ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

«Спецглавы математики для технических специальностей»

по дисциплине

«Математика»

Авторы

Рябых Г. Ю.,

Фролова Н. В.,

Пристинская О. В.,

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Учебное пособие содержит основные сведения по курсу теории множеств и математической логики. Данные разделы не только создают базу для изложения других разделов дискретной математики, но и являются фундаментом всего курса высшей математики. Приводятся примеры, которые широко используются в дальнейшем.

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения всех факультетов._.

Авторы

к.ф.-м.н., профессор кафедры «Прикладная математика»
Рябых Г. Ю.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Фролова Н. В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Пристинская О. В.,

Оглавление

1. МНОЖЕСТВА.....4

1.1. Множества и его элементы. Подмножества..... 4
1.2. Задание множеств..... 5
1.3. Операции над множествами..... 6
1.4. Круги Эйлера. 7
1.5. Алгебра множеств. 8
1.6. Мощность множества.....11
1.7. Счетные множества 13
1.8. Континуум.....14
1.9. Отображения 15
1.10. Декартово произведение множеств.....16
1.11. Отношения.....17
1.12. Отношения эквивалентности и порядка 18

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ 19

2.1. Высказывания 19
2.2. Булевы функции 23
2.4. Формулы алгебры высказываний. 24
2.5. Тавтологии. Равносильность формул. 26
2.6. Нормальные формы для формул алгебры высказываний 27
2.7. Нахождение всех следствий из данных посылок 29
2.8. Контактные схемы 30
2.9. Предикаты 33
2.10. Логические операции над предикатами 34
2.11. Кванторные операции над предикатами 35

ЛИТЕРАТУРА.....36

1. МНОЖЕСТВА

1.1. Множества и его элементы. Подмножества.

Множество – это неопределяемое первоначальное понятие, смысл которого ясен на основании практической деятельности человека.

"Объекты", входящие в состав множества, называют элементами данного множества. Множества, элементами которых являются числа, называют числовыми множествами.

Примеры числовых множеств встречаются уже в школьном курсе математики:

N- множество положительных целых чисел, иначе называемое множество натуральных чисел;

Z – множество всех целых чисел;

$\mathbf{Z_0}$- множество всех неотрицательных целых частей;

Q- множество всех рациональных чисел;

R- множество всех действительных чисел;

$\mathbf{R_+}$ - множество всех положительных действительных чисел. Если некоторый элемент x принадлежит множеству **A** , то пишут $x \in A$, где $\in$ - так называемый знак принадлежности. Если x не принадлежит множеству **A** , то пишут $x \notin A$. или $x \,\overline{\in}\, A$

Примеры :

$5 \in N$, $\frac{2}{3} \in Q$, $0{,}1 \in Q$, $\sqrt{2} \,\overline{\in}\, Q$, $0 \,\overline{\in}\, N$, $-1 \notin R_+$.

Два множества **A и B** называют равными в том и только в том случае, когда каждый элемент множества **A** является элементом множества **B** и, наоборот, каждый элемент множества **B** является элементом множества **A**. Если множество **A** равно множеству **B**, то пишут **A = B.**

В теории множеств вводят в рассмотрение пустое множество, т.е. множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество принято обозначать символом $\emptyset$.

Если каждый элемент множества является элементом множества **A**, то говорят, что множество **B** включается в множество **A** и пишут $B \subset A$ или $A \supset B$, где $\subset$ и $\supset$ - знаки включения.

В этом случае множество **B** называют подмножеством множества **A.**

Из определения подмножества следует, что включение $B \subset A$ допускает одновременное выполнение условия **B = A** . Другими словами, в число подмножеств любого множества входит и само это множество. Чтобы выделить случай совпадения подмножества множества **A** с самим множеством **A**, подмножества, не совпадающие с множеством **A**, называют собственными подмножествами множества **A**.

Примеры: $N \subset Z$, $Z \subset Q$, $Q \subset R$, $Z_0 \subset Z$, $N \subset Z_0$.

Пустое множество считается подмножеством любого множества. Такое допущение не противоречит определению подмножества. В самом деле, согласно определению подмножества множества **A**, основное требование, которое предъявляется к подмножеству, состоит в том, что оно не содержит элементов, не принадлежащих множеству **A**. Но пустое множество этому требованию удовлетворяет, так как оно не содержит никаких элементов. Наконец, два множества **A** и **B** равны в том и только том случае, если выполняется система двух включений: $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ (данное утверждение следует непосредственно из определения равенства множеств).

1.2. Задание множеств

Существуют два основных способа задания множеств: задание множества перечислением его элементов и задание множества описанием свойства, присущего только элементам данного множества.

При первом способе в фигурных скобках перечисляются элементы, входящие в состав данного множества. Например:

$\mathbf{A} = \{0, 8; -3; 7; 12; 25\}$, $N= \{1, 2, 3,\ldots\}$.

При втором способе задания также используют фигурные скобки, но теперь внутри фигурных скобок приводят вертикальную черту, разделяющую описание множества на две части. Слева от вертикальной черты указывают, из какого множества объектов выбираются элементы данного множества (такими “объектами” могут быть студенты учебной группы, книги библиотек, натуральные числа, вещественные числа, и т.п.), а справа от вертикальной черты описывается свойство, которыми обладают объекты, входящие в состав данного множества.

Например, пусть множество **A** задается следующим образом:

$\mathbf{A} = \{x \in N \mid 0 < x < 5\}$.

Это значит, что элементы множества **A** выбираются из множества натуральных чисел N (см. описательную часть слева от вертикальной черты), но при этом в множество **A** включаются не любые натуральные числа (см. описательную часть справа от вертикальной черты) , а лишь те и только те, которые удовлетворяют системе неравенств $0 < x < 5$. В данном примере легко перейти к описанию множества **A** перечислением элементов этого множества. Такое описание будет иметь вид:

A = { 1, 2, 3, 4 }.

Будем использовать символику:

Открытый промежуток (“интервал”): [**a,b]** . Равносильно: **(a, b)** . Замкнутый промежуток (“отрезок”): [**a, b]**. Полуоткрытые промежутки: **[a, b[,] a, b].** Равносильно: [**a, b), (a, b**].

Пример. Множество **A** описать перечислением его элементов.

A = { x $\in$ z | $2x^3+5x^2+2x=0$ и x $\in$ [-2, 0] **}**

Решение. Элементами множества **A** являются целые числа, которые одновременно являются корнями уравнения $2x^3+5x^2+2x=0$ и принадлежит промежутку [-2, 0].

Легко убедиться в том, что уравнение $2x^3+5x^2+2x=0$ имеет три корня: x_1= -2, x_2= $-\frac{1}{2}$, x_3= 0. Корень x_2 отбрасывается по той причине, что элементы множества **A** – целые числа. Корень x_3 также следует отбросить, так как промежуток [-2, 0] является полуоткрытым и число 0 в него не входит. Искомое описание множества A имеет вид:

A = { -2 }.

1.3. Операции над множествами

Операции над множествами определяются следующим образом.

Определение. Объединением множеств A и B называется множество A $\cup$ B, каждый элемент которого принадлежит либо множеству A, либо множеству B (либо обоим этим множествам).

Примеры. 1.Если A= { 1,2,3,4 }, B = { 2,4,6,8 } и C = A $\cup$ B, то C = { 1,2,3,4,6,8 }. 2.Пусть M = {x $\in$ R | x $\in$ [3,5] }, P = { x $\in$ R | x $\in$ [4,6] } и T = M $\cup$ P тогда T = { x $\in$ R | x $\in$ [3,6] }.

В дальнейшем условимся в аналогичных ситуациях использовать сокращенную запись:

Пусть M = [3,5], P= [4,6], T = M $\cup$ P; тогда T = [3,6].

Определение. Пересечением множеств A и B называется множество A$\cap$B, каждый элемент которого принадлежит одновременно множествам A и B.

Примеры. 1.Если A ={1,2,3,4}, B={2,4,6,8} и D=A$\cap$B, то D={2,4}. 2.Пусть M=[3,5], P=[4,6] и S =M$\cap$P, тогда S=[4,5].

Если пересечение множеств A и B пусто (A$\cap$B=$\emptyset$), то множества называются непересекающимися.

Определение. Разностью множества A и B называется множество A\B, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.

Примеры. Для множеств A, B, M и P, использовавшихся в предыдущих примерах, будем иметь: A\B={1,3}, M\P=[3,4] (множество P содержится элемент 4, вследствие чего этот элемент удален из разности A\B).

Если множество A рассматривается как подмножество некоторого универсального множества U, то множество U\A называют дополнением множества A до множества U и обозначается $\bar{A}$. Для дополнения используют также символ C_U (дополнение до множества U). В рассматриваемом случае можно написать $\bar{A}$= C_UA.

Определение. Дизъюнктивной суммой (симметрической разностью)множеств A и B называется множество A Δ B (или A ⊕ B), каждый элемент которого принадлежит либо множеству A, либо множеству B, но не принадлежит одновременно A и B.

Примеры. Для рассмотренных выше множеств

A={1,2,3,4}, B={2,4,6,8}, M= [3,5], P=[4,6]

будем иметь:

A Δ B={1,3,6,8}; MΔP=[3,4[U]5,6].

1.4. Круги Эйлера.

Для наглядного изображения соотношений между подмножествами некоторого универсального множества U используют круги Эйлера. При таком изображении универсальное множество U обычно представляется множеством точек прямоугольника, а его подмножества изображаются кругами или другими простыми областями внутри этого прямоугольника. Непересекающиеся множества изображаются неперекрывающимися областями, а подмножествам соответствуют области, целиком располагающиеся внутри другой области.

Дополнение множества A (до U), т.е. множество $\bar{A}$, изображается той частью прямоугольника, которая лежит за пределами круга, изображающего A.

Описанный способ изображения соотношений между множествами называют изображением с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

На рис.1.1 показано изображение с помощью диаграмм Эйлера-Венна различных операций над множествами A и B. При этом множества, получаемые в результате соответствующих операций, изображаются заштрихованными областями.

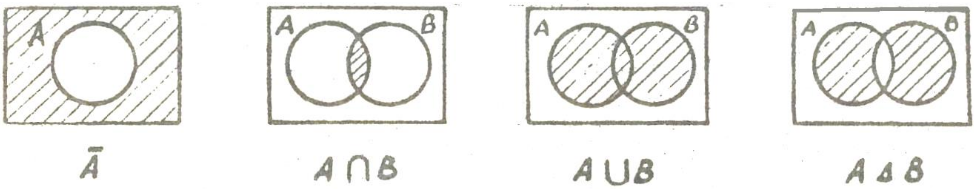

Рис.1.1.

1.5. Алгебра множеств.

Введение операции объединения, пересечения и вычитания (дополнения) множеств подчиняются следующим основным законам.

Пусть A,B,C – три множества, образованные из элементов некоторого универсального множества U. Каковы бы ни были множества A, B, C, имеют место тождественные соотношения, представленные в табл. 1.

Таблица 1

1а. $A \cup B = B \cup A$;	1.б. $A \cap B = B \cap A$;
(коммутативность)	
2а. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = (A \cup B) \cup C$; (ассоциативность)	2б. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
3а. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$	3б. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(дистрибутивность)	
4а. $(A \cap B) \cup B = B$;	4б. $(A \cup B) \cap B = B$;
(законы поглощения);	
5а. $(A \cap \bar{A}) \cup B = B$;	5б. $(A \cup \bar{A}) \cap B = B$.

Система формул табл. 1 обладает важной особенностью, которую называют принципом двойственности или дуальности. Формулы табл. 1 можно разбить на пары двойственных(дуальных) соотношений: в каждой строке таблицы одно соотношение получается из другого заменой символов: ∪ на ∩ и ∩

на $\cup$. По этой причине сами символы $\cup$ и $\cap$ называют двойственными(дуальными) символами.

К двойственным (дуальным) символам относится также пара символов: $\cup$ (символ универсального множества) и $\emptyset$ (символ пустого множества).

В дополнение к основным соотношениям, представленным в табл.1 приведем ещё несколько соотношений, широко используемых в преобразованиях выражений, содержащих множества (см. табл.2).

Таблица 2

1а. $\emptyset=U$;	1б. $\forall= \emptyset$;
2а. $A\cup\emptyset=A$;	2б. $A\cap U=A$;
3а. $A\cup\bar{A}=U$;	3б. $A\cap\bar{A}=\emptyset$;
4а. $\overline{A \cup B}=A\cap B$	4б. $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

(Соотношения 4а и 4б называют законами Моргана)

Соотношения табл.2, так же, как и соотношения табл. 1, являются иллюстрацией принципа двойственности, общая формулировка которого имеет вид: при замене в любой теореме (или тождественном соотношении), входящих в нее символов на дуальные, получается предложение, которое также является теоремой (тождественным соотношением).

Тождественные соотношения алгебры множеств позволяют упрощать или преобразовывать к удобному виду различные выражения, содержащие множества.

Пример. Упростить выражение $(A\cap B) \cup (\bar{A}\cap B)$.

Решение. На основании коммутативности операции пересечения множеств можно записать:

$(A\cap B) \cup (\bar{A}\cap B)=(B\cap A)(B\cap\bar{A})$.

Затем на основании формулы 3а табл. 1 запишем

$(B\cap A)\cup(B\cap\bar{A})=B\cap(A\cup\bar{A})$

После этого последовательно по формулам 3а и 2б табл. 2 будем иметь

$B\cap (A\cup\bar{A}) =B\cap U=B$.

Для упрощения и проверки правильности соотношений алгебры множеств могут эффективно использоваться диаграммы Эйлера-Венна.

Пример. С помощью диаграммы Эйлера-Венна упростить описание множества $P = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ (рассмотренного в предыдущем примере).

Решение. Изобразим на диаграмме Эйлера-Венна множества A и B таким образом, чтобы были представлены все подмножества универсального множества U, получающиеся при пересечениях множества A и B друг с другом и с множеством U.

Если рассматриваются n множеств, то число указанных подмножеств равно 2^n. В данном случае $n = 2$, следовательно, будем иметь 4 подмножества, занумерованных так, как указано на рис 1.2.

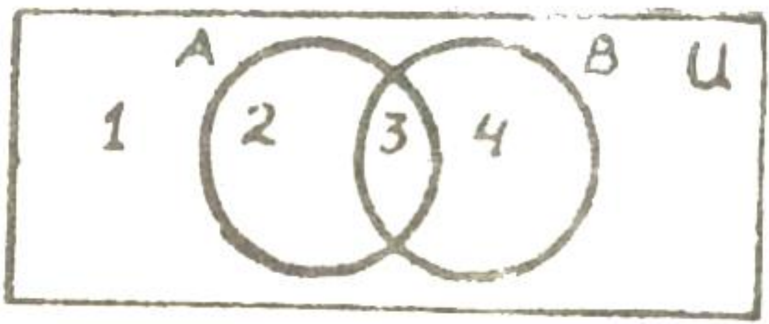

Рис. 1.2.

Множество A является объединением множеств 2 и 3. Условимся в этом случае писать A : 2,3. При таком способе записи будем иметь A: 2,3; B:3,4; $\bar{A}$: 1,4; $A \cap B$: 3; $\bar{A} \cap B$:4;

$P = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$:3, 4; P=B.

Пример. Проверить правильность соотношения 3а табл. 1.

Решение. В соотношении участвуют три множества.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Значит n=3. На диаграмме Эйлера-Венна будем иметь 8 подмножеств. Занумеруем их так, как указано на рис. 1.3.

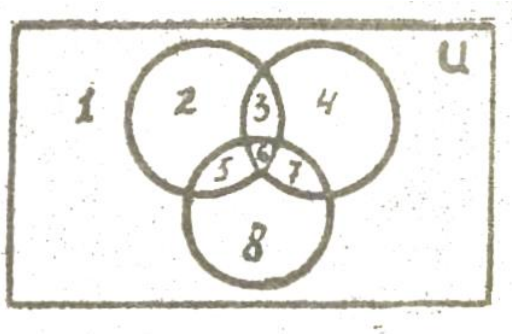

Рис. I.3

Согласно введенной нумерации множеств получаем:

1)A:2,3,5,6;B∪C:3,4,5,6,7,8;

A⋂(B∪C):3,6; A⋂C:5,6;(A⋂B)∪(A⋂C):3,5,6.

Соотношение верно.

В теории множеств на основе коммутативности и ассоциативности операций объединения и пересечения множеств, указанные операции обобщаются на бесконечные совокупности множеств.

Пусть имеется бесконечная совокупность множеств A_1, A_2,..., A_n,...

Объединением множеств данной совокупности называется множество B$\bigcup_{i=4}^{\infty} A_i$, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному множеству A_i.

Пересечением рассматриваемых множеств называется множество C$\bigcup_{i=4}^{\infty} A_i$, каждый элемент которого принадлежит одновременно всем множествам A_i(i=1,2,...).

1.6. Мощность множества

Понятие “больше” и ”меньше”, которые используются для сравнения двух конечных множеств по количеству содержащихся в них элементов, теряют смысл при переходе к бесконечным множествам. Принятый в теории множеств метод сравнения бесконечных множеств по степени их насыщенности элементами является обобщение метода сравнения конечных множеств по количеству содержащихся в них элементов.

Сравнение конечных множеств по количеству элементов может производится не только пересчетом элементов этих множеств. Указанное сравнение может производиться установлением соответствия между элементами данных множеств.

Определение. Говорят, что между элементами множеств А и В установлено взаимно однозначное соответствие, если указано правило, по которому каждому элементу α из А сопоставлен один элемент β из В, называемый образом элемента α, причём выполнены следующие два условия:

1) Любые два различных элемента из А имеют различные образы;
2) Каждый элемент из В является образом некоторого элемента из А.

Определение. Два множества А и В называются эквивалентными или имеющими одинаковую мощность (обозначается А~В), если между их элементами может быть установлено взаимно однозначное соответствие.

Из определения следует, что два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое количество элементов.

Примеры эквивалентных бесконечных множеств.

1. Множество N всех натуральных чисел и множество N_1 всех целых отрицательных чисел. Взаимно однозначное соответствие получится, если каждому натуральному числу n поставить в соответствие число –n.
2. Множество N натуральных чисел и множество Р положительных четных чисел. Для установления взаимно однозначного соответствия достаточно элементу n множества N поставить в соответствие элемент 2n множества Р.

Множество Р является собственным подмножеством множества N (т.е. оно включается в множество N, но не совпадает с множеством N). Таким образом, бесконечное множество может быть эквивалентно своему подмножеству, не совпадающему с самим множеством. Ясно, что такая ситуация не может иметь места для конечных множеств.

3. Множество R всех вещественных чисел и множество G всех вещественных чисел интервала $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Эквивалентность этих множеств легко проверить с помощью соответствия $y = \operatorname{tg} x (x \in G, y \in R)$.
4. Любые два отрезка в теоретико-множественном смысле (т.е. рассматриваемые как множества содержащихся в них точек) эквивалентны между собой.

Легко проверить, что ес- ли А~С и В~С, то А~В (два множества, порознь эквивалентные третьему, эквивалентны между собой). Это предложение часто используется в работе с множествами.

1.7. Счетные множества

Среди бесконечных множеств во многих отношениях наиболее простым является так называемые счетные множества.

Множество А называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству всех натуральных чисел N.

Так как между элементами счетного множества А и натуральными числами (элементами множества N) существует взаимно однозначное соответствие, каждому элементу множества А можно присвоить номер, совпадающий с соответствующим данному элементу натуральным числом. Другими словами, если множество А является счетным, то его элементы можно перенумеровать (“пересчитать”) и расположить в виде бесконечной последовательности.

$a_1, a_2, a_3,\ldots,a_n,\ldots$.

Конечное множество не относится к счетным множествам, так как, согласно определению, должно существовать взаимно однозначное соответствие между элементами счетного множества и элементами множества всех натуральных чисел. В данном случае это условие не может быть выполнено.

Примеры счетных множеств.

1. Множество всех четных чисел. Четные числа можно перенумеровать в порядке их возрастания: $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=6,\ldots$.
2. Множество всех целых чисел. Элементы этого множества уже невозможно перенумеровать в порядке возрастания. Но их можно перенумеровать, например, согласно следующему правилу: $a_1=0$, $a_2=-1$, $a_3=1$, $a_4=-2$, $a_5=2$, $a_6=-3$, $a_7=3,\ldots$.

Свойства счетных множеств:

а) из всякого бесконечного множества можно выделить счетное подмножество;

б) всякое бесконечное подмножество счетного множества тоже счетное;

в) объединение конечного числа счетных множеств есть счетное множество;

г) объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Докажем последнее утверждение.

Пусть A= $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где все A_i четны. Выписывая по строкам элементы всех множеств A_i, получим счетное множество бесконечных последовательностей;

a_{11}, a_{12},a_{13}...

a_{21}, a_{22}, a_{23}...

a_{31}, a_{32}, a_{33}...

Элементы множества A можно перенумеровать, например, “по диагоналям”:

$a_1=a_{11},a_2=a_{21},a_3=a_{12},a_4=a_{31},a_5=a_{22},a_6=a_{13},\ldots$.

Если различные множества A_i содержат некоторые общие элементы, то один и тот же элемент может встретиться несколько раз. Естественно, мы записываем такой элемент лишь один раз, скажем, при первой “встрече” с ним.

Так как элементы множества A можно перенумеровать, то множество A счетное.

Доказанное предложение позволяет утверждать, что множество рациональных чисел счетное.

В самом деле, рациональные числа - это числа, представимые в виде отношения двух целых чисел. Поэтому можно поступить следующим образом. Положить знаменатель равным 1 и перебрать множество всех возможных значений числителя. Получим некоторое счетное множество рациональных чисел A_1. Затем положим знаменатель равным 2. Опять перебираем все возможные значения числителя. Получаем счетное множество рациональных чисел A_2. Аналогично перебираем все другие возможные значения знаменателя. Получим счетное множество счетных множеств рациональных чисел. По доказанному, их объединение – счетно. Из указанного объединения убираются все сократимые дроби, так как они повторяют соответствующие рациональные числа, представляемые несократимыми дробями. Оставшееся бесконечное множество счетно как подмножество счетного множества.

Рассмотрение счетных множеств заключим следующей теоремой (без доказательства):

Если A – несчетное бесконечное множество, а B – его конечное или счетное подмножество, то A/B~A. То есть, если из несчетного бесконечного множества убрать его конечное или счетное подмножество, то новое множество будет иметь ту же мощность, что и первоначальное.

1.8. Континуум

Можно показать, что существуют несчетные бесконечные множества. Наиболее простым примером такого множества является множество точек отрезка числовой оси [0,1]. То есть, если предположить, что все числа данного отрезка каким-то образом перенумерованы, то это приведет к противоречию: на отрезке [0,1] всегда найдется число, не принадлежащее перенумерованной последовательности чисел.

В дальнейшем термин “несчетное множество” будет приниматься нами только к бесконечным множествам (конечные множества мы не будем называть несчетными).

Множества, эквивалентные множеству всех вещественных числе из отрезка [0,1], называют множествами мощности *континуума* (сокращенно – мощности С).

Выше было сказано, что любые два отрезка числовой оси, рассматриваемые как множества содержащихся в них чисел, эквивалентны между собой. Значит, множество чисел любого числового отрезка имеет мощность С.

Далее, если из бесконечного несчетного множества вычесть конечное или счетное множество, то получившееся при этом множество (разность) также имеет мощность С. Значит, множество чисел открытого интервала числовой оси также имеет мощность С. Отсюда следует, что множества чисел, содержащихся во всех отрезках и интервалах числовой оси, эквивалентны между собой. В частности, например, в этом смысле эквивалентны множества [0,1] и $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Множество всех вещественных чисел также имеет мощность С. И, наконец, если из множества всех действительных чисел вычесть множество всех рациональных чисел, являющееся счетными множеством, то получим множество всех иррациональных чисел, которое, согласно сказанному выше, будет иметь мощность С.

1.9. Отображения

Между элементами двух множеств X и Y могут устанавливаться определенные отношения.

Определение. Если каждому элементу x множества X по некоторому правилу ставится в соответствие один и только один элемент y множества Y, то говорят, что задано отображение X в Y (при этом элемент y называют образом элемента x).

Отображение можно рассматривать, как функцию, определенную на множестве X и принимающую значения в множестве Y.

Если f – отображение или функция, то пишут $f:X\to Y$

Или проще: $x\to f(x)$.

В этом случае, когда множество Y есть числовое множество, говорят, что задана числовая функция. А если множество X является числовым, то говорят, что задана функция числового аргумента.

При отображении X в Y каждый элемент x из X имеет один и только один образ $y=f(x)$ из Y. Однако при этом не обязательно, чтобы каждый элемент y из Y был образом некоторого элемента x из X.

Например, при отображении отрезка [-1,1] в отрезок [-2,2] по правилу $y=x^2$ точки, принадлежащие множеству $[-2,0)\cup(1,2]$, не будет являться образами точек отрезка [-1,1]. Если же любой элемент из Y есть образ хотя бы одного элемента из X, то говорят, что имеет место отображение X на Y (иначе называемое *сюръекцией* или покрытием).

Если для любых двух различных элементов x_1 и x_2 из X их образы $y_1=f(x_1)$ и $y_2=f(x_2)$ из Y также различны, то отображение f называется *инъекцией.*

Очевидно, в приведенном выше примере отображение [-1,1] в [-2,2] не является инъективным, так как при отображении $f:y=x^2$ двум различным точкам отрезка [-2,2] (например, точкам $x_1=-1$ и $x_2=1$ при отображении $y=x^2$ соответствует один и тот же образ $y=1$).

Отображение, которое является одновременно сюръективным и инъективным, называется *биекцией* (наложением). В этом случае говорят, что $f: X\to Y$ взаимно однозначное отображение, а между элементами X и Y имеется взаимно однозначное соответствие. При этом отображение f^{-1} также является взаимно однозначным, $x=f^{-1}(y)$ равносильно $y=f(x)$ и $(f^{-1})^{-1}$ совпадает с f.

Пример. Пусть X=[-1,1], Y=[-2,2], Z=0,2.

$f:y=x^2$ – отображение X в Y;

$f:y=2x^4$ – отображение X на Z (сюръекция или покрытие);

$f:y=1,5x^3$ – инъекция;

$f:y=2x^3$ – биекция (наложение), или взаимно однозначное отображение X на Y.

1.10. Декартово произведение множеств

Условимся называть упорядоченной парой, или просто парой, два элемента, взятых в определенном порядке. Элемент, занимающий в паре первое место, будем называть первым элементом пары, а элемент, занимающий второе место, соответственно, вторым элементом.

Символ (a,b) обозначает пару с первым элементом a и вторым элементом b. Две пары (a_1,b_1) и (a_2,b_2) считаются равными в том и только том случае, если $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$. При выполнении этого условия пишут $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$.

Если $a\neq b$, то $(a,b)\neq(b,a)$. Пары различны по той причине, что различен порядок следования элементов в парах, хоть состав элементов в этих парах одинаков. Для сравнения напомним, что множество, в отличие от пары, полностью определяется составом элементов. Для двухэлементных множеств $\{a,b\}$ и $\{b,a\}$ будем иметь $\{a,b\}=\{b,a\}$.

Определение. Декартовым произведением множеств A и B называется множество $A\times B$ всевозможных пар, первые элементы которых принадлежат множеству A, а вторые – множеству B.

Перемножаться могут и одинаковые множества. В этом случае символ $A\times A$ считается равносильным символу A^2. Например, R^2 – это множество всевозможных пар вещественных чисел (x,y). Таким парам легко дать геометрическую интерпретацию, рассматривая их, как координаты точек плоскости.

1.11. Отношения

На множестве A может быть задано некоторое отношение H между его элементами. Если элементы пары (a,b) находятся между собой в отношении H, то пишут: aHb.

Пример. Определим на множестве вещественных чисел R отношение H следующим образом: элементы x и y множества R находятся в отношении H в том и только в том случае, если второй элемент (число y) равен квадрату первого элемента (числа x). Если пару (x,y) рассматривать как координаты точки плоскости, то точки, координаты которых находятся в отношении H, располагаются на параболе $y=x^2$. Множество пар вещественных чисел, являющихся координатами точек параболы, образует подмножество множества R^2, полностью характеризующее отношение H.

Определение. Двухместным или бинарным отношением на множестве A называется подмножество множества A^2.

В дальнейшем будет использоваться следующая символика: если элементы a и b находятся в отношении H, то, как было условлено выше, будем писать aHb, если же они не находятся в отношении H, то будем писать $\overline{aHb}$.

Свойства бинарных отношений. (H - бинарное отношение на множестве A. Все элементы, фигурирующие в описании свойств отношений, принадлежат A).

Рефлексивность. Для всех a, принадлежащих A: $\overline{aHb}$.

Пример. A - множество прямых, H - отношение параллельности. Очевидно, отношение Н рефлексивно, так как прямая параллельна самой себе.

Антирефлексивность. Для всех a, принадлежащих А: aНa.

Пример. А - множество людей. Отношение $a_1Нa_2$ означает, что человек a_1 является отцом человека a_2. Ясно, что такое отношение является антирефлексивным.

Транзитивность. Для любых a,b,c : если aНb и bНc, то aНc.

Пример. R - множество вещественных чисел. Отношение aНb означает, что a<b. Транзитивность такого отношения очевидна.

Симметричность. Для любых a_1 и a_2: из $a_1Нa_2$ следует $a_2Нa_1$.

Пример. А - множество направленных отрезков. Отношение $a_1Нa_2$ означает, что отрезок a_1 сонаправлен с отрезком a_2 и его длина равна длине отрезка a_2. Симметричность отношения Н очевидна.

Антисимметричность. Для любых a_1 и a_2: из $a_1Нa_2$ и $a_2Нa_1$, следует $a_1=a_2$.

Пример. Легко понять, что отношение нестрогого неравенства на множестве вещественных чисел является антисимметричным.

1.12. Отношения эквивалентности и порядка

Определение. Бинарное отношение называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Примерами отношений эквивалентности могут служить отношение параллельности на множестве прямых, отношение сонаправленности и равенства длин на множестве направленных отрезков.

Если на множестве А задано отношение эквивалентности Е, то элементы множества А можно разбить на попарно непересекающиеся классы эквивалентных между собой относительно Е элементов. Эти классы называются классами эквивалентности, а произвольный элемент класса называется представителем данного класса эквивалентности. При этом могут быть классы эквивалентности, содержащие лишь один элемент (который, согласно определению, находится в отношении эквивалентности с самим собой).

Примеры.

1. Вектор обозначает некоторый класс эквивалентности на множестве направленных отрезков. Любой направленный отрезок, принадлежащий этому классу, является представителем дан-

ного класса и полностью его определяет.

2. Пусть элементами множества А являются студенты некоторой группы. Введем на множестве А отношение Е: "дети одних и тех же родителей". Легко видеть, что Е - отношение эквивалентности. Очевидно, все или большинство классов эквивалентности (по Е) будут содержать 1 элемент.

Определение. Бинарное отношение называется отношением порядка, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Такое отношение на множестве R обозначают символом ?.В данном определении речь идет о нестрогом порядке. Для строгого порядка нужны антирефлексивность, транзитивность и асимметричность: если aHb, то $\overline{bHa}$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

2.1. Высказывания

Определение. Высказыванием называется предложение, которое может быть либо истинным, либо ложным.

Примеры.

Предложение "Волга впадает в Каспийское море" есть истинное высказывание.

Предложение “В неделе 10 дней” - ложное высказывание.

Предложение “2>3” - ложное высказывание.

Каждому истинному высказыванию будем ставить в соответствие число 1, а каждому ложному - число 0. Это значит, что на множестве высказываний нами вводится в рассмотрение некоторая функция, которая принимает значения 1 или 0 в зависимости от того, истинно высказывание P или ложно:

$$\alpha(P)=\begin{cases}1, \text{если высказываение } P \text{ истинно}\\ 2, \text{если высказывание } P \text{ ложно}\end{cases}$$

Определение. Число α(P) называется значением истинности высказывания P.

Пример. Пусть “5<7” - высказывание Q, “3 >10” - высказывание S. Тогда α(Q)=1 и α(S)=0.

Пусть имеется некоторая совокупность высказываний, которые назовем элементарными. Исходя из этих высказываний, можно строить новые высказывания с помощью, так называемых логических операций над высказываниями.

Определение. Отрицанием высказывания P называется новое высказывание $\overline{P}$, которое считается истинным, если высказывание P ложно, и считается ложным, если P истинно.

Высказывание $\overline{P}$ читается: "Неверно, что Р".

Пример. Высказывание $\overline{P}$: "3<5". Высказывание Р: "Неверно, что 3<5". (Очевидно, Р - истинно, а $\overline{P}$ - ложно).

Операцию "Отрицание" можно рассматривать как функцию логической переменной, т.е. переменной, принимающей числовые значения лишь из множества {0,l}. При этом функция принимает числовые значения из этого же множества. Эту функцию можно определить ее таблицей истинности (см. табл. 2.1).

Таблица 2.1.

X	$\overline{X}$
1	0
0	1

Функцию, определяемую табл. 2.1, называют так же, как и соответствующую ей операцию - "отрицанием".

Определение. Конъюнкцией - высказываний Р и Q называется новое высказывание, обозначаемое Р∧Q. которое считается истинным, если истинны оба высказывания Р и Q, и ложным во всех остальных случаях.

Высказывание Р∧Q читается "Р и Q". (Для обозначения конъюнкции также используются два равноправных символа: Р∧Q и Р&Q - В данном пособии будет использоваться лишь символ Р∧Q).

Пример. Высказывание Р: 1<20. Высказывание Q: 1>-2. Высказывание Р∧Q: -2<1<20.

Операцию "Конъюнкция" можно рассматривать как функцию двух логических переменных X и Y. Значения функции принадлежат тому же числовому множеству {0,1}, что и значения логических переменных.

Функция (операция) "Конъюнкция" определяется ее таблицей истинности (см. табл. 2.2).

Таблица 2.2		
X	Y	X∧Y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Определение. Дизъюнкцией высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое P∨O, которое истинно в тех случаях, если истинно хотя бы одно из высказываний P или Q, и ложно, если ложны оба высказывания P и Q.

Высказывание "P∨Q" читается: "P или Q".

Операцию "Дизъюнкция" тоже можно рассматривать как функцию двух логических переменных X и Y, значения которой определяются ее таблицей истинности (см. табл. 2.3).

Таблица 2.3		
X	Y	X∨Y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Примеры.

Высказывание X: "Волга впадает в Азовское море".

Высказывание Y: "Енисей впадает в Черное море".

Высказывание X∨Y ("Волга впадает в Азовское море или Енисей впадает в Черное море") ложно, так как ложны и X. и Y.

Высказывание X :"1>100". Высказывание Y: "5 >2".

Высказывание X∨Y ("1 > 100 или 5>2") истинно, так как истинно Y.

Определение. Импликацией высказываний P и Q называется высказывание, обозначаемое P→Q, которое ложно лишь в том случае, когда P истинно, а Q ложно.

Высказывание "P→Q" читается: "Если P, то Q" или "Из P следует Q". При работе с импликациями высказывание P называют посылкой (или условием), а высказывание Q - заключением (или следствием).

Функция (операция) "Импликация" определяется ее таблицей истинности (см. табл. 2.4),

Таблица 2.4		
X	Y	X→Y
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Примеры.

Высказывание "Если 2<5, то 7<3" является импликацией высказываний "2<5" (посылка) и "7<3" (заключение). Высказывание ложно, так как из истинной посылки сделано ложное заключение (см. вторую строку табл. 2.4).

Высказывания "Если 2>5, то 2+2=4" и "Если 2>5, то 2+5=5" истинны (см. третью и четвертую строку табл. 2.4). Смысл этих непривычных высказывания в том, что из ложной посылки могут делаться любые заключения.

Определение. Эквивалентностью (или эквиваленцией) высказываний P и Q называется новое высказывание P↔Q(читается "P эквивалентно Q" или “P тогда и только тогда, когда Q”), которое истинно в том и только в том случае, когда P и Q одновременно истинны или одновременно ложны.

Функция (операция) "Эквивалентность" определяется ее таблицей истинности (см. табл. 2.5).

Таблица 2.5		
X	Y	X↔Y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Пример. Пусть P: "2+2=4"; Q: "2+3=5"; P1 : "2+2=7 ";Q1: "2+3=8".

Тогда P↔Q и P1↔Q1.

2.2. Булевы функции

Операции над высказываниями можно рассматривать как функции, у которых значения аргументов (именуемых логическими переменными) и значения самих функций принадлежат двухэлементному множеству {0,l}. Такие функции называют булевыми функциями (или функциями алгебры логики).

Булевы функции удобно задавать их таблицами истинности, как это делалось при определении конъюнкции, дизъюнкции, отрицания, импликации, эквивалентности.

Рассмотрим, например, булевы функции двух логических переменных X и Y. Две переменные, определенные на множестве |0,1|, могут принять лишь четыре различные (упорядоченные) пары значений: (1,1), (0,1), (1,0) и (0,0). Для того, чтобы определить булеву функцию, достаточно указать ее значения для каждой из четырех указанных пар значений аргументов. Проще всего это записать в виде таблицы.

Так как существуют лишь 16 различных упорядоченных четверок чисел, содержащих лишь числа 0 и 1, то это значит, что существует всего 16 различных булевых функций двух аргументов.

Выше описаны (таблицами истинности) 4 булевы функции двух аргументов: конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция. Можно, например, наряду с функциями "X и Y" (конъюнкция) и "X либо Y" (дизъюнкция), ввести в рассмотрение функцию "ни X, ни Y", таблицей истинности которой служит табл. 2.6.

Таблица 2.6

X	Y	X↧Y
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Такая функция называется стрелкой Пирса (обозначается X ↧ Y).

Рассматривают также "Функцию Шеффера" ("Штрих Шеффера"), которая принимает значение 0 тогда и только тогда, когда оба аргумента равны 1 (обозначается X\Y) - функция "Исключенное "или"" является аналогом дизъюнктивной суммы в теории множеств (см. табл. 2.7).

Таблица 2.7		
X	Y	X∇Y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Она обозначается X∇Y.

Рассматриваются также функции f(X,Y)=0, f(X,Y)=1, f(X,Y)=X, f(X,Y)=Y, f(X,Y)=$\overline{X}$, f(X,Y)=$\overline{Y}$ и другие.

Булевы функции: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция называются элементарными булевыми функциями. Значение любого сложного высказывания, построенного с помощью элементарных логических связок из заданных высказываний, является булевой функцией этих высказываний. Такая функция является суперпозицией (последовательным использованием ряда элементарных булевых функций).

2.4. Формулы алгебры высказываний.

Операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции удовлетворяют системе аксиом, приведенных в табл. 2.8:

		Таблица 2.8
1а. X∨Y=Y∨X;	1б. X∧Y=Y∧X;	Коммутативность.
2а. X∨(X∨Z)=(X∨Y)∨Z;	2б. X∧(Y∧Z)=(X∧Y)∧Z;	Ассоциативность.
3а. X∧(Y∨Z)=(X∧Y)∨(X∧Z);	3б. X∨(Y∧Z)=(X∨Y)∧(X∨Z);	Дистрибутивность.
4а. (X∧Y)∨Y=Y;	4б. (X∨Y)∧Y=Y;	Закон поглощения.
5а. (X∧X)∨Y=Y;	5б. (X∨$\overline{X}$)∧Y=Y;	

Сравнивая эти аксиомы с аксиомами табл. 1.1, которым удовлетворяют операции дополнения, объединения и пересечения множеств, легко убеждаемся в их полной аналогии.

Определение. Множество, на котором определены операции, удовлетворяющие пяти дуальным парам аксиом табл. 2.8, называется булевой алгеброй.

Введем понятие формулы алгебры высказываний.

Определение. Высказывательными переменными называются такие переменные, которые могут принимать в качестве своих значений любые конкретные высказывания. Эти переменные будем обозначать заглавными латинскими буквами. Кроме того, введем в рассмотрение еще две специфические переменные: И и Л. Вместо И можно подставлять любое истинное высказывание, вместо Л - любое ложное.

Формулы алгебры высказываний описываются следующими соглашениями:

1) каждая отдельно взятая высказывательная переменная есть формула;

2) если F_1 и F_2 - две формулы, то выражения F1, F2, $F1 \wedge F2$, $F1 \vee F2$, $F1 \to F2$, $F1 \leftrightarrow F2$ тоже являются формулами;

3) не существует никаких других формул, кроме тех, которые получаются в результате применения конечного числа раз п.п. 1), 2). Замечание. Если приведенные в п.2) формулы вида $F_1 \wedge F_2$ и т.п. входят составной частью в более сложные формулы, то в этом случае их записывают в скобках: $(F_1 \wedge F_2)$. Формулу, содержащую высказывательные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в общем случае условимся записывать в виде $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пример. Составить таблицу истинности для формулы $(X \vee Y) \leftrightarrow (X \to Y)$

Решение. При установлении значений истинности данной формулы, задав значения истинности X и Y, последовательно устанавливают значения истинности формул: $X \vee Y$, $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $X \to Y$, $(X \vee Y) \leftrightarrow (X \to Y)$.

Результаты вычислений заносятся в таблицу (см. табл. 2.9).

Таблица 2.9

X	Y	$X \vee Y$	X	Y	$X \to Y$	$(X \vee Y) \leftrightarrow (\overline{X} \to \overline{Y})$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0

Анализируя табл. 2.9, приходим к выводу: значение истинности формулы $(X \vee Y) \leftrightarrow (\overline{X} \to \overline{Y})$ равно 1 в том и только в том случае, когда значение истинности переменной X равно 1 (т.е. когда высказывание X истинно).

2.5. Тавтологии. Равносильность формул.

Определение. Формула $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ алгебры высказываний называется тождественно истинной или тавтологией, если ее значение истинности равно 1 при любых значениях истинности для $x_1, x_2, ..., x_n$.

Примерами тавтологий могут служить приведенные, выше тождественные соотношения, соответствующие аксиомам булевой алгебры. Определение. Две формулы $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $H(x_1, x_2, ..., x_n)$ алгебры высказываний называются равносильными, если при любых логических значениях переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ логические значения высказываний F и H совпадают.

Равносильность формул F и H записывается в виде $F \approx H$.

Существует тесная связь между понятием тавтологии и понятием равносильности формул, вытекающая непосредственно из определения этих понятий: формулы F и H являются равносильными тогда и только тогда, когда формула $F \leftrightarrow H$ является тавтологией.

Например, для доказательства справедливости соотношения

$(X \wedge(Y \vee Z)) \leftrightarrow((X \wedge Y) \vee (X \wedge Z))$

достаточно либо показать, что данная формула (данное высказывание) является тавтологией (т.е. его значение истинности равно 1 при любых значениях истинности переменных X, Y, Z), либо установить равносильность формул $(X \wedge(Y \vee Z))$ и $((X \wedge Y) \vee (X \wedge Z))$ (т.е. показать, что при любых значениях истинности переменных X , Y, Z значения истинности этих формул совпадают).

В данном случае существует 8 упорядоченных троек чисел, могущих быть соответственно значениями переменных X, Y , Z - Таким образом, рабочая таблица будет содержать 8 строк (см. табл. 2.10).

Таблица 2.10

				F			H	$F \leftrightarrow H$
X	Y	Z	$Y \vee Z$	$X \wedge (Y \vee Z)$	$X \wedge Y$	$X \wedge Z$	$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$	
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

Наряду с тавтологиями, входящими в состав основных тождественных соотношений (аксиом) булевой алгебры, построенной на множестве высказываний, существует ряд других важных тавтологий, эффективно используемых в математической логике.

Приведем некоторые из них.

1. $\overline{(X\wedge Y)}\leftrightarrow\overline{(X\vee Y)}$; $\overline{(X\wedge Y)}\leftrightarrow(\overline{X}\vee\overline{Y})$; Законы Моргана.

2. $X\vee\overline{X}$. Закон исключенного третьего.

3. $(X\rightarrow Y)\leftrightarrow(Y\rightarrow X)$. Закон контрапозиции.

4. $((X\rightarrow Y)\wedge(Y\rightarrow Z))\leftrightarrow(X\rightarrow Z)$. Правило цепного заключения (закон силлогизма).

5. $((X\rightarrow Y)\wedge(X\rightarrow Y))\rightarrow X$. Схема доказательства "от противного".

Выше показано, каким образом может быть проворена истинность приведенных тавтологий.

2.6. Нормальные формы для формул алгебры высказываний

Наиболее важную роль в алгебре высказываний играют операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции. Но при этом последние две операции легко выражаются через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. В самом деле, легко проверить, что имеют место соотношения:

$(X\rightarrow Y)\approx(\overline{X}\vee Y)$ и $(X\leftrightarrow Y)\approx(\overline{X}\vee Y)\wedge(\overline{Y}\vee X)$.

Это значит, что любую формулу алгебры высказываний можно заменить равносильной ей формулой, содержащей лишь операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Такой вид формулы называют ее нормальной формой. Очевидно, для заданной формулы существует бесчисленное множество равносильных формул, содержащих лишь три указанные операции. В самом деле, скажем, вместо формулы $X\vee Y$, можно написать равносильную ей формулу $(X\wedge X)\vee Y$ или $X\vee(Y\vee Y)$ и т.п. Но среди всех этих форм наиболее важную роль в математической логике играют гак называемые совершенные нормальные формы.

Выше нами проводилось построение таблиц истинности для заданных формул алгебры высказываний. Решим обратную задачу. Задана таблица истинности некоторой формулы. Найти формулу, соответствующую данной таблице (см. табл. 2.11).

Таблица 2.11				
X	Y	Z	F(X,Y,Z)	
1	1	1	1	✓
1	1	0	0	
1	0	1	0	
1	0	0	1	✓
0	1	1	0	
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	0	0	1	✓

Прежде всего, выделим строки, соответствующие значениям истины искомой формулы. Таких строк три: 1-я, 4-я и 8-я.

После этого составим для каждой из выделенных строк конъюнкцию переменных или их отрицаний так, чтобы наборам значений переменных, представленным в этих строках, соответствовали истинные конъюнкции (для этого достаточно переменные, под которыми в соответствующей строке стоит О, взять со знаком отрицания, а переменные над 1 – без отрицания).

В результате получим конъюнкции: $X \wedge Y \wedge Z$ - для 1-й строки, $X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}$ - для 4-й строки, $\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}$ - для 8-й строки.

Искомая формула будет дизъюнкцией этих конъюнкций:

$$F(X, Y, Z) \equiv (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \qquad (2.1)$$

В самом деле, если для некоторого набора значений переменных формула истинна (см. число в правом столбце исходной таблицы), то для значений переменных из данной строки таблицы дизъюнкция (2.1) истинна, так как истинна одна из составляющих ее конъюнкций. Если для заданного набора значений переменных формула ложна (т.е. для этого набора значений переменных в правом столбце таблицы стоит 0), то дизъюнкция (2.1) ложна, так как каждая из составляющих ее конъюнкций ложна (конструкции составляющих конъюнкций таковы, что они истинны лишь для значений переменных из выделенных строк).

Подобным образом можно составить формулу для всякой таблицы истинности, в последней строке которой имеется хоть одно число 1 (т.е. если рассматриваемая формула не является тождественно ложной).

Формула, которая получается в результате применения описанного способа, называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (сокращенно: с.д.н.ф.) всех формул с теми же переменными, ей равносильных. Конъюнкции, входящие в состав с.д.н.ф. называют совершенными конъюнктивными одночленами.

Так как для любой формулы можно составить таблицу истинности, и притом единственную, то всякая формула, не являющаяся тождественно ложной, имеет с.д.н.ф., и притом единственную.

Формулу, соответствующую данной таблице, можно составить и другим способом, а именно:

1) выделить те строки таблицы, в которых искомая формула принимает значение 0;

2) для каждой .из выделенных строк составить дизъюнкцию переменных или их отрицаний гак, чтобы каждая переменная (со знаком отрицания или без него) вошла в дизъюнкцию один и только один раз и чтобы наборам значений переменных, записанных в этих строках, соответствовали ложные дизъюнкции;

3) составить из полученных дизъюнкций конъюнкцию.

В результате для рассматриваемой таблицы получится формула

$F(X,Y,Z) \equiv (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \overline{Z})$, (2 2)

называемая совершенной конъюнктивной нормальной формой (с.к.н.ф.) всех формул, соответствующих данной таблице. Каждая формула, не являющаяся тавтологией, имеет с.к.н.ф., притом, единственную.

2.7. Нахождение всех следствий из данных посылок

Рассмотрим следующую важную задачу математической логики. Пусть даны несколько формул $F_1,\ldots, F_n$. Как найти все без исключения формулы, являющиеся логическими следствиями посылок $F_1,\ldots, F_n$?

Прежде всего, заметим, что можно вести речь лишь об одной посылке. В самом деле, формула H является следствием формул $F_1,\ldots, F_n$ в том и только том случае, если H есть следствие одной формулы $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$.

Использование с.д.н.ф. позволяет дать ответ на поставленный вопрос. Начнем с рассмотрения примера.

Пример. Найти все следствия из посылок X и $X \rightarrow Y$

Решение. Как было отмечено выше, поставленной задаче можно дать равносильную формулировку: найти все следствия из формулы

$F(X,Y) \equiv X\wedge(X\to Y)$.

Построим с.д.н.ф. формулы F(X,Y). Для этого запишем таблицу истинности F(X,Y) (см. табл. 2.12).

Таблица 2.12

X	Y	$X\to Y$	$X\wedge(X\to Y)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	0	0

Так как для рассматриваемой формулы лишь в первой строке таблицы значение истинности формулы равно 1, то с.д.н.ф. этой формулы состоит из единственного совершенного конъюнктивного одночлена $X\wedge Y$. Обозначим этот одночлен через К1.

Очевидно, если с.д.н.ф. какой-нибудь формулы H(X,Y) имеет в своем составе одночлен К1, то формула К(X,Y) является следствием формулы F(X,Y). В самом деле, если при каких-нибудь значениях переменных X и Y К1:$X\wedge Y$ - является истинной, то истинна и H(X,Y), так как в состав ее дизъюнктивной формы входит одночлен К1.

Всего для двух переменных можно построить четыре совершенных конъюнктивных одночлена:

К1: $X\wedge Y$; К2: $X\wedge Y$; К3: $X\wedge Y$; К4: $X\wedge Y$.

Таким образом, рассматриваемая формула $X\wedge(X\to Y)$, имеет 8 различных следствий:

К1;	К1∨К2;	К1∨К3;	К1VК4;
К1∨К2∨К3;	К1∨К2∨К4;	К1∨К3∨К4;	К1∨К2∨К3∨К4;

Теорема. Пусть каждая из формул H $(X_1,\dots, X_n)$ и $F(X_1,\dots,X_n)$ не является тождественно ложной. Тогда H есть следствие тогда и только тогда, когда все конъюнктивные одночлены, входящие в с.д.н.ф. для F, входят в с.д.н.ф. для H.

2.8. Контактные схемы

Одним из эффективных приложений булевых функций является анализ и синтез так называемых контактных схем.

Контактные схемы могут иметь различное физическое воплощение. Для определенности будем рассматривать переключательные схемы электрических цепей.

Переключательная схема - это устройство из переключателей (контактов) и проводов, связывающих два полюса - вход и выход.

Для простоты и наглядности будем считать такими полюсами источник питания и лампочку. Между источником питания и потребителем может быть замыкающий и размыкающий цепь контакт либо цепь контактов, соединенных последовательно или параллельно.

Каждому контакту поставим в соответствие логическую переменную, которая принимает значение 1, если контакт в рассматриваемый момент времени замыкает цепь, и значение О, если цепь разомкнута (рис. 2.1.а).

Поместим между источником и потребителем тока два контакта, соединенные последовательно (рис. 2.1.б). Соответствующие им логические переменные обозначим через X_1 и X_2. Для такой цепи условие прохождения тока описывается конъюнкцией $X_1 \wedge X_2$ (которая истинна в том и только в том случае, когда истинны одновременно X_1 и X_2).

Если контакты соединены параллельно (рис. 2.1.в), то цепь замкнута, когда хотя бы один из контактов замкнут, и разомкнута, когда оба они разомкнуты. Очевидно, работа цепи в этом случае описывается дизъюнкцией $X_1 \vee X_2$.

Рис. 2.I

Контакты не всегда независимы друг от друга. Можно устроить так, чтобы контакты замыкались и размыкались одновременно (рис.2.2.а). В этом случае контакты называют идентичными и им ставят в соответствие одинаковые логические переменные.

Однако можно устроить и так, что при замыкании одного контакта другой размыкается и наоборот (рис. 2.2.б). В этом случае контакты называют инверсными и если контакту поставлена в соответствие логическая переменная. Х то инверсному контакту ставят в соответствие логическую переменную $\overline{X}$.

Установленные соответствия дают возможность описать любую цепь

Рис. 2.2

с последовательно или параллельно соединенными контактами формулой логики высказываний. С другой стороны, любую формулу логики высказываний можно моделировать в виде переключательной схемы. Это позволяет использовать математическую логику для синтеза, анализа и упрощения переключательных схем.

Пример. Синтезировать переключательную схему, таблицей истинности которой является табл. 2.10 (где указано, при каком состоянии контактов ток проходит через систему и при каком нет).

Решение. Выше было показано, что рассматриваемой таблице истинности соответствует формула с.д.н.ф., которая имеет вид

$F(X, Y, Z) \equiv (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z})$.

Такой формуле соответствует переключательная схема, изображенная на рис. 2.3.

Пример. Проанализировать и, если возможно, упростить переключательную схему, изображенную на рис. 2.4.

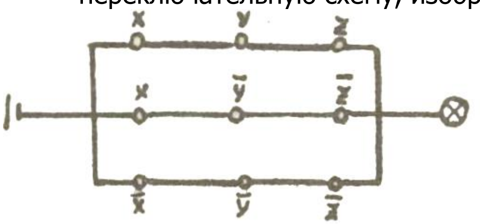

Рис. 2.3

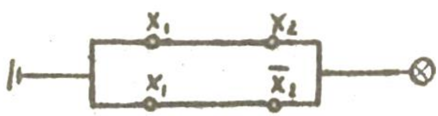

Рис. 2.4

Решение. Формула, соответствующая рассматриваемой переключательной схеме, имеет следующую с.д.н.ф. F(X1, X2) ≡

$(X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_2)$.

Учитывая дистрибутивность конъюнкции по отношению к дизъюнкции (т.е. тавтологию $X\wedge (Y\vee Z) \leftrightarrow (X\wedge Y) \vee (X\wedge Z)$), формулу (2.3) можно переписать в виде $F(X_1, X_2) \equiv X_1\wedge (X_2\vee \overline{X}_2)$.

Выражение в скобках является тавтологией, истинной при любых значениях X_2. Учитывая это, можно окончательно записать убрав контакты X_2; $\overline{X}_2$ и один из контактов X_1, мы получим переключательную схему, равносильную исходной.

2.9. Предикаты

Определение. Предложение, в которое входят переменные и которое при замене переменных возможными для них значениями становится высказыванием, называется высказывательной формой или предикатом.

Множество X тех значений, которые могут принимать переменные, называется областью определения предиката.

Если предикат содержит лишь одну переменную, то он называется одноместным. Пример: "река X впадает в Азовское море".

Если предикат содержит n переменных, то он называется n-местным. Пример: "река X впадает в море Y" - двуместный предикат.

Пусть X - область определения предиката.

Определение. Подмножество множества X, состоящее из тех значений переменных, при которых данный предикат превращается в истинное высказывание, называется областью истинности предиката.

Предикаты обозначает символами P(x), Q(x,y) и т.п. Если это не может вызвать недоразумений, то пишут короче: P, Q и т.п. При этом множество истинности предиката условимся обозначать той же буквой, что и предикат, но с верхним символом$^+$: P^+, O^+ и т.п.

Например, предложение (уравнение) “x^2-3x-4=0” - это одноместный предикат, обозначим его P(x,y) (или просто P), определенный на множестве всех вещественных чисел R. Он превращается в истинное высказывание лишь в том случае, если X принимает значение корня уравнения. Так как корнями рассматриваемого квадратного уравнения являются числа 4 и -1, то множество истинности предиката запишется в виде $P^+=\{-1,4\}$.

Другой пример: уравнение ″$x^2+y^2=z^2$″, рассматриваемое лишь на множестве целых чисел Z. В данном случае имеем трехместный предикат, определенный на множестве Z, обозначим его Q(X,Y,Z) (или просто Q). Множество истинности предиката Q- это множество троек целых чисел, обращающих данное уравнение в тождество: Q^{+}={(3,4,5), (5,12,13)…}.

2.10. Логические операции над предикатами

Над предикатами можно производить те же логические операции, что и над высказываниями: отрицание, дизъюнкцию, конъюнкцию, импликацию, эквиваленцию.

Для определенности будем рассматривать одноместные предикаты.

Определение. Отрицанием предиката P(x) с областью определения X называется предикат с той же областью определения, обозначаемый $\overline{P}$(x) (читается "Неверно, что P(x)"), который превращается в истинное высказывание для тех и только тех значений x∈X при которых P(x) есть ложное высказывание.

Пример. P(x): "x≥0", $\overline{P}$(x):"x<0". (Заметим, что предикаты "x<0" имеет бесчисленное множество равносильных форм: x^3<0, e^x<1 и др.). Определение. Дизъюнкцией двух предикатов P(x) и Q(x), определенных соответственно на множествах X_1 и X_2, называется третий предикат, обозначаемый P(x) ∪ Q(x) (читается: "P(x) или Q(x)"), с областью определения $X=X_1 \cap X_2$,

который превращается в истинное высказывание для тех и только тех значений x∈X, при которых хотя бы одно из высказываний P(x) или Q(x) истинно.

Пример. Дизъюнкцией предикатов "x<-2" и "x>2" является предикат (x<-2) ∨ (x>2)

(или равносильный ему предикат "|x|>2").

Понятие дизъюнкции предикатов тесно связано с уравнениями. Рассмотрим уравнение

F(x) Ф(x)=0 (2.4)

(представляющее собой одноместный предикат). Так как левая часть уравнения является произведением двух функций F(X) и Ф(У), то она обращается в нуль при тех и только при тех значениях x, при которых обращается в нуль хотя бы одна из функций F(x) или Ф(x). Множество корней уравнения (2.4) является объединением множеств корней уравнений F(x)=0 и Ф(x)=0. Множество корней уравнения (2.4) (т.е. множество истинности предикате (2.4)) совпадает с множеством истинности предиката (F(x)=0) ∨(Ф(x)=0). В этом смысле говорят, что уравнение (2.4) есть дизъюнкция уравнений F(x) =0 и Ф(x)=0.

Определение. Конъюнкцией двух предикатов P(x) и Q(x), определенных соответственно на множествах X_1 и X_2, называется третий предикат, обозначаемый P(x) ∩Q(x)

(читается: "P(x) и Q(x)"), с областью определения $X=X_1 \cap X_2$, который превращается в истинное высказывание для тех и только тех значений $x \in X$, при которых оба исходных предиката являются истинными высказываниями.

Понятие конъюнкции тесно связано с понятием системы уравнений.

В самом деле, рассмотрим, например, систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ \Phi(x,y) = 0 \end{cases}$$

Очевидно, задача решения такой системы равносильна задаче нахождения множества истинности предиката (F(x,y)=0 ∧ Ф(x,y)=0), являющегося конъюнкцией предикатов F(x,y)=0 и Ф(x,y)=0. В этом смысле говорят, что система (2.5) есть конъюнкция уравнений F(x,y)=0 и Ф(x,y)=0.

Определение. Импликацией двух предикатов P(x) и Q(x), определенных соответственно на множествах X_1 и X_2, называется третий предикат, обозначаемый P(x)→Q(x) читается: "Если P(x), то Q(x)", с областью определения $X=X_1 \cap X_2$, который превращается в ложное высказывание для тех и только тех значений $x \in X$ при которых первый предикат является истинным высказыванием, а второй - ложным.

Определение. Эквиваленцией двух предикатов P(x) и Q(y), определенных соответственно на множествах X_1 и X_2, называется третий предикат, обозначаемый P(x) ↔Q(x)

(читается: "P(x) тогда и только тогда, когда Q(x)") с областью определения $X = X_1 \cap X_2$,

который превращается в истинное высказывание для тех и только тех значений $x \in X$, при которых оба данных предиката превращаются одновременно либо в истинные, либо в ложные высказывания.

2.11. Кванторные операции над предикатами

Определение. Операцией квантор общности называется правило, которое каждому одноместному предикату P(x), определенному на множестве X, ставит в соответствие высказывание "∀x: P(x)" (читается: "Для всякого x справедливо P(x)"), которое истинно тогда и только тогда, когда предикат P(x) тождественно истинен.

Пример. Пусть P(x) есть предикат, определенный на множестве R действительных чисел. Тогда “∀X:P(x)” - ложное высказывание, так как неравенство $x^2>0$ справедливо не для всех $x \in R$ (оно неверно при X = 0).

Пример. “∀x:|sinx|<2”- истинное высказывание.

Определение. Операцией квантор существования называется правило, которое каждому одноместному предикату P(x), определенному на множестве X, ставит в соответствие высказывание, обозначаемое “∃x:P(x)” (читается: "Существует значение x∈X. такое, что верно P(x)”). Которое ложно тогда и только тогда, когда предикат P(x) тождественно ложен.

Пример. Пусть P(x) есть предикат “$x^2+2x+2=0$”, определенный на множестве R действительных чисел. Тогда высказывание “∃x:P(x)”- ложное высказывание, так как рассматриваемое уравнение не имеет вещественных корней.

Пример. Высказывание “$\exists x: x^2+2x+2>0$” - истинное высказывание, гак как трехчлен, стоящий в левой части неравенства, положителен при любом действительном значении x.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика. М.: Вузовская книга. 2000.
2. Костормин Г.Я., Кузьмина О.В. Элементы дискретной математики. Йошкар-Ола, ПГТУ. 2015.
3. Баранов И.В., Гусева И.А. Основы теории алгоритмов. Ростов-на-Дону, ДГТУ. 2016.
4. Остроух Е.Н., Андрющенко С.А., Паниотова В.Ю., Подколзина Л.А. Дискретная математика. Ростов-на-Дону, ДГТУ. 2015.