ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие «Избранные главы математики: интегральные исчисления, дифференциальные уравнения»

по дисциплине

«Математика»

Авторы
Пожарский Д.А.
Нурутдинова И.Н.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

В данном пособии приведены основные теоретические положения и понятия, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины «Математика». Теоретические положения проиллюстрированы подробно решенными типовыми заданиями и примерами.

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих базовый курс математики. Пособие рекомендовано студентам всех форм обучения технических и экономических направлений и специальностей.

Авторы

Д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» Пожарский Д.А.,
К.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры «Прикладная математика» Нурутдинова И.Н.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие содержит изложение разделов «Интегральное исчисление» и «Дифференциальные уравнения» дисциплины «Математика». Представлены основные теоретическими положения и понятия, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины. Выбор тематики осуществлялся на основе анализа ФГОС по математике в базовой подготовке бакалавров технических и экономических направлений, а также открытого сегмента тестовых заданий, предназначенных для тестирования студентов вузов по дисциплине «Математика».

Для формирования практических навыков и умений теоретические положения проиллюстрированы достаточным количеством подробно решённых типовых заданий. Изложение примеров построено в соответствии с программой по дисциплине «Математика» и согласовано с программой тестирования и основными типами заданий каждого раздела.

Учебное пособие дополняет курс лекций по дисциплине «Математика» и будет полезно студентам в самостоятельной работе и при подготовке к текущему, рубежному и итоговому контролю знаний по данной дисциплине в различных формах, в том числе в форме интернет-экзамена, а также при изучении различных смежных дисциплин математического и естественнонаучного цикла.

1. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Неопределённый интеграл, его свойства

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если для любого $x\in(a,b)$ выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

Пример. Для функции $f(x)=\cos x$ первообразной на множестве всех действительных чисел **R**$=(-\infty;\infty)$ является функция $F(x)=\sin x$, поскольку $(\sin x)'=\cos x$ для любого $x\in$**R**. Отметим, что первообразными для той же функции $f(x)=\cos x$ являются также, например, функции $F_1(x)=\sin x-5$ и $F_2(x)=\sin x+7$, как и всякая другая функция, отличающаяся от указанных постоянным слагаемым.

Теорема 1. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. существует постоянная C такая, что $\Phi(x)=F(x)+C$, где $C-\text{const}$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)-$ две первообразные для функции $f(x)$ на (a,b), т.е. $F'(x)=f(x)$. и $\Phi'(x)=f(x)$ при любом $x\in(a,b)$. Рассмотрим функцию $\omega(x)=\Phi(x)-F(x)$. Имеем $\omega'(x)=\Phi'(x)-F'(x)= \; =f(x)-f(x)=0$ для любого $x\in(a,b)$. Отсюда, согласно известному следствию из теоремы Лагранжа, следует, что $\omega(x)\equiv C=\text{const}$, т.е. $\Phi(x)-F(x)=C \;\Rightarrow\; \Phi(x)=F(x)+C$.

Следствие. Если $F(x)-$любая первообразная для функции $f(x)$, то всю совокупность первообразных для этой функции определяет выражение $F(x)+C,$ где $C-\text{const}.$

Определение. *Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначение неопределенного интеграла:

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

где $F'(x)=f(x), C-\text{const}.$ При этом x называют переменной интегрирования, $f(x)-$ подынтегральной функцией, а $f(x)dx-$ подынтегральным выражением.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию. Результат интегрирования можно проверить дифференцированием.

Возвращаясь к рассмотренному выше примеру, можно записать: $\int \cos x dx = \sin x + C.$

Геометрический смысл неопределённого интеграла от функции $f(x)$ состоит в том, что он представляет собой совокупность графиков всех первообразных для этой функции. График совокупности можно получить из графика одной первообразной, если его перемещать параллельно самому себе вдоль оси *OY*.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

Действительно, $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x).$

2. $d\int f(x)dx = f(x)dx.$

Действительно, $d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx.$

3. $\int d\left(f(x)\right) = f(x) + C.$

4. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \qquad A - \text{const}.$

5. $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Свойство 5 справедливо для любого конечного числа слагаемых.

Объединяя свойства 4 и 5, получаем *линейное свойство* неопределённого интеграла:

6.

$$\int \left(A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)\right)dx = A_1\int f_1(x)dx + A_2\int f_2(x)dx; \;\; A_1, A_2 - \text{const};$$

7. **Теорема 2.** Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то $\int f(u)du = F(u) + C,$ где $u = u(x) -$ произвольная непрерывно-дифференцируема функция.

Доказательство. Так как дифференциал первого порядка обладает свойством инвариантности, то $d\left(F(u)\right) = F'(u)du,$ где $u = u(x) \;\Rightarrow\; F(u) -$ первообразная для $f(u)$, и, значит $\int f(u)du = F(u) + C.$

Поскольку операции интегрирования и дифференцирования обратны по отношению друг к другу, то таблица основных интегралов легко получается из таблицы производных. Таблицу основных интегралов для функции $u = u(x)$ приведена в прил. 1. При этом вместо буквы *u* при интегрировании может быть использована любая другая буква, например *x*, *t*, *z* и т. д. Кроме формул, получающихся непосредственно из таблицы производных, в таблицу интегралов включено несколько часто встречающихся интегралов.

Пример. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы:

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5}\right)dx;$$

$$б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx.$$

Решение.

$$а)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx=\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{используем свойство 6 и разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}-3\int\frac{dx}{x}-\int x^{-4}dx+2\int x^{5/6}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы 12, 4, 3}\end{array}\right\}=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|-\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1}+C=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C.$$

$$б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx=5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\frac{2}{11}\right)}+3\int 5^x dx+$$

$$+\int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx=\frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^2}+3\int 5^x dx+4\int dx-\int x\,dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{используем формулы}\\ \text{13, 5, 2, 3 таблицы интегралов}\end{array}\right\}=\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{11}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{11}}}+3\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+$$

$$+4x-\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln 5}+4x-\frac{x^2}{2}+C.$$

1.2. Замена переменной в неопределённом интеграле

Теорема 3. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно-дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(t)+C,$ то $\int f(x)dx=F(\psi(x))+C,$ где $t=\psi(x)-$ функция, обратная к функции $x=\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной в неопределённом интеграле:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x=\varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами: $dx=\varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t=\psi(x)$.

Замечание 1. При нахождении дифференциала функций необходимо использовать таблицу производных (прил. 2).

Замечание 2. При интегрировании ряда функций часто удобно пользоваться приёмом подведения под знак дифференциала. Проиллюстрируем это на примерах.

Пример. Проинтегрировать подходящей заменой переменной или подведением под знак дифференциала.

$$а)\ \int\cos 4x dx;\quad б)\ \int e^{9x+1}dx;\quad в)\int x(2-x^2)^5dx;\quad г)\ \int\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}dx.$$

Решение:

$$a)\ \int \cos 4x dx = \left| \begin{array}{l} d(4x) = \\ = (4x)' dx = \\ = 4dx \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \cos 4x d(4x) = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \sin 4x + C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1} dx = \left| \begin{array}{c} d(9x+1 = \\ = (9x+1)' dx = \\ = 9dx \end{array} \right| = \frac{1}{9} \int e^{9x+1} d(9x) = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} \frac{1}{9} e^{9x+1} + C.$$

$$в) \int x(2-x^2)^5 dx = \left| \begin{array}{c} d(2-x^2) = \\ = (2-x^2)' dx = \\ = -2xdx \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int (2-x^2)^5 d(2-x^2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{12} (2-x^2)^6 + C.$$

$$г)\ \int \frac{3x-1}{\sqrt{x+1}} dx = \left| \begin{array}{l} t = x+1, \quad x = t-1 \\ dt = (x+1)' dx = dx \end{array} \right| = \int \frac{3(t-1)-1}{\sqrt{t}} dt = \int \frac{3t-4}{\sqrt{t}} dt = 3 \int \sqrt{t} dt - 4 \int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3 таб-} \\ \text{лицы интегралов} \end{array} \right\} = 2t^{\frac{3}{2}} - 8\sqrt{t} + C = 2\sqrt{(x+1)^3} - 8\sqrt{x+1} + C.$$

Среди интегралов, вычисляемых с помощью замены переменной, выделим интегралы вида:

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx \qquad \text{и} \qquad \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx.$$

При их вычислении необходимо выделить в знаменателе полный квадрат, для чего используется стандартная замена:

$$x = t - \frac{b}{2a},\ dx = dt,\ t = x + \frac{b}{2a}. \qquad (2)$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x-2}{x^2+6x+10}dx.$

Решение.

$$\int \frac{x-2}{x^2+6x+10}dx = \left\{ \begin{matrix} \text{Используем} & \text{замену} & (2), \\ \text{учтем,} & \text{что} & a=1, \quad b=6 \end{matrix} \right\} = \left| \begin{matrix} x=t-3 \\ dx=dt \\ t=x+3 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{t-3-2}{(t-3)^2+6(t-3)+10}dt = \int \frac{t-5}{t^2-6t+9+6t-18+10}dt = \int \frac{t-5}{t^2+1}dt = \int \frac{tdt}{t^2+1} -$$

$$-5\int \frac{dt}{t^2+1} = \left| \begin{matrix} \text{для 1-го интеграла} \\ z=t^2+1 \\ dz=2tdt; \; tdt=\dfrac{dz}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} - 5\int \frac{dt}{t^2+1} = \left\{ \begin{matrix} \text{формулы 4, 13} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\ln|z| -$$

$$-5\,\mathrm{arctg}\,t + C = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| - 5\,\mathrm{arctg}\,t + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+10\right| - 5\,\mathrm{arctg}(x+3) + C.$$

1.3. Интегрирование по частям

Если функции $U=U(x)$ и $V=V(x)$ обладают непрерывными производными, то справедлива формула:

$$\int UdV = UV - \int VdU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в табл. 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица 1 – Стандартные случаи функций, интегрируемых по частям

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n = 1, 2, \ldots$	$U = P_n(x) \to$ $\to dU = P_n'(x)dx$	$dV = \sin kx\,dx \to V = -\frac{1}{k}\cos kx$ $dV = \cos kx\,dx \to V = \frac{1}{k}\sin kx$ $dV = e^{kx}dx \to V = \frac{1}{k}e^{kx}$
$\int \ln kx\, P_n(x)dx$	$U = \ln kx \to dU = \frac{dx}{x}$	$dV = P_n(x)dx \to$ $\to V = \int P_n(x)dx$
$\int \arcsin kx\, P_n(x)dx$	$U = \arcsin kx \to dU =$ $= \frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\, P_n(x)dx$	$U = \arccos kx \to dU =$ $= -\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \mathrm{arctg}\, kx\, P_n(x)dx$	$U = \mathrm{arctg}\, kx \to dU =$ $= \frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \mathrm{arcctg}\, kx\, P_n(x)dx$	$U = \mathrm{arcctg}\, kx \to dU =$ $= -\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$n = 0, 1, 2, \ldots$		

Примечание. $P_n(x)$ – многочлен от x степени n, т.е. $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_0 \neq 0$.

Пример. Проинтегрировать по частям.

$$a)\ \int (3x-1)\sin 2x dx; \qquad б)\ \int (1+2x)\ln x dx.$$

Решение.

$$a)\ \int (3x-1)\sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} U = 3x-1 \to dU = 3dx \\ dV = \sin 2x dx \to V = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = (3x-1)(-\frac{\cos 2x}{2}) +$$

$$+\int \frac{\cos 2x}{2} 3dx = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C.$$

$$б)\ \int (1+2x)\ln x dx = \left| \begin{array}{l} U = \ln x \to dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = (1+2x)dx \to \\ V = \int (1+2x)dx = x + x^2 \end{array} \right| = \ln x (x+x^2) - \int (x+x^2)\frac{dx}{x} =$$

$$= \ln x (x+x^2) - \int (1+x)dx = \ln x(x+x^2) - x - \frac{x^2}{2} + C.$$

1.4. Интегрирование рациональных дробей

Определение. *Рациональной дробью* называется отношение двух многочленов:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}, \qquad (4)$$

где $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ многочлены от x степеней m и n соответственно.

Рациональная дробь (4) называется *правильной*, если $m < n$ и *неправильной*, если $m \geq n$.

Определение. *Простейшими рациональными дробями* называют правильные рациональные дроби четырех типов:

$$1)\frac{A}{x-a}; \quad 2)\frac{A}{(x-a)^n}; \quad 3)\frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \quad 4)\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

где *a*, *p*, *q*, *A*, *M*, *N* — действительные числа, $n = 2, 3, \ldots$

При этом квадратный трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т.е. $\frac{p^2}{4}-q<0$.

Простейшие дроби 1-го и 2-го типов интегрируются заменой $t=x-a$, а 3-го типа — заменой (2). Интегрирование простейших дробей 4-го типа является громоздкими, и мы его рассматривать не будем.

Теорема 4. Всякую правильную рациональную дробь можно представить, и притом единственным образом, в виде суммы простейших дробей типов 1) — 4). При этом каждому множителю в знаменателе вида $(x-a)^n$ будет соответствовать группа из *n* слагаемых вида $\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \dots, \frac{A_n}{(x-a)^n}$, а каждому множителю в знаменателе вида $(x^2+px+q)^n$ — слагаемые

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}, \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}, \dots, \frac{M_nx+N_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

Постоянные $A_1, A_2, \dots, M_1, M_2, \dots, N_1, N_2, \dots$ называют *неопределенными коэффициентами* и находят по следующему алгоритму:

1) Сумму всех простейших дробей привести к общему знаменателю.

2) Числитель получившейся дроби приравнять числителю исходной дроби.

3) Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов в левой и правой частях полученного тождества.

4) Решить полученную систему уравнений, которая имеет единственное решение.

Теорема 5. Всякую неправильную рациональную дробь $Q_m(x)/P_n(x)$ $(m \ge n)$ можно разложить, и притом единственным образом, на сумму многочлена $W_{m-n}(x)$ (целая часть) и правильной рациональной дроби $S_r(x)/P_n(x)$ $(r<n)$ ($S_r(x)$ – «остаток» от деления $Q_m(x)$ на $P_n(x)$):

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = W_{m-n}(x) + \frac{S_r(x)}{P_n(x)}.$$

Итак, алгоритм интегрирования рациональных дробей:

1) Если подынтегральная дробь неправильная, то из неё выделяют целую часть $W_{m-n}(x)$, которая интегрируется непосредственно, и правильную рациональную дробь $S_r(x)/P_n(x) \quad (r<n)$.

2) Правильную рациональную дробь $S_r(x)/P_n(x) \quad (r<n)$ раскладывают на сумму простейших дробей.

3) Простейшие дроби интегрируют по отдельности с помощью соответствующих замен переменных результаты складывают.

Пример. Найти интегралы от рациональных дробей.

а) $\int \frac{x^3}{x-1}dx$; б) $\int \frac{x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}dx.$

Решение.

а) Подынтегральная дробь неправильная, поэтому выделим целую часть путем деления многочлена на многочлен «углом»:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2} & x^2+x+1 \\ x^2 & \\ \underline{x^2-x} & \\ x & \\ \underline{x-1} & \\ 1 & \end{array}$$

— целая часть $W_2(x)$

— остаток $S_0(x)$

Итак, $\frac{x^3}{x-1} = x^2+x+1+\frac{1}{x-1}$. Тогда

$$\int \frac{x^3}{x-1}dx = \int\left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx = \int x^2dx + \int xdx + \int dx + \int \frac{d(x-1)}{x-1} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \text{формулы} & 3,\ 2,\ 4 \\ \text{таблицы} & \text{интегралов} \end{matrix}\right\} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + C.$$

б) Подынтегральная дробь правильная, знаменатель этой дроби разложим на множители, а затем разложим дробь на сумму простейших дробей.

$$\frac{x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}=\frac{x^2+1}{x^2\left(x^2-2x+1\right)}=\frac{x^2+1}{x^2\left(x-1\right)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{A_4}{\left(x-1\right)^2}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{приведем сумму}\\ \text{простейших дробей}\\ \text{к общему знаменателю}\end{matrix}\right\}=\frac{A_1^{\backslash x(x-1)^2}}{x}+\frac{A_2^{\backslash (x-1)^2}}{x^2}+\frac{A_3^{\backslash x^2(x-1)}}{x-1}+\frac{A_1^{\backslash x^2}}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{A_1x(x^2-2x+1)+A_2(x^2-2x+1)+A_3x^2(x-1)+A_4x^2}{x^2(x-1)^2}=$$

$$=\frac{A_1x^3-2A_1x^2+A_1x+A_2x^2-2A_2x+A_2+A_3x^3-A_3x^2+A_4x^2}{x^2(x-1)^2}.$$

Итак, получаем

$$\frac{x^2+1}{x^2\left(x-1\right)^2}=\frac{A_1x^3-2A_1x^2+A_1x+A_2x^2-2A_2x+A_2+A_3x^3-A_3x^2+A_4x^2}{x^2(x-1)^2}.$$

Поскольку знаменатели исходной и полученной дробей одинаковы, то приравняем их числители и получим тождество

$$x^2+1\equiv A_1x^3-2A_1x^2+A_1x+A_2x^2-2A_2x+A_2+A_3x^3-A_3x^2+A_4x^2.$$

Сгруппируем в правой части слагаемые с одинаковыми степенями, а затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества:

$$x^2+1\equiv x^3\left(A_1+A_3\right)+x^2\left(-2A_1+A_2-A_3+A_4\right)+x\left(A_1-2A_2\right)+A_2$$

$$\begin{array}{c|c} x^3 & 0=A_1+A_3,\\ x^2 & 1=-2A_1+A_2-A_3+A_4,\\ x^1 & 0=A_1-2A_2,\\ x^0 & 1=A_2.\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c} A_3=-A_1=-2,\\ A_4=1+2A_1-A_2+A_3,\\ A_1=2A_2=2,\\ A_2=1.\end{array}$$

Следовательно, искомое разложение имеет вид:

$$\frac{x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Вернёмся к вычислению интеграла:

$$\int\frac{x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx=2\int\frac{dx}{x}+\int x^{-2}dx-$$

$$-2\int\frac{d(x-1)}{x-1}+2\int(x-1)^{-2}d(x-1)=\left\{\begin{matrix}\text{формулы } 4,\,3\\ \text{таблицы интегралов}\end{matrix}\right\}=2\ln|x|+$$

$$+\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-2\ln|x-1|+2\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+C=2\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$$

1.5. Интегрирование тригонометрических выражений

Рассмотрим некоторые из интегралов от тригонометрических функций (табл. 2).

Таблица 2 – Виды интегралов и способы их вычисления

Вид интеграла	Метод интегрирования
$\int R(\sin x,\cos x)dx$ Общий случай	Замена $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$

Вид интеграла	Метод интегрирования
$\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(-\sin x, \cos) = -R(\sin x, \cos x)$, т.е. подынтегральная функция нечётная относительно $\sin x$.	Замена $t = \cos x,\ dt = -\sin x dx.$
$\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(\sin x, -\cos) = -R(\sin x, \cos x)$, т.е. поинтегральная функция нечётная относительно $\cos x$	Замена $t = \sin x,\ dt = \cos x dx.$
$\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(-\sin x, -\cos) = R(\sin x, \cos x)$, т.е. подинтегральная функция чётная относительно $\sin x$ и $\cos x$	Замена $t = \operatorname{tg} x, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2},$ $\sin x = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},$ $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$
$\int \cos^{2n-1} x \sin^{\alpha} x dx,$ где $n \in \text{Г}$, $\alpha \in \text{Ў}$.	Замена $t = \sin x,\ dt = \cos x dx.$ Если $n = 2, 3, \ldots,$ то необходимо учитывать формулу $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$
$\int \sin^{2n-1} x \cos^{\alpha} x dx,$ где $n \in \text{Г}$, $\alpha \in \text{Ў}$.	Замена $t = \cos x,\ dt = -\sin x dx.$ Если $n = 2, 3, \ldots,$ то необходимо учитывать формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$
$\int \cos^{2n} x \sin^{2m} x dx,$ где $n, m \in \text{Г}$.	Использовать формулы понижения степени: $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x),\ \sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x).$

Вид интеграла	Метод интегрирования
$\int \left\{ \begin{matrix} \cos mx \cos nx \\ \sin mx \sin nx \\ \sin mx \cos nx \end{matrix} \right\} dx$	Использовать формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму: $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$, $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$, $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$.

Пример. Найти интегралы:

$$а)\int \sqrt[3]{\sin x}\cos x dx;\quad б)\int \sin 3x \cos 7x dx;\quad в)\int \sin^2 11x dx;$$

$$г)\int \frac{dx}{4-\cos x};\qquad д)\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x};$$

$$е)\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{2\cos^2 x - 1}dx.$$

Решение.

$$а)\int \sqrt[3]{\sin x}\cos x dx = \left| \begin{matrix} \cos x \text{ в нечётной} \\ \text{степени, замена} \\ t=\sin x,\ dt=\cos x dx \end{matrix} \right| = \int \sqrt[3]{t}dt = \int t^{\frac{1}{3}}dx = \left\{ \begin{matrix} \text{формула 3} \\ \text{таблицы ин-} \\ \text{тегралов} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sin^{\frac{4}{3}} x + C.$$

$$б)\int \sin 3x \cos 7x dx = \left\{ \begin{matrix} \text{используем фор-} \\ \text{мулу} \sin\alpha\cos\beta \\ \text{из таблицы 2} \end{matrix} \right\} = \int \frac{1}{2}\left(\sin(3x-7x)+\sin(3x+7x)\right)dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\sin(-4x)+\sin 10x\right)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{учтем, что } \sin x \text{—}\\ \text{нечетная функция,}\\ \text{т.е. } \sin(-\alpha)=-\sin\alpha\end{array}\right\}=-\frac{1}{2}\int\sin 4xdx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\sin 10xdx=\left\{\begin{array}{l}\text{после замены } u=4x \text{ для первого}\\ \text{интеграла и } u=10x \text{ для второго}\\ \text{используем формулу 8 таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x\right)+C=\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{20}\cos 10x+C.$$

$$в)\int\sin^2 11xdx=\left\{\begin{array}{l}\text{используем формулу}\\ \text{понижения степени}\\ \text{для } \sin^2\alpha \text{ из таблицы 2}\end{array}\right\}=\int\frac{1}{2}(1-\cos 22x)dx=\frac{1}{2}\int dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\cos 22xdx==\left\{\begin{array}{l}\text{формулы 2,7}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{22}\sin 22x+C=\frac{1}{2}-\frac{1}{44}\sin 22x+C.$$

$$г)\int\frac{dx}{4-\cos x}=\left|\begin{array}{l}\text{подынтегральная функция не обладает}\\ \text{ни одним из перечисленных в таблице}\\ \text{свойств, поэтому используем замену}\\ \text{для общего случая}\\ t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{5t^2+3}=$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{5}}=\left|\begin{array}{l}\text{формула 13}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right|=\frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{5}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{5}}}+C=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

$$д)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} \text{подынтегральная функция чётная относительно} \\ \sin x \text{ и } \cos x, \text{ поэтому замена } \quad t = \operatorname{tg} x,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{1+t^2} + 2\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \dfrac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} = \left| \begin{array}{l} \text{замена по формуле (2)} \\ t = z-1,\ dt = dz,\ z = t+1 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dz}{(z-1)^2 + 2(z-1) - 1} = \int \frac{dz}{z^2 - 2z + 1 + 2z - 2 - 1} = \int \frac{dz}{z^2 - 2} = \left| \begin{array}{l} \text{формула 14 таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C.$$

$$е)\ \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{2\cos^2 x - 1} dx = \int \frac{(1+\sin^2 x)\sin x}{2\cos^2 x - 1} dx = \left| \begin{array}{l} \text{используем тригонометрическую} \\ \text{формулу} \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(2-\cos^2 x)\sin x}{2\cos^2 x - 1} dx = \left| \begin{array}{l} \text{подынтегральная функция нечётная относительно} \\ \sin x, \text{ поэтому замена } t = \cos x, \quad dt = -\sin x dx \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{2-t^2}{2t^2-1} dt = \int \frac{t^2-2}{2t^2-1} dt = \left| \begin{array}{l} \text{подынтегральная функция} - \text{неправильная ра-} \\ \text{ционая дробь, поделим её в столбик и получим:} \\ \begin{array}{r|l} -\,t^2 - 2 & \underline{2t^2 - 1} \\ \underline{t^2 - 0{,}5} & 0{,}5 \\ -1{,}5 & \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(0{,}5 - \frac{1{,}5}{2t^2 - 1} \right) dt = \frac{1}{2} \int dt - \frac{3}{4} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{2}} = \left| \begin{array}{l} \text{формулы (2) и (14)} \\ \text{таблицы интегралов} \end{array} \right| = \frac{1}{2} t -$$

$$-\frac{3}{4}\frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{2}}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|+C=\frac{1}{2}\cos x-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C.$$

1.6. Интегрирование простейших иррациональных функций

Определение. *Иррациональностью* от x называют выражение, содержащее переменную x в дробной степени.

Рассмотрим интеграл

$$\int R\left(ax+b,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},\dots,(ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$$

где R — рациональная функция по каждой из своих переменных; m_1, n_1, m_2, n_2, . . . — целые числа.

Подстановка, рационализирующая подынтегральную функцию, имеет вид:

$$ax+b=t^S,\ adx=St^{S-1}dt,\ dx=\frac{S}{a}t^{S-1}dt,$$

где S — наименьшее общее кратное (НОК) чисел $n_1, n_2,\dots, n_k$, т. е. наименьшее натуральное число, делящееся нацело на $n_1, n_2,\dots, n_k$.

Пример. Проинтегрировать иррациональность

$$\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}dx.$$

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}dx=\int \frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{4}}}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{НОК}(2,3,4)=12\\ x=t^{12},\ t=x^{\frac{1}{12}}\\ dx=12t^{11}dt\end{array}\right\}=\int \frac{\left(t^{12}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(t^{12}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(t^{12}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(t^{12}\right)^{\frac{1}{4}}}12t^{11}dt=$$

$$=12\int \frac{t^6-t^8}{t^4-t^3}t^{11}dt=12\int \frac{t^6\left(1-t^2\right)}{t^3(t-1)}t^{11}dt=12\int \frac{t^3(1-t)(1+t)}{t-1}t^{11}dt=-12\int (1+t)t^{14}dt=$$

$$=-12\int t^{14}dt-12\int t^{15}dt=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 3}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=-12\frac{t^{15}}{15}-12\frac{t^{16}}{16}+C=$$

$$=-\frac{4}{5}\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^{15}-\frac{3}{4}\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^{16}+C=-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C.$$

1.7. Тригонометрические подстановки

Рассмотрим интегралы, которые приводятся к интегралам от рациональной относительно $\sin t$ и $\cos t$ функции с помощью надлежащей тригонометрической подстановки (табл. 3).

Таблица 3 – Виды интегралов и способы их вычисления

Вид интеграла	Подстановка
$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$	$x=a\sin t$, $dx=a\cos tdt$ или $x=a\cos t$, $dx=-a\sin tdt$
$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$	$x=a\mathrm{tg}t$, $dx=\dfrac{adt}{\cos^2 t}$ или $x=a\mathrm{ctg}t$, $dx=-\dfrac{adt}{\sin^2 t}$
$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$	$x=\dfrac{a}{\sin t}$, $dx=-\dfrac{a\cos xdt}{\sin^2 t}$ или $x=\dfrac{a}{\cos t}$, $dx=\dfrac{a\sin tdt}{\cos^2 t}$

Пример. Найти интегралы

а) $\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx$; б) $\int\frac{dx}{\left(5+x^2\right)\sqrt{5+x^2}}$; в) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-16}}$.

Решение.

$$a)\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx=\left|\begin{matrix}x=3\sin t\\ dx=3\cos tdt\end{matrix}\right|=\int\frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos tdt}{3\sin t}=\int\frac{3\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt}{\sin t}=$$

$$=3\int\frac{\cos^2 tdt}{\sin t}=3\int\frac{\left(1-\sin^2 t\right)dt}{\sin t}=3\int\frac{dt}{\sin t}-3\int\sin tdt=\left\{\begin{matrix}\text{формулы 15 и 8}\\ \text{таблицы интегралов}\end{matrix}\right\}=$$

$$=3\ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right|+3\cos t+C=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\ \text{и}\ \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}\end{matrix}\right\}=3\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\right|+$$

$$+3\sqrt{1-\sin^2 t}+C=3\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}{\frac{x}{3}}\right|+3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}+C=3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-x^2}}{x}\right|+\sqrt{9-x^2}+C.$$

$$б)\ \int\frac{dx}{\left(5+x^2\right)\sqrt{5+x^2}}=\left|\begin{array}{l}x=\sqrt{5}\,\mathrm{tg}t\\ dx=\dfrac{\sqrt{5}dt}{\cos^2 t}\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{\sqrt{5}dt}{\cos^2 t}}{\left(5+5\mathrm{tg}^2 t\right)\sqrt{5+5\mathrm{tg}^2 t}}=\int\frac{\dfrac{\sqrt{5}dt}{\cos^2 t}}{5\left(1+\mathrm{tg}^2 t\right)\sqrt{5\left(1+\mathrm{tg}^2 t\right)}}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{используем формулу}\\ 1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\end{array}\right\}=\int\frac{\dfrac{\sqrt{5}dt}{\cos^2 t}}{\dfrac{5}{\cos^2 t}\,\dfrac{\sqrt{5}}{\cos t}}=\frac{1}{5}\int\cos t\,dt=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 7}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=\frac{1}{5}\sin t+C=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{используем формулу}\\ \sin\alpha=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}\end{array}\right\}=\frac{1}{5}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{5}}}+C=\frac{x}{5\sqrt{5+x^2}}+C.$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{используем формулу}\\ \sin\alpha=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}\end{array}\right\}=\frac{1}{5}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{5}}}+C=\frac{x}{5\sqrt{5+x^2}}+C.$$

$$в)\ \int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}=\left|\begin{array}{l}x=\dfrac{4}{\sin t}\\ dx=-\dfrac{4\cos t\,dt}{\sin^2 t}\end{array}\right|=-\int\frac{\dfrac{4\cos t\,dt}{\sin^2 t}}{\dfrac{16}{\sin^2 t}\sqrt{\dfrac{16}{\sin^2 t}-16}}=-\int\frac{\dfrac{4\cos t\,dt}{\sin^2 t}}{\dfrac{16}{\sin^2 t}\,\dfrac{4\cos t}{\sin t}}=-\frac{1}{16}\int\sin t\,dt=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 8}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=\frac{1}{16}\cos t+C=\frac{1}{16}\sqrt{1-\sin^2 t}+C=\frac{1}{16}\sqrt{1-\frac{16}{x^2}}+C=\frac{\sqrt{x^2-16}}{16x}+C.$$

2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Определённый интеграл, теорема его существования

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, которая непрерывна на отрезке [*a,b*]. Выполним следующие операции:

1. Отрезок [*a,b*] разобьём точками $x_0 = a,\ \ x_1,\ \ x_2, \dots, x_n = b$ на *n* произвольных частей и обозначим длины отрезков $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\quad i = 1, 2, \dots, n.$

2. Внутри каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ возьмём произвольную точку *Ci* и вычислим в ней значение функции $f(C_i)$. Составим сумму произведений значений функции $f(C_i)$ на Δx_i:

$$G_n = \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i, \tag{5}$$

называемую интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке [*a,b*].

3. Обозначим λ длину наибольшего из отрезков разбиений Δx_i, т.е., $\lambda = \max\{\Delta x_i\},\quad i = 1, 2, \dots, n.$ В равенстве (5) перейдём к пределу при $\lambda \to 0$:

$$\lim_{\lambda\to 0} G_n = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i. \tag{6}$$

Определение. Если существует конечный предел при $\lambda \to 0$ интегральной суммы, составленной для функции $f(x)$ на отрезке [*a,b*], не зависящий ни от способа разбиения [*a,b*] на части, ни от выбора произвольной точки *Ci* внутри каждого частичного отрезка разбиения, то этот предел называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке [*a,b*] . Обозначение определённого интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i. \qquad (7)$$

При этом *a* называется нижним пределом, а *b* — верхним пределом интегрирования.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке [*a,b*], то определённый интеграл от функции $f(x)$ на этом отрезке имеет геометрический смысл. Приведём геометрическую интерпретацию определённого интеграла.

Определение. Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу отрезком [a,b] оси OX и двумя прямыми x=a и x=b, параллельными оси OY.

Можно показать, что площадь криволинейной трапеции с основанием [a,b] и ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, непрерывной и неотрицательной на отрезке [a,b], равна определённому интегралу от функции $y = f(x)$ на этом отрезке, т.е.:

$$S_{\text{кр.тр.}} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема 6. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a,b], то существует определённый интеграл от этой функции на отрезке [a,b].

2.2. Свойства определённого интеграла

1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;$

2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0;$

3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$

Замечание. Свойство 3 справедливо при любом расположении точки *c* по отношению к *a* и *b* при условии интегрируемости функции *f*(*x*) на большем из отрезков.

4. $\int\limits_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_a^b g(x)dx;$

5. $\int\limits_a^b Af(x)dx=A\int\limits_a^b f(x)dx,\ A-\text{const};$

6. Если $f(x)\le g(x)$ для всех $x\in[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx;$$

7. Если $m\le f(x)\le M$ для всех $x\in[a,b]$, то справедлива оценка $m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a).$

8. **Теорема 7.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [*a,b*], то между точками *a* и *b* найдётся точка *x*=*c*, такая что

$$\int\limits_a^b f(x)dx=f(c)(b-a).$$

Определение. Средним значением функции $f(x)$ на отрезке [*a,b*] называется величина $f_{cp}=\dfrac{\int\limits_a^b f(x)}{b-a}.$

2.3. Формула Ньютона–Лейбница

Теорема 8. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на [*a,b*], тогда производная от определённого интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции на этом верхнем пределе:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)=f(x).$$

Доказательство. Обозначим $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt.$ Придадим переменной *x* приращение $\Delta x,$ тогда $\Phi(x)$ получит приращение

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\left\{\begin{matrix}\text{к первому интегралу}\\ \text{применим свойство 3}\\ \text{определённого интеграла}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

$$\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\{\text{применим теорему 7}\}=f(c)\Delta x,$$

где *c* – некоторая точка между *x* и $x+\Delta x.$ По определению производной имеем

$$\frac{d\Phi}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x),$$

причём последнее равенство справедливо ввиду непрерывности функции $y=f(x).$

Следствие. $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ – первообразная для функции $f(x)$.

Теорема 9. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [*a,b*], то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a), \tag{8}$$

где $F(x)$ – любая первообразная для функции $f(x)$, т.е.,

$F'(x)=f(x).$

Формула (8) называется формулой Ньютон-Лейбница.

Доказательство. По следствию из предыдущей теоремы $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ – первообразная для функции $f(x)$. По теореме о первообразной для данной функции любая другая первообразная $F(x)$ отличается от $\Phi(x)$ на постоянное слагаемое:

$\int\limits_a^x f(t)dt=F(x)+C.$ При $x=a$ получим $\int\limits_a^a f(t)dt=F(a)+C,$ с другой стороны, по свойству 2 определённого интеграла $\int\limits_a^a f(t)dt=0,$, следовательно, $C=-F(a)$ и $\int\limits_a^x f(t)dt=F(x)-F(a).$ При $x=b$ имеем

$$\int\limits_a^b f(t)dt=F(b)-F(a).$$

Пример. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_1^2\left((1+x)^2+\sqrt{x}\right)dx.$

Решение.

$$\int\limits_1^2\left((1+x)^2+\sqrt{x}\right)dx=\int\limits_1^2(1+x)^2\,dx+\int\limits_1^2 x^{\frac{1}{2}}dx=\left.\frac{(1+x)^3}{3}\right|_1^2+\left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_1^2=\frac{1}{3}\left((1+2)^3-(1+1)^3\right)+\frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{19}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}=\frac{17+4\sqrt{2}}{3}.$$

2.4. Замена переменной в определённом интеграле

Теорема (о замене переменной в определённом интеграле). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Если функция $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha,\beta]$, при $t\in[\alpha,\beta]$, значение функции $\varphi(t)\in[a,b]$, и, кроме того, $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b,$ то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \qquad (9)$$

Алгоритм замены переменной в определённом интеграле:

1. Старую и новую переменные связать соотношением $x=\varphi(t)$;
2. Найти связь между дифференциалами переменных x и t: $dx=\varphi'(t)\,dt.$
3. Определить новые пределы интегрирования α и β из уравнений $a=\varphi(\alpha), \quad b=\varphi(\beta).$
4. В искомом интеграле перейти к новой переменной по формуле (9) и заменить пределы интегрирования. Проинтегрировать и вычислить по формуле Ньютона–Лейбница (8).

Пример. Вычислить определённый интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$

Решение.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{используем тригонометрическую}\\ \text{подстановку } x=\sin t,\ \ dx=\cos t dt\\ \text{заменим пределы интегрирования:}\\ x=0\Rightarrow \sin t=0\Rightarrow t=0;\\ x=1\Rightarrow \sin t=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\left|\begin{array}{l}\text{используем формулу}\\ \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-0\right)=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

2.5. Интегрирование по частям в определённом интеграле

Формула интегрирования по частям (3) в случае определённого интеграла приобретает вид:

$$\int_a^b UdV=UV\Big|_a^b-\int_a^b VdU, \qquad (10)$$

Пример. Вычислить определённый интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x-1)\cos xdx.$$

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x-1)\cos xdx=\left|\begin{array}{l}U=2x-1\Rightarrow dU=2dx\\ dV=\cos xdx\Rightarrow V=\sin x\end{array}\right|=(2x-1)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin xdx=$$

$$=\left(2\frac{\pi}{4}-1\right)\sin\frac{\pi}{4}-(-1)\sin 0+2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{\sqrt{2}}{2}+2\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos 0\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}-$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}-2=\frac{(\pi+2)\sqrt{2}-8}{4}.$$

2.6. Приложения определённого интеграла

Определённый интеграл используется в различных приложениях: при вычислении площадей плоских фигур, длин дуг плоских кривых, объемов тел вращения, площадей поверхностей вращения, работы переменной силы на отрезке, пути, пройденного за промежуток времени, статических моментов и моментов инерции плоских дуг и фигур и т. д.

Площади плоских фигур

Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Теорема 11. Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, где $f_2(x)\geq f_1(x)$ для всех $x\in[a,b]$, и прямыми $x=a$, $x=b$, то её площадь вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx. \tag{11}$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=x^2-2,\ y=3x+2.$$

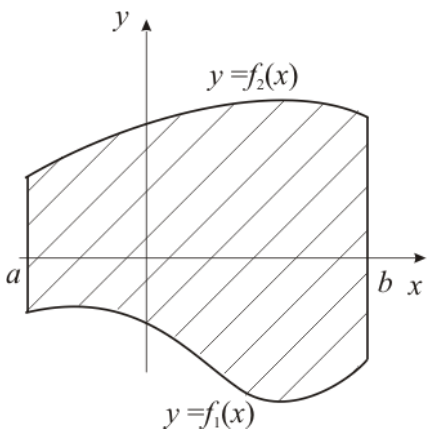

Рис. 1

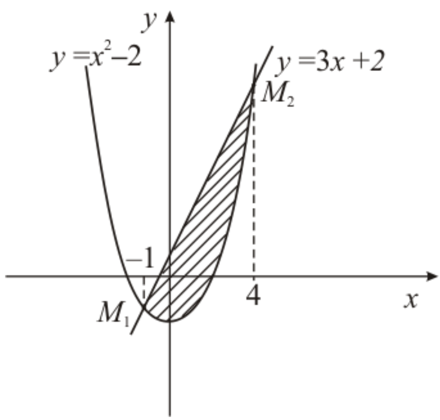

Рис. 2

Решение. Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы найдём координаты её вершины $(0,-2)$ и направим верви параболы вверх. Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0,\ 2)$ и $(-1,\ -1)$.

Площадь S фигуры, ограниченной обеими линиями (она отмечена на рис. 2 штриховкой) вычислим согласно формуле (11). Для определения нижнего и верхнего пределов интегрирования в этой формуле составим и решим уравнение $x^2-2=3x+2$: $x^2-3x-4=0$, $x_1=-1$, $x_2=4$. Итак, имеем $a=-1$, $b=4$.

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (11), при $f_2(x)=3x+2$, $f_1(x)=x^2-2$, (поскольку $f_2(x)\ge f_1(x)$ для всех $x\in[-1,4]$), получаем:

$$S=\int_{-1}^{4}\left(3x+2-\left(x^2-2\right)\right)dx=\int_{-1}^{4}\left(3x-x^2+4\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_{-1}^{4}=$$

$$=\frac{3\cdot 4^2}{2}-\frac{4^3}{3}+4\cdot 4-\left(\frac{3\cdot(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}+4\cdot(-1)\right)=24-\frac{64}{3}+16-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+4=$$

$$=44-\frac{65}{3}-\frac{3}{2}=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}\ (\text{кв.ед.})$$

Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой, заданной параметрически уравнениями $y=y(t)$, $x=x(t)$, где функции $y=y(t)$ и $x=x(t)$ имеют непрерывные производные для всех $t\in[t_0,\ t_1]$, и функция $y(t)$ сохраняет знак на промежутке $[t_0,\ t_1]$, прямыми $x = a$, $x = b$, где $a=x(t_0)$, $b=x(t_1)$, и осью OX, вычисляется по формуле:

$$S=\left|\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt\right|. \qquad (12)$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:

$$x = 2\cos t,\ \ y = 3\sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

Решение.

Для построения фигуры составим таблицу значений координат (*x*, *y*) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	2	0	–2	0	2
y	0	3	0	–3	0

Нанесём точки (*x*, *y*) на координатную плоскость *XOY* и соединим их плавной линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, соответствующая точка (x, y) описывает эллипс (известно, что $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ – параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями *a* и *b*). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей *OX* и *OY*, найдём её площадь *S*, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции *AOB*. Согласно формуле (12) получим:

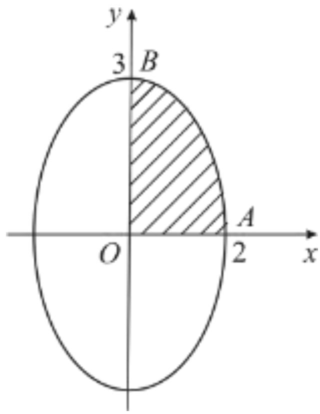

Рис. 3

$$S = 4\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\left(2\cos t\right)' dt\right| = 4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt\right| = \left\{\begin{matrix} \text{используем формулу} \\ \text{понижения степени} \\ \text{для } \sin^2\alpha \text{ из таблицы 2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= 4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt\right| = 4\left|-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt\right| = 4\left|-3\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right| =$$

$$= 4\left|-3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right)\right| = 4\left|-3\frac{\pi}{2}\right| = 6\pi \approx 18{,}850\ (\text{кв. ед.}).$$

Заметим, что для вычисления площади по формуле (9), построение чертежа не является обязательным, а носит иллюстративный характер.

Длина дуги плоской кривой

Вычисление длины дуги плоской кривой в декартовых координатах

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, функция $f(x)$ имеет непрерывную производную при всех $x \in [a,b]$, то длина дуги $\overset{\frown}{AB}$ (рис. 4) этой кривой, заключённой между точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$,

вычисляется по формуле:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (13)$$

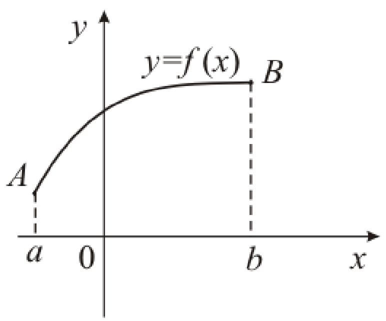

Рис. 4

Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_0 \le t \le t_1$, и функции $x(t)$, $y(t)$ имеют непрерывные производные при всех $t \in [t_0, t_1]$, то длина дуги $\overset{\frown}{AB}$, соответствующей изменению параметра от t_0 до t_1, вычисляется по формуле:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt. \qquad (14)$$

Пример. Найти длину дуги кривой

а) $y = x^{3/2}$, $0 \le x \le 1$;

б) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Решение.

а) Так как кривая задана в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, то для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (13). Найдём $y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ и подставим в (13):

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, dx = \left| \begin{aligned} & t = 1 + \frac{9x}{4}, dt = \frac{9}{4}dx, dx = \frac{4}{9}dt, \\ & x = 0 \to t = 1, \\ & x = 1 \to t = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}. \end{aligned} \right| =$$

$$=\frac{4}{9}\int_1^{13/4} t^{\frac{1}{2}}dt=\left\{\begin{matrix}\text{формула 3}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right\}=\frac{4}{9}\left.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^{13/4}=\frac{8}{27}\left.t^{\frac{3}{2}}\right|_1^{13/4}=\frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right)\approx 1{,}440\ (\text{единиц длины}).$$

б) Кривая задана параметрически, поэтому воспользуемся формулой (14). Найдём $x'(t),\ y'(t)$:

$$x'(t)=-2\sin t+2\sin 2t,\ \ y'(t)=2\cos t-2\cos 2t$$ и

подставим в (14):

$$l_{\breve{AB}}=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-2\sin t+2\sin 2t)^2+(2\cos t-2\cos 2t)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2 t-8\sin t\sin 2t+4\sin^2 2t+4\cos^2 t-8\cos t\cos 2t+4\cos^2 2t}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4(\sin^2 t+\cos^2 t)+4(\sin^2 2t+\cos^2 2t)-8(\cos t\cos 2t+\sin t\sin 2t)}\,dt=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем тригонометрические формулы}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \text{ и } \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{matrix}\right\}=\int_0^{2\pi}\sqrt{8-8\cos t}\,dt=$$

$$=\sqrt{8}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулу}\\ \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)\Rightarrow\\ \Rightarrow 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\end{matrix}\right\}=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-8\cos\left.\frac{t}{2}\right|_0^{2\pi}=-8(\cos\pi-\cos 0)=-8(-1-1)=16\,(\text{ед. длины}).$$

Вычисление объёмов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси *OX* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью *OX* и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 5), то его объём вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx. \qquad (15)$$

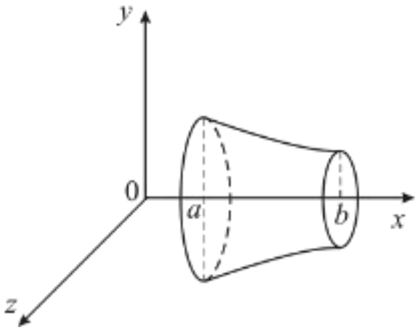

Рис. 5

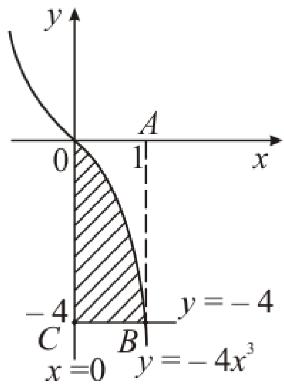

Рис. 6

Пример. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями: $y = -4x^3$, $x = 0$, $y = -4$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить искомый объем тела вращения, из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры *OABC*, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры *OAB*: $V = V_1 - V_2$. По формуле (15) найдём V_1 и V_2:

$$V_1=\pi\int_0^1(-4)^2\,dx=\pi 16x\Big|_0^1=16\pi \text{ (ед. объёма);}$$

$$V_2=\pi\int_0^1\left(-4x^3\right)^2dx=16\pi\int_0^1 x^6dx=16\pi\frac{x^7}{7}=\frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объёма);}$$

$$V=V_1-V_2=16\pi-\frac{16\pi}{7}=\frac{96}{7}\pi\approx 43{,}085 \text{ (ед. объема).}$$

2.7. Использование определённого интеграла в экономике

Рассмотрим экономический смысл определённого интеграла. Пусть функция $y=f(t)$ описывает изменение производительности производства с течением времени. Тогда определённый интеграл $\int_0^T f(t)\,dt$ есть объём Q выпускаемой продукции за промежуток времени $[0,T]$.

Пример. Изменение производительности производства с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задаётся функцией $f=32-2^{-0,5t+5}$, где t – время в месяцах. Найти объём продукции, произведённой за третий месяц от начала внедрения технологического процесса.

Решение. Согласно экономическому смыслу определённого интеграла искомый объём продукции

$$Q=\int_2^3\left(32-2^{-0,5t+5}\right)dt=\left(32t+2\frac{2^{-0,5t+5}}{\ln 2}\right)\Bigg|_2^3=\left(32t+64\frac{2^{-0,5t}}{\ln 2}\right)\Bigg|_2^3=32(3-2)+$$

$$+\frac{64}{\ln 2}\left(2^{-0,5\cdot 3}-2^{-0,5\cdot 2}\right)=32+\frac{64}{\ln 2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}\right)\approx 18{,}48.$$

Определённый интеграл находит и другие применения в экономике. Например, при исследовании кривой Лоренца (рис. 7), которая определяет зависимость процента доходов от процента имеющего их населения (кривая *OBA*). При равномерном распределении доходов кривая Лоренца вырождается в прямую – биссектрису *OA*, поэтому площадь фигуры *OAB* между биссектрисой и кривой Лоренца, отнесённая к площади треугольника *OAC* (коэффициент Джини), характеризует степень неравенства в распределении доходов населения. Используется определённый интеграл также при вычислении дисконтированных доходов, денежных средств, сберегаемых потребителем, при продаже товара по равновесной цене (выигрыш потребителя) и т.п.

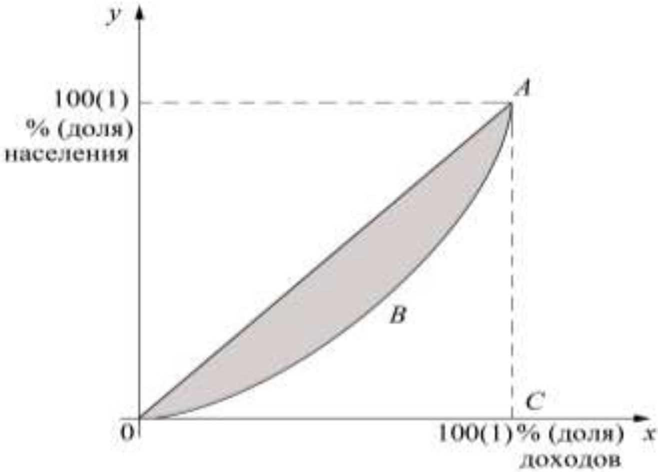

Рис. 7

2.8. Несобственные интегралы

Определение. Несобственными интегралами называются интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы 1-го рода) и интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы 2-го рода).

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на полусегменте $[a,+\infty)$. Возьмём любое $b>a$ и рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx.$

Определение. Если существует конечный предел

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$ то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на интервале $[a,+\infty)$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx,$ т.е. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$ Отметим, что в этом случае несобственный интеграл существует или сходится. Если при $b\to+\infty$ интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ не имеет конечного предела, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ не существует или расходится.

Геометрический смысл несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ состоит в том, что при $f(x)\ge 0$ для всех $x\in[a,+\infty)$ он выражает площадь неограниченной области, заключённой между линиями $y=f(x),\quad x=a$ и осью *OX*.

Аналогично определяются несобственные интегралы на промежутках $(-\infty,b]$ и $(-\infty,+\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где *c* – любая точка на интервале $(-\infty,+\infty)$, причём $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ существует, если сходятся оба интеграла в правой части, и расходится, если расходится хотя бы один из них.

Рассмотрим, как вычисляются несобственные интегралы 1-го рода.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\left(F(x)\Big|_a^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(F(b)-F(a)\right) = \lim_{b\to+\infty}F(b)-F(a),$$

где $F(x)-$ первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$.

Аналогично, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b)-\lim_{a\to-\infty}F(a)$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}F(b)-\lim_{a\to-\infty}F(a).$$

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

Значит, интеграл сходится и его величина равна $\pi/2$.

Рассмотрим несобственные интегралы 2-го рода. Пусть функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $c\in[a,b]$ и непрерывна при $a\le x<c$ и $c<x\le b$, тогда полагают, что несобственный интеграл определяется формулой:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to+0}\int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta\to+0}\int_{c+\beta}^{b} f(x)dx. \qquad (16)$$

При этом несобственный интеграл называется сходящимся, если существуют оба предела в правой части равенства, и расходящимся, если не существует хотя бы один из них.

Геометрический смысл несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ состоит в том, что при $f(x)\ge 0$ для всех $x\in[a,b]$

он выражает площадь неограниченной области, заключённой между линиями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ и осью *OX*.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Решение. Интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ является несобственным интегралом 2-го рода, так как промежуток интегрирования содержит точку бесконечного разрыва $x=0$, поэтому согласно формуле (16):

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\alpha\to+0}\int\limits_{-1}^{0-\alpha}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\beta\to+0}\int\limits_{0+\beta}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\alpha\to+0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\alpha}\right)+\lim_{\beta\to+0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{\beta}^{1}\right)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{\alpha}+1-1+\lim_{\beta\to+0}\frac{1}{\beta}=$$

$=\infty\Rightarrow$ несобственный интеграл расходится.

2.9. Приближённое вычисление определённых интегралов

Пусть требуется вычислить $\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Точками $x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ldots,x_n=b$ разобьём отрезок $[a,b]$ на *n* равных частей, длина каждой из которых равна $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$, $i=1,2,\ldots,n$. В точках $x_i\ (i=0,1,2,\ldots,n)$ восстановим перпендикуляры к оси *OX*, таким образом разобьём криволинейную трапецию с основанием $[a,b]$ и ограниченную сверху графиком функции $f(x)$ на *n* малых криволинейных трапеций с равными основаниями длиной Δx_i (на рис. 8 и 9 показано разбиение на n=3 частей). Обозначим $y_i=f(x_i)$ ($y_0,\ y_1,\ldots,y_n-$ значения функции

$f(x)$ в точках разбиения).

Метод прямоугольников

Учитывая геометрический смысл определённого интеграла и заменяя приближённо площади малых криволинейных трапеций площадями соответствующих прямоугольников с теми же основаниями (рис. 8), получаем:

$$\int_a^b f(x)dx \approx y_0(x_1 - x_0) + y_1(x_2 - x_1) + \ldots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

Поскольку все отрезки одинаковой длины, то окончательно имеем:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}). \tag{17}$$

Формула (17) называется формулой «левых прямоугольников» для приближённого вычисления определённого интеграла. Выбирая прямоугольники другим способом, получим формулу «правых прямоугольников»:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n). \tag{18}$$

Чем больше число разбиений *n*, тем точнее приближённое значение определённого интеграла, вычисленного по формулам (17) и (18).

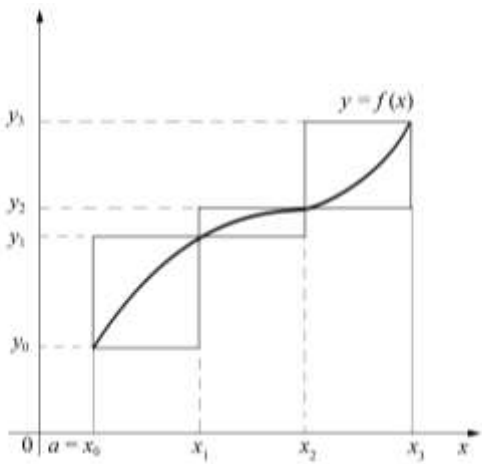

Рис. 8

Чтобы оценить найденное приближённое значение определённого интеграла, число n отрезков разбиения увеличивают в два раза, сравнивают полученные значения интегралов и оставляют первые совпадающие знаки, если точность недостаточна, то снова удваивают число разбиений и т.д.

Отметим, что погрешность R формул прямоугольников оценивается формулой: $|R| \le \frac{M_1(b-a)^2}{2n}$, где M_1 – верхняя граница модуля первой производной функции на отрезке $[a,b]$, т.е. $M_1 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Метод трапеций

Каждую малую криволинейную трапецию приближённо заменим линейной трапецией (рис.9), площадь которой $S_i = \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$ Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\Delta x_1 + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x_n.$$

Поскольку все отрезки одинаковой длины, то окончательно имеем:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right). \qquad (19)$$

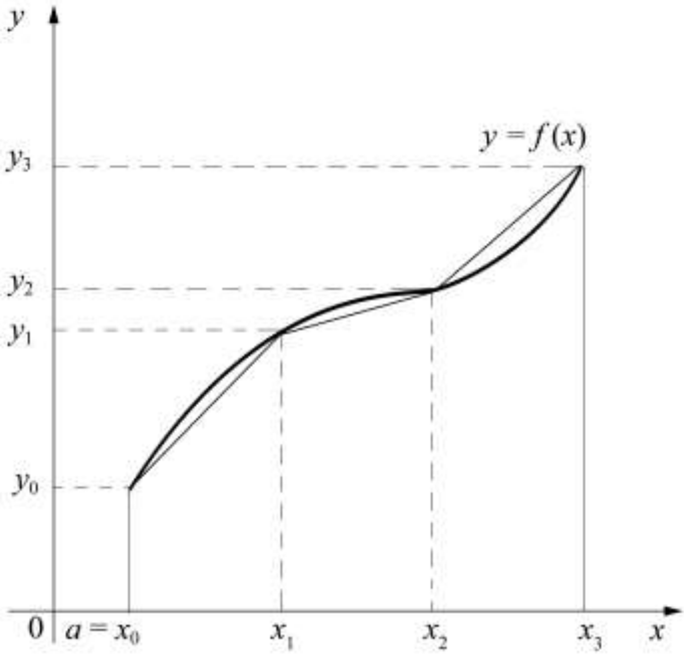

Рис. 9

Формула (19) называется формулой трапеций для приближённого вычисления определённого интеграла. Для погрешности R формулы (19) справедлива оценка $|R| \le \dfrac{M_2(b-a)^2}{12n^2}$, где M_2 – верхняя граница модуля второй производной функции на отрезке $[a,b]$, т.е. $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

Мы привели только два метода приближённого вычисления определённого интеграла, существуют и другие численные методы вычисления определённых интегралов, учитывающих особенности подынтегральных функций.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Рассмотрим одну из задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Из статистических данных известно, что для рассматриваемого региона число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2 соответственно. Описать протекание демографического процесса, т.е. найти закон изменения численности населения с течением времени.

Пусть $y = y(t) -$ число жителей региона в момент времени t. Прирост населения Δy за время Δt равен разности между числом родившихся и умерших за это время:

$$\Delta y = k_1 y \Delta t - k_2 y \Delta t \quad \text{или} \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = ky, \quad \text{где} \quad k = k_1 - k_2.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0,$ получаем уравнение:

$$y' = ky. \tag{20}$$

Решая это уравнение, получаем математическую модель демографического процесса: $y = Ce^{kt}$, где C – постоянная, определяемая начальными условиями (численность населения в начальный момент времени).

Отметим особенности уравнения (20):

Искомая функция зависит только от одной переменной.

Уравнение, определяющее эту искомую функцию, наряду с заданной функцией, содержит также производную от неизвестной функции.

Такие уравнения будем называть обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Определение. *Обыкновенным дифференциальным уравнением* называют соотношение вида:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{21}$$

где x – независимая переменная, $y = y(x) -$ неизвестная функция переменной x, $y', y'', \dots y^{(n)}$ – производные этой функции, F – некоторая заданная функция своих аргументов, определённая в некоторой области *D* $(n+2)-$мерного пространства.

Замечание. Будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения, называя их в дальнейшем просто дифференциальными уравнениями.

Порядком ДУ называется порядок старшей производной. Уравнение порядка *n* обязательно должно содержать производную $y^{(n)}$, при этом другие аргументы функции *F* могут отсутствовать.

Нахождение всех решений дифференциального уравнения называется его интегрированием.

3.2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Дифференциальным уравнением (ДУ) 1-го порядка согласно (21) называется уравнение вида: $F(x, y, y')=0.$

Рассмотрим уравнение, разрешённое относительно производной:

$$y'=f(x,y), \tag{22}$$

связывающее независимую переменную *x*, неизвестную функцию $y = y(x)$ и её первую производную y'. Здесь $f(x, y)$ — некоторая заданная функция своих аргументов, определённая и непрерывная в области *D* на плоскости *XOY*. Область *D* называется областью определения уравнения (ООУ).

Определение. Функция $y=\varphi(x)$, определенная и дифференцируемая на некотором интервале (*a*, *b*), называется *решением уравнения* (22), если, будучи подставленной в это уравнение, она обращает его в тождество, т. е. $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$, при $x\in(a,b)$. График решения ДУ называется его *интегральной кривой*.

ДУ (22) имеет бесчисленное множество решений вида $y=\varphi(x,C)$, зависящих от одной произвольной постоянной С. Такое решение называется общим решением ДУ. Решение ДУ

(22), которое получается из общего решения $y=\varphi(x,C)$ при фиксированном значении С, называется частным решением.

Не всегда решение ДУ (22) находится в виде $y=\varphi(x)$, иногда оно получается в неявном виде $\Phi(x,y)=0$, при этом для всех x и y из некоторой области должно выполняться $-\dfrac{\Phi'_x(x,y)}{\Phi'_y(x,y)}=f(x,y)$. Решение $\Phi(x,y)=0$ называют интегралом ДУ (22), а уравнение $\Phi(x,y,C)=0$ — общим интегралом ДУ (22) в некоторой области $G\subset D$, если при надлежащем выборе постоянной С оно даёт любое решение ДУ (22), график которого содержится в области G.

3.3. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения 1-го порядка и его решения

Рассмотрим ДУ (22). Будем предполагать, что функция $f(x,y)$ определена в некоторой области *D*. Возьмём точку $(x_0,y_0)\in D$ и вычислим $f(x_0,y_0)$. Проведём через точку (x_0,y_0) отрезок, например единичной длины, составляющий с осью *OX* угол α, такой, что $\mathrm{tg}\alpha=f(x_0,y_0)$. Рассмотрим другую точку $(x,y)\in D$ и проделаем то же самое. И так поступим с каждой точкой области *D* (рис. 10). Таким образом, с каждой точкой, принадлежащей области *D*, связано некоторое направление; другими словами говорят, что ДУ (22) определяет некоторое поле направлений. Пусть $y=\varphi(x)$ — решение ДУ

(22), график которого проходит через точку (x_0, y_0), т.е. $y_0 = \varphi(x_0)$. Кроме того $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ и, в частности,

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0). \qquad (23)$$

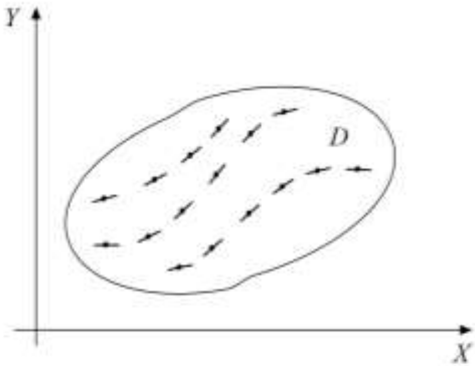

Рис. 10

В правой части равенства (23) стоит число $f(x_0, y_0)$, определяющее направление поля в точке (x_0, y_0), а в левой части – число $\varphi'(x_0)$, определяющее направление касательной к интегральной кривой в точке (x_0, y_0), т.е. касательная в каждой точке интегральной кривой имеет то же направление, что и направление поля, создаваемое уравнением (22).

В силу сказанного интегральную кривую можно определить иначе, а именно, интегральная кривая ДУ (22) – это такая кривая, которая в каждой своей точке касается направления поля, создаваемого этим уравнением.

Пример. Построить поле направлений, создаваемое ДУ $y' = \dfrac{y}{x}$.

Решение. ООУ – вся плоскость *OXY*, за исключением прямой $x=0$. Задача облегчается, если поле направлений строить не в каждой точке, а предварительно найти такие линии, вдоль которых направление поля одинаково. Такие линии называют *изоклинами*.

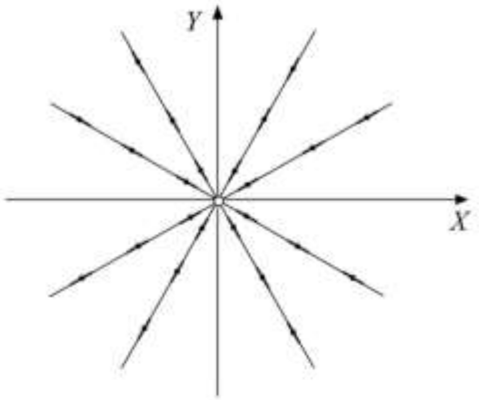

Рис. 11

Уравнение изоклины для ДУ (22) $f(x,y)=C$. Для нашего примера уравнение изоклины, очевидно, следующее $\frac{y}{x}=C \quad (x\neq 0)$. Учитывая, что поле направлений определено всюду, кроме прямой $x=0$, заключаем, что изоклинами являются полупрямые, выходящие из начала координат, не лежащие на оси ординат $x=0$ (рис. 11). В каждой точке полупрямой направление поля совпадает с направлением этой полупрямой $y=Cx$. Очевидно, что интегральными прямыми будут полупрямые $y=Cx$.

3.4. Методы интегрирования основных типов дифференциальных уравнений 1-го порядка

Уравнения с разделяющимися переменными

Такие ДУ имеют вид:

$$y'=f_1(x)\cdot f_2(y) \tag{24}$$

и решаются следующим образом: так как $y'=\frac{dy}{dx}$, то уравнение

(24) можно записать в виде $\dfrac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y)$. Разделим переменные в полученном равенстве, т. е. при дифференциале dy соберем множителями функции, зависящие от y, а при дифференциале dx – функции, зависящие от x. Для этого умножим обе части уравнения (24) на множитель $\dfrac{dx}{f_2(y)}$, считая $f_2(y)\neq 0$. Символически это записывается так:

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y)\quad\Big|\cdot\frac{dx}{f_2(y)}\quad\left(f_2(y)\neq 0\right).$$

Получим $\dfrac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx$. Интегрируя последнее равенство, получим общий интеграл

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C.$$

В случае, если уравнение $f_2(y)=0$ имеет решение $y=b$, то это будет, очевидно, решением исходного ДУ; при этом, если оно не получается из общего решения или общего интеграла ни при каком значении постоянной C, то такое решение является особым решением уравнения (24).

Пример. Решить ДУ $\sqrt[4]{x}\cdot y'=y+1$.

Решение. ДУ приведем к виду (24), разделив обе части равенства на $\sqrt[4]{x}$: $\quad y'=\dfrac{y+1}{\sqrt[4]{x}},\quad$ ООУ $\quad x\neq 0$.

Согласно описанному выше алгоритму, заменив y' на $\dfrac{dy}{dx}$, получим $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+1}{\sqrt[4]{x}}$ и умножим обе части равенства на $\dfrac{dx}{y+1}$ $(y+1\neq 0)$:

$$\frac{dy}{y+1}=\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}. \qquad (25)$$

Проинтегрируем полученное равенство:

$$\int\frac{dy}{y+1}=\begin{vmatrix}u=y+1\\du=dy\end{vmatrix}=\int\frac{du}{u}=\begin{vmatrix}\text{формула 4}\\\text{таблицы}\\\text{интегралов}\end{vmatrix}=\ln|u|+C=\ln|y+1|+C.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}=\int x^{-\frac{1}{4}}dx=\begin{vmatrix}\text{формула 3}\\\text{таблицы}\\\text{интегралов}\end{vmatrix}=\frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}+C=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C.$$

Вернёмся к равенству (25), оставив константу C только в правой части в виде $\ln|C|$:

$$\ln|y+1|=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+\ln|C|.$$

Используя свойства логарифмов, получаем общее решение исходного ДУ: $y+1=Ce^{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}}\Rightarrow y=Ce^{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}}-1$.

Проверим, имеет ли уравнение особые решения. Уравнение делили на (y + 1), поэтому могли потерять решение y = – 1. Подстановка в уравнение показывает, что y = – 1 — решение, однако оно содержится в общем решении при C = 0. Таким образом, особых решений нет.

Однородные уравнения

Однородные ДУ 1-го порядка имеют вид:

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (26)$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи замены $y=zx$, где $z=z(x)$ – новая искомая функция. Действительно, подставляя в уравнение (26)

$y' = z'x + z,$ получаем: $z'x + z = f(z)$ — уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{dz}{dx}x = f(z) - z \left| \cdot \frac{dx}{(f(z)-z)\cdot x}, \quad f(z) - z \neq 0, \quad x \neq 0, \right.$$

$$\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{f(z)-z} = \ln|x| + C.$$

После вычисления интеграла вместо z нужно подставить $\frac{y}{x}$ и, если можно, упростить полученное выражение.

Пример. Найти общее решение ДУ $xy' = y + \frac{x}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Решение. Разделим уравнение на $x \neq 0$ (x = 0 не принадлежит ООУ) и получим: $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}$ — однородное уравнение вида (26), в котором $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Делаем замену $y = z \cdot x,\ y' = z'x + z.$ Тогда исходное уравнение становится уравнением с разделяющимися переменными:

$$z' \cdot x + z = z + \frac{1}{\ln z}, \quad \frac{dz}{dx}x = \frac{1}{\ln z} \left| \cdot \frac{dx \cdot \ln z}{x}, \right. \quad \ln z dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \ln z dz = \int \frac{dx}{x}.$$

Найдем интегралы в левой и правой частях полученного равенства:

$$\int \ln z dz = \left| \begin{array}{l} \text{используем формулу интегрирования} \\ \text{по частям } \int u dv = uv - \int v du, \\ \text{где } u = \ln z \to du = \dfrac{dz}{z} \\ dv = dz \to v = z \end{array} \right| =$$

$$= z \ln z - z + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \left| \begin{array}{l} \text{формула 4} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right| = \ln|x| + C.$$

Итак, получаем:

$z \ln z - z = \ln|x| + C \Rightarrow \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} - \frac{y}{x} = \ln|x| + C$ – общий интеграл исходного ДУ.

Линейные уравнения

Линейные ДУ 1-го порядка имеют вид:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \qquad (27)$$

где p(x) и q(x) — известные функции, непрерывные на некотором интервале.

Такие уравнения обычно решают методом Бернулли, который состоит в следующем. Решение ищется в виде произведения двух функций $y(x) = U(x)V(x)$.

Тогда $y' = U'V + UV'$. Подставляя y и y' в (5), получаем:

$$U'V + UV' + p(x)UV = q(x).$$

Объединив второе и третье слагаемые в левой части последнего уравнения и вынося U за скобки, и получим:

$$U'V + U\left(V' + p(x)V\right) = q(x). \qquad (28)$$

Поскольку одну неизвестную функцию y заменили двумя функциями U и V, то одну из этих функций можем взять произвольно. Выберем функцию V(x) так, чтобы она была решением уравнения

$$V' + p(x)V = 0, \qquad (29)$$

тогда вторая функция U(x) должна удовлетворять уравнению

$$U'V=q(x). \qquad (30)$$

Решив уравнение с разделяющимися переменными (29), найдём V и подставим его в (30), откуда найдём U. Общее решение получим как произведение найденных функций U и V:

$$y=UV.$$

Пример. Найти общее решение ДУ $y'+2y=e^{-x}$.

Решение. Уравнение имеет вид (27), поэтому является линейным. Решим его методом Бернулли. Сделаем замену $y=UV,\quad y'=U'V+UV'$:

$$U'V+UV'+2UV=e^{-x},$$

$$U'V+U\left(V'+2V\right)=e^{-x}.$$

Приравняем коэффициент при U нулю и получим:

$$\begin{cases} V'+2V=0, \\ U'V=e^{-x}. \end{cases}$$

Решим первое из полученных уравнений:

$$\frac{dV}{dx}=-2V\left|\cdot\frac{dx}{V}\right.\Rightarrow\int\frac{dV}{V}=-2\int dx\Rightarrow\ln|V|=-2x\Rightarrow V=e^{-2x}$$

(при интегрировании использовали формулы 4 и 2 таблицы интегралов). При нахождении V постоянную C полагаем равной нулю, так как в данном случае достаточно найти некоторое решение.

Полученную функцию $V=e^{-2x}$ подставим во второе уравнение:

$$U'e^{-2x}=e^{-x}\Rightarrow U'=e^{x}\Rightarrow\frac{dU}{dx}=e^{x}\left|\cdot dx\right.\Rightarrow\int dU=\int e^{x}dx\Rightarrow U=e^{x}+C$$

(использовали формулы 2 и 7 таблицы интегралов).

Таким образом, $y=UV=\left(e^{x}+C\right)e^{-2x}$ или $y=e^{-x}+Ce^{-2x}$ — общее решение исходного ДУ.

Уравнения Бернулли

Уравнения Бернулли имеют вид:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \qquad (31)$$

где $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1.$

Метод решения таких уравнений тот же, что и для линейных уравнений.

Пример. Найти общее решение ДУ $xy' + 2y = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$

Решение. Разделим уравнение на $x \neq 0$ ($x = 0$ не является решением данного ДУ):

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{x\cos^2 x}.$$

Полученное уравнение имеет вид (31), следовательно, это уравнение Бернулли. Сделаем замену $y = UV,\ y' = U'V + UV'$. Получим:

$$U'V + UV' + \frac{2UV}{x} = \frac{2\sqrt{UV}}{x\cos^2 x},$$

$$U'V + U\left(V' + \frac{2V}{x}\right) = \frac{2\sqrt{UV}}{x\cos^2 x}.$$

Приравняем коэффициент при U нулю и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} V' + \dfrac{2V}{x} = 0, \\ U'V = \dfrac{2\sqrt{UV}}{x\cos^2 x}. \end{cases}$$

Решим первое уравнение:

$$\frac{dV}{dx}=-\frac{2V}{x}\bigg|\cdot\frac{dx}{V}\Rightarrow\int\frac{dV}{V}=-2\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|V|=-2\ln|x|\Rightarrow V=x^{-2}\Rightarrow V=\frac{1}{x^2}$$

(использовали формулу 4 таблицы интегралов).

Подставим полученную функцию V во второе уравнение:

$$U'\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{2\sqrt{\frac{U}{x^2}}}{x\cos^2 x}\Rightarrow\frac{U'}{x^2}=\frac{2\sqrt{U}}{x^2\cos^2 x}\bigg|\cdot x^2\Rightarrow U'=\frac{2\sqrt{U}}{\cos^2 x}\Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dx}=\frac{2\sqrt{U}}{\cos^2 x}\bigg|\cdot\frac{dx}{2\sqrt{U}}\left(\sqrt{U}\neq 0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\int\frac{dU}{\sqrt{U}}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}\Rightarrow\sqrt{U}=\operatorname{tg}x+C\Rightarrow U=\left(\operatorname{tg}x+C\right)^2$$

(использовали формулы 3 и 9 таблицы интегралов).

Таким образом, общее решение ДУ:

$$y=\frac{\left(\operatorname{tg}x+C\right)^2}{x^2}.$$

Рассмотрим теперь случаи $U=0$ и $V=0$, опущенные выше при решении уравнений системы (поскольку выполнялись деления на V и $\sqrt{U}$). В каждом из этих случаев имеем $y=0$, что является решением исходного ДУ, и так как это решение не может быть получено из общего решения, то оно является особым решением.

Все рассмотренные типы ДУ 1-го порядка и методы их решения включены в таблицу ДУ 1-го порядка (прил. 3).

3.5. Задача Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка

Задача Коши для ДУ 1-го порядка состоит в следующем: из общего решения $y=\varphi(x,C)$ требуется выделить такое решение $y=\varphi\left(x,C_0\right)$ уравнения (22), которое удовлетворяет начальному условию: $\varphi\left(x_0\right)=y_0$, где $\left(x_0,y_0\right)-$ заданная точка плоскости *XOY*. Условия существования и единственности решения задачи Коши сформулированы в следующей теореме.

Теорема 12. Если функция $y=f\left(x,y\right)$ определена и непрерывна в некоторой области *D* на плоскости *XOY*, а частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ограничена в этой области, то каковы бы ни были числа x_0, y_0, такие, что точка $M_0\left(x_0,y_0\right)\in D$, найдётся единственная функция $y=\varphi\left(x\right)$, являющаяся решением уравнения (22), непрерывно дифференцируемая на некотором промежутке, содержащем точку x_0, и такая, что $\varphi\left(x_0\right)=y_0$.

Пример. Определить тип ДУ и решить задачу Коши

$$y+\sqrt{x^2+y^2}-xy'=0,\quad y(3)=4.$$

Решение. Для определения типа ДУ выразим из уравнения y':

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x},\quad \left(x\neq 0\right).$$

Внесем x под знак корня, возведя его в квадрат:

$$y'=\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}.$$

В подкоренном выражении поделим почленно числитель на знаменатель и получим:

$$y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}. \tag{32}$$

Итак, привели уравнение к виду $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. По таблице ДУ (см. прил. III) определяем, что уравнение однородное и решается заменой $z=\dfrac{y}{x}$, $y=zx$, $y'=z'x+z$. Сделаем замену в уравнении (32): $z'x+z=z+\sqrt{1+z^2}$, учтём, что

$$z'=\frac{dz}{dx}\Rightarrow\frac{dz}{dx}x=\sqrt{1+z^2}\,\Big|\cdot\frac{dx}{x\sqrt{1+z^2}},\ \left(\sqrt{1+z^2}\neq 0\right),\ \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{dx}{x}.$$

Используя формулы 12 и 4 таблицы интегралов, получаем:

$$\ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right|=\ln|x|+\ln|C|.$$

Произвольную постоянную интегрирования выразили в виде $\ln|C|$, что позволяет, используя свойства логарифмов, записать общее решение в виде: $z+\sqrt{1+z^2}=Cx$.

Учитывая выполненную замену $z=\dfrac{y}{x}$, получаем $\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=xC$ – общее решение ДУ в неявном виде, т.е. общий интеграл.

Найдём такое решение, которое удовлетворяет начальному условию $y(3)=4$. Для этого подставим в общий интеграл $x=3$, $y=4$ и найдём значение постоянной C:

$$\frac{4}{3}+\sqrt{1+\frac{16}{9}}=3C\Rightarrow\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=3C\Rightarrow 3=3C\Rightarrow C=1.$$

Итак, нашли значение постоянной C, при котором решение ДУ будет удовлетворять указанному начальному условию.

Решение задачи Коши запишем, подставив в общий интеграл найденное значение постоянной C:

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=x.$$

3.6. Ломанные Эйлера и понятие о приближённом методе решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим ДУ $y' = f(x,y)$, и пусть D – область определения функции $f(x,y)$, в которой выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. К одному из способов приближённого решения ДУ приводит геометрическая интерпретация уравнения.

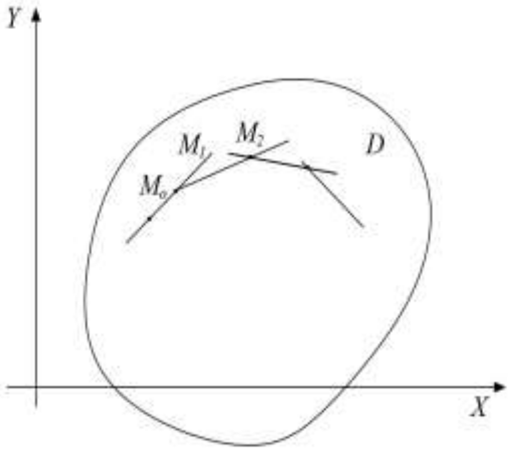

Рис.12

А именно, построив поле направлений, мы всегда можем приближённо построить интегральную кривую. Но можно поступить иначе. Пусть точка $M_0(x_0, y_0) \in D$. Проведём через эту точку прямую с угловым коэффициентом, равным $f(x_0, y_0)$, и выберем на этой прямой произвольно точку $M_1(x_1, y_1) \in D$. Через эту точку M_1 проведём прямую с угловым коэффициентом, равным $f(x_1, y_1)$, и выберем на этой прямой произвольно точку $M_2(x_2, y_2) \in D$ и так дальше. Аналогичное построение проведём в другую сторону от точки M_0. В результате получим ломанную линию $M_0M_1M_2$... (рис. 12), каждое звено $M_{k-1}M_k$ которой совпадает с касательной к интегральной кривой в точке

M_{k-1}, поэтому эта ломанная (она называется *ломанной Эйлера*) даёт приближённое представление об интегральной кривой. Это представление тем точнее, чем короче звенья ломанной. Можно показать, что в пределе, при неограниченном увеличении звеньев ломанной и уменьшении длин каждого звена, ломанная Эйлера совпадёт с интегральной кривой.

3.7. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Согласно определению ДУ n-го порядка имеют вид (21). Будем рассматривать уравнения, разрешённые относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right). \tag{33}$$

Одним из способов интегрирования таких уравнений является понижение порядка. Рассмотрим несколько частных случаев.

I. ДУ вида $y^{(n)} = f(x)$, т.е. правая часть является функцией одной переменной x. Такие ДУ решаются последовательным интегрированием n раз. Следовательно, полученное решение будет содержать n произвольных постоянных C_1, C_2,…,C_n. Такое решение будем называть общим. Фиксируя произвольные постоянные, будем получать решения, называемые частными.

Пример. Найти общее решение ДУ $y^{IV} = \cos^2 x$.

Решение. Согласно определению производная четвёртого порядка является производной от производной третьего порядка, следовательно, уравнение можно переписать в виде $\frac{dy'''}{dx} = \cos^2 x$. Умножим обе части уравнения на dx и получим $dy''' = \cos^2 x dx$. Проинтегрируем полученное равенство, при этом используем для $\cos^2 x$ формулу понижения степени, и получим:

$$y''' = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx, \quad y''' = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1.$$

Аналогично получим интегрированием y'', y' и y:

$$y'' = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\cos 2x + C_1 x + C_2,$$

$$y' = \frac{x^3}{12} - \frac{1}{16}\sin 2x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$y = \frac{x^4}{48} + \frac{1}{32}\cos 2x + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

II. ДУ вида $F\left(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$ где $k \geq 1.$ Это уравнение допускает понижение порядка на k единиц с помощью постановки $y^{(k)} = z,$ где $z = z(x),$ тогда $y^{(k+1)} = z', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)},$ и уравнение примет вид $F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$ Если его удастся проинтегрировать, то найдём $z = \Phi\left(x, C_1, \ldots, C_{n-k}\right)$ или $y^{(k)} = \Phi\left(x, C_1, \ldots, C_{n-k}\right),$ а это – уравнение типа I.

Пример. Найти общее решение ДУ $y''' = 2\left(y'' - 1\right)\operatorname{ctg}x.$

Решение. Это уравнение не содержит y и $y',$ поэтому допускает понижение порядка на две единицы путём постановки $y'' = z,$ $y''' = z'.$ В результате получим ДУ первого порядка $z' = 2(z-1)\operatorname{ctg}x.$ Это ДУ с разделяющимися переменными. Подставляя в уравнение $z' = \frac{dz}{dx}$ и разделяя переменные, получаем $\frac{dz}{z-1} = 2\operatorname{ctg}x dx.$

После интегрирования имеем:

$$\ln|z-1| = 2\ln|\sin x| + \ln C \Rightarrow z - 1 = C_1\sin^2 x \text{ и } z = C_1\sin^2 x + 1,$$

где $C_1 = \pm C.$

Учитывая, что $z = y''$, получим $y'' = C_1 \sin^2 x + 1$. Это ДУ типа I, решаем его последовательным интегрированием:

$$y' = \int \left(C_1 \sin^2 x + 1 \right) dx = \int \left(C_1 \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) + 1 \right) dx;$$

$$y' = C_1 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) + x + C_2;$$

$$y = C_1 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{8} \cos 2x \right) + \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

III. ДУ вида $F\left(y, y', \ldots, y^{(n)} \right) = 0$. Это уравнение допускает понижение порядка на одну единицу, если сделать замену переменной: y – новая независимая переменная, а $y' = z$, где $z = z(y)$ – новая искомая функция. Найдём y'':

$y'' = \left(y'_x \right)'_x = z'_x = z'_y \cdot y'_x = z' \cdot z$. Очевидно, что $y^{(n)}$ будет выражаться через $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$, и уравнение примет вид $F\left(y, z, z', \ldots, z^{(n-1)} \right) = 0$. Если удастся это уравнение проинтегрировать, то получим $z = \Phi\left(y, C_1, \ldots, C_{n-1} \right)$ или $y' = \Phi\left(y, C_1, \ldots, C_{n-1} \right)$, а это ДУ первого порядка с разделяющимися переменными.

Пример. Найти общее решение ДУ $yy'' + 1 = y'^2$.

Решение. Применяя замену $y' = z$, $y'' = z'z$, получаем $yz'z + 1 = z^2$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Подставляя $z' = \dfrac{dz}{dy}$ и разделяя переменные, получаем: $\dfrac{zdz}{z^2 - 1} = \dfrac{dy}{y}$ $(z \neq \pm 1,\ y \neq 0)$. После интегрирования получим:

$$\frac{1}{2}\ln\left|z^2-1\right|=\ln\left|y\right|+\ln C_1 \;\Rightarrow\; z^2-1=\pm C_1^2y^2$$ и

$z=\pm\sqrt{1\pm C_1^2y^2}$ или $y'=\pm\sqrt{1\pm C_1^2y^2}$. Заменяя $y'=\dfrac{dy}{dx}$ и разделяя переменные, получаем: $\dfrac{dy}{\sqrt{1\pm C_1^2y^2}}=\pm dx.$ После интегрирования находим общий интеграл ДУ:

$$\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1y+\sqrt{\left(C_1y\right)^2+1}\right|=\pm x+C_2$$

или $$\frac{1}{C_1}\arcsin C_1y=\pm x+C_2.$$

Добавим также, что уравнение имеет особое решение $y=\pm x$, которое не получается из общего интеграла уравнения и соответствует случаю $z=\pm 1$.

3.8. Задача Коши для дифференциальных уравнений высших порядков

Для дифференциального уравнения порядка *n* задача Коши ставится следующим образом: найти такое решение $y=y\left(x\right)$ уравнения (33), которое удовлетворяло бы условиям: $y\left(x_0\right)=y_0,\;\; y'\left(x_0\right)=y_0',\;\ldots,\qquad y^{(n-1)}\left(x_0\right)=y_0^{(n-1)}$, где $x_0,\, y_0,\, y_0',\,\ldots,\, y_0^{(n-1)}$ – некоторые заданные значения.

Теорема 13. Пусть в уравнении (33) функция $f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)$ непрерывна в некоторой области *D* $(n+1)-$ мерного пространства, а все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial y'},\ldots,\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ ограничены в этой области. Тогда существует единственное решение $y=y\left(x\right)$ уравнения (33), определённое и непрерывное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее условиям: $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, где $M_0\left(x_0,y_0,\ldots,y_0^{(n-1)}\right)$ – любая точка, принадлежащая области *D*.

Пример. Решить задачу Коши:

$$y''=\cos^2 2x,\quad y(0)=\frac{1}{16},\quad y'(0)=1.$$

Решение. Найдём сначала y':

$$y'=\int\cos^2 2x\,dx=\left|\begin{matrix}\text{используем}\\ \text{формулу:}\\ \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int(1+\cos 4x)dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 4x\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{для второго}\\ \text{интеграла замена}\\ u=4x,\ \ du=4dx\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int\cos u\,du=\left|\begin{matrix}\text{используем формулы 1 и 7}\\ \text{таблицы интегралов}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+C_1.$$

Итак, получили

$$y'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+C_1. \tag{34}$$

Найдем далее *y* интегрированием уравнения (34):

$$y=\int\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+C_1\right)dx=\frac{1}{2}\int x\,dx+\frac{1}{8}\int\sin 4x\,dx+C_1\int dx=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{32}\cos 4x+C_1x+C_2.$$

Получим общее решение:

$$y=\frac{x}{4}-\frac{1}{32}\cos 4x+C_1x+C_2. \tag{35}$$

Найдём константы C_1 и C_2, подставив начальные данные $x=0,\ y=\frac{1}{16},\ y'=1$ в формулы (34) и (35):

$$\begin{cases} 1=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{8}\sin 4\cdot 0+C_1, \\ \frac{1}{16}=\frac{0^2}{4}-\frac{1}{32}\cos 4\cdot 0+C_1\cdot 0+C_2. \end{cases} \quad \begin{cases} 1=C_1, \\ \frac{1}{16}=-\frac{1}{32}+C_2. \end{cases} \quad \begin{cases} C_1=1, \\ C_2=\frac{3}{32}. \end{cases}$$

Итак, решение задачи Коши:

$$y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{32}\cos 4x+x+\frac{3}{32}.$$

3.9. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Определение. Линейным дифференциальным уравнением порядка *n* называется уравнение вида:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=q(x), \qquad (36)$$

где функции $p_i(x),\ i=1,\ldots,n,\ q(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$.

Нетрудно показать, что если $x_0\in(a,b)$, а $y_0,\ y'_0,\ldots,y_0^{(n-1)}$ – любые значения, то выполняются все условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для ДУ порядка *n*.

Рассмотрим ДУ

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0, \qquad (37)$$

называемое линейным однородным ДУ, соответствующим неоднородному уравнению (36).

Введём в рассмотрение линейный дифференциальный оператор (ДО):

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y. \qquad (38)$$

ДО – это последовательность действий, задаваемая некоторым дифференциальным выражением, в результате которых каждой функции $y(x)$ ставится в соответствие функция $L[y]$.

ДО (27) обладает следующими свойствами:

$L[Cy]=CL[y]$, где C – постоянная.

$L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$.

С помощью ДО (38) однородное уравнение (37) можно записать в виде:

$$L[y]=0. \qquad (39)$$

Заметим, что тождественно равная нулю на всём интервале (a, b) функция $y(x)=0$ является решением однородного уравнения (39).

Из свойств ДО возникает важное свойство решений уравнений (39):

если $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – решения уравнения (39), то их линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ с произвольными коэффициентами C_i также является решением этого уравнения.

Рассмотрим систему функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, определённых и непрерывных на отрезке $[a,b]$.

Определение. Система функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, называется *линейно зависимой* на отрезке $[a,b]$, если найдутся такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, одновременно не обращающиеся в нуль, что для всех $x\in[a,b]$ имеет место тождество $\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\dots+\alpha_n y_n(x)\equiv 0$. Если же это тождество имеет место лишь тогда, когда все $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$, то система функций называется *линейно независимой* на отрезке $[a,b]$.

Отметим, что на основании приведённого определения линейная зависимость системы из двух функций $y_1(x), y_2(x)$ равносильна пропорциональности этих функций, т.е. условию $y_1(x)=ky_2(x)$, где $k=\text{const}$.

Предположим, что функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ дифференцируемы (n–1) раз на отрезке $[a,b]$ и составим определитель:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \qquad (40)$$

называемый определителем Вронского.

Приведём две теоремы об определителе Вронского.

Теорема 1. Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимая на отрезке $[a,b]$ система функций, то определитель Вронского на этом отрезке тождественно равен нулю.

Следствие. Если определитель Вронского $W(x)$ для системы функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ не принимает значения 0 хотя бы в одной точке отрезка $[a,b]$, то эта система функций линейно независимая на $[a,b]$.

Теорема 2. Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ совокупность n решений ДУ (37) с непрерывными на отрезке $[a,b]$ коэффициентами $p_i(x)$ и эта система функций линейно независима, то определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $[a,b]$.

Приведём пример использования определителя Вронского для выяснения вопроса о линейной зависимости или независимости функции на промежутке.

Пример. Доказать, что система функций $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$, линейно независима на любом промежутке.

Решение. Найдём определитель Вронского для данной системы функций. Согласно формуле (40) имеем:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}=\lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}-\lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}=(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}.$$

Очевидно, что полученный определитель при условии $\lambda_1 \neq \lambda_2$ отличен от нуля при любых значениях *x*, следовательно, система функций $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ линейно независима на любом промежутке.

Замечание. Аналогично можно показать, что линейно независимой на любом промежутке является и система *n* функций $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}$, где все $\lambda_i \ \ (i = 1, \ldots, n)$ различны.

Пример. Доказать, что система функций $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,$ где $\beta \neq 0$, линейно независима на любом промежутке.

Решение. Найдём определитель Вронского для данной системы функций. Согласно формуле (40) имеем:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x) \end{vmatrix}=e^{2\alpha x}(\alpha\sin\beta x\cos\beta x+\beta\cos^2\beta x-$$

$$-\alpha\sin\beta x\cos\beta x+\beta\sin^2\beta x)=\beta e^{2\alpha x}.$$

Очевидно, что полученный определитель при условии $\beta \neq 0$ отличен от нуля при любых значениях *x*, следовательно, система функций $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ линейно независима на любом промежутке.

Определение. Совокупность *n* линейно независимых решений ДУ (26) называется *фундаментальной системой решений* уравнения (26).

Пример. Доказать, что функции $y_1(x) = \cos\beta x,\ y_2(x) = \sin\beta x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + \beta^2 y = 0, \quad \beta = \text{const}, \ \beta \neq 0.$

Решение. Вычисляя определитель Вронского для функций $y_1(x) = \cos\beta x,\ y_2(x) = \sin\beta x,$ убеждаемся, что он равен β при любом *x*, и значит, согласно следствию теоремы 1, эти две функции линейно независимы всюду на множестве всех действительных чисел **R**. (Этот вывод можно сделать также на основании того, что указанные функции непропорциональны друг другу).

Кроме того, как нетрудно проверить непосредственно, повторным дифференцированием, каждая из этих функций является решением уравнения $y''+\beta^2 y=0$ на **R.** Это и означает, что указанные функции образуют фундаментальную систему решений данного уравнения.

Теорема 14. Для любого однородного ДУ (37) с непрерывными на $[a,b]$ коэффициентами существует фундаментальная система решений.

Доказательство. Пусть $x_0\in[a,b]$ — произвольно фиксированная точка. Построим *n* решений ДУ (37), удовлетворяющих следующим условиям:

$$y_1(x):\quad y_1(x_0)=1,\ y_1'(x_0)=0,\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}(x_0)=0;$$

$$y_2(x):\quad y_2(x_0)=0,\ y_2'(x_0)=1,\ \ldots,\ y_2^{(n-1)}(x_0)=0;$$

. . . .

$$y_n(x):\quad y_n(x_0)=0,\ y_n'(x_0)=0,\ \ldots,\ y_n^{(n-1)}(x_0)=1.$$

Это возможно в силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши для ДУ порядка *n*.

Очевидно, что в точке x_0 определитель Вронского согласно (40):

$$W(x_0)=\begin{vmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Поэтому, согласно следствию из теоремы 1, функции $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ линейно независимы на [*a*,*b*] и, значит, образуют фундаментальную систему решений ДУ (26).

Теорема 15. Если $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ фундаментальная система однородного ДУ (37), то общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y_{oo} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ \dots \ + C_n y_n(x), \qquad (41)$$

где C_1, C_2, … , C_n – произвольные постоянные.

3.10. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера

Рассмотрим однородные ДУ (37), в которых коэффициентами $p_i(x)$ являются постоянные числа p_i. Такие уравнения имеют вид:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0. \qquad (42)$$

Будем искать решение уравнения (42) в виде $y = e^{\lambda x}$ с некоторым постоянным λ. Тогда $y' = \lambda e^{\lambda x}, \dots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$. Подставляя эти значения в уравнение (42), получаем:

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n\right) = 0.$$

Поскольку $e^{\lambda x} \neq 0$ при любом *x*, получаем:

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0. \qquad (43)$$

Левая часть равенства (43) называется характеристическим многочленом для уравнения (42) и обозначается:

$$F(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n,$$

а его корни называют характеристическими числами. Итак, для того чтобы функция $y = e^{\lambda x}$ была решением уравнения (42), необходимо и достаточно чтобы число λ было корнем многочлена $F(\lambda)$, т.е. являлось характеристическим числом.

Задача свелась к нахождению корней алгебраического уравнения (43). Это уравнение степени *n*, значит, оно, согласно основной теореме алгебры, имеет ровно *n* (с учётом кратности) действительных или комплексных корней.

Рассмотрим следующие три различных случая, которые могут возникнуть при решении характеристического уравнения.

1. Корни уравнения λ_1, λ_2, … , λ_n действительные и различные, им будут соответствовать решения ДУ (42)

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, ... , $y_n = e^{\lambda_n x}$. Эта система функций линейно независима на всей числовой оси и, следовательно, является фундаментальной системой решений. Тогда, согласно теореме о структуре общего решения линейного однородного ДУ n-го порядка, общее решение ДУ (42) запишется в виде:

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2. Среди корней уравнения (43) есть комплексно сопряжённые корни вида $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, которым будут соответствовать решения $y_{1,2} = e^{(a \pm ib)x}$. Используя формулу Эйлера $e^{ib} = \cos b + i \sin b$, из них можно построить два действительных линейно независимых решения $y_1 = e^{ax} \cos bx$ и $y_2 = e^{ax} \sin bx$, которым в общем решении уравнения (42) будут соответствовать слагаемые:

$$C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx.$$

3. Среди корней уравнения (32) имеется корень λ кратности k. Можно показать, что этому корню в общем решении уравнения (31) будут соответствовать слагаемые:

$$C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + \ldots + C_k x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

Пример. Найти общее решение ДУ:

а) $y^{IV} - y = 0$; б) $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.

Решение.

а) $y^{IV} - y = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^4 - 1 = 0$. Оно имеет два различных действительных корня $\lambda_{1,2} = \pm 1$, что соответствует случаю 1 и пару комплексно сопряжённых корней $\lambda_{3,4} = \pm i$, что соответствует случаю 2. Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

б) $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^5-6\lambda^4+9\lambda^3=0$. Оно имеет корни $\lambda_{1,2,3}=0$ (корень кратности k=3) и $\lambda_{4,5}=3$ (корень кратности k=2), что соответствует рассмотренному выше случаю 3. Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y_{oo}=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{3x}+C_5xe^{3x}.$$

Всё изложенное выше применим к случаю ДУ 2-го порядка, как часто встречающемуся и притом весьма важному.

Линейные однородные ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеют вид:

$$y''+p_1y'+p_2y=0, \tag{44}$$

где p_1 и p_2 — действительные числа.

Согласно теореме о структуре общего решения линейного однородного ДУ достаточно найти два линейно независимых частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (44), чтобы записать общее решение:

$$y_{oo}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x).$$

Будем искать решение уравнения (44) по методу Эйлера. Запишем характеристическое уравнение для ДУ (44):

$$\lambda^2+p_1\lambda+p_2=0. \tag{45}$$

Корни λ_1 и λ_2 этого квадратного уравнения (с действительными коэффициентам p_1 и p_2) могут быть либо действительными, различными или совпадающими, либо комплексно сопряженными. Поэтому согласно сказанному выше, возможны лишь следующие три случая:

а) Корни λ_1 и λ_2 действительные и различные. Тогда общее решение уравнения (44) имеет вид:

$$y_{00}=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}. \tag{46}$$

б) Корни λ_1 и λ_2 действительные и равные, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$. Общее решение уравнения (44) имеет вид:

$$y_{00}=e^{\lambda x}(C_1+C_2x). \tag{47}$$

в) Корни λ_1 и λ_2 комплексно сопряженные, $\lambda_{1,2} = a \pm ib$. Тогда общее решение уравнения (44) имеет вид:

$$y_{00} = e^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right). \qquad (48)$$

Пример. Найти общие решения линейных однородных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

а) $4y'' + 9y' + 2y = 0$; б) $y'' - 10y' + 25y = 0$;

в) $y'' - 2y' + 17y = 0$; г) $y'' + 1{,}69y = 0$;

Решение.

а) $4y'' + 9y' + 2y = 0$. Составим характеристическое уравнение: $4\lambda^2 + 9\lambda + 2 = 0$.

Решим его, используя известную формулу корней квадратного уравнения:

$$a\lambda^2 + b\lambda + C = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (49)$$

Получим корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4\cdot 4\cdot 2}}{2\cdot 4} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{-9 \pm 7}{8};$$

$$\lambda_1 = \frac{-9-7}{8} = -2, \qquad \lambda_2 = \frac{-9+7}{8} = -\frac{1}{4}.$$

Поскольку $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение запишем в виде (46): $y_{00} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-\frac{x}{4}}$.

б) $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$, его корни: $\lambda_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot 1\cdot 25}}{2} = \dfrac{10 \pm 0}{2} = 5$.

Поскольку $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in R$, то общее решение запишем в виде (47): $y_{00} = e^{5x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

в) $y''-2y'+17y=0.$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2-2\lambda+17=0,$ его корни:

$$\lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot17}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{-64}}{2}=\frac{2\pm8i}{2}=1\pm4i.$$

Получили пару комплексно сопряженных корней вида $\lambda_{1,2}=a\pm ib,$ где a = 1, b = 4.

Общее решение запишем в виде (48):

$$y_{00}=e^x\left(C_1\cos4x+C_2\sin4x\right).$$

г) $y''+1{,}69y=0.$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2+1{,}69=0.$

Решим его:

$$\lambda^2=-1{,}69;\quad \lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-1{,}69};\quad \lambda_{1,2}=\pm1{,}3i.$$

Получили пару комплексно сопряженных корней вида $\lambda_{1,2}=a\pm ib,$ где a = 0, b = 1,3. Общее решение запишем в виде (48), при этом учтем, что $e^0=1$:

$$y_{00}=C_1\cos1{,}3x+C_2\sin1{,}3x.$$

3.11. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков

Вернёмся к рассмотрению линейных неоднородный ДУ (36). Используя ДО (27) , это уравнение можно переписать в виде

$$L[y(x)]=f(x). \tag{50}$$

Отметим некоторые свойства решений уравнения (36), которые вытекают из свойств ДО:

1. Если $y_1(x)-$решение уравнения (36), а $y_2(x)-$ решение соответствующего однородного уравнения $L[y(x)]=0$, то $y(x)=y_1(x)+y_2(x)-$ решение неоднородного уравнения

(36).

2. Если $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ и $y_1(x)-$решение уравнения $L[y(x)]=f_1(x)$, а $y_2(x)-$решение уравнения $L[y(x)]=f_2(x)$, то $y(x)=y_1(x)+y_2(x)-$ решение уравнения $L[y(x)]=f(x)$.

Это свойство называют *принципом суперпозиции* решений линейных неоднородных ДУ. Отметим, что этот принцип справедлив для любого конечного числа слагаемых в составе правой части уравнения (50).

Теорема 16. Если $y_{оо}(x)-$ общее решение однородного ДУ (37), а $y_{чн}(x)-$ какое-либо, произвольное, частное решение неоднородного ДУ (36), то общее решение неоднородного ДУ (36) запишется в виде:

$$y_{он}(x)=y_{оо}(x)+y_{чн}(x). \tag{51}$$

Следствие. Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ фундаментальная система решений ДУ (37), то общее решение ДУ (36) имеет вид:

$$y_{он}(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i y_i(x)+y_{чн}(x).$$

3.12. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим неоднородные ДУ (36), в которых коэффициентами $p_i(x)$ являются постоянные числа p_i. Такие уравнения имеют вид:

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+\ldots+p_n y=f(x). \tag{52}$$

Из теоремы 16 следует, что для решения этого уравнения достаточно найти общее решение соответствующего однородного уравнения и какое-нибудь частное решение данного неоднородного уравнения. В некоторых случаях частное решение отыскивается просто.

Рассмотрим, в каком виде можно искать частное решение $y_{\text{чн}}(x)$ ДУ (36), когда правая часть уравнения $f(x)$ имеет специальный вид.

Пусть правая часть уравнения имеет вид:

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right), \tag{53}$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)-$ многочлены от x степеней n и m соответственно с известными коэффициентами.

Тогда частное решение $y_{\text{чн}}$ следует искать в виде:

$$y_{\text{чн}}=x^k e^{\alpha x}\left(R_l(x)\cos\beta x+S_l(x)\sin\beta x\right), \tag{54}$$

где k – кратность корня $\alpha\pm i\beta$ характеристического уравнения. Если же числа $\alpha\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, то будем считать k=0.

При этом $R_l(x)$, $S_l(x)-$ многочлены от x степени $l=\max\{n,m\}$ с некоторыми, пока неизвестными, коэффициентами. Неизвестные коэффициенты многочленов $R_l(x)$ и $S_l(x)$ находят методом неопределенных коэффициентов. Поясним суть этого метода следующим примером.

Пример. Найти общее решение линейных неоднородных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

а) $y''-4y'=\sin 4x$;

б) $y''-y'-2y=e^{-x}(x+2)$.

Решение.

а) $y''-4y'=\sin 4x$.

Найдём общее решение соответствующего однородного ДУ:

$$y''-4y'=0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-4\lambda=0\Rightarrow\ \lambda(\lambda-4)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\ \ \lambda_2=4.$$

Поскольку $\lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbf{R}$ и $\lambda_1\neq\lambda_2$, то общее решение запишем в виде (46), при этом учтём, что $e^0 = 1$:

$$y_{00} = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения $f(x) = \sin 4x$. Сравнивая ее с видом (53) заключаем, что $\alpha = 0,\ \beta = 4,\ n = 0,\ m = 0.$ Определим параметры частного решения (54). Учитывая, что $\alpha = 0$, а $\beta = 4$, заключаем, что $\alpha \pm i\beta = \pm 4i$ не являются корнями характеристического уравнения, поскольку корни $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 4.$ Следовательно, считаем *k* = 0. Найдём $l = \max\{0, 0\} = 0.$ Значит, порядок многочленов *R* и *S* равен 0, т. е. $R_0 = A$, а $S_0 = B$, где *A* и *B* – некоторые неизвестные пока коэффициенты. Подставляя полученные параметры в выражение (54), получаем:

$$y_{\text{чн}} = x^0 e^0 \left(R_0 \cos 4x + S_0 \sin 4x\right) = A\cos 4x + B\sin 4x.$$

Коэффициенты *A* и *B* определим из условия, что функция $y_{\text{чн}}$ должна быть решением уравнения и поэтому должна ему удовлетворять. Найдем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$:

$$y'_{\text{чн}} = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x,$$
$$y''_{\text{чн}} = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x$$

и подставим в исходное уравнение:

$$-16A\cos 4x - 16B\sin 4x + 16A\sin 4x - 16B\cos 4x = \sin 4x.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin 4x$ и $\cos 4x$ в правой и левой частях полученного тождества:

$$\begin{array}{l|l} \sin 4x & -16B + 16A = 1, \quad \Rightarrow 16A + 16A = 1, \Rightarrow A = \dfrac{1}{32}, \\ \cos 4x & -16A - 16B = 0. \quad \Rightarrow B = -A \ \Rightarrow B = -\dfrac{1}{32}. \end{array}$$

Итак, $y_{\text{чн}} = \dfrac{1}{32}\cos 4x - \dfrac{1}{32}\sin 4x.$

Следовательно, согласно (51) общее решение неоднородного ДУ имеет вид:

$$y_{\text{он}} = C_1 + C_2 e^{4x} + \frac{1}{32}\cos 4x - \frac{1}{32}\sin 4x.$$

б) $y'' - y' - 2y = e^{-x}(x+2)$.

Найдём общее решение соответствующего однородного ДУ:

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Найдём его корни по формуле (49):

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm 3}{2};$$

$$\lambda_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \quad \lambda_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Поскольку $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbf{R}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение запишем в виде (46): $y_{00} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

Найдём далее частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения $f(x) = e^{-x}(x+2)$. Сравнивая её с видом (53), имеем $\alpha = -1,\ \beta = 0,\ n = 1,\ m = 0$. Определим параметры частного решения (54). Учитывая, что $\alpha = -1$, а $\beta = 0$, получим, что $\alpha \pm i\beta = -1$ — однократный корень характеристического уравнения, поскольку его корни $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$. Следовательно, считаем *k* = 1. Найдем $l = \max\{1,\ 0\} = 1$. Значит, порядок многочленов *R* и *S* равен 1, т. е. $R_1 = Ax + B$, а $S_1 = Cx + D$, где *A*, *B*, *C*, *D* – неизвестные коэффициенты. Подставляя полученные параметры в выражение частного решения вида (54), имеем:

$$y_{\text{чн}} = x^1 e^{-x}\left((Ax+B)\cos 0 + (Cx+D)\sin 0\right) = xe^{-x}(Ax+B) = e^{-x}\left(Ax^2 + Bx\right).$$

Для определения коэффициентов *A* и *B* найдём $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$:

$$y'_{\text{чн}} = -e^{-x}\left(Ax^2 + Bx\right) + e^{-x}\left(2Ax + B\right),$$

$$y''_{\text{чн}} = e^{-x}\left(Ax^2 + Bx\right) - e^{-x}\left(2Ax + B\right) - e^{-x}\left(2Ax + B\right) + e^{-x}2A =$$

$$= e^{-x}\left(Ax^2 + Bx\right) - 2e^{-x}\left(2Ax + B\right) + e^{-x}2A$$

и подставим в исходное уравнение:

$$e^{-x}\left(Ax^2 + Bx\right) - 2e^{-x}\left(2Ax + B\right) + 2Ae^{-x} + e^{-x}\left(Ax^2 + Bx\right) -$$

$$-e^{-x}\left(2Ax + B\right) - 2e^{-x}\left(Ax^2 + Bx\right) = e^{-x}\left(x + 2\right).$$

Поделив обе части уравнения на $e^{-x} \neq 0$ и приводя подобные члены, получим тождество: $-6Ax - 3B + 2A \equiv x + 2.$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях *x* в правой и левой частях полученного тождества:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & -6A = 1, \quad \Rightarrow A = -\dfrac{1}{6}, \\ x^0 & -3B + 2A = 2. \quad \Rightarrow -3B + 2\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right) = 2 \Rightarrow -3B = \dfrac{7}{3} \Rightarrow B = -\dfrac{7}{9}. \end{array}$$

Итак, $y_{\text{чн}} = e^{-x}\left(-\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{7}{9}x\right)$, и окончательно получаем общее решение неоднородного ДУ:

$$y_{\text{он}} = C_1e^{-x} + C_1e^{2x} + e^{-x}\left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{9}x\right).$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица основных интегралов

№/п	c = const, x – независимая переменная, $u=u(x)$	№/п	c = const, x – независимая переменная, $u=u(x)$
1.	$\int 0du=C;\quad C=\text{const};$	10.	$\int\frac{du}{\sin^2 u}=-\text{ctg}u+C;$
2.	$\int du=u+C;$	11.	$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C;$
3.	$\int u^\alpha du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad \alpha\neq-1;$	12	$\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left\|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right\|+C;$
4.	$\int\frac{du}{u}=\ln\|u\|+C;$	13.	$\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\text{arctg}\frac{u}{a}+C;$
5.	$\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C;$	14.	$\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\|+C;$
6.	$\int e^u du=e^u+C;$	15.	$\int\frac{du}{\sin u}=\ln\left\|\text{tg}\frac{u}{2}\right\|+C;$
7.	$\int\cos u\,du=\sin u+C;$	16.	$\int\frac{du}{\cos u}=\ln\left\|\text{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C;$
8.	$\int\sin u\,du=-\cos u+C;$	17.	$\int\text{tg}u\,du=-\ln\|\cos u\|+C;$
9.	$\int\frac{du}{\cos^2 u}=\text{tg}u+C;$	18.	$\int\text{ctg}u\,du=\ln\|\sin u\|+C.$

Приложение 2

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ п/п	$c = \mathrm{const}$, x — независимая переменная, u = u(x), v = v(x) — дифференцируемые функции	№ п/п	$c = \mathrm{const}$, x — независимая переменная, u = u(x), v = v(x) — дифференцируемые функции
1.	$c' = 0$	9.	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2.	$x' = 1$	10.	$(\mathrm{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
3.	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	11.	$(\mathrm{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4.	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	12.	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u\rvert < 1$
5.	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	13.	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u\rvert < 1$
6.	$(\log_a \lvert u\rvert)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$	14.	$(\mathrm{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
7.	$(\ln \lvert u\rvert)' = \dfrac{u'}{u}$	15.	$(\mathrm{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
8.	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	16.	$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'$

Приложение 3

Типы дифференциальных уравнений 1-го порядка

<table>
<tr><td>Тип уравнения</td><td>Характерные признаки</td><td>Методы интегрирования</td></tr>
<tr><td>Уравнения с разделяющимися переменными
$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$</td><td>Правая часть уравнения представляет собой произведение двух функций, одна зависит от x, другая — от y</td><td>Разделить переменные, т. е. уравнение привести к виду
$\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$ и
проинтегрировать</td></tr>
<tr><td>Однородное уравнение
$y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$</td><td>Правая часть уравнения — функция только от отношения переменных y/x</td><td>Уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки:
$y = zx, \quad y' = z'x + z$</td></tr>
<tr><td>Линейное уравнение
$y' + p(x)y = q(x)$</td><td>y и y' входят в уравнение только в первой степени</td><td rowspan="2">Решается методом Бернулли с помощью подстановки:
$y = UV$,
$y' = U'V + UV'$,
сведением к системе двух уравнений с разделяющимися переменными</td></tr>
<tr><td>Уравнение Бернулли
$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$</td><td>$y'$ входит в уравнение линейно, а y в одном из слагаемых линейно, а в другом в степени α, где $\alpha \neq 1$ и $\alpha \neq 0$</td></tr>
</table>

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления Т.1/ Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2005.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления Т.2/ Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2005.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2004.
4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2004.
5. Соболь Б.В. Практикум по высшей математике / Б.В. Соболь, Н.Т. Мишняков, В.М. Поркшеян. – Ростов н/Д: Феникс, 2008.