые силы не учитываются.

Для декартовой прямоугольной системы координат

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},\quad \mathrm{grad}\,f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right),\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{2}$$

где u, v, w – проекции вектора $\mathbf{u}$ на оси x, y, z.

Уравнения закона Гука:

$$\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right],\quad \tau_{xy}=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\\
\sigma_y&=\frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right],\quad \tau_{xz}=G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
\sigma_z&=\frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\frac{\partial w}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right],\quad \tau_{yz}=G\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь σ_x, σ_y, σ_z (нормальные напряжения) и τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} (касательные напряжения) – компоненты тензора напряжений в декартовой прямоугольной системе координат.

2. Уравнения плоского деформированного состояния изотропного упругого тела. Уравнения Ламе:

$$(1-2\nu)\Delta u+\frac{\partial\theta}{\partial x}=b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad (1-2\nu)\Delta v+\frac{\partial\theta}{\partial y}=b\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\quad w=0, \tag{4}$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y},\quad u=u(x,y,t),\quad v=v(x,y,t).$$

Уравнения закона Гука:

$$\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right],\quad \tau_{xy}=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \tau_{xz}=\tau_{yz}=0,\\
\sigma_y&=\frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right],\quad \sigma_z=\frac{2G\nu}{1-2\nu}\theta.
\end{aligned} \tag{5}$$

3. Уравнения антиплоской деформации изотропного упругого тела. Уравнения Ламе сводятся к одному волновому уравнению:

$$\Delta w=\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\quad u=v=0,\quad w=w(x,y,t),\quad c_2^2=\frac{G}{\rho}. \tag{6}$$

Уравнения закона Гука:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = G\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = G\frac{\partial w}{\partial y}. \qquad (7)$$

Уравнения (4) –(7) из п. 2 и 3 применимы для бесконечно длинных цилиндрических тел.

4. Трехмерные уравнения вязкой сжимаемой жидкости. Рассматривается случай ньютоновской жидкости с одним коэффициентом вязкости. Уравнения Навье–Стокса:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \operatorname{grad}\frac{v^2}{2} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\nu}{3}\operatorname{grad}\vartheta + \nu\Delta\mathbf{v},$$

$$(8)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\operatorname{grad}\rho + \rho\vartheta = 0, \quad \rho = \Phi(p), \quad \mathbf{\Omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}, \quad \vartheta = \operatorname{div}\mathbf{v}.$$

Здесь $\mathbf{v}$ – вектор скорости, ρ – плотность жидкости, p – давление, $\nu=\mu\rho^{-1}$, μ – коэффициент вязкости, $\Phi(p)$ – заданная функция.

В декартовой системе координат вектор ротора имеет компоненты

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right), \qquad (9)$$

где v_x, v_y, v_z – проекции вектора скорости на оси x, y, z.

Уравнения закона Ньютона:

$$\sigma_x = -p - \frac{2}{3}\mu\vartheta + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right),$$

$$\sigma_y = -p - \frac{2}{3}\mu\vartheta + 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \qquad (10)$$

$$\sigma_z = -p - \frac{2}{3}\mu\vartheta + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right).$$

Для случая несжимаемой жидкости (ρ=const) уравнения (8) и (10) существенно упрощаются.

5. Уравнения плоского течения вязкой жидкости для малых возмущений плоскопараллельного потока. Будем искать решение уравнений (8) в виде

$$v_x = V + u, \quad v_y = v, \quad v_z = 0, \quad p = p_* + p_0, \quad \rho = \rho_* + \rho_0, \qquad (11)$$

где $v_x=V$, p_*, $\rho_* = \Phi(p_*)$ – параметры плоскопараллельного потока, направленного по оси x; u, v, p_0 и ρ_0 – малые возмущения этого потока, являющиеся функциями от x, y, t и исчезающие на бесконечности. Подставляя (11) в (8) и пренебрегая квадратами возмущений по сравнению со значениями соответствующих величин основного потока, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \nu\Delta u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + V\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + \nu\Delta v, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t} + V\frac{\partial\rho_0}{\partial x} + \rho_*\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_0 = \operatorname{div}\mathbf{v_0}, \quad \rho_0 = p_0\Phi'(p_*), \quad \mathbf{v_0} = (u, v).$$

Уравнения закона Ньютона примут вид:

$$\sigma_x = -p - \frac{2}{3}\mu\vartheta_0 + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

$$(13)$$

$$\sigma_y = -p - \frac{2}{3}\mu\vartheta_0 + 2\mu\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \sigma_z = -p - \frac{2}{3}\mu\vartheta_0.$$

Для случая несжимаемой жидкости (ρ=const) уравнения (12) и (13) существенно упрощаются.

6. Уравнения антиплоского течения вязкой жидкости. Пусть в декартовой системе координат течение жидкости таково, что

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z = v_z(x, y, t), \quad p = p(x, y, t). \tag{14}$$

Тогда из уравнений (2.8) будем иметь

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu\Delta v_z, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{15}$$

Таким образом, для баротропных жидкостей будет ρ=const, *p*=const, а из первого уравнения (15), которое по своей структуре совпадает с уравнением теплопроводности, определяется компонента v_z.

Уравнения (10) примут вид:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \mu\frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \mu\frac{\partial v_z}{\partial y}. \tag{16}$$

7. Уравнения идеальной жидкости. В уравнениях (8) и (10) надо положить ν=μ=0. Если, кроме того, предположить, что течение потенциально, т.е.

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\varphi, \tag{17}$$

то $\mathbf{\Omega} = 0$, и из первого уравнения (8) можно получить так называемый интеграл Коши

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2 + P = F(t), \quad P = \int\frac{dp}{\rho}, \quad \rho = \Phi(p), \tag{18}$$

где $F(t)$ – произвольная функция времени. Второе уравнение (8) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\varphi \cdot \mathrm{grad}\,\rho + \rho\Delta\varphi = 0. \tag{19}$$

Как видно, для случая несжимаемой жидкости (ρ=const) функция φ должна быть гармонической.

8. Уравнения идеальной жидкости для малых возмущений плоскопараллельного потока. Будем искать решение уравнений (18), (19) в виде

$$\varphi = Vx + \varphi_0, \quad p = p_* + p_0, \quad \rho = \rho_* + \rho_0, \quad \rho_* = \Phi(p_*), \tag{20}$$

где $v_x=V$, p_*, ρ_* – параметры плоскопараллельного потока, направленного по оси *x*; φ_0, p_0 и ρ_0 – малые возмущения этого потока, не распространяющиеся в бесконечность. Внося (20) в (18) и (19) и пренебрегая квадратами возмущений по сравнению со значениями соответствующих величин основного потока, получим

$$p_0 = -\rho_*\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + V\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right), \quad c = \sqrt{\frac{dp_*}{d\rho_*}} = [\Phi'(p_*)]^{-1/2}, \tag{21}$$

$$\Delta\varphi_0 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} + 2V\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \partial x} + V^2\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}\right), \quad \rho_0 = p_0 c^{-2}. \tag{22}$$

Здесь *c* – скорость звука в жидкости. Заметим, что при *V*=0 уравнение (22) принимает форму волнового уравнения; для установившегося режима (φ_0 не зависит от времени) при

$$\mathrm{M} = Vc^{-1} < 1 \tag{23}$$

уравнение (22) переходит в уравнение Лапласа, если вместо *x* ввести переменную

$$\xi = x\sqrt{1 - \mathrm{M}^2}. \tag{24}$$

При

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = 0, \quad \mathrm{M} > 1 \tag{25}$$

уравнение (22) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = 0, \tag{26}$$

если вместо x ввести переменную

$$\xi = x\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}. \tag{27}$$

9. Методы решения уравнений механики природных сред. Основным численным методом является метод конечных элементов, подразумевающий разбиение тела (среды) на конечные элементы, в вершинах которых в итоге строится система линейных алгебраических уравнений, при этом обычно привлекается вариационная постановка задачи, вводятся базисные функции. Другим распространенным численным методом является метод конечных разностей, при котором производится дискретизация дифференциальных операторов, т.е. замена их на конечные разности. Здесь встает вопрос погрешности такой замены при различных разностных схемах (разностных сетках).

Если же тело, в котором решается краевая задача механики (чаще для задач теории упругости), имеет такую каноническую форму как полупространство, слой, трехмерный клин, бесконечный или конечный цилиндр, конус, сфера, усеченная сфера, линза, полуплоскость, полоса, плоский клин, окружность, круговая лунка, то для эффективного решения зачастую применяется метод интегральных преобразований [1,4,6].

Интегральное преобразование Фурье (применяется, например, в задачах для полупространства, слоя, полуплоскости, полосы, круговой лунки, цилиндра) определяется парой формул

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(i\alpha x)dx, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\exp(-i\alpha x)d\alpha. \tag{28}$$

Интегральное преобразование Конторовича–Лебедева (применяется в задачах для трехмерного клина в комбинации с преобразованием Фурье) находится по формулам

$$F(\tau) = \int_0^{\infty} f(r)K_{i\tau}(r)\frac{dr}{r}, \qquad f(r) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty} F(\tau)\tau\,\mathrm{sh}\,(\pi\tau)K_{i\tau}(r)d\tau, \tag{29}$$

где $K_{i\tau}(r)$ – цилиндрическая функция Бесселя (функция Макдональда).

Интегральное преобразование Меллина обычно применяется в задачах для плоского клина. Интегральное преобразование Ханкеля часто применяется в осесимметричных краевых задачах.

Интегральное преобразование Мелера–Фока применяется, например, в задачах теории упругости для тел конической формы.

Для облегчения применения метода интегральных преобразований часто используют общее представление решения уравнения Ламе упругого равновесия в форме Папковича–Нейбера через несколько гармонических функций. В этом случае применять интегральное преобразование следует не к уравнениям Ламе, а к гораздо более простым уравнениям Лапласа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. В.М. Александров, Е.В. Коваленко «Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями», М.: Наука, 1986. – 336 с., http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/solid.htm

2. . Л.И. Седов «Механика сплошной среды». Т. 1, М.: Наука, 1970. – 536 с., http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/continuous.htm

3. Л.И. Седов «Механика сплошной среды». Т. 2, М.: Наука, 1970. – 584 с., http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/continuous.htm

4. Я.С. Уфлянд «Интегральные преобразования в задачах теории упругости», Л.: Наука, 1967. – 402 с., http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/solid.htm

5. А.И. Лурье «Теория упругости», М.: Наука, 1970. – 940 с., http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/solid.htm

6. В.М. Александров, Д.А. Пожарский «Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел», М.: Факториал, 1998. – 288 с., http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/solid.htm