ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

«Решение задач по математике: варианты и методика их выполнения (1 семестр)»

по дисциплине

«Математика»

Авторы
Нурутдинова И. Н.,
Пожарский Д. А.

Ростов-на-Дону, 2017

Аннотация

Приведены задания по основным темам, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины «Математика» в 1-м семестре. Даны образцы решения всех типовых заданий, снабжённые необходимыми теоретическими сведениями.

Предназначено для преподавателей и студентов, изучающих базовый курс математики. Рекомендовано студентам всех форм обучения технических и экономических направлений и специальностей.

Авторы

к.ф.-м.н., доцент кафедры
«Прикладная математика» Нурутдинова И. Н.,
д.ф.-м.н., профессор кафедры
«Прикладная математика» Пожарский Д. А.

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит индивидуальные задания по всем основным разделам дисциплины «Математика», изучаемым в 1-м семестре. Задания по каждой теме имеют 20 вариантов, что позволяет использовать их для составления контрольных работ для студентов заочной формы обучения. Представленные основные теоретические положения и понятия соответствуют базовому уровню изучения дисциплины. Выбор тематики осуществлялся на основе анализа ФГОС3+ по математике в базовой подготовке бакалавров технических и экономических направлений, а также открытого сегмента тестовых заданий, предназначенных для тестирования студентов вузов по дисциплине «Математика».

Учебное пособие дополняет курс лекций по дисциплине «Математика» и будет полезно студентам в самостоятельной работе и при подготовке к текущему, рубежному и итоговому контролю знаний по данной дисциплине в различных формах, в том числе в форме интернет-экзамена, а также при изучении различных смежных дисциплин математического и естественнонаучного цикла. Также пособие будет полезным для преподавателей, поскольку позволяет формировать контрольные работы и методические указания для их выполнения для студентов заочной формы обучения в соответствии со стандартом данного направления подготовки.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1. Линейная алгебра

Задание 1.1. Дана матрица $C=\begin{pmatrix} a & 2b \\ -d & 3c \end{pmatrix}$. Найти матрицу $R=C^2+2C^T-3C^{-1}$.

Задание 1.2. Дана система уравнений *A·X=B*, где матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2a & -3b & c \\ 3a & -6b & 5c \\ 5a & -4b & 2c \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 2abc \\ 3abc \end{pmatrix}.$$

Решить систему следующими методами: а) по формулам Крамера; б) матричным мето- дом; в) методом Гаусса; г) методом Жордана–Гаусса.

Значения параметров a, b, c, d к заданиям 1.1 м 1.2 даны в таблице:

Номер варианта	a	b	c	d	Номер варианта	a	b	c	d
1	–1	1	5	–4	**11**	1	2	–2	4
2	2	1	4	–1	**12**	1	3	–2	–2
3	1	–3	1	–4	**13**	3	–3	1	2
4	2	1	6	1	**14**	–2	3	–1	1
5	1	–2	–1	6	**15**	1	1	5	–2
6	3	–2	1	1	**16**	1	–2	3	–1
7	–1	1	3	–3	**17**	3	–1	2	5
8	–2	–1	1	4	**18**	2	2	–1	4
9	–2	–2	3	1	**19**	1	–1	–1	2
10	4	3	2	1	**20**	4	1	–1	2

Задание 1.3. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{x}$ заданы своими координатами в каноническом базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Требуется:

а) показать, что система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образует базис в пространстве R_3;

б) записать матрицу перехода от канонического базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ к базису $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ и разложить вектор $\bar{x}$ по этому базису.

Номер варианта	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{x}$
1	(2, 3, 2)	(–1, 4, –1)	(–1, –2, 4)	(4, 11, 9)
2	(1, 2, 4)	(1, –1, 1)	(2, 2, 4)	(–1, –4, –2)
3	(3, 2, 2)	(2, 3, 1)	(1, 1, 3)	(5, 1, 11)
4	(1, 5, 3)	(2, 1, –1)	(4, 2, 1)	(31, 29, 10)
5	(1, 3, 4)	(2, 2, 3)	(1, 1, –2)	(8, 10, 4)

6	(5, 1, 4)	(–1, 2, 3)	(–1, 3, 2)	(0, 14, 16)
7	(1, 3, 2)	(3, 2, 5)	(–6, 5, –3)	(12, –10, 6)
8	(2, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 1, 1)	(3, 0, –2)
9	(4, 2, 3)	(1, –3, 1)	(–2, 0, –2)	(3, 2, –1)
10	(1, 2, 1)	(0, 1, 1)	(1, 0, 1)	(5, 6, –3)
11	(3, 2, –2)	(3, –3, –1)	(1, 1, –1)	(5, 1, –4)
12	(2, 2, 1)	(1, –3, 1)	(–1, 0, –1)	(3, –1, 5)
13	(2, 1, –1)	(2, –3, 0)	(1, 1, –1)	(6, –6, 3)
14	(1, 0, 0)	(1, 1, 0)	(1, 2, 1)	(7, –1, –3)
15	(4, 1, –2)	(2, –3, 0)	(3, 1, –2)	(5, –6, 3)
16	(3, 3, 1)	(2, –2, 1)	(2, 1, 1)	(1, 0, 5)
17	(1, 1, 1)	(1, –2, 4)	(2, 2, 4)	(–1, 0, 5)
18	(1, 2, 0)	(0, –3, 0)	(2, 1, 1)	(7, –1, –3)
19	(2, 2, 3)	(1, 1, –2)	(1, 3, 4)	(–1, 1, 0)
20	(–1, 4, 3)	(–1, 3, 2)	(5, 1, 4)	(1, –1, 1)

Задание 1.4. Элементы матрицы $C_{4\times5}$ заданы по вариантам:

Номер варианта	$C_{4\times5}$	Номер варианта	$C_{4\times5}$	Номер варианта	$C_{4\times5}$
1	$\begin{matrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0 \end{matrix}$	**8**	$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 2 \\ 9 & -9 & 6 & -16 & 2 \end{matrix}$	**15**	$\begin{matrix} 2 & 3 & 11 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 14 & 9 & 4 \end{matrix}$

2	1	–1	2	4	1	**9**	1	–2	–1	3	5	**16**	3	2	5	4	3
	4	0	4	9	4		2	–4	–2	6	10		2	3	6	8	5
	3	1	2	5	3		2	1	0	1	20		4	–4	–4	–16	–8
	1	3	–2	–3	1		–1	2	1	–3	–5		4	1	4	0	2
3	2	–4	3	1	0	**10**	2	3	4	1	2	**17**	2	7	3	1	6
	1	–2	1	–4	2		1	1	7	1	6		5	12	5	3	10
	0	1	–1	3	1		3	2	1	5	8		6	–1	–2	5	–2
	4	–7	4	–4	5		2	1	–6	4	2		3	5	2	2	4
4	2	–5	3	1	5	**11**	8	–4	3	6	8	**18**	4	5	2	3	1
	3	–7	3	–1	–1		10	–5	5	9	15		2	4	1	2	3
	5	–9	6	2	7		4	–2	1	2	2		2	–2	1	0	–7
	4	–6	3	1	8		2	–1	3	7	11		6	1	3	2	2
5	2	3	5	1	2	**12**	3	3	5	1	2	**19**	1	2	3	–2	1
	3	2	5	1	2		3	5	3	1	–3		3	6	5	–4	3
	3	5	2	1	–3		3	5	1	3	–3		1	2	7	–4	1
	3	5	1	2	–3		0	2	–2	0	–5		2	4	2	–3	3
6	3	–2	–5	1	3	**13**	2	–1	1	2	3	**20**	1	1	0	–3	–1
	2	–3	1	5	–3		6	–3	2	4	5		1	–1	2	–1	0
	1	2	0	–4	–3		6	–3	4	8	13		4	–2	6	3	–4
	1	–1	–4	9	22		4	–2	1	1	2		2	4	–2	4	–7
7	1	2	2	3	5	**14**	1	1	3	–2	3						

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 9 \end{array}\Bigg\| \qquad \begin{array}{ccccc} 2 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 3 & 9 \end{array}\Bigg\|$$

1. Считая матрицу $C_{4\times5}$ матрицей однородной системы $C\cdot X = 0$, найти для этой системы:

а) фундаментальную систему решений;

б) общее решение;

в) какое-нибудь частное решение.

2. Считая матрицу $C_{4\times5}$ расширенной матрицей неоднородной системы $C^{*}\cdot X=C^{**}$, где $C=(C^{*} \mid C^{**})$, решить эту систему, предварительно исследовав её совместность по теореме Кронекера–Капелли.

2. Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Задание 2.1. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Требуется найти:

а) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3;

б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;

в) площадь грани $A_1A_2A_3$;

г) объём пирамиды;

д) канонические уравнения прямой l, проходящей через точки A_1 и A_4;

е) уравнение плоскости П, проходящей через точки A_1, A_2 и A_3;

ж) угол между прямой l и плоскостью П;

з) высоту пирамиды.

Номер варианта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(–1, 2, 1)	(–2, 2, 5)	(–3, 3, 1)	(–1, 4, 3)
2	(–2, 1, –1)	(–3, 1, 3)	(–4, 2, 1)	(–2, 3, 1)
3	(1, 1, 2)	(0, 1, 6)	(–1, 2, 2)	(1, 3, 4)
4	(–1, –2, 1)	(–2, –2, 5)	(–3, –1, 1)	(–1, 0, 3)

5	(2, –1, 1)	(1, –1, 5)	(0, 0, 1)	(2, 1, 3)
6	(–1, 1, –2)	(–2, 1, 2)	(–3, 2, –2)	(–1, 3, 0)
7	(1, 2, 1)	(0, 2, 5)	(–1, 3, 1)	(1, 4, 3)
8	(–2, –1, 1)	(–3, –1, 5)	(–4, 0, 1)	(–2, 1, 3)
9	(1, –1, 2)	(0, –1, 6)	(–1, 0, 2)	(1, 1, 4)
10	(1, –2, 1)	(0, –2, 5)	(–1, –1, 1)	(1, 0, 3)
11	(0, 3, 2)	(–1, 3, 6)	(–2, 4, 2)	(0, 5, 4)
12	(–1, 2, 0)	(–2, 2, 4)	(–3, 3, 0)	(–1, 4, 2)
13	(2, 2, 3)	(1, 2, 7)	(0, 3, 3)	(2, 4, 5)
14	(0, –1, 2)	(–1, –1, 6)	(–2, 0, 2)	(0, 1, 4)
15	(3, 0, 2)	(2, 0, 6)	(1, 1, 2)	(3, 2, 4)
16	(0, 2, –1)	(–1, 2, 3)	(–2, 3, 7)	(0, 4, 1)
17	(2, 3, 2)	(1, 3, 6)	(0, 4, 2)	(2, 5, 4)
18	(–1, 0, 2)	(–2, 0, 6)	(–3, 1, 2)	(–1, 2, 4)
19	(2, 0, 3)	(1, 0, 7)	(0, 1, 3)	(2, 2, 5)
20	(2, –1, 2)	(1, –1, 6)	(0, 0, 2)	(2, 1, 4)

Задание 2.2. Кривая второго порядка задана общим уравнением. Определить тип кривой, найти ее каноническое уравнение и каноническую систему координат. Схематически построить кривую и обе системы координат.

Номер варианта	Уравнение кривой	Номер варианта	Уравнение кривой
1	а) $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$ б) $4x^2-y^2-8x=0$	11	а) $y^2-2x+4y+10=0$ б) $x^2-4y^2+4x-8y-4=0$
2	а) $16x^2-9y^2-96x+18y-9=0$ б) $y^2-6x+2y+13=0$	12	а) $16x^2+9y^2-96x-18y+9=0$ б) $9x^2-y^2-18=0$
3	а) $9x^2+y^2-18x=0$ б) $x^2-4y^2-2x+16y-19=0$	13	а) $9x^2+4y^2-18x-27=0$ б) $y^2-x-4y+1=0$
4	а) $4x^2+y^2-4y=0$ б) $y^2+0,5x-6y+8,5=0$	14	а) $x^2-25y^2+100y-125=0$ б) $y^2-0,5x+6y+10=0$
5	а) $x^2-9y^2-2x+36y+44=0$ б) $x^2-2x+4y+9=0$	15	а) $x^2+9y^2-2x-36y+28=0$ б) $9x^2-y^2+18x+4y-4=0$
6	а) $x^2-4y^2-8y=0$ б) $25x^2+y^2+100x+2y+76=0$	16	а) $y^2-3x+4y+13=0$ б) $4x^2+16y^2-8x-60=0$
7	а) $4x^2-y^2+4y-8=0$ б) $x^2-4x+6y+10=0$	17	а) $y^2-x-4y+2=0$ б) $9x^2+4y^2-18x-27=0$
8	а) $16x^2+4y^2-32x-16y-32=0$ б) $x^2-4y+y+7=0$	18	а) $4x^2-9y^2-8x+36y-68=0$ б) $x^2+16y^2-8x-15=0$
9	а) $x^2-y^2+6x+5=0$ б) $25x^2+4y^2-16y-84=0$	19	а) $y^2-4x-6y+5=0$ б) $4x^2-16y^2-8x-60=0$

10	а) $4x^2 - y^2 - 24x + 2y + 31 = 0$ б) $x^2 - 6x + 2y + 13 = 0$	20	а) $x^2 + 4y^2 - 4x - 16y + 16 = 0$ б) $4x^2 - y^2 - 8x + 4y - 16 = 0$

3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Приложения производной

Задание 3.1. Найти производные 1-го порядка данных функций.

1	а) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x} - 2$	á) $S = (4 - 2\sin t)e^t$	â) $u = \cos^5(4V - 1)$	ã) $z = \frac{\arcsin t/2}{\sqrt{1-t^2}}$
2	а) $y = \frac{4}{\sqrt{x}} + 9x^2 - \frac{7}{x}$	á) $s = \frac{2 - \ln t}{1 + 2\arcsin t}$	â) $u = tg^3(6V + 1)$	ã) $z = e^{-4t^2}(5 + \cos 2t)$
3	а) $y = x^3 - \frac{3}{x^4} + \sqrt[4]{x^9}$	á) $s = (4 - \cos t)\ln t$	â) $u = \operatorname{arctg}\frac{2V}{2}$	ã) $z = \frac{\arccos(2t - 4)}{\sqrt{1 + 3t^2}}$
4	а) $y = 5x^9 + \frac{2}{x^3} + \sqrt[8]{x}$	á) $s = \frac{e^t - 5t}{t^3}$	â) $u = \operatorname{ctg}\frac{4V}{4}$	ã) $z = \operatorname{arctg}\frac{t}{3}\ln(9 + t^2)$
5	а) $y = 2x^3 - \frac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}$	á) $s = t^3(4 + 2\operatorname{arctg} t)$	â) $u = \ln\frac{3V}{2}$	ã) $z = \frac{5 - \sin 3t}{e^{2t}}$
6	а) $y = 5x^2 + \frac{3}{x^4} - \sqrt[6]{x^7}$	á) $s = (3 + \operatorname{tg} t)(1 - 5\operatorname{ctg} t)$	â) $u = \sqrt[3]{1 - 4V^2}$	ã) $z = \frac{\sin(2 - t)}{2 - \ln 3t}$
7	а) $y = x^5 - \frac{2}{x^3} + 2\sqrt[7]{x^5}$	á) $s = (4 - 3\ln t)(5 + 2\sin t)$	â) $u = \arcsin^3 2V$	ã) $z = \frac{4t^3 - 2e^{3t}}{\cos t/2}$

8	а) $y=7x^2+\frac{4}{x^6}-\sqrt[5]{x^2}$	б) $s=(1+t^2)(2-3\operatorname{arcctg}t)$	в) $u=\sin^4(2V+3)$	г) $z=\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}$
9	а) $y=5x-\frac{2}{x^4}+3\sqrt[5]{x^6}$	б) $s=(t^2-3)(4t+2\ln t)$	в) $u=\cos^3(3V+1)$	г) $z=\frac{t-\arcsin 3t}{e^{-t}}$
10	а) $y=x^4+\frac{1}{x}-2\sqrt[3]{x}$	б) $s=(3t^3-4)(t-2\cos t)$	в) $u=\ln^2(5V-3)$	г) $z=\frac{1-3\operatorname{tg}\ t/3}{\operatorname{arctg}2t}$
11	а) $y=2x-\frac{3}{x^4}+4\sqrt{x^3}$	б) $s=(3-\cos t)(5+2\sin t)$	в) $u=\sqrt{V-3\ln V}$	г) $z=\frac{t^3-e^{3t}}{\arccos 2t}$
12	а) $y=x^3+\frac{4}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}$	б) $s=(5-3\operatorname{arctg}t)e^t$	в) $u=\operatorname{tg}^4(3V+2)$	г) $z=\frac{\ln(4-5t)}{\sin t}$
13	а) $y=3x^2-\frac{2}{x^4}+\sqrt[3]{x}$	б) $s=(3-2e^t)(6+5e^t)$	в) $u=\operatorname{arctg}^3\frac{V}{3}$	г) $z=\frac{t-\cos\ t/4}{\ln(t^2-1)}$
14	а) $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{3}{x^2}-x$	б) $s=(t^2-5\ln t)(t+\ln t)$	в) $u=\sqrt{\cos^3 V}$	г) $z=\frac{t^2+e^{2t}}{\operatorname{arsin}(1-2t)}$
15	а) $y=2\sqrt{x}-\frac{4}{x}+3x^2$	б) $s=(e^t-3t^2)\ln t$	в) $u=\sin^3(8V+1)$	г) $z=\frac{3^{\sin t}-1}{\operatorname{arctg}\ t/3}$
16	а) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x^3}+4\sqrt{x}$	б) $s=(6t+\arcsin t)6^t$	в) $u=\ln^2(4V+3)$	г) $z=\frac{\operatorname{tg}(t^2+1)}{\cos 2t}$
17	а) $y=\frac{7}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-4x$	б) $s=(3t+2\ln t)\ln t$	в) $u=\operatorname{arctg}^3(2V-1)$	г) $z=\frac{\sin(t^2+3)}{e^{-2t}}$
18	а) $y=\frac{x^5}{5}+2\sqrt[4]{x^5}-\frac{1}{x}$	б) $s=(7t+\arccos t)$	в) $u=\ln^5(1-V)$	г) $z=\frac{1-3\operatorname{tg}\ t/3}{\cos\ t/3}$
19	а) $y=\frac{x^4}{2}-\frac{2}{x}+\sqrt[3]{x}$	б) $s=(e^t-3t^2)\operatorname{tg}t$	в) $u=\sqrt{\arccos 2V}$	г) $z=\frac{\ln(t-e^{3t})}{t^4}$
20	а) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{5}\sqrt[4]{x^2}-\frac{4}{x^3}$	б) $s=(t-\arcsin t)\sin t$	в) $u=\operatorname{ctg}^2(3-2V)$	г) $z=\frac{\ln(\cos t-1)}{e^{-4t}}$

Задание 3.2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0

НОМЕР ВАРИАНТА	ВИД ФУНКЦИИ $F(X)$	НОМЕР ВАРИАНТА	ВИД ФУНКЦИИ $F(X)$
1	$3\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{4x}\right),\ x_0=1.$	11	$\sqrt{1+3x},\ x_0=1.$
2	$2\sqrt[3]{x}+x-3,\ x_0=8.$	12	$\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x^2},\ x_0=-2.$

3	$2x+\frac{1}{x},\ x_0=1.$	13	$\sqrt{x}+2x,\ x_0=4.$
4	$\frac{x^2-3}{x},\ x_0=-1.$	14	$\frac{x^2}{x-2},\ x_0=1.$
5	$\sqrt{5-x^2},\ x_0=1.$	15	$\frac{1}{x^2}-4\sqrt[3]{x},\ x_0=-1.$
6	$\frac{3}{\sqrt{5-x^2}},\ x_0=2.$	16	$\frac{x^2+3x}{3},\ x_0=-1.$
7	$6\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x},\ x_0=1.$	17	$x+\frac{1}{x},\ x_0=2.$
8	$\frac{x^2-2x-3}{4},\ x_0=3.$	18	$x^2+e^{3-x},\ x_0=3.$
9	$14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x},\ x_0=1.$	19	$\sqrt[3]{1-x^2},\ x_0=3.$
10	$\frac{x}{x^2+1},\ x_0=-2.$	20	$\sqrt[3]{x^2+4},\ x_0=2.$

Задание 3.3. Найти производную y'_x функции $y=y(x)$, заданной параметрически: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$.

Номер варианта	$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$	**Номер варианта**	$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$	**Номер варианта**	$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$
1	$\begin{cases} x=\arcsin 2t \\ y=1/(1-4t^2) \end{cases}$	8	$\begin{cases} x=\sqrt{(1-t^2)^3} \\ y=\arcsin t \end{cases}$	15	$\begin{cases} x=\arccos t \\ y=\sqrt{(1-t^2)^3} \end{cases}$

2	$\begin{cases} x=(1-t)^2 \\ y=\cos(t-1)^2 \end{cases}$	9	$\begin{cases} x=\sin^{-2}(2-t) \\ y=\mathrm{tg}(2-t) \end{cases}$	16	$\begin{cases} x=\ln(1+4t^2) \\ y=\mathrm{arcctg}\,2t \end{cases}$
3	$\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos^2 t \end{cases}$	10	$\begin{cases} x=\cos^3(2t+6) \\ y=\sin^3(2t+6) \end{cases}$	17	$\begin{cases} x=t\cdot e^{-4t} \\ y=(1-4t)^2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x=\mathrm{tg}t^2 \\ y=t^2-\sqrt{5} \end{cases}$	11	$\begin{cases} x=\mathrm{arctg}(1+t)^2 \\ y=\sqrt{t^2+2t+2} \end{cases}$	18	$\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=(\arcsin t)^2 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x=7+t^3 \\ y=\mathrm{ctg}^2 t \end{cases}$	12	$\begin{cases} x=\sin^2(1-4t) \\ y=\cos(1-4t) \end{cases}$	19	$\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$
6	$\begin{cases} x=\ln(1-t^4) \\ y=\arccos t^2 \end{cases}$	13	$\begin{cases} x=3e^{-2t} \\ y=(2+e^{-2t})^3 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x=1/(1-9t^2) \\ y=\arccos 3t \end{cases}$
7	$\begin{cases} x=3/(1+4t^2) \\ y=\mathrm{arcctg}\,2t \end{cases}$	14	$\begin{cases} x=\mathrm{arctg}t^2 \\ y=\ln(1+t^4) \end{cases}$		

Задание 3.4. Найти дифференциалы функций:

Номер варианта		$y=f(x)$		$u=u(x)$		$s=s(t)$
1	*а)*	$y=\sin 2x-5;$	*б)*	$u=3e^{-x^2};$	*в)*	$s=\arcsin 4t-t^2.$
2	*а)*	$y=\ln(1-5x);$	*б)*	$u=4-x^3;$	*в)*	$s=3^{-t}+5.$
3	*а)*	$y=2tg\ x/3;$	*б)*	$u=1-\cos x;$	*в)*	$s=\ln(2t-1).$
4	*а)*	$y=\cos^2 x;$	*б)*	$u=3^{-x};$	*в)*	$s=\operatorname{arctg}\ t/2.$
5	*а)*	$y=4-3\sin x;$	*б)*	$u=\ln 2x-x^3;$	*в)*	$s=4t^2-1.$
6	*а)*	$y=10-3x^2;$	*б)*	$u=5+\sin x;$	*в)*	$s=e^{-3t}.$
7	*а)*	$y=\arccos 2x;$	*б)*	$u=1-3\ln x;$	*в)*	$s=\cos t/2.$
8	*а)*	$y=x-2\sin x;$	*б)*	$u=\operatorname{ctg}\ x/2;$	*в)*	$s=\ln(1-2t).$
9	*а)*	$y=3-\operatorname{tg}x;$	*б)*	$u=7+10x^3;$	*в)*	$s=e^{-3t^2}.$
10	*а)*	$y=5\ln\ x/3;$	*б)*	$u=\operatorname{arctg}4x;$	*в)*	$s=5+2\cos t.$
11	*а)*	$y=\arcsin 3x;$	*б)*	$u=1+2e^{-x};$	*в)*	$s=\cos(1-3t).$
12	*а)*	$y=2\operatorname{ctg}x;$	*б)*	$u=5-3\ln 2x;$	*в)*	$s=\sin t^2.$
13	*а)*	$y=x^2+2^{-x};$	*б)*	$u=e^{-5x}-1;$	*в)*	$s=2^{\sin t}.$
14	*а)*	$y=\operatorname{arctg}(x+2);$	*б)*	$u=3\operatorname{tg}2x-6x;$	*в)*	$s=2t-\sqrt{t}.$
15	*а)*	$y=\sin 6x;$	*б)*	$u=\ln(1+0,5x);$	*в)*	$s=(2t+1)^3.$
16	*а)*	$y=(2x-3)^4;$	*б)*	$u=3\arccos x/3;$	*в)*	$s=\ln(1+t^4).$
17	*а)*	$y=5+2\sin 3x;$	*б)*	$u=3^{-4x}+2;$	*в)*	$s=\operatorname{arctg}(1+t).$
18	*а)*	$y=x^3-2e^{4x};$	*б)*	$u=\cos(3x-1);$	*в)*	$s=\arcsin\ t/2.$
19	*а)*	$y=\sqrt[3]{1-6x};$	*б)*	$u=x-2\operatorname{tg}x/2;$	*в)*	$s=t\ln t.$
20	*а)*	$y=x^2+4x-1;$	*б)*	$u=2\sin(1-3x);$	*в)*	$s=e^{\cos 2t}.$

Задание 3.5. Найти производную первого порядка вектор-функции скалярного аргумента $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, если:

1	$x(t)=\mathrm{arctg}(2t), y(t)=\ln(2t^4), z(t)=1-e^{2t}$
2	$x(t)=e^{-4t}, y(t)=(1-4t)^2, z(t)=\sin 3t$
3	$x(t)=\arccos t, y(t)=\sqrt{(1-t^2)}, z(t)=\dfrac{\ln 2t}{3}$
4	$x(t)=\mathrm{tg}(1-2t), y(t)=\cos(1-2t), z(t)=\sqrt{1-5t}$
5	$x(t)=\ln(5-2t), y(t)=\mathrm{arctg}(5-2t), z(t)=(1-\sqrt{t})$
6	$x(t)=\sin(t-4), y(t)=\cos(t-4), z(t)=1-e^{-2t}$
7	$x(t)=e^{-5t}, y(t)=(5t-1)^2, z(t)=\sin t^3$
8	$x(t)=\sin(2-t); y(t)=\mathrm{tg}(2-t), z(t)=\sqrt{4-t}$
9	$x(t)=\cos(2t+6), y(t)=\sin(2t+6), z(t)=e^{2t+6}$
10	$x(t)=\sqrt{(1-t^2)t}, y(t)=\arccos t, z(t)=\ln(1-t)$
11	$x(t)=\mathrm{arcctg} t, y(t)=\ln(1+t), z(t)=1-e^{4t}$
12	$x(t)=2t^3-t, y(t)=\mathrm{tg}(2+t), z(t)=(3-t)^2$
13	$x(t)=\arcsin t, y(t)=\sqrt{(1-t^2)}, z(t)=\ln(1-2t)$
14	$x(t)=\mathrm{tg}(1-2t), y(t)=\sin(1-2t), z(t)=\sqrt{1+2t}$
15	$x(t)=e^{5-2t}, y(t)=\mathrm{arctg}(5-2t), z(t)=(1-2\sqrt{t})$
16	$x(t)=\sin(t^2-4), y(t)=\cos(t^2-4), z(t)=1-e^{-t}$
17	$x(t)=e^{-t}, y(t)=(2t-1)^2, z(t)=\sin t^2$
18	$x(t)=\cos(4-t), y(t)=\mathrm{tg}(4-t), z(t)=\sqrt{2+t}$
19	$x(t)=\cos(4t-2), y(t)=\sin(4t-2), z(t)=e^{4t-2}$
20	$x(t)=\ln(1+2t), y(t)=\arcsin t, z(t)=\sqrt{1-t^2}$

Задание3.6. Дана функция издержек производства продукции $y=f(x)$ (ден. ед.), где x – количество выпускаемой продукции. Найти средние и предельные издержки производства, вычислить их значения при $x=10$ и объяснить экономический смысл полученного результата.

Номер варианта	Вид функции $y=f(x)$	Номер варианта	Вид функции $y=f(x)$
1	$y=0,1x^3-1,2x^2+4x+230$	11	$y=0,1x^3+0,7x^2-4x+180$
2	$y=0,2x^3-1,9x^2+5x+270$	12	$y=0,3x^3-1,1x^2-15x+720$
3	$y=0,2x^3-1,3x^2+3x+510$	13	$y=-0,3x^3+2,8x^2+48x+10$
4	$y=0,1x^3-1,1x^2+6x+230$	14	$y=-0,1x^3+2,4x^2+2x+110$
5	$y=-0,1x^3-1,2x^2+94x+30$	15	$y=-0,2x^3+1,4x^2+58x+30$
6	$y=0,1x^3-1,4x^2+10x+290$	16	$y=-0,2x^3+1,4x^2+62x+70$
7	$y=-0,2x^3+1,1x^2+69x+40$	17	$y=0,2x^3-1,7x^2+4x+330$
8	$y=-0,1x^3-1,3x^2+86x+50$	18	$y=0,3x^3-4,1x^2+12x+480$
9	$y=-0,3x^3+1,1x^2+100x+20$	19	$y=0,4x^3-4,8x^2+3x+530$
10	$y=-0,2x^3-2,1x^2+120x+10$	20	$y=-0,4x^3+2,3x^2+123x+30$

Задание 3.7. Даны функции спроса $q(p)$ и предложения $s(p)$, где q и s – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p – цена единицы товара. Найти:

а) равновесную цену;

б) эластичность спроса и предложения, вычислить их значения для равновесной цены и пояснить экономический смысл полученного результата;

в) изменение дохода при увеличении цены на 10% от равновесной.

Номер варианта	Вид функций $q(p)$ и $s(p)$	Номер варианта	Вид функции $q(p)$ и $s(p)$
1	$q=\dfrac{3p+19}{p+4}$; $s=p+1$	**11**	$q=\dfrac{5p+2}{p+10}$; $s=p-4$
2	$q=\dfrac{2p+20}{p+1}$; $s=2p-5$	**12**	$q=\dfrac{p+25}{2p+5}$; $s=p+1$
3	$q=\dfrac{5p+18}{p+5}$; $s=p+2$	**13**	$q=\dfrac{p+6}{3p+2}$; $s=p-1$
4	$q=\dfrac{3p+11}{p+2}$; $s=3p-5$	**14**	$q=\dfrac{p+6}{3p-2}$; $s=2p-2$
5	$q=\dfrac{7p+16}{p+8}$; $s=p+1$	**15**	$q=\dfrac{4p+13}{p+5}$; $s=p+1$
6	$q=\dfrac{2p+19}{p+2}$; $s=2p-1$	**16**	$q=\dfrac{3p+22}{p+5}$; $s=p+2$
7	$q=\dfrac{3p+20}{4p}$; $s=p-2$	**17**	$q=\dfrac{7p+9}{p+3}$; $s=p+2$
8	$q=\dfrac{5p-6}{p-3}$; $s=p+2$	**18**	$q=\dfrac{7p+12}{p+1}$; $s=p+4$
9	$q=\dfrac{5p-6}{p+2}$; $s=p-3$	**19**	$q=\dfrac{11p+8}{p+4}$; $s=p+2$
10	$q=\dfrac{2p+7}{p+1}$; $s=p-1$	**20**	$q=\dfrac{7p+31}{p+6}$; $s=p+1$

Задание 3.8. Найти производную и дифференциал второго порядка функции $y=f(x)$.

Номер варианта	Вид функции $y=f(x)$	Номер варианта	Вид функции $y=f(x)$
1	$y=3e^{-x}+\ln 2x$	**11**	$y=\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$
2	$y=\sin\frac{x}{3}+x^4$	**12**	$y=(1-x)5^x$
3	$y=\ln(8x-1)$	**13**	$y=x\ln 3x$
4	$y=\cos 5x-\ln x$	**14**	$y=x^2+\sin 5x$
5	$y=(6x^3-x)\ln x$	**15**	$y=e^{-x^2}+4$
6	$y=3\sin x+3^x$	**16**	$y=\ln(x^2+1)$
7	$y=\operatorname{arctg}2x$	**17**	$y=x\cdot 4^{-x}$
8	$y=x^3e^{-x}$	**18**	$y=x^2-\cos 5x$
9	$y=2^{-x}+\ln 3x$	**19**	$y=(1+x^2)\operatorname{arctg}x$
10	$y=5-e^{2x}$	**20**	$y=x^3\ln x$

Задание 3.9. Вычислить скорость и ускорение движения при прямолинейном движении точки в момент времени $t=t_0$, если $S=s(t)$ – закон движения, S – путь, t – время.

Номер варианта	$S=s(t)$, t_0	Номер варианта	$S=s(t)$, t_0
1	$s=(t^2-1)^2,\ t_0=3$	**11**	$s=\sqrt[3]{t^2+4},\quad t_0=2$
2	$s=(t^2+2t)^2-4,\ t_0=1$	**12**	$s=(2t-1)^3,\ t_0=1$
3	$s=\sqrt{t^2+5t},\ t_0=2$	**13**	$s=(t^2+t)^2,\ t_0=2$
4	$s=\sqrt[3]{3t+2},\ t_0=2$	**14**	$s=\sin^2\frac{t}{6},\ t_0=\pi$
5	$s=\sin\frac{2\pi t}{6},\ t_0=1$	**15**	$s=\cos(\pi t+\frac{\pi}{3}),\ t_0=1$
6	$s=t^4+3t^2-1,\quad t_0=2$	**16**	$s=\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{4}\right),\ t_0=2$
7	$s=\cos^2\frac{t}{6},\ t_0=\pi$	**17**	$s=\sqrt[4]{t^3+8},\ t_0=2$
8	$s=(t^2-3)^3,\ t_0=2$	**18**	$s=(t^2+1)^3,\ t_0=1$
9	$s=\sqrt[3]{t^2-3},\quad t_0=2$	**19**	$s=\sqrt[3]{3t-1},\ t_0=3$
10	$s=(t^3+2)^2-5,\quad t_0=2$	**20**	$s=(3t^2+2t)^3,\ t_0=1$

Задание 3.10. Найти пределы, используя элементарные способы раскрытия неопределенностей или правило Лопиталя.

Номер варианта	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$
1	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-1}{2x^2+3}$	*б)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x^3+2x}$
2	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+7x}{3x^3-2x+1}$	*б)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\ln(1+x)}$
3	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+5x^2-x^4}{2x^4-3x^3+1}$	*б)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-8}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin x}-1}{\sin 2x}$
4	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-2}{2x-1}$	*б)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x^3-1}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1}{\operatorname{arctg} x}$
5	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3x^5}{x^3+8}$	*б)* $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{3x-1}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{1-\cos x}$
6	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-7x+6}{-3+2x^2+x^4}$	*б)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\arcsin 3x}$
7	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+x-3}{27x^3+8x-5}$	*б)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-5x+4}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}2x}{x}$
8	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-3x+4}{2x^3-9}$	*б)* $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+x-20}{x^2-25}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$
9	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3x^3}{x^4+8x^2-1}$	*б)* $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-2x-15}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\pi x}{\sin 7x}$
10	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x+6x^3}{10+2x-3x^3}$	*б)* $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{3x^2+17x-6}{x^2+2x-24}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+2x}{\operatorname{tg}4x}$
11	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{27x^3-8}{5x^4+2x-1}$	*б)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-4x+3}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{x^2-8x}$
12	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{27x^3-3x-8}{2x^2+6x-11}$	*б)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$
13	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+2x^5}{1-4x^3-3x^5}$	*б)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)}$
14	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+4x^2-8}$	*б)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}-1}$
15	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x-8}{2x^2+6x-11}$	*б)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^3-8}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{6x}}{\sin 4x}$
16	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-x}{2x^4+5x-1}$	*б)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$
17	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+5x-2}{x^3+2x+8}$	*б)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-x-6}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\operatorname{arctg}3x}$
18	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x+1}{5x^4-2x^2+3}$	*б)* $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^2-12x+20}{x^2-9x-10}$	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{e^{2x}-1}$

19	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x+2}{2x^3-3x^2+x}$	*б)* $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-9x-10}{x^3+1}$	*в)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{-x}-1}{\mathrm{tg}5x}$
20	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+x+6}{x^3+8x^2+1}$	*б)* $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}$	*в)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{\arcsin 2x}$

Задание 3.11. Построить график функции $y=f(x)$, используя общую схему исследования функции. Определить абсолютный максимум и абсолютный минимум функции на отрезке $[a, b]$.

Номер варианта	Вид функции $f(x)$	a	b
1	x^3+6x^2+9x+4	–2	1
2	$x^3+6x^2-15x+8$	–1	3
3	$x^3+12x^2+45x+50$	–1	2
4	x^3-3x^2-9x-5	–2	2
5	$x^3+3x^2-24x+28$	–1	3
6	x^3+3x^2-9x+5	–2	2
7	$x^3-3x^2-24x-28$	–3	1
8	x^3-6x^2+9x-4	–1	2
9	$x^3-6x^2-15x-8$	–2	2
10	$x^3-12x^2+45x-50$	0	4
11	$x^3-9x^2+24x-18$	–1	3
12	$-x^3+9x^2-15x-3$	0	3
13	$2x^3-15x^2+24x+1$	–1	2
14	$-x^3+6x^2-9x+2$	–2	2
15	x^3+4x^2-3x-8	–2	2
16	$-x^3+x^2+5x+3$	–2	1
17	$x^3-12x+5$	–1	3
18	$2x^3-12x^2+18x-5$	–1	2
19	$x^3-15x^2+48x+3$	–1	3
20	$-5x^3+30x^2-45x+10$	0	2

4. Функции нескольких переменных

Задание 4.1. Найти область определения и область непрерывности функции $Z=Z(x,y)$ и изобразить графически.

Номер варианта	Функция $Z(x,y)$	Номер варианта	Функция $Z(x,y)$
1	$Z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$	**11**	$Z=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$
2	$Z=\ln(y-2x^2)$	**12**	$Z=\ln(6x-y^2)$
3	$Z=\arcsin(x-y)$	**13**	$Z=\arcsin(2x+y)$
4	$Z=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$	**14**	$Z=\dfrac{1}{9-x^2-9y^2}$
5	$Z=\sqrt{x-4y^2}$	**15**	$Z=\sqrt{x^2+4y}$
6	$Z=\arccos(2x+y)$	**16**	$Z=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{xy}$
7	$Z=\ln(x^2+4y^2)$	**17**	$Z=\ln(x^2+2y^2-4)$
8	$Z=x+\sqrt{x+y}$	**18**	$Z=y^2+\sqrt{xy}-1$
9	$Z=\dfrac{\sqrt{xy}}{x-y}$	**19**	$Z=\dfrac{x-3}{\sqrt{x+y}}$
10	$Z=\sqrt{4-x^2-4y^2}$	**20**	$Z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{x^2+y^2}$

Задание 4.2. Записать уравнение семейства линий уровня функции $Z=Z(x, y)$. Выделить линию уровня, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$, и изобразить ее графически

Номер варианта	Функция $Z(x,y)$	$M_0(x_0,y_0)$	Номер варианта	Функция $Z(x,y)$	$M_0(x_0,y_0)$
1	$Z=4x-y^2$	$(1;-1)$	11	$Z=2x+4y$	$(1;-1)$
2	$Z=x-4y$	$(2;1)$	12	$Z=y^2+x$	$(-1;3)$
3	$Z=x^2+y^2$	$(\sqrt{2};-\sqrt{2})$	13	$Z=x^2+2y^2$	$(0;-1)$
4	$Z=3x^2+y$	$(1;-2)$	14	$Z=4x^2-y^2$	$(-1;3)$
5	$Z=x+y$	$(0;1)$	15	$Z=2y+x^2$	$(-2;2)$
6	$Z=x^2+2y^2$	$(\sqrt{2};0)$	16	$Z=x-3y$	$(1;-1)$
7	$Z=x^2-y^2$	$(2;0)$	17	$Z=\sqrt{x^2+y^2}$	$(0;-2)$
8	$Z=2x^2+y^2$	$(-1;1)$	18	$Z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$	$(-1;1)$
9	$Z=y^2+2x$	$(-2;2)$	19	$Z=2x^2+y$	$(2;-1)$
10	$Z=x^2-4y$	$(0;-1)$	20	$Z=\dfrac{y}{x^2}$	$(-2;1)$

Задание 4.3. Найти частные производные первого порядка от функции по каждому аргументу.

Номер варианта	$Z(x,y)$ $Z'_x=?\ Z'_y=?$	$Z(x,y)$ $Z'_x=?\ Z'_y=?$	$u(x,y,z)$ $u'_x=?\ u'_y=?\ u'_z=?$
1	а) $Z=x^2-4x\sqrt{y}$	б) $Z=e^{-3x}\cos(2x-y)$	в) $u=\dfrac{\operatorname{arctg} z}{x^2-\ln y}$
2	а) $Z=4xy^3+\sqrt[8]{x^3}$	б) $Z=e^{4y}\ln(x^2+y)$	в) $u=\dfrac{\sin(x^2-z)}{y}$
3	а) $Z=2x^3+2\sqrt{xy}-1$	б) $Z=\sin 2x\cdot 2^{xy}$	в) $u=\dfrac{y^3-2x^3}{\ln z}$
4	а) $Z=x(x^2-y)-\sqrt[3]{y}$	б) $Z=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\arcsin\dfrac{x}{y}$	в) $u=\dfrac{3^{x-y}}{\cos 2z}$
5	а) $Z=\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{2y}{x}$	б) $Z=x^2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{xy}{2}\right)$	в) $u=\dfrac{\ln(x^2-y^2)}{e^z}$
6	а) $Z=y^2(x^3+2y)-xy^{-3}$	б) $Z=\sqrt{y}\ln(x^2y)$	в) $u=\dfrac{x^2-e^{3z}}{\cos 2y}$
7	а) $Z=x^5y^{-1}-3x^2\sqrt{y}$	б) $Z=(x^2+3y)^3$	в) $u=\dfrac{\cos(x+2y)}{x^2-e^z}$
8	а) $Z=\dfrac{3}{x^2}-\sqrt[3]{x^2y}$	б) $Z=y\sin^3 2x$	в) $u=\dfrac{e^y-z^3}{\ln 2y}$
9	а) $Z=\dfrac{x^2y}{2}-\dfrac{x}{y}$	б) $Z=e^{-x}\cos(3x+y^2)$	в) $u=\dfrac{\sqrt{x+3y}}{\ln z}$
10	а) $Z=\sqrt{xy^3}+x(1-y^2)$	б) $Z=\sqrt{x^3-\ln y}$	в) $u=\dfrac{e^{2z}}{x-\sqrt{y}}$
11	а) $Z=1-2x^2y+\sqrt[4]{xy}$	б) $Z=(x^2+1)\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$	в) $u=\dfrac{\cos 3z}{x^2-y^2}$
12	а) $Z=\dfrac{1}{3}x^3y^3-\dfrac{2}{y}$	б) $Z=\cos^2 x\ln(x-2y)$	в) $u=\dfrac{\sin(yz)}{e^{-x}}$
13	а) $Z=x\sqrt{x^3y}-\dfrac{x^2}{y^2}$	б) $Z=4^{-y}\operatorname{tg}(xy^2)$	в) $u=\dfrac{\cos(x+3z)}{y^2}$
14	а) $Z=y^3+6x\sqrt{y}-5$	б) $Z=(3y-1)\arcsin\sqrt{x}$	в) $u=\dfrac{\ln 3z}{y^3-2x}$

15	$а)\ Z = x^2 - 3y + y\sqrt[3]{x}$	$б)\ Z = \sqrt{x^2 + y^2}\ln x$	$в)\ u = \dfrac{\sin 4y}{x^2 + e^{2z}}$
16	$а)\ Z = y(2x - y) + \sqrt[3]{x^2}$	$б)\ Z = \cos\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{2}{x - y^2}$	$в)\ u = \dfrac{\operatorname{tg} x \cdot e^y}{z}$
17	$а)\ Z = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}$	$б)\ Z = x^3 \operatorname{arctg}(y^2 - x)$	$в)\ u = \dfrac{\sqrt{x - 5y^2}}{z^3}$
18	$а)\ Z = (1 - x^2)y^3 + \sqrt{y}$	$б)\ Z = \cos\dfrac{2}{y} \cdot \arcsin\dfrac{y}{x}$	$в)\ u = \dfrac{\ln(y + 3z)}{\operatorname{tg} 4x}$
19	$а)\ Z = \dfrac{x}{2} - x(y^4 + 5)$	$б)\ Z = \arccos\dfrac{y + 1}{x}$	$в)\ u = \dfrac{\cos x - y^2}{\sqrt{z}}$
20	$а)\ Z = 2xy^3 - \sqrt{x^3 y^5}$	$б)\ Z = 3^{-xy} + \cos^2(x - y)$	$в)\ u = \dfrac{\sin 3x + z}{\ln y}$

Задание 4.4. Вычислить полный дифференциал dz и полное приращение Δz функции $z = Z(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ при указанных приращениях аргументов Δx и Δy. Оценить абсолютную и относительную погрешности приближенного равенства $\Delta z \approx dz$.

Номер варианта	$Z(x,y)$	(x_0,y_0)	Δx	Δy
1	$Z=x^2y-x$	$(1,2)$	0,1	0,2
2	$Z=y^2x+3y$	$(1,-1)$	0,2	0,1
3	$Z=x^2+y^2-xy$	$(0,2)$	0,1	$-0,2$
4	$Z=x^2/y$	$(2,1)$	$-0,1$	0,2
5	$Z=y^2/x$	$(2,-1)$	0,3	$-0,1$
6	$Z=(x-3)/y$	$(-1,1)$	0,2	0,2
7	$Z=x^2-2yx$	$(-2,2)$	0,1	$-0,1$
8	$Z=xy-x^2$	$(3,-1)$	$-0,2$	$-0,1$
9	$Z=3x+2y^2+x^2$	$(-1,-1)$	0,2	$-0,2$
10	$Z=(y^2+1)/x$	$(1,-2)$	$-0,2$	0,1
11	$Z=y^2x+2y$	$(1,-2)$	0,1	$-0,2$
12	$Z=xy^2+x^2$	$(-1,-1)$	$-0,2$	0,2
13	$Z=y/x$	$(-1,3)$	0,2	$-0,1$
14	$Z=x(x-y)^{-1}$	$(2,1)$	$-1/3$	$1/2$
15	$Z=x/y$	$(-2,2)$	0,1	0,2
16	$Z=(x^2+y^2)^{-1}$	$(-1,2)$	0,05	0,1
17	$Z=y^2+xy$	$(2,-2)$	0,1	$-0,1$
18	$Z=y(x+y)^{-1}$	$(-1,2)$	0,1	$-0,1$
19	$Z=2x^2-xy^2$	$(-1,-1)$	0,2	$-0,2$
20	$Z=(x^2-1)y^{-1}$	$(2,1)$	0,1	0,2

Задание 4.5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции

$z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Номер варианта	Уравнение $F(x,y,z)=0$	Номер варианта	Уравнение $F(x,y,z)=0$
1	$z\ln(xy)+xe^{-2z}=0$	**11**	$\sqrt{x}-\cos(y+z)-z^3=0$
2	$z^2+\sin(yz)-x=0$	**12**	$z^2-\ln 2z+y^3x=0$
3	$\cos(x-z)+yz^3=0$	**13**	$x^2-z+\cos(3z-y)=0$
4	$e^x\sin(y+z)-xz^2=0$	**14**	$z-y^2e^{xz}=0$
5	$e^{xz}+y\ln z-x=0$	**15**	$y\cos(xz)-x^2\ln z=0$
6	$z^3x-\cos(yz^{-1})=0$	**16**	$z^2\sin 2y+e^{-xz}=0$
7	$\sin(3x-2z)+x^2yz=0$	**17**	$z^3(x+\sin 2y)+\cos 3z=0$
8	$e^{x-z}+z\ln 3y=0$	**18**	$\ln 2x-y^2\cos\sqrt{z}=0$
9	$z^3-\mathrm{tg}(3z+x^2y^2)=0$	**19**	$x^2\sin 3z+\ln(2y+z)=0$
10	$ye^{2z}+x^2z-\ln y=0$	**20**	$xyz^{-1}+3^{y-2z}=0$

Задание 4.6. Найти все частные производные второго порядка $Z''_{xx}, Z''_{xy}, Z''_{yx}, Z''_{yy}$ от функции $z=Z(x,y)$.

Номер варианта	$Z(x,y)$	Номер варианта	$Z=Z(x,y)$
1	$z=e^{\frac{x}{y}}$	11	$z=e^{x^2y}$
2	$z=\sin(xy)$	12	$z=2^{x^2-y}$
3	$z=x\sin^2 y$	13	$z=\ln(x^2+y^2)$
4	$z=\cos(x^2+y)$	14	$z=(3x-y^3)^{-1}$
5	$z=3^x(y^2-x)$	15	$z=\cos\frac{y^2}{x}$
6	$z=y^{-2}\ln 2x$	16	$z=(x-y^2)e^{2x}$
7	$z=\cos(x^2-y^2)$	17	$z=y\cos^2 x$
8	$z=(x^2+2y)e^{-y}$	18	$z=\sin(y-x^2)$
9	$z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$	19	$z=x^3\ln 2y$
10	$z=(x^2-y)e^y$	20	$z=y^2(3x+1)^2$

Задание 4.7. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в данной точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Номер варианта	Уравнение поверхности	$M_0(x_0, y_0, z_0)$
1	$x^3+y^3+z^3+xyz=6$	(1;2;–1)
2	$xy^2+z^3=12$	(1;2;2)
3	$x^2y^2+2x+z^3=16$	(2;1;2)
4	$x+2y-\ln z+4=0$	(2; –3;1)
5	$x^2-xy-8x+z+5=0$	(2; –3;1)
6	$5x^2+2y^2-9-z=0$	(0;1; –7)
7	$x^2+y^2+2z^2-10=0$	(1; –1;2)
8	$3xy-x^2-5y^2-z=0$	(1;0; –1)
9	$z=e^{4+x+2y}$	(2; –3;1)
10	$(z-1)^2+3-x^2-y^2=0$	(0; –2;2)
11	$x^2+y^2-2x-z^2=0$	(2; –1;1)
12	$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=6$	(2;1; –2)
13	$xyz-16=0$	(2; –2; –4)
14	$z=\sqrt{x^2+y^2}-x$	(0; –2;2)
15	$z=\sin x\cos y$	$\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$
16	$x^2+y^2+5xz=0$	$\left(2;-1;-\frac{1}{2}\right)$
17	$z=\sqrt{4-3x^2+y^2}$	(–1;0;1)
18	$z-x^2-y^2+3x=0$	(1; –2; 2)
19	$(z-2)^2+2-x^2-y^2=0$	(–1;1;2)
20	$z=x^3+y^3+3xy$	(1; –1; –3)

Задание 4.8. Вычислить производную функции $u=u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ в направлении вектора $\overline{S}$.

Номер варианта	$u(x, y, z)$	$M_0(x_0,y_0,z_0)$	$\bar{s}$
1	$u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$	(2;1;2)	(2;2;1)
2	$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	(4;3;0)	(1;2;2)
3	$u=e^{xy}\left(z^2+z\right)$	(1;0;1)	(0;3;4)
4	$u=\sqrt{9-xyz}$	(1;1;5)	(2;1;2)
5	$u=x^3+y^2z$	(2;3;1)	(1;1;0)
6	$u=x^y+z^2$	(e;1;2)	(3;0;4)
7	$u=z^2\cdot e^{2x+y}$	(–1;2;1)	(0;1;0)
8	$u=z^2x+y^3-xy^2z$	(1; –1;2)	(–3;0;4)
9	$u=x^2-3y+\ln z$	(2; –3;1)	(–1;1;2)
10	$u=\left(3x^2-z^2\right)e^{y-2}$	(1;2;1)	(–2; –2;1)
11	$u=y^x+2z$	(3;2; –1)	(4;3;0)
12	$u=y^2z+2z^3-x$	(1;0; –2)	(–1;1;1)
13	$u=(3x-1)e^{z+2y}$	(1; –1;2)	(2; –1; –2)
14	$u=\ln\left(2x-y+z^2\right)$	(1;5;2)	(0; –3;4)
15	$u=\sqrt{1+2x-y-z^2}$	(1;2; –1)	(–1; –1;0)
16	$u=x^3-3z^2+4y^2z$	(–1;1;2)	(–2; –1;2)
17	$u=x^2y+yz-e^{xy}$	(0;2; –1)	(1;1;3)
18	$u=\ln(x-y)+xz^2$	(2;1;1)	(–3;0;4)
19	$u=y^2z+3z^2-4xyz$	(3;1;1)	(1; –2;2)
20	$u=\sqrt{5-xyz}$	(–1;1; –1)	(1;1;1)

Задание 4.9. Найти градиент скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, модуль градиента и объяснить физический смысл полученного результата.

Номер варианта	$u(x, y, z)$	$M_0(x_0, y_0, z_0)$
1	$u=\sin(xyz)$	$(1, \pi, 1)$
2	$u=xy^2z$	$(2, 1, 1)$
3	$u=\ln(x^2+yz)$	$(1, 2, 2)$
4	$u=\operatorname{arctg}(xyz)$	$(2, 1, 1)$
5	$u=\sqrt{9-xyz}$	$(1, 1, 5)$
6	$u=\ln(xy+z^2)$	$(2, 2, 2)$
7	$u=(3x-1)e^{z+2y}$	$(1, -1, 2)$
8	$u=x^2y+yz-e^{xy}$	$(0, 2, -1)$
9	$u=\operatorname{arctg}(xy)+z^2$	$(1, -1, 2)$
10	$u=x^2z+y^2-z^2xy$	$(1, 2, -1)$
11	$u=\ln(x^2+y^2+z^2)$	$(2, 1, 2)$
12	$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$(4, 3, 0)$
13	$u=e^{x^2+y^2}(z^2+1)$	$(1, 0, 2)$
14	$u=e^{xy}(z^2+z)$	$(1, 0, 1)$
15	$u=\sin(xy)+z^3$	$(\pi, 2, 1)$
16	$u=x^y+z^2$	$(e, 1, 2)$
17	$u=x^2-3y^2+\ln z^2$	$(2, -3, 1)$
18	$u=(x^2+y^2)e^{z-1}$	$(-1, 2, 1)$
19	$u=\cos(x-y)+z^3$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0, 1\right)$
20	$u=(2z+1)e^{x-2y}$	$(2, 1, -1)$

Задание 4.10. Исследовать на экстремум функцию $Z=Z(x,y)$.

Номер варианта	$Z(x, y)$	Номер варианта	$Z(x, y)$
1	$z = x^2 + xy + y^2 - 2y - 3$	**3**	$z = x^4 - 2x^2 + y^2 + 2y + 3$
2	$z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$	**4**	$z = \left(x^2 + y\right)e^{\frac{y}{2}}$
5	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$	**13**	$z = x^3 - y^3 - 3xy$
6	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$	**14**	$z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 5y$
7	$z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$	**15**	$z = 1 + 2x - 4y - x^2 - y^2$
8	$z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$	**16**	$z = 2xy - 4x - 2y$
9	$z = x^2 + y^2 + 4y - 2x + 4$	**17**	$z = x^2 + y^2 + \frac{(x + 2y - 16)^2}{5}$
10	$z = x^2 - 2xy + 4y$	**18**	$z = (y - x)^2 + (y + 2)^2$
11	$z = e^{\frac{x}{2}}\left(x - y^2\right)$	**19**	$z = xy(1 - x - y)$
12	$z = x^3 + xy + 6x + y + 1$	**20**	$z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$

Задание 4.11. Найти экстремум функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны соотношением $ax + by - c = 0$ и определить, является ли экстремум максимумом или минимумом функции.

Номер варианта	a	b	c	Номер варианта	a	b	c
1	3	–2	1	**11**	4	–1	3
2	4	–1	3	**12**	5	2	3
3	5	1	8	**13**	3	1	7
4	3	–2	2	**14**	3	–2	5
5	5	1	9	**15**	5	–2	2
6	7	–2	2	**16**	3	–2	1
7	2	3	6	**17**	2	1	8
8	3	2	8	**18**	4	1	6
9	4	–2	2	**19**	1	–1	3
10	2	3	4	**20**	2	4	7

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ОБРАЗЦЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

1. Линейная алгебра

1.1. Матрицы. Операции с матрицами

Матрицей размера $m\times n$ называется упорядоченная таблица, составленная из чисел, расположенных в m строках и n столбцах. Обозначаются матрицы A, B, C и т. д. Элемент матрицы, находящийся в строке с номером i и столбце с номером j, обозначается a_{ij}. Если $m = n$, то матрица называется квадратной порядка n.

Произведением матрицы A на число λ называется матрица C того же размера, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ:

$$C=\lambda\cdot A <=> c_{ij}=\lambda a_{ij}\,(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n).$$

Суммой двух матриц A и B одинаковых размеров называется матрица C того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$C=A+B <=> c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\,(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n).$$

Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матрицы $A_{m\times k}$ на матрицу $B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$C=A\cdot B;\ <=> c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{ik}\cdot b_{kj}\,(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n).$$

Возведение квадратной матрицы A в целую положительную степень p(p>1):

$$A^p=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{p\ \text{ðàç}}.$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице A, называется матрица, образованная из матрицы A заменой её строк соответствующими столбцами. Транспонированная матрица к матрице A обозначается A^{T}.

Всякой квадратной матрице A порядка n ставится в соответствие по определённому закону некоторое число, которое называется *определителем* того же порядка матрицы A и обозначается $|\grave{A}|$.

Определитель первого порядка равен самому числу.

Определитель второго порядка определяется равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1)$$

Определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Минором элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n–1)$-го порядка, полученный из исходного определителя путём вычеркивания i-й строки и j-го столбца. Обозначается минор M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, умноженный на $(–1)^{i+j}$, т. е. A_{ij}:

$A_{ij} = (–1)^{i+j} \cdot M_{ij}$,

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Формулу (2) можно записать таким образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Единичной называется квадратная матрица порядка n, у которой элементы главной диагонали a_{11}, a_{22}, … , a_{nn} равны 1, а остальные элементы равны 0. Пусть E – единичная матрица. При умножении матрицы A на E слева или справа получается матрица A:

$AE = EA = A$.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A, если выполняются условия:

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Обратная матрица к квадратной матрице A существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы A не равен нулю, т. е. $|\grave{A}| \neq 0.$ При этом

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^{*})^{T}, \qquad (3)$$

где A^{*} – матрица, в которой каждый элемент матрицы A заменён его алгебраическим дополнением. Такая матрица называется *присоединённой* к матрице A.

Пример 1.1. Дана матрица $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$ Найти матрицу $R = C^2 + 2C^T - 3C^{-1}.$

Решение. Определим матрицу C^2:

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 1(-3) & 2\cdot 1 + 1(-4) \\ -3\cdot 2 - 4(-3) & -3\cdot 1 - 4(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу C: $C^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$
и найдём произведение $2C^T$:

$$2C^T = 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Определим C^{-1} по формуле (3): $C^{-1} = \frac{1}{|C|}(C^{*})^{T}.$
Вычислим определитель матрицы C:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 2(-4) - (-3)1 = -8 + 3 = -5 \neq 0.$$

Следовательно, C^{-1} существует. Определим алгебраические дополнения элементов матрицы C и присоединённую матрицу C^{*}:

$$C_{11} = -4;\ \ C_{12} = 3;\ \ C_{21} = -1;\ \ C_{22} = 2;$$

$$C^* = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

тогда $$(C^*)^T = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$ и обратная матрица C^{-1}:

$$C^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ -0,6 & -0,4 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность нахождения C^{-1}. Для этого перемножим полученную матрицу на данную матрицу C слева и справа и убедимся, что получается единичная матрица:

$$C^{-1}\cdot C = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ -0,6 & -0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8\cdot 2 + 0,2\cdot(-3) & 0,8\cdot 1 + 0,2\cdot(-4) \\ -0,6\cdot 2 - 0,4\cdot(-3) & -0,6\cdot 1 - 0,4\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C\cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ -0,6 & -0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0,8 + 1\cdot(-0,6) & 2\cdot 0,2 + 1\cdot(-0,4) \\ -3\cdot 0,8 - 4\cdot(-0,6) & -3\cdot 0,2 - 4\cdot(-0,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица C^{-1} определена правильно.

Найдем произведение матрицы C^{-1} на 3:

$$3C^{-1} = 3\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ -0,6 & -0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4 & 0,6 \\ -1,8 & -1,2 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получим:

$$R = C^2 + 2C^T - 3C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,4 & 0,6 \\ -1,8 & -1,2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+4-2,4 & -2-6-0,6 \\ 6+2+1,8 & 13-8+1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,6 & -8,6 \\ 9,8 & 6,2 \end{pmatrix}.$$

1.2. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Минором порядка k матрицы A называется определитель порядка k матрицы, составленный из элементов матрицы A, стоящих на пересечении произвольных k строк и k столбцов.

Рангом матрицы называется число r такое, что выполняются условия:

1) существует минор порядка r, не равный нулю;
2) все миноры большего порядка, начиная с $(r+1)$, равны нулю.

Ранг матрицы A обозначается $r(A)$. Ранг матрицы – это наибольший порядок её минора, не равного нулю. Этот минор называется *базисным*.

Элементарные преобразования, не меняющие ранга матрицы:

1) перестановка строк (столбцов) местами;
2) транспонирование;
3) вычёркивание строки (столбца), все элементы которой равны нулю;
4) умножение какой-либо строки (столбца) на число, отличное от нуля;
5) прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

Рассмотрим систему m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

(4)

Обозначим матрицу из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix},$$

её называют *основной матрицей системы*.

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$ — столбец свободных членов,

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$ – столбец неизвестных,

$$(A/B)=\left(\begin{array}{l|l} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ – расширенная матрица системы.

Систему уравнений (4) можно записать в матричном виде:

$A \cdot X = B$. (4')

Совокупность чисел d_1, d_2,…, d_n, обращающих все уравнения системы (4) в тождества, называется *решением системы*.

Система уравнений *совместна*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместна*, если она не имеет решения.

Две системы уравнений называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Элементарные преобразования системы уравнений, переводящие её в равносильную систему:

1) перестановка местами любых двух уравнений;
2) умножение обеих частей любого уравнения на число, отличное от нуля;

3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число.

Система уравнений называется *неоднородной*, если $B \neq 0,$ и *однородной*, если $B = 0$.

Система уравнений называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если она имеет бесконечное множество решений.

Исследование системы уравнений на совместность основано на следующей теореме:

Теорема Кронекера–Капелли. Для того чтобы система уравнений с n неизвестными была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы системы, т. е. $r(A) = r(A \mid B) = r$.

При этом:

1) если $r = n$, система определена;

2) если $r < n$, система не определена.

Рассмотрим следующие методы решения СЛАУ: метод Крамера, матричный метод, метод Гаусса, метод Жордана–Гаусса.

1. Метод Крамера

Применяется для решения неоднородных систем n уравнений с n неизвестными, у которых определитель основной матрицы системы отличен от нуля: $\Delta = |A| \neq 0.$

Тогда система имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{5}$$

где Δ_i – определитель, полученный из определителя системы Δ заменой i-го столбца матрицы A столбцом свободных членов B.

2. Матричный метод

Применяется при тех же условиях, что и метод Крамера. Столбец неизвестных находим, решая матричное уравнение (4′). Умножим (4′) слева на матрицу A^{-1}:

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

По определению обратной матрицы $A^{-1} \cdot A = E$, следовательно,

$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Умножение матрицы на единичную матрицу не меняет матрицу, поэтому $E \cdot X = X$ и

$X = A^{-1} \cdot B$. (6)

3. Метод Гаусса

Применяется для решения как неоднородных, так и однородных систем с произвольным числом уравнений m и произвольным числом неизвестных n. С помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы системы $(A \mid B)$ исходную систему (4) преобразуют в равносильную, которая позволяет решить вопрос о совместности системы и, если она совместна, записать её решение. Преобразования проводятся так, чтобы матрица $(A \mid B)$ приобрела треугольный вид (элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны), после чего, если система совместна, находят её решение или делают вывод о её несовместности.

Замечание 1. Если при преобразованиях появляется строка, полностью состоящая из нулей, то её можно отбросить.

Замечание 2. Если при преобразованиях появляется строка, соответствующая противоречивому уравнению вида

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i$,

где $b_i \neq 0,$

то процесс преобразований на этом прекращают, так как система уравнений несовместна.

4. Метод Жордана–Гаусса

Применяется для решения как неоднородных, так и однородных систем с произвольным числом уравнений m и произвольным числом неизвестных n. С помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы системы $(A \mid B)$ исходную систему (4) преобразуют в равносильную, которая позволяет решить вопрос о совместности системы и, если она совместна, записать её решение. Преобразования проводятся по следующей схеме, которая называется *схемой Жордановых исключений*:

1) выбираем любой элемент матрицы A, отличный от нуля. Он называется *разрешающим элементом*. Пусть это a_{rs}, тогда r-я строка называется *разрешающей строкой*, а s-й столбец называется *разрешающим столбцом*;

2) элементы разрешающей строки (r-й) оставляем без изменения;

3) элементы разрешающего столбца (s-го), кроме разрешающего элемента a_{rs}, заменяем нулями;

4) остальные элементы матрицы $(A \cdot B)$ пересчитываем по формуле:

$$\begin{array}{ccc} a_{rj} & & \boxed{a_{rs}} \\ & \boxtimes & \\ a_{ij} & & a_{is} \end{array} \qquad a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{rj}a_{is}}{a_{rs}}, \quad \begin{array}{l} i = 1,\ldots,m, i \neq r; \\ j = 1,\ldots,n,\ j \neq s. \end{array}$$

(7)

По этому же правилу преобразуются и элементы столбца *B*, кроме b_r. В результате матрица (*A* | *B*) преобразуется в эквивалентную матрицу A′, в которой снова выбираем разрешающий элемент. Это любой элемент $a'_{ij} \neq 0$ матрицы *A′* и расположенный в строке и столбце, которые ещё не были разрешающими. Схему преобразований 1–4 повторяем до тех пор, пока все строки (или столбцы) матрицы *A* не будут использованы как разрешающие.

Если при преобразованиях появляется строка, полностью состоящая из нулей, то её можно отбросить.

Если при преобразованиях появляется строка, соответствующая противоречивому уравнению вида

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i$,

где $b_i \neq 0$,

то процесс преобразований на этом прекращают, так как система уравнений несовместна.

Пример 1.2. Дана система уравнений $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -3b & c \\ 3a & -6b & 5c \\ 5a & -4b & 2c \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2abc \\ 3abc \end{pmatrix}, \ a = 1, b = 1, \ c = -1.$$

Решить систему тремя методами: а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса; г) методом Жордана–Гаусса.

Решение. Согласно условиям задания имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -6 & -5 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Систему линейных алгебраических уравнений $A \cdot X = B$ запишем в координатной форме:

$$\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & -x_3 = 0, \\ 3x_1 & -6x_2 & -5x_3 = -2, \\ 5x_1 & -4x_2 & -2x_3 = -3. \end{cases}$$

а) Решим систему по формулам Крамера.

Найдём определитель системы, используя формулы (2) и (1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -6 & -5 \\ 5 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -6 & -5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(12-20) + 3(-6+25) - 1(-12+30) = 23.$$

Поскольку $\Delta \neq 0,$ система имеет единственное решение, которое находим по формулам Крамера (5):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -2 & -6 & -5 \\ -3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 3(4-15) - 1(8-18) = -23;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -5 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 2(4-15) - 1(-9+10) = -23;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 2(18-8) + 3(-9+10) = 23.$$

Итак, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -1,\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -1,\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$

Сделаем проверку, подставив найденные значения x_1, x_2, x_3 в исходную систему, и убедимся, что все три уравнения данной системы обращаются в тождества:

$$\begin{cases} 2\cdot(-1) - 3\cdot(-1) - 1 = -2 + 3 - 1 = 0; \\ 3\cdot(-1) - 6\cdot(-1) - 5\cdot 1 = -3 + 6 - 5 = -2; \\ 5\cdot(-1) - 4\cdot(-1) - 2\cdot 1 = -5 + 4 - 2 = -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=0; \\ -2=-2; \\ -3=-3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1=-1,\ x_2=-1,\ x_3=1$.

б) Решим систему матричным методом.

Из пункта а) $\Delta=23\neq 0$, следовательно, матрица системы имеет обратную A^{-1}, которую найдём по формуле (3).

Для этого вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-6 & -5\\ -4 & -2\end{vmatrix}=-8,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & -5\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-19,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -6\\ 5 & -4\end{vmatrix}=18,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -4 & -2\end{vmatrix}=-2,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & -2\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -6 & -5\end{vmatrix}=9,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -5\end{vmatrix}=7,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -6\end{vmatrix}=-3.$$

Получим A^{-1} по формуле (3):

$$A^{-1}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-8 & -2 & 9\\ -19 & 1 & 7\\ 18 & -7 & -3\end{pmatrix}.$$

По формуле (6) имеем

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-8 & -2 & 9\\ -19 & 1 & 7\\ 18 & -7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -2\\ -3\end{pmatrix}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-8\cdot 0 & -2\cdot(-2) & +9\cdot(-3)\\ -19\cdot 0 & +1\cdot(-2) & +7\cdot(-3)\\ 18\cdot 0 & -7\cdot(-2) & -3\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-23\\ -23\\ 23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1=-1,\ x_2=-1,\ x_3=1$.

в) Решим систему методом Гаусса.

Преобразования расширенной матрицы системы оформим в виде таблицы:

A/B	$\sum$	Примечания
$\left.\begin{matrix}2 & -3 & -1\\ 3 & -6 & -5\\ 5 & -4 & -2\end{matrix}\right\vert\begin{matrix}0\\ -2\\ -3\end{matrix}$	$\begin{matrix}-2\\ -10\\ -4\end{matrix}$	Вычтем из второй строки первую и поменяем эти строки местами
$\left.\begin{matrix}1 & -3 & -4\\ 2 & -3 & -1\\ 5 & -4 & -2\end{matrix}\right\vert\begin{matrix}-2\\ 0\\ -3\end{matrix}$	$\begin{matrix}-8\\ -2\\ -4\end{matrix}$	Вычтем из второй строки первую, умноженную на 2, а из третьей строки первую, умноженную на 5
$\left.\begin{matrix}1 & -3 & -4\\ 0 & 3 & 7\\ 0 & 11 & 18\end{matrix}\right\vert\begin{matrix}-2\\ 4\\ 7\end{matrix}$	$\begin{matrix}-8\\ 14\\ 36\end{matrix}$	Вычтем из третьей строки вторую, умноженную на 4, и поменяем знаки элементов полученной третьей на противоположные
$\left.\begin{matrix}1 & -3 & -4\\ 0 & 3 & 7\\ 0 & 1 & 10\end{matrix}\right\vert\begin{matrix}-2\\ 4\\ 9\end{matrix}$	$\begin{matrix}-8\\ 14\\ 20\end{matrix}$	Поменяем вторую и третью строку местами
$\left.\begin{matrix}1 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 10\\ 0 & 3 & 7\end{matrix}\right\vert\begin{matrix}-2\\ 9\\ 4\end{matrix}$	$\begin{matrix}-8\\ 20\\ 14\end{matrix}$	Вычтем из третьей строки вторую, умноженную на 3

$\begin{array}{ccc\|c} 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & -23 & -23 \end{array}$	$\begin{array}{c} -8 \\ 20 \\ -46 \end{array}$	Разделим третью строку на (–23)
$\begin{array}{ccc\|c} 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c} -8 \\ 20 \\ 2 \end{array}$	Преобразования закончены. Очевидно, что ранги матриц A, и $A \mid B$ совпадают и равны 3, следовательно, система совместна и имеет единственное решение.

Замечание. Во втором столбце таблицы для контроля записаны суммы строк матрицы $A \mid B$, с которыми производим те же преобразования, что и с элементами матрицы. Если на каком-то шаге преобразований элемент второго столбца не будет равен сумме элементов соответствующей строки матрицы $A \mid B$, то допущена ошибка при преобразовании данной строки.

Итак, найдём решение системы. Система уравнений после преобразований перешла в равносильную ей систему:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -2, \\ x_2 + 10x_3 = 9, \\ x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + 3x_2 + 4x_3, \\ x_2 = 9 - 10x_3, \\ x_3 = -1. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

г) Решим систему методом Жордана—Гаусса.

Преобразования расширенной матрицы системы оформим в виде таблицы:

A/B	Σ	Примечания
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -5 & -2 \\ 5 & -4 & -2 & -3 \end{array}\right)$	–2 –10 –4	Умножим первую строку на –1
$\left(\begin{array}{ccc\|c} -2 & 3 & \boxed{1} & 0 \\ 3 & -6 & -5 & -2 \\ 5 & -4 & -2 & -3 \end{array}\right)$	2 –10 –4	Разрешающий элемент a_{13}=1. Оставляем разрешающую строку (первую) без изменений. Все элементы разрешающего столбца (третьего), кроме a_{13}, заменяем нулями. Остальные элементы преобразуем по формуле (7)
$\left(\begin{array}{ccc\|c} -2 & 3 & 1 & 0 \\ -7 & 9 & 0 & -2 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & -3 \end{array}\right)$	2 0 0	Разрешающий элемент a_{31}=1. Оставляем разрешающую строку (третью) без изменений. Все элементы разрешающего столбца (первого), кроме a_{31}, заменяем нулями. Остальные элементы преобразуем по формуле (7)
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & 23 & 0 & -23 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{array}\right)$	2 0 0	Умножим вторую строку на 1/23
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{array}\right)$	2 0 0	Разрешающий элемент a_{22} = 1. Оставляем разрешающую строку (вторую) без изменений. Все элементы разрешающего столбца (второго), кроме a_{22}, заменяем нулями. Остальные элементы преобразуем по формуле (7)
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$	2 0 0	

В последнем (четвертом) столбце матрицы $A \mid B$ получено решение системы, соответствующее неизвестным в тех столбцах, в которых элементы равны единице, а именно: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Отметим, что решения системы, полученные в пунктах *а*), *б*), *в*) и *г*), как и следовало ожидать, совпадают.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

1.3. *n*-мерное векторное пространство, его базис

n-мерным вектором называется упорядоченная совокупность из *n* действительных чисел: $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *компонентами вектора*.

n-мерный вектор можно рассматривать как матрицу с одной строкой, поэтому операции с векторами вводят аналогично матрицам.

Пусть $\overline{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$:

$$1)\ \overline{x}=\overline{y} <=> x_i=y_i,\ i=1,...,n;$$

$$2)\ \lambda\overline{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n);$$

$$3)\ \overline{x}+\overline{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n).$$

Под *нуль-вектором* понимают $\overline{0}=(0,0,...,0).$

Множество *n*-мерных векторов с введёнными операциями сложения и умножения на число называют *n*-мерным векторным пространством и обозначают R_n.

Линейной комбинацией системы векторов $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n$ называют выражение вида

$$\alpha_1\overline{e}_1+\alpha_2\overline{e}_2+...+\alpha_m\overline{e}_m,$$

где $\alpha_i\,(i=1,...,m)$ — некоторые числа.

Если линейная комбинация векторов равна нуль-вектору:

$$\alpha_1\overline{e}_1+\alpha_2\overline{e}_2+...+\alpha_m\overline{e}_m=\overline{0},$$

(8)

и при этом коэффициенты α_i не все равны нулю одновременно, то система векторов $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_m$ называется *линейнозависимой*. Если равенство (8) возможно только тогда, когда все коэффициенты $\alpha_i=0,\ i=1,...,m,$ то система векторов $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_m$ называется *линейнонезависимой*.

Если система векторов линейно зависима, то хотя бы один из них линейно выражается через остальные.

В пространстве R_n существует система *n* линейно независимых векторов. Любая система из (*n*+1) векторов и больше линейно зависима.

Таким образом, максимальное число линейно независимых векторов в R_n равно *n*. Число *n* называют *размерностью* пространства R_n.

Любая система из *n* линейно независимых векторов в R_n называется *базисом*.

<u>Теорема (критерий базиса в R_n).</u> Для того чтобы система

векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ образовывала базис в R_n, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из координат этих векторов, был отличен от нуля.

Если система векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ образует базис в R_n, то любой вектор $\bar{x} \in R_n$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$:

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n. \tag{9}$$

Формула (9) называется разложением вектора $\bar{x}$ по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами вектора* $\bar{x}$ в этом базисе.

Приведём пример одного базиса в пространстве R_n, называемого *каноническим* базисом:

$$\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$
$$\bar{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\bar{e}_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Пример 1.3. Показать, что заданная система векторов $\bar{a}_1 = (3, 2, -2)$, $\bar{a}_2 = (3, -3, -1)$, $\bar{a}_3 = (1, 1, -1)$ образует базис в пространстве R_3, записать матрицу перехода от канонического базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ к базису $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ и разложить вектор $\bar{x} = (5, 1, -4)$ по базису $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$.

Решение. Согласно теореме (критерий базиса в R_n), система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образует базис тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат векторов, отличен от нуля. Вычислим этот определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Следовательно, система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образует базис в пространстве R_3. Матрица перехода от канонического базиса

$B=\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ к базису $B=\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ состоит из координат векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ в базисе $B=\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, записанных в соответствующие столбцы, и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Разложение вектора $\bar{x}$ по базису $B=\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ согласно (9) ищем в виде $\bar{x} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3.$ Это векторное равенство эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Поскольку определитель этой системы отличен от нуля, используем для её решения формулы Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(3+1) - 3(-1+4) + 1(-1-12) = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-1+4) - 5(-2+2) + 1(-8+2) = 3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(12+1) - 3(-8+2) + 5(-2-6) = 17.$$

Итак, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\dfrac{1}{2},\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{3}{4},\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{17}{4}.$

Сделаем проверку, подставив найденное решение в исходную систему:

$$\begin{cases} 3\cdot(-1/2) + 3\cdot(3/4) + 17/4 = -3/2 + 13/2 = 5; \\ 2\cdot(-1/2) - 3\cdot(3/4) + 17/4 = -13/4 + 17/4 = 1; \\ -2\cdot(-1/2) - 3/4 - 17/4 = -16/4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = 5; \\ 1 = 1; \\ -4 = -4. \end{cases}$$

Таким образом, разложение вектора $\overline{x}$ по базису $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ имеет вид

$$\overline{x} = -\frac{1}{2}\overline{a}_1 + \frac{3}{4}\overline{a}_2 + \frac{17}{4}\overline{a}_3.$$

1.4. Решение однородных систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Такая система всегда совместна, поскольку имеет нулевое решение $x_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$ Однако при определенных условиях она может иметь и ненулевое решение.

Теорема (критерий ненулевого решения однородной системы уравнений). Для того чтобы однородная система уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных.

Будем рассматривать ненулевые решения системы как столбцы, состоящие из *n* элементов; обозначим их $E_1, E_2, \ldots, E_k$.

Линейно независимая система решений $E_1, E_2, \ldots, E_k$ называется *фундаментальной системой решений*, если любое другое решение является линейной комбинацией решений $E_1, E_2, \ldots, E_k$.

Теорема. Если ранг *r* матрицы системы однородных уравнений меньше числа неизвестных *n*, то эта система имеет фундаментальную систему решений, которая состоит из *n*–*r* линейно независимых решений исходной системы.

Общее решение однородной системы уравнений имеет вид

$$X_{00} = C_1E_1 + C_2E_2 + \ldots + C_{n-r}E_{n-r}. \qquad (10)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ – произвольные числа.

Решение системы, полученное из общего при фиксированных значениях $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$, называется *частным*.

Пример 1.4. 1) Считая матрицу $C_{4\times 5}$ матрицей однородной системы $C\cdot X = 0$, найти:

а) фундаментальную систему решений;

б) общее решение;

в) какое-нибудь частное решение.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & -2 & 5 & 20 & 3 \\ 9 & -3 & 4 & 2 & 15 \end{pmatrix}.$$

Решение. Исходная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 20x_4 + 3x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 15x_5 = 0. \end{cases}$$

Преобразования матрицы системы оформим в виде таблицы:

C					Σ	Примечания
6	−2	3	4	9	20	Умножим вторую строку на −1
3	−1	2	6	3	13	
6	−2	5	20	3	32	
9	−3	4	2	15	27	
6	−2	3	4	9	20	Разрешающий элемент $a_{22}=1$. Разрешающую строку (вторую) оставляем без изменений. Все элементы разрешающего столбца (второго), кроме a_{22}, заменяем нулями. Остальные элементы преобразуем по формуле (7)
−3	$\boxed{1}$	−2	−6	−3	−13	
6	−2	5	20	3	32	
9	−3	4	2	15	27	
0	0	−1	−8	3	−6	Умножим первую строку на −1, а четвёртую строку на 1/2
−3	1	−2	−6	−3	−13	
0	0	1	8	−3	6	
0	0	−2	−16	6	−12	
0	0	$\boxed{1}$	8	−3	6	Разрешающий элемент $a_{13}=1$. Разрешающую строку (первую) оставляем без изменений. Все элементы разрешающего столбца (третьего), кроме a_{13}, заменяем нулями. Остальные элементы преобразуем по формуле (7)
−3	1	−2	−6	−3	−13	
0	0	1	8	−3	6	
0	0	−1	−8	3	−6	
0	0	$\boxed{1}$	8	−3	6	Преобразование закончено. Получены две строки из нулей, все остальные строки преобразованы
−3	1	0	10	−9	−1	
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	

а) Из таблицы следует, что ранг матрицы *C* равен $r(C)=2$, так как есть миноры второго порядка, отличные от нуля, например $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$ а любые миноры третьего и четвёртого порядков равны нулю.

Переменные системы x_2, x_3, соответствующие базисному минору матрицы *A*, называются *базисными переменными*, остальные x_1, x_4, x_5 – свободными.

Система, равносильная исходной, имеет вид

$$\begin{cases} x_3 + 8x_4 - 3x_5 = 0, \\ -3x_1 + x_2 + 10x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$$

Оставляя слева базисные переменные x_2 и x_3, соответствующие линейно независимым столбцам матрицы A, и перенося в правую часть уравнений неизвестные x_1, x_4, x_5, получаем:

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 - 10x_4 + 9x_5, \\ x_3 = -8x_4 + 3x_5. \end{cases}$$

б) Полагая свободные переменные равными произвольным константам $x_1 = c_1$, $x_4 = c_4$, $x_5 = c_5$, получаем общее решение системы в виде

$$X_{00} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 3c_1 - 10c_4 + 9c_5 \\ -8c_4 + 3c_5 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальную систему решений образуют три линейно независимых частных решения. Получим эти решения, задавая системе констант (c_1, c_4, c_5) линейно независимые значения, например (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1). Вычисления занесем в таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	3	0	0	0
0	–10	–8	1	0
0	9	3	0	1

Итак, фундаментальную систему составляют три линейно независимых решения:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной системы, согласно (10), имеет вид

$$X_{00} = c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3,$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные константы.

в) Частное решение можно получить из общего решения, придавая определённые значения произвольным постоянным. Решения E_1, E_2, E_3, образующие фундаментальную систему решений, являются частными решениями этой однородной системы.

2) Считая матрицу $C_{4\times5}$ расширенной матрицей неоднородной системы $C^*X = C^{**}$, где $C = (C^*|C^{**})$, решить эту систему, предварительно исследовав её на совместность по теореме Кронекера–Капелли.

Решение. Неоднородная система $C^*X = C^{**}$ имеет вид

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 3, \\ 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 20x_4 = 3, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 15. \end{cases}$$

Чтобы исследовать систему на совместность по теореме Кронекера–Капелли, нужно проверить равенство $r(C^*)=r(C^*|C^{**})$. Из таблицы следует, что $r(C^*) = r(C^*|C^{**})=2$, значит система совместна.

Так как ранг матрицы меньше числа неизвестных $n= 4$, то система является неопределенной. Множество всех решений неоднородной системы получим, решив равносильную ей систему, полученную методом Жордана–Гаусса:

$$\begin{cases} x_3 + 8x_4 = -3; \\ -3x_1 + x_2 + 10x_4 = -9. \end{cases}$$

Базисные переменные x_2, x_3 выразим через свободные переменные x_1, x_4:

$$\begin{cases} x_2 = -9 + 3x_1 - 10x_4; \\ x_3 = -3 - 8x_4. \end{cases}$$

Полагая свободные переменные равными произвольным постоянным $x_1= c_1$, $x_4= c_4$, находим общее решение неоднородной системы в виде

$$X = \begin{pmatrix} c_1 \\ -9+3c_1-10c_4 \\ -3-8c_4 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

2. Векторная алгебра и аналитическая геометрия

2.1. Векторная алгебра

Трехмерное векторное пространство R_3 есть частный случай R_n при $n=3$. Декартов прямоугольный базис в R_3 образуют три единичных, взаимно перпендикулярных вектора:

$$\bar{i} = \bar{e}_1 = (1,0,0);$$

$$\bar{j} = \bar{e}_2 = (0,1,0);$$

$$\bar{k} = \bar{e}_3 = (0,0,1).$$

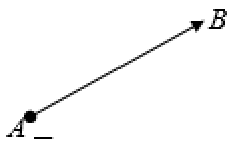
Совокупность начала координат (точки O) и декартова прямоугольного базиса называется декартовой прямоугольной системой координат $Oxyz$.

Согласно формуле (9) любой вектор $\bar{a}$ в R_3 можно разложить единственным образом по $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, т. е. представить в виде

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k},$$

где a_x – координата вектора по оси OX; a_y – координата вектора по оси OY; a_z – координата вектора по оси OZ.

Наряду с аналитическим заданием вектора как упорядоченной тройки чисел в R_3 рассматривают вектор как направленный отрезок, имеющий начало и конец. Конец вектора отмечается стрелкой.



$$\bar{a} = \overline{AB}$$

A – начало вектора,
B – конец вектора.

Длина отрезка *AB* называется *модулем вектора* и обозначается $|\bar{a}|$ или $|\overline{AB}|$.

Если известны координаты вектора $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z),$ то модуль вектора вычисляется по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{11}$$

Радиусом-вектором точки в декартовой прямоугольной системе координат называется вектор, начало которого расположено в начале координат, а конец в данной точке *A*, т. е. вектор $\overline{OA}$.

Координатами точки *A* называются координаты её радиуса-вектора. Если $\overline{OA} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k},$ то (a_x, a_y, a_z) координаты точки *A*.

Пусть вектор $\bar{a} = \overline{AB},$ причём заданы координаты точек *A* и *B*: $A(a_x, a_y, a_z)$ и $B(b_x, b_y, b_z).$ Тогда координаты вектора $\overline{AB}$ равны разности одноимённых координат конца и начала:

$$\overline{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z). \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует формула для расстояния между двумя точками *A* и *B*:

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}. \tag{13}$$

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число (скаляр), обозначаемое $(\bar{a}, \bar{b})$, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi, \tag{14}$$

где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

В декартовой прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов вычисляется по формуле

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z, \tag{15}$$

где $(a_x,\,a_y,\,a_z)$ – координаты вектора $\bar{a}$; $(b_x,\,b_y,\,b_z)$ – координаты вектора $\bar{b}$.

Из (14) и (15) получается формула для вычисления косинуса угла между двумя векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{16}$$

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *ортогональными* (обозначаются $\bar{a}\perp\bar{b}$), если угол φ между ними равен прямому, т. е. $\cos\varphi = 0$. Условие ортогональности векторов:

$$a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0. \tag{17}$$

Упорядоченная тройка векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называется *правой*, если из конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму $\bar{b}$ виден происходящим против часовой стрелки, и называется *левой*, если такой поворот происходит по часовой стрелке.

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}=\left[\bar{a},\,\bar{b}\right]$, такой что:

1) $\bar{c}\perp\bar{a},\bar{c}\perp\bar{b}$, т. е. $\bar{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) направлен так, что тройка $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – правая;

3) модуль вектора $\bar{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, как на сторонах, т. е.

$$\left|\bar{c}\right| = S_{\square} = \left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\sin\varphi. \qquad (18)$$

Если $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z), \bar{b} = (b_x, b_y, b_z),$ то для векторного произведения справедлива формула

$$\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (19)$$

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется число (обозначаемое ($\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$)), равное скалярному произведению векторного произведения первых двух векторов на третий:

$$\left(\left[\bar{a}, \bar{b}\right], \bar{c}\right) = \left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right).$$

Смешанное произведение векторов по абсолютной величине равно объему параллелепипеда $V_{\text{пар}}$, построенного на этих векторах, как на сторонах, т. е.

$$V_{\text{пар}} = \left|\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)\right|. \qquad (20)$$

Если

$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z), \bar{b} = (b_x, b_y, b_z), \bar{c} = (c_x, c_y, c_z),$ то справедлива формула

$$\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (21)$$

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или параллельных прямых. Условие коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

1) в векторной форме $\bar{b} = \lambda\bar{a},$ где λ – скаляр;
2) в координатной форме

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda.$$

Векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называются *компланарными*, если они лежат в одной или параллельных плоскостях. Условие компланарности трёх векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$:

1) в векторной форме: $\bar{c}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b},$ где λ, μ – числа;

2) в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0. \qquad (22)$$

Пример 2.1. Даны координаты вершин треугольной пирамиды: A_1 (–1, 0, 1), A_2 (2, 3, 1), A_3 (0, –2, 2), A_4 (1, –1, 5).

Требуется найти:

а) длины рёбер A_1A_2 и A_1A_3;

б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;

в) площадь грани $A_1A_2A_3$;

г) объём пирамиды $A_1A_2A_3$ A_4.

Рис. 1. Треугольная пирамида

а) Используем формулы (12) и (13) и определим координаты векторов:

$$\overline{A_1A_2}=(2-(-1),\ 3-0,\ 1-1)=(3,\ 3,\ 0);\ \overline{A_1A_3}=(0-(-1),\ -2-0,\ 2-1)=(1,\ -2,\ 1).$$

Ребро

$$A_1A_2=\left|\overline{A_1A_2}\right|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\text{ ед.},$$

$$A_1A_3=\left|\overline{A_1A_3}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{18}=\sqrt{6}\text{ ед.}$$

б) Угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_3 рассматриваем как угол между векторами $\overline{A_1A_2}=(3,\ 3,\ 0)$ и $\overline{A_1A_3}=(1,\ -2,\ 1).$

По формуле (14) для косинуса угла между двумя векторами получим:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_3}\right)}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\left|\overline{A_1A_3}\right|} = \frac{3\cdot1+3(-2)+0\cdot1}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3-6+0}{3\sqrt{12}} = \frac{-3}{6\sqrt{3}} = \frac{-3}{2\sqrt{3}},$$

$$\varphi = \pi - \arccos\frac{3}{2\sqrt{3}}.$$

в) Грань $A_1A_2A_3$ есть треугольник, площадь которого равна половине площади параллелограмма $A_1A_2A_6A_3$, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$. По формуле (18): $S_Y = \left|\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right]\right|.$

Вычислим векторное произведение векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$ по формуле (19):

$$\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(3\cdot1-(-2)0\right)i - \left(3\cdot1-1\cdot0\right)j + \left(3\cdot(-2)-1\cdot3\right)k = 3i-3j-9k.$$

$$S_{\square} = \left|\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right]\right| = \sqrt{3^2+(-3)^2+(-9)^2} = \sqrt{9+9+81} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}\ \text{åä}^2.$$

$$S_{\square} = \frac{1}{2}S_{\square} = \frac{3\sqrt{11}}{2}\ \text{åä}^2.$$

г) Объём треугольной пирамиды $V_{\text{пир}}$ равен 1/6 объёма параллелепипеда $V_{\text{пар}}$, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$, как на сторонах. Из свойств смешанного произведения следует, что:

$$V_{\text{пар}} = \left|\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right)\right|,$$

следовательно, $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right)\right|.$

Определим координаты вектора

$$\overline{A_1A_4} = (1-(-1), -1-0, 5-1) = (2, -1, 4).$$

По формуле (21) имеем:

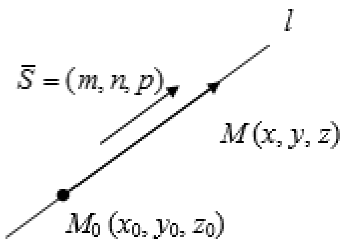
$$\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-8-(-1) - 3(4-2) + 0 = 3(-7) - 3\cdot 2 = -27.$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|-27\right| = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ ед}^3.$$

2.2. Элементы аналитической геометрии в R_3

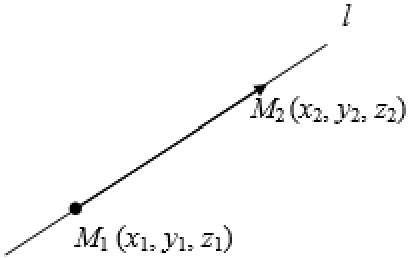
Направляющим вектором прямой называется любой вектор $\overline{S}$, лежащий на этой прямой или ей параллельной и отличный от нуль-вектора, т. е. $\overline{S} \parallel l$ и $\overline{S} \neq \overline{0}.$



Канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку M_0 с данным направляющим вектором $\overline{S}$, имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \qquad (23)$$

где (x, y, z) – координаты текущей точки прямой; (x_0, y_0, z_0) – координаты данной точки на прямой; (m, n, p) – координаты направляющего вектора прямой.



Если на прямой заданы две точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, то в качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\overline{M_1M_2}$:

$$\overline{S} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).$$

Рассматривая в качестве данной точки точку M_1 и используя уравнение (23), получим уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{24}$$

Пусть прямая l_1 имеет направляющий вектор $\overline{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и прямая l_2 – направляющий вектор $\overline{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Угол φ между прямыми l_1 и l_2 определяется как угол между их направляющими векторами $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, по формуле (15) получаем:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overline{S}_1, \overline{S}_2\right)}{\left|\overline{S}_1\right|\left|\overline{S}_2\right|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

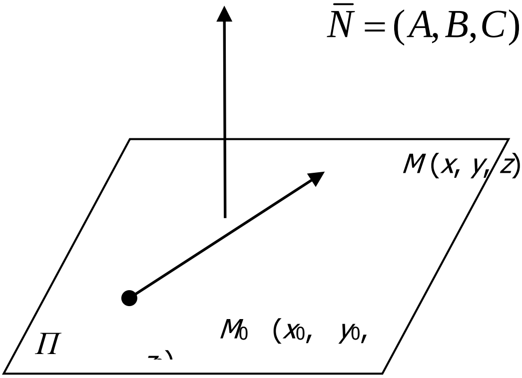
$l_1 \parallel l_2$, если $\overline{S}_1 \parallel \overline{S}_2$, т. е. по условию коллинеарности (21)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Критерий перпендикулярности прямых $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{S}_1 \perp \overline{S}_2$. Тогда по условию ортогональности векторов (16) $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$

Нормальным вектором плоскости (Π) называется любой вектор $\bar{N}$, перпендикулярный к плоскости и отличный от нуль-вектора:

$$\bar{N}=(A,B,C)$$



$\bar{N}\perp\Pi$ и $\bar{N}\neq\bar{0}.$

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_0 плоскости и имеющей данный нормальный вектор $\bar{N}$, имеет вид

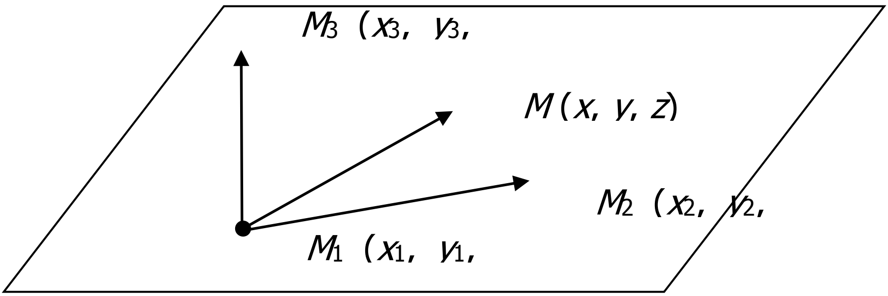
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \quad (25)$$

где A, B, C – координаты нормального вектора $\bar{N}$; x_0, y_0, z_0 – координаты данной точки плоскости; x, y, z – координаты текущей точки плоскости.

Если в уравнении (25) раскрыть скобки, то его можно записать в виде

$$Ax+By+Cz+D=0. \quad (26)$$

Уравнение (26) называется *общим уравнением плоскости*.

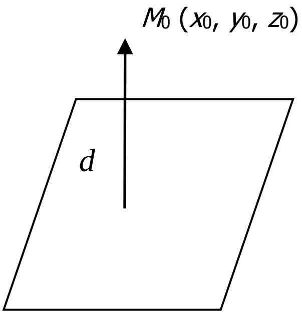


Три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ (не лежащие на одной прямой) определяют плоскость в R_3. Уравнение такой плоскости можно получить из условия компланарности (22) трёх векторов $\overline{M_1M}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1),$

$$\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$ и
$$\overline{M_1M_3}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1):$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \qquad (27)$$

где x, y, z – координаты текущей точки M; x_1, y_1, z_1 – координаты данной точки M_1; x_2, y_2, z_2 – координаты данной точки M_2; x_3, y_3, z_3 – координаты данной точки M_3.



Пусть плоскость П задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0.$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости П вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (28)$$

Угол между двумя плоскостями, нормальные векторы которых $\bar{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\bar{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$, вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{N}_1,\bar{N}_2)}{|\bar{N}_1||\bar{N}_2|}.$$

Критерий параллельности плоскостей:

$$\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \bar{N}_1 \parallel \bar{N}_2, \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

Критерий перпендикулярности плоскостей:

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \bar{N}_1 \perp \bar{N}_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Угол ψ между прямой и плоскостью определяется как дополнительный к углу φ между направляющим вектором прямой и вектором нормали к плоскости. Таким образом, $\psi=90^0-\varphi$ и получаем:

$$\sin\psi = \cos\varphi = \frac{\left(\vec{S}, \vec{N}\right)}{\left|\vec{S}\right| \cdot \left|\vec{N}\right|}. \qquad (29)$$

Пример 2.1 (продолжение, п. д–з). Даны координаты вершин треугольной пирамиды A_1 (–1, 0, 1), A_2 (2, 3, 1), A_3 (0, –2, 2), A_4 (1, –1, 5).

Требуется найти:

д) канонические уравнения прямой l, проходящей через точки A_1 и A_4;

е) уравнение плоскости П, проходящей через точки A_1, A_2, и A_3;

ж) угол между прямой l и плоскостью П;

з) высоту пирамиды.

Решение:

д) Для нахождения канонических уравнений прямой A_1A_4 используем уравнение (24) прямой, проходящей через две точки A_1 (–1, 0,1) и A_4 (1,–1, 5):

$$A_1A_4: \quad \frac{x-(-1)}{2-1} = \frac{y-0}{3-(-1)} = \frac{z-1}{1-5}$$ или

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-4}.$$

е) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ получим, используя уравнение плоскости, проходящей через три данные точки A_1(–1,0,1), A_2 (2, 3, 1), A_3 (0, –2, 2), формула (27):

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-0 & z-1 \\ 2-(-1) & 3-0 & 1-1 \\ 0-(-1) & -2-0 & 2-1 \end{vmatrix} = 0$$ или

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по элементам первой строки, получим:

$$(x+1)\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix} - y\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix}3 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix} = 0; \quad 3(x+1)-3y-9$$

Делим все члены уравнения на 3 и раскрываем скобки:
$x+1-y-3z+3=0.$

Окончательно уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид
$x-y-3z+4=0.$

ж) Угол между прямой l и плоскостью П найдём по формуле (29). Уравнение прямой l получено в пункте д) и имеет вид

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-4}.$$

Координаты направляющего вектора – это числа в знаменателях, следовательно: $\vec{S}=(1,4,-4)$. Уравнение плоскости П получено в пункте е) и имеет вид $x-y-3z+4=0.$ Следовательно, нормальный вектор плоскости $\bar{N}$ имеет координаты, равные коэффициентам при x, y, z в уравнении плоскости, т. е. $\bar{N}=(1,-1,-3).$

Используем формулу (29):

$$\sin\psi=\frac{1\cdot1+4\cdot(-1)-4\cdot(-3)}{\sqrt{1^2+4^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2}}=\frac{9}{\sqrt{33}\sqrt{11}}=\frac{9}{11\sqrt{}}$$

$$\psi=\arcsin\frac{9}{11\sqrt{3}}.$$

з) Высоту пирамиды (отрезок A_4A_5 (рис. 1)) можно определить как расстояние точки A_4 (1, –1, 5) до плоскости $A_1A_2A_3$: $x-y-3z+4=0$ по формуле (28):

$$h=A_4A_5=\frac{|1-(-1)-3\cdot5+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2}}=\frac{|1+1-15+4|}{\sqrt{11}}=\frac{|-9|}{\sqrt{11}}=\frac{9}{\sqrt{11}}$$

2.3. Кривые второго порядка

Кривой второго порядка называется плоская линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих декартовых координат (*x*, *y*). В общем случае это уравнение имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (30)$$

где коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* – действительные числа, и, по крайней мере, одно из чисел *A*, *B*, *C* отличное от нуля, т. е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$

Теорема (преобразование общего уравнения кривой второго порядка поворотом декартовой системы координат). Поворотом декартовой системы координат *Oxy* общее уравнение кривой второго порядка всегда можно преобразовать так, что относительно новой системы координат в уравнении будет отсутствовать член с произведением *xy*.

Таким образом, в соответствующей системе координат каждая кривая второго порядка определяется уравнением вида

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (31)$$

при этом $(A^2 + C^2 \neq 0).$

Теорема. Если в уравнении (31):

1) *A·C*>0, то уравнение эллиптического типа. Оно определяет или эллипс, или точку, или мнимое место точек.

2) *A·C*<0 – уравнение гиперболического типа. Определяет или гиперболу, или пару пересекающихся прямых.

3) *A·C*=0 – уравнение параболического типа. Определяет или параболу, или пару параллельных прямых.

К каноническому виду уравнение (31) можно преобразовать с помощью параллельного переноса декартовой системы координат.

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух данных точек плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обычно обозначают 2*a*).

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (32)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$, $2c$ – расстояние между фокусами F_1 и F_2.

Вид эллипса, определяемого уравнением (32), изображен на рис. 2.

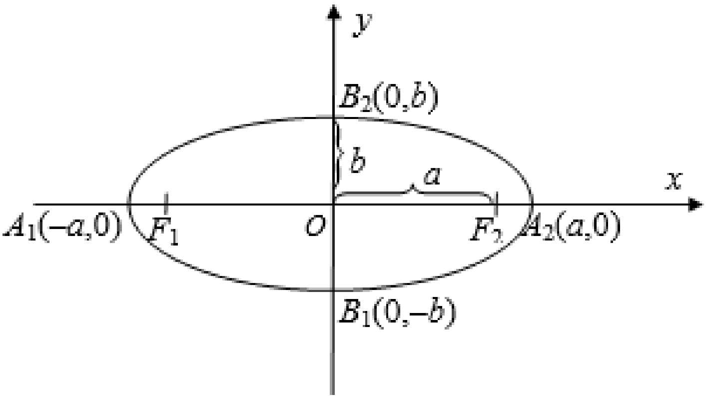


Рис. 2. Эллипс

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ – вершины эллипса; $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы эллипса; a – полуось по оси Ox; b – полуось по оси Oy; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – половина фокусного расстояния.

Центр эллипса находится в начале координат O (0, 0). Если центр эллипса расположен в точке O_1 (x_0, y_0), а оси симметрии параллельны осям координат, то уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (33)$$

Окружность есть частный случай эллипса, когда полуоси эллипса a и b равны и равны радиусу окружности r.

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности ее расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$.

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (34)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$, $2c$ – расстояние между фокусами F_1 и F_2.

График гиперболы, определяемой уравнением (34), схематически изображен на рис. 3.

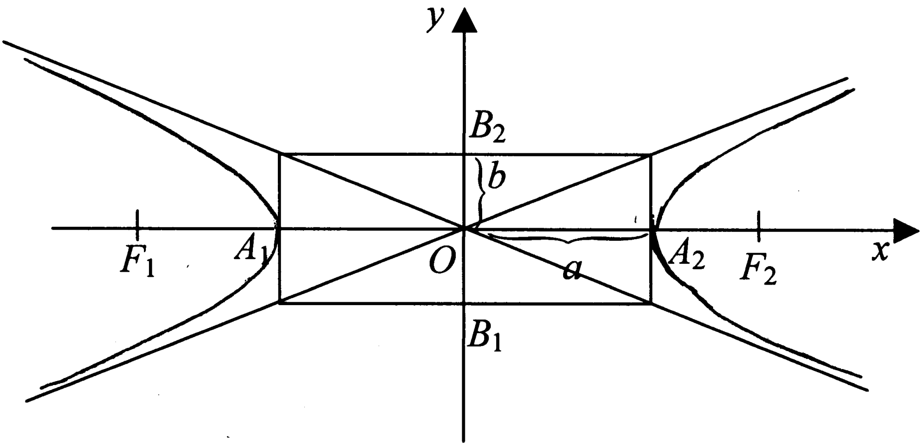


Рис. 3. Гипербола

Точки $A_1(-a,\ 0)$, $A_2(a,\ 0)$ – действительные вершины гиперболы; $B_1(0,\ -b)$, $B_2(0,\ b)$ – мнимые вершины гиперболы; $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$ – фокусы; a – действительная полуось; b – мнимая полуось; c – половина фокусного расстояния.

Центр гиперболы – точка пересечения ее осей симметрии – находится в начале координат $O\,(0,\ 0)$.Если центр гиперболы расположен в точке O_1 $(x_0,\ y_0)$, а оси симметрии параллельны осям координат, то уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (35)$$

Гипербола, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \qquad (36)$$

называется *сопряженной* к гиперболе (34). Ее действительные вершины расположены на оси Oy в точках $B_1(0,\ -b)$, $B_2(0,\ b)$, фокусы $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$ также лежат на оси Oy.

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки плоскости, называемой *фо-*

кусом, и от данной прямой, называемой *директрисой*.

Каноническое уравнение

$y^2 = 2px$ (37)

определяет параболу с осью симметрии, совпадающей с осью Ox, вершиной в начале координат и ветвями, направленными в положительном направлении оси Ox, ее схематический вид приведен на рис.4. Параметр $p>0$ равен расстоянию от фокуса до директрисы.

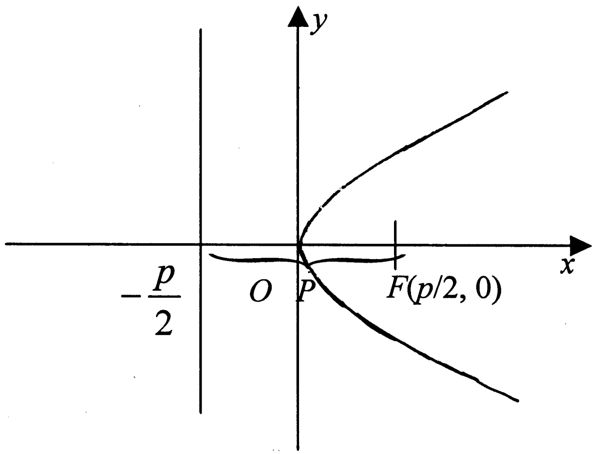


Рис. 4. Парабола

Уравнение $y^2 = -2px$ определяет параболу, симметричную относительно оси Ox; ветви параболы повернуты влево.

Уравнение $x^2 = 2py$ определяет параболу, симметричную относительно оси Oy, с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вверх. Уравнение $x^2 = 2py$ задает параболу, ветви которой направлены вниз.

Парабола со смещенной вершиной, расположенной в точке O_1 (x_0, y_0), и осью симметрии, параллельной оси Ox или Oy, задается одним из уравнений

$$(y-y_0)^2 = \pm 2p(x-x_0); \qquad (x-x_0)^2 = \pm 2p(y-y_0).$$

Все сведения о кривых второго порядка приведены в таблице прил.1.

Пример 2.2. Кривая второго порядка задана общим уравнением $x^2 + 25y^2 - 6x - 50y + 9 = 0.$ Определить тип кривой, найти её каноническое уравнение и каноническую систему координат. Построить кривую и обе системы координат.

Решение. Сравним уравнение $x^2+25y^2-6x-50y+9=0$ с общим уравнением кривой вида (31):

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Для данного уравнения $A = 1$, $C = 25$, т. е. $A \cdot C = 25 > 0$. Согласно теореме уравнение является уравнением эллиптического типа. Преобразуем его, выделяя полные квадраты по переменным x и y:

$$(x^2-6x)+25(y^2-2y)+9=0;$$

$$(x^2-6x+3^2-3^2)+25(y^2-2y+1-1)+9=0;$$

$$(x-3)^2-9+25(y-1)^2-25+9=0;$$

$$(x-3)^2+25(y-1)^2=25.$$

Поделив обе части уравнения на 25, получим

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{1}=1.$$

Данное уравнение является уравнением эллипса с центром в точке $O_1(3,\ 1)$, осями симметрии, параллельными осям исходной системы координат, и полуосями $a = 5$ и $b = 1$.

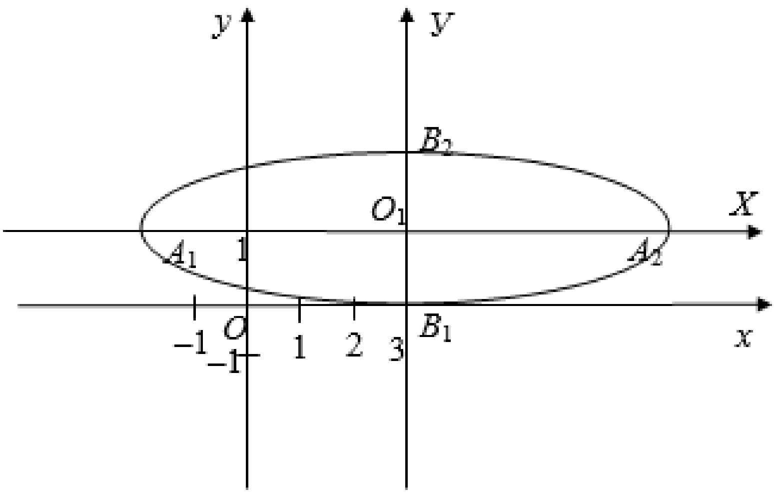
Чтобы записать каноническое уравнение эллипса, введем новую систему координат с центром в точке $O_1(3,\ 1)$ и осями, параллельными осям исходной системы, по формулам:

$$\begin{cases} X = x-3, \\ Y = y-1. \end{cases}$$

В новой системе O_1XY уравнение эллипса принимает вид

$$\frac{X^2}{25}+\frac{Y^2}{1}=1.$$

Построим эллипс и обе системы координат:



. Производная функции одной переменной и её приложения

3.1. Производная, её геометрический и механический смысл,
применение в экономике

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Обозначения производной в точке x_0:

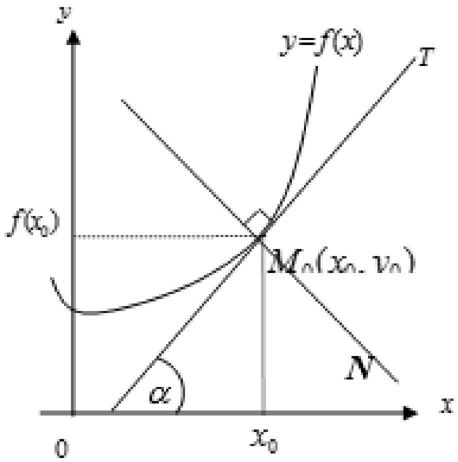
$$f'(x_0), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \left.y'_x\right|_{x_0}, \quad y'(x_0).$$

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой* *в этой точке* (или на промежутке *X*).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*.

Геометрический смысл производной

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$ – угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($k = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$).



Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 (прямая M_0T) имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad (38)$$

а уравнение нормали (M_0N):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (39)$$

Правила и формулы дифференцирования даны в прил. 2 в виде таблиц.

Механический смысл производной

Если точка движется по закону $S=s(t)$, где S – путь, t – время, то $S'(t)$ представляет скорость движения точки в момент времени t, т. е. $S'(t) = V(t)$.

Применение производной в экономике

1. *Предельные величины*. В экономике используются предельные характеристики объектов и процессов, которые характеризуют не состояние, а скорость изменения экономического объекта или процесса во времени или относительно другого исследуемого фактора. Например, если издержки производства $y = f(x)$ рассматривать как функцию выпускаемой продукции *x*, то $y' = f'(x)$ есть предельные издержки производства, приближённо характеризующие прирост переменных затрат на производство дополнительной единицы продукции. Средние издержки – это издержки на единицу выпуска продукции, т.е. $\dfrac{f(x)}{x}$.
2. *Эластичность*. Это мера реагирования одной переменной на изменение другой, она приближённо показывает, на сколько процентов изменится одна переменная в результате изменения другой переменной на 1% и определяется формулой

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'_x. \tag{40}$$

Производной n-го порядка называется производная от производной (*n*–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Пример 3.1. Найти производные функций:

а) $y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$;

б) $s = (e^t - 2\ln t)\sin t$; *в*) $u = \operatorname{ctg}^3 \dfrac{v}{3}$;

$$z=\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}.$$

г)

Решение:

а) Используя правила I, III и формулу 3 (прил. 2), получим:

$$y'=(3x^5+\sqrt[3]{x^2}-4/x^3)'=3(x^5)'+(x^{2/3})'-4(x^{-3})'=$$

$$=3\cdot5x^4+\frac{2}{3}x^{-1/3}-4(-3x^{-4})=15x^4+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы 5, 7, 8 (прил. 2) и учитывая, что независимая переменная есть *t*, т. е. *t*′=1, получим:

$$s=[(e^t-2\ln t)\sin t]'=(e^t-2\ln t)'\sin t+(e^t-2\ln t)(\sin t)'=$$

$$=((e^t)'-2(\ln t)')\sin t+(e^t-2\ln t)\cos t=\left(e^t-\frac{2}{t}\right)\sin t+(e^t-2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть *v*, т. е. *v*′=1; используя формулу 3 (прил. 2), получим:

$$u'=\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right]=2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)'=2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right)=$$

$$=2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right)=-\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}}=-\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы 3, 14 (прил. 2), учитывая, что *t*′=1, получаем:

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg} 2t}{1+4t^2}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg} 2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg} 2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \operatorname{arctg} 2t(0+4\cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t\operatorname{arctg} 2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Пример 3.2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\sqrt{x^2-3}$ в точке с абсциссой x_0=2.

Используем уравнения касательной (38) и нормали (39):

1) $y(x_0) = y(2) = \sqrt{2^2-3} = 1;$

2)

$$y'(x) = ((x^2-3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}(x^2-3)' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}};$$

$$y'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2-3}} = 2.$$

Подставим $x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0)$ в уравнения и получим: $y = 1+2(x-2),$ или $2x-y-3=0$ – уравнение касательной.

$y = 1-\frac{1}{2}(x-2),$ или $x+2y-4=0$ – уравнение нормали.

Пример 3.3. Найти производную y'_x, если функция задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \ln(5-2t); \\ y = \operatorname{arctg}(5-2t)\ . \end{cases}$$

Используем правило VII (прил. 2): $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}.$

$$\begin{cases} x'_t = \dfrac{(5-2t)'}{5-2t} = \dfrac{-2}{5-2t}; \\ y'_t = \dfrac{(5-2t)'}{1+(5-2t)^2} = \dfrac{-2}{1+(5-2t)^2} \end{cases}.$$

$$y'_x = \frac{-2}{1+(5-2t)^2} : \frac{-2}{5-2t} = \frac{5-2t}{1+(5-2t)^2} = \frac{5-2t}{4t^2-20t+26}.$$

Пример 3.4. Найти дифференциалы функций:

а) $y = x + \cos 2x;$ *б)* $u = 3 + e^{-x};$ *в)* $s = \ln 3t.$

Для дифференциала функции $y = y(x)$ справедлива формула $dy = y'(x)dx,$ т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной.

Решение:

а)

$$dy = (x+\cos 2x)'dx = (1-\sin 2x\cdot 2)dx = (1-2\sin 2x)dx.$$

б) $$du = (3+e^{-x})'dx = e^{-x}(-1)dx = -e^{-x}dx.$$

в) $$ds = (\ln 3t)'dt = \frac{(3t)'}{3t}dt = \frac{3}{3t}dt = \frac{1}{t}dt.$$

Пример 3.5. Найти производную первого порядка вектор-функции скалярного аргумента $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, если $x(t) = \ln(t^3),\ \ y(t) = 5t - \cos t, z(t) = e^{-2t}$.

Используем правило дифференцирования вектор-функции:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Найдем $x'(t) = \dfrac{1}{t^3}\cdot 3t^2 = \dfrac{3}{t}$, $y'(t) = 5 + \sin t$, $z'(t) = -2e^{-2t}$. Тогда производная вектор-функции:

$$\vec{r}'(t)=\frac{3}{t}\vec{i}+(5+\sin t)\vec{j}-2e^{-2t}\vec{k}.$$

Пример 3.6.Дана функция издержек производства продукции $y=0,1x^3-1,2x^2+5x+250$ (ден. ед.), где x – количество выпускаемой продукции. Найти средние и предельные издержки производства, вычислить их значения при $x=10$ и объяснить экономический смысл полученного результата.

Решение. Найдём производную $y'(x)$ и её значение $y'(10)$ – предельные издержки производства:

$$y'(x)=0,3x^2-2,4x+5; \quad y'(x)=30-24+5=11.$$

Средние издержки:

$$y_1(x)=\frac{y(x)}{x}=\frac{0,1x^3-1,2x^2+5x+250}{x}=0,1x^2-1,2x+5+\frac{250}{x};$$

$$y_1(x)=10-12+5+25=28.$$

Это означает, что при данном уровне производства средние затраты на производство одной единицы продукции составляют 28 ден. ед., а увеличение объёма на одну единицу продукции обойдётся приблизительно в 11 ден. ед.

Пример 3.7.Даны функции спроса $q(p)=\frac{3p+14}{p+3}$ и предложения $s=p+2$, где *q*и *s*– количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, *p* – цена единицы товара. Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения, вычислить их значения для равновесной цены и пояснить экономический смысл полученного результата; в) изменение дохода при увеличении цены на 10% от равновесной.

Решение:

а) Равновесная цена определяется из условия *q*=*s*, т.е. $\frac{3p+14}{p+3}=p+2,$ корни этого уравнения $p_{1,2}=-4,2.$ Отрицательный корень не имеет смысла, следовательно, равновесная цена равна 2 ден. ед.

б) Найдём эластичности по спросу и предложению по формуле (40). Для этого сначала найдём производные q'_p и s'_p:

$$q'_p=\frac{(3p+14)'(p+3)-(3p+14)(p+3)'}{(p+3)^2}=\frac{3(p+3)-(3p+14)}{(p+3)^2}=-\frac{5}{(p+3)^2}; \quad s'_p=1.$$

Подставляя в формулу (40), получаем:

$$E_p(q)=\frac{p(p+3)}{3p+14}\cdot\left(-\frac{5}{(p+3)^2}\right)=-\frac{5p}{(3p+14)(p+3)}; \quad E_p(s)=\frac{p}{p+2}.$$

Для равновесной цены p=2 имеем:

$$E_{p=2}(q)=-\frac{5\cdot 2}{(3\cdot 2+14)(2+3)}=-0{,}1; \quad E_{p=2}(s)=\frac{2}{2+2}=0{,}5.$$

Согласно экономическому смыслу эластичности это означает, что при изменении цены на 1% спрос уменьшится приблизительно на 0,1%, а предложение увеличится на 0,5%. Так как полученные значения эластичности по абсолютной величине меньше единицы, то спрос и предложение данного товара при равновесной цене неэластичны относительно цены, т.е. изменение цены не приведёт к резкому изменению спроса и предложения.

в) При увеличении цены з на 10%, спрос уменьшиться на $0{,}1\cdot 10=1\%$, следовательно, доход pq возрастёт приблизительно на 10%.

Пример 3.8. Найти производную и дифференциал второго порядка функции $y=x^2\ln x.$

Решение. Согласно определению $y''=(y')'$. Для дифференциала первого порядка функции $y=y(x)$ справедлива формула $dy=y'(x)dx,$ т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной. Если x – независимая переменная, то дифференциал второго порядка определяется формулой $d^2y=y''(x)dx^2.$

Найдём производную первого порядка $y',$ а затем второго

$$y'' = (y')',$$

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

$$y'' = (x(2\ln x + 1))' = x'(2\ln x + 1) + x(2\ln x + 1)' = 2\ln x + 1 + x\frac{2}{x} = 2\ln x + 3.$$

Тогда дифференциал второго порядка:

$$d^2 y = (2\ln x + 3)dx^2.$$

Пример 3.9. Точка движется прямолинейно по закону $s = (3t-1)^2 + 4.$ Вычислить скорость и ускорение в момент времени $t_0=2$.

Скорость

$$V(t) = s'(t) = [(3t-1)^2 + 4]' = 2(3t-1)3 = 6(3t-1).$$

$V(2) = 6(3\cdot 2 - 1) = 6\cdot 5 = 30$ (ед. скорости).

Ускорение $a(t) = V'(t) = s''(t).$ $a(t) = (6(3t-1))' = 18,$ т. е. ускорение постоянно в любой момент времени, следовательно, $a(2)$ = 18 ед. ускорения.

3.2. Краткие сведения из теории пределов функции

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0,$ зависящее от ε, такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon.$

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* (б.м.ф.) при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0 \left(\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0 \right).$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* (б.б.ф.) при

$x \to x_0$, ($x \to \infty$), если для любого *M*>0 найдётся число $\delta > 0$, зависящее от *M*, такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет верно неравенство $|f(x)| > M$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \right)$.

Если α(*x*) есть б. м.ф. при $x \to x_0$ (или $x \to \infty$), то, функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ является б. б., и обратно, если *f*(*x*) б.б.ф. при $x \to x_0$, то $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ является б.м.ф.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ б.м.ф. при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то, чтобы сравнить их, нужно вычислить предел их отношения. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k.$ Тогда: при $k = 0$ $\alpha(x)$ называется б.м. более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$; при $0 < k < \infty$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости; при $k = \infty$ $\alpha(x)$ более низкого порядка малости, чем $\beta(x)$.Если $k = 1$, то б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*: $\alpha(x) \sim \beta(x).$

Предел отношения двух б.м.ф. не изменится, если каждую б.м.ф. заменить на эквивалентную.

Примеры эквивалентных б.м.ф. при $\alpha(x) \to 0$:

$$\alpha(x) \sim \sin \alpha(x) \sim \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \arcsin \alpha(x) \sim$$

$$\sim \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim e^{\alpha(x)} - 1 \sim a^{\alpha(x)} - 1 \sim \ln a \sim \ln(1 + \alpha(x)).$$

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (*c*=const).

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \ \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B,$ то:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел (число *e* = 2,718…):

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$ или $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e.$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x),$ нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x=x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c = \text{const}, \quad c \neq 0, \quad c \neq \infty,$ то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$$\frac{0}{c} \to 0; \quad \frac{c}{0} \to \infty; \quad \frac{\infty}{c} \to \infty; \ c\cdot\infty \to \infty; c\cdot 0 \to 0; \ a^{\infty} \to 0,$$

если $0 < a < 1; a^{\infty} \to \infty,$ если $a>1$.

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right); \quad \left(\frac{0}{0}\right); \quad (0\cdot\infty); \quad (\infty - \infty); \ (1^{\infty}); \ (\infty^0); \ (0^0).$$

Устранить неопределенность можно с помощью алгебраических преобразований или используя правило Лопиталя.

Правило Лопиталя. Предел отношения двух б.м. $\left(\frac{0}{0}\right)$ или б.б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (41)$$

Чтобы использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей других типов, выражение под знаком предела следует преобразовать элементарными способами так, чтобы получить неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и затем использовать формулу (41).Если, применив правило Лопиталя, снова получили неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то снова применяем правило до тех пор, пока неопределённость не будет раскрыта.

Пример 3.10. Найти пределы, используя правило Лопиталя или элементарные способы раскрытия неопределённостей:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x-3}{x^2+6}$; *б*) $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4+x}}{\operatorname{tg}5x}$.

Решение:

а) Подставляя в функцию вместо *x* предельное значение ∞, определим предел числителя и знаменателя.

$$\lim_{x\to\infty}(4x^3+2x-3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(4+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)=\infty\cdot 4=\infty,$$

так как $\dfrac{2}{x^2}\to 0,\ \dfrac{3}{x^3}\to 0.$

Аналогично: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+6)=\infty.$ Имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^3+2x-3)'}{(x^2+6)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+2}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(12x^2+2)'}{(2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{2}=\lim_{x\to\infty}12x=\infty.$$

б) $$\lim_{x\to-7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}=\lim_{x\to-7}\frac{2(-7)^2+15(-7)+7}{(-7)^2+5(-7)-14}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-7}\frac{(2x^2+15x+7)'}{(x^2+5x-14)'}=\lim_{x\to-7}\frac{4x+15}{2x+5}=\lim_{x\to-7}\frac{4(-7)+15}{2(-7)+5}=\frac{-13}{-9}=\frac{13}{9}.$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4+x}}{\operatorname{tg}5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4+0}}{\operatorname{tg}(5\cdot 0)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(2-\sqrt{4+x})'}{(\operatorname{tg}5x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(4+x)^{-1/2}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2 5x}{10\sqrt{4+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2(5\cdot 0)}{10\sqrt{4+0}}=\frac{-1}{20}.$$

3.3. Исследование функций и построение графиков

Приведём общую схему исследования и построения графика функции.

1. **Область определения функции (о.о.ф.)**. *Областью определения D(f) функции* $y=f(x)$ называется множество всех $x\in X$ таких, что выражение *f*(*x*) имеет смысл, т. е. взяв любое $x\in X$ и подставив в *f*(*x*), можно найти соответствующее значение функции *f*(*x*).
2. **Область непрерывности функции.** Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она: 1) определена в точке x_0; 2) имеет конечный предел при $x\to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Функция называется непрерывной на некотором промежутке *X*, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1—3 непрерывности функции. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.
3. **Чётность, нечётность функции.** Функция $y=f(x)$ называется *чётной*, если $f(-x)=f(x)$, её график симметричен относительно оси *OY*. Функция $y=f(x)$ называется *нечётной*, если $f(-x)=-f(x)$, её график симметричен относительно начала координат. Остальные функции называются *функциями общего вида*.
4. **Точки пересечения графика функции с осями**

координат. Пересечение с осью *OY* $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$; пересечение с осью *OX* $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0. \end{cases}$

5. **Асимптоты графика функции.** *Асимптотой кривой* $y = f(x)$ называется прямая *l*, такая, что расстояние точки $(x, f(x))$ от этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки по кривой от начала координат. Различают вертикальные и наклонные асимптоты. Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если x_0 есть точка бесконечного разрыва функции, т. е. если хотя бы один из односторонних пределов функции $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty.$ Прямая $y = kx + b$ есть наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$, если $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}, \; b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - x],$ причем оба предела существуют и конечны.

6. **Интервалы монотонности и точки локального экстремума функции**. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на (*a*, *b*) $(f(x)$□$)$, если для $x_2 > x_1 \in (a,b)$ $f(x_2) > f(x_1).$ Функция $f(x)$ называется *убывающей* на (*a*, *b*) $(f(x)$□$)$, если для $x_2 > x_1 \in (a,b)$ $f(x_2) < f(x_1).$ Функция называется монотонной на (*a*, *b*), если $f(x)$ только □ или только □ на (*a*, *b*). Если для всех

$x \in (a,b)$ $f'(x) > 0,$ то $f(x)$□ на (a, b). Если для всех $x \in (a,b)$ $f'(x) < 0,$ то $f(x)$□ на (a, b). Точка $x = x_0$ называется точкой локального максимума (max) [минимума (min)] функции $f(x)$, если существует некоторый интервал $(\alpha, \beta),$ содержащий точку x_0 такой, что для всех

$$x \in (\alpha, \beta) \;\; f(x) < f(x_0)$$

$$[\, f(x) > f(x_0)] \;\; (x \in (\alpha, \beta) \;\; x \neq x_0).$$

Точки локального максимума и локального минимума называются точками локального экстремума функции.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 точка локального экстремума непрерывной функции $f(x)$, то её первая производная $f'(x)$ в точке x_0 или равна нулю, или не существует.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, называются *критическими точками*.

Первое достаточное условие экстремума: если при переходе через критическую точку x_0 знак $f'(x)$ изменился с «+» на «–», то в точке x_0 локальный максимум; с «–» на «+», то в точке x_0 локальный минимум; если знак $f'(x)$ не изменился, то в точке x_0 экстремума нет.

7. Интервалы выпуклости функции, точки перегиба. Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* $(\cap)$ [*вниз* $\cup$] на интервале (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}; \left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right].$$

Точки, разделяющие интервалы выпуклости, называются *точками перегиба*.

Если $f''(x) > 0$ всюду на (*a*, *b*), то функция $f(x)$ выпукла вниз ($\cup$) на (*a*, *b*).

Если $f''(x) < 0$ всюду на (*a*, *b*), то функция $f(x)$ выпукла вверх $(\cap)$ на (*a*, *b*).

8. **Построение графика**. Для построения графика можно взять несколько дополнительных точек.
9. **Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке (абсолютный экстремум).** Абсолютным (или глобальным) экстремумом функции называется наибольшее (абсолютный максимум) или наименьшее (абсолютный минимум) значения функции в области. Если функция непрерывна на отрезке [*a*, *b*], то она всегда имеет на этом отрезке абсолютный максимум и абсолютный минимум. Абсолютный экстремум может быть или в точках локального экстремума, принадлежащих отрезку [*a*, *b*], или в концевых точках отрезка. Если дифференцируемая функция на интервале (*a*, *b*) имеет единственную точку локального экстремума, то эта точка будет и точкой абсолютного экстремума функции на (*a*, *b*).

Пример 3.11. Построить график функции $y = x^3 + 3x^2 + 1,$ используя общую схему исследования функции. Определить абсолютный максимум и абсолютный минимум функции на отрезке [–1, 2].

Решение:

1. Функция $y = x^3 + 3x^2 + 1$ определена для любого *x*, т.е. о.о.ф. $D(y) = \mathrm{R},\ x \in \mathrm{R}$ или $D(f) = (-\infty; +\infty).$
2. Так как функция $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ определена на всей числовой оси, то она и непрерывна для любого $x \in (-\infty; +\infty).$ Точек разрыва нет.
3. $\begin{cases} f(-x) = (-x)^3 + 3x^2 + 1 \neq f(x) \\ -f(x) = -x^3 - 3x^2 - 1 \neq f(-x) \end{cases} \Rightarrow f(x) - \text{функция общего вида.}$

4. $\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,1);$

$\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 1 = 0.$

Точки пересечения с осью *OX* искать не будем, поскольку для этого необходимо решать кубическое уравнение.

5. Поскольку функция $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ не имеет точек разрыва, то вертикальных асимптот у графика функции нет. Найдём наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x} = \lim_{x\to\infty}[x^2 + 3x + 1/x] = (\infty + \infty + 0) = \infty.$$

Наклонных асимптот нет.

6. Определим критические точки:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x;$$

$$f'(x) = 0.\ 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ \ x_2 = -2.$$

О.о.ф. найденными критическими точками разбиваем на интервалы и определяем знак $y'(x)$ внутри каждого интервала:

$$y'(-3) = 3\cdot(-3)(-3 + 2) = 9 > 0;$$

$$y'(-1) = 3\cdot(-1)(-1 + 2) = -3 < 0;$$

$$y'(1) = 3\cdot 1(1 + 2) = 9 > 0.$$

Результаты оформим в виде таблицы:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2;\ 0)$	0	$(0, +\infty)$
$y'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$	возрастает	max	убывает	min	возрастает

$$y_{\max} = y(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 1 = 5;$$

$$y_{\min} = y(0) = 1.$$

1. Определим точки, подозрительные на перегиб:

$$y'' = (3x^2 + 6x)' = 6x + 6;$$

$$y'' = 0. \;\; 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

О.о.ф. найденными точками разбиваем на интервалы, определяем знак $f''(x)$ внутри каждого интервала:

$$y''(-2) = 6(-2) + 6 = -6 < 0;$$

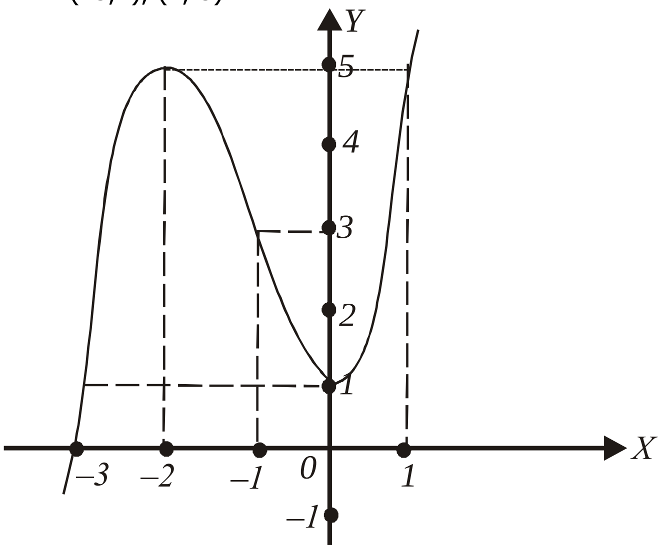
$$y''(0) = 6 > 0.$$

Результаты оформим в виде таблицы:

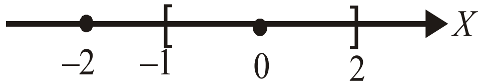
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$y''(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\cap$	$\cup\cap$	$\cup$

$$y_{\text{пер}} = y(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = 3.$$

1. Построим график функции, учитывая все полученные данные, также используем две дополнительные точки (–3,1), (1, 5).



1. $y = x^3 + 3x^2 + 1$ на отрезке [–1; 2]



$$y' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2) = 0;\; x_1 = 0, x_2 = -2.$$

$$x_1 = 0 \in [-1;2],\; x_2 = -2 \overline{\in} [-1;2]$$

$$\begin{cases} y(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = 3; \\ y(0) = 1; \\ y(2) = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 1 = 21. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 1 - \text{àáñîëþòíûé ìèíèìóì , à} \\ y(2) = 21 - \text{àáñîëþòíûé ìàêñèìóì} \\ \text{ôóíêöèè íà îòðåçêå.} \end{cases}$$

4. Функции нескольких переменных

4.1. Функция двух переменных,
область определения, непрерывности

Переменная величина z называется *функцией двух* независимых *переменных* x и *y*: *z* = *f*(*x*, *y*) (или функцией точки $M(x,y)$: *z* = *f*(*M*)), заданной на множестве *D*, если по некоторому закону каждой паре $(x,y) \in D$ (каждой точке $M \in D$) соответствует определенное значение *z*.

Функциональную зависимость z от x и y записывают в виде *z* =*f*(*x*, *y*) или *z* = *f*(*M*), или *z* = *z*(*x*, *y*). Множество D называется *областью определения* функции $f(x,y)$ и обозначается *D*(*f*). Она находится из двух условий:

1) в множество D включаются все точки плоскости *OXY*, где выражение $f(x,y)$ определено, т.е. имеет смысл;

2) если функция $f(x,y)$ получена для некоторой физической задачи, то учитывается смысл переменных x и y.

Число A называется *пределом* функции $z = f(x,y)$ при $x \to x_0,\quad y \to y_0$ (или $M(x,y) \to M_0(x_0, y_0)$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для всех точек $(x,y)\neq(x_0,y_0)$, отстоящих от точки (x_0,y_0) не более чем на δ, выполняется неравенство

$$\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon .$$

Обозначается $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ или $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$.

Функция $z=f(x,y)$ называется *непрерывной в точке* (x_0,y_0), если она определена в этой точке и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

Функция $z=f(x,y)$ называется *непрерывной в области* D, если она непрерывна в каждой точке области *D*.

Область непрерывности элементарной функции $z=f(x,y)$ совпадает с областью ее определения.

Пример 4.1. Найти область определения и область непрерывности функции

$$z=\frac{x+y}{\ln\left(x^2+y^2-1\right)} .$$

Изобразить область графически.

Решение. Выражение, определяющее функцию, имеет смысл при двух условиях:

а) аргумент логарифма должен быть положительным;

б) знаменатель дроби не равен нулю.

Таким образом, область определения функции представляет собой решение системы неравенств:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1>0,\\ \ln(x^2+y^2-1)\neq 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2+y^2>1,\\ x^2+y^2-1\neq 1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2+y^2>1,\\ x^2+y^2\neq 2\end{cases}.$$

Уравнение $x^2+y^2=1$ определяет окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1 (рис. 5). Решением неравенства $x^2+y^2>1$ является множество точек (x,y), расположенных вне круга радиуса 1. Из этого множества нужно исключить точки окружности с центром в начале координат и радиуса $\sqrt{2}$, так как $x^2+y^2\neq 2.$

Область определения функции изображена на рис. 5.

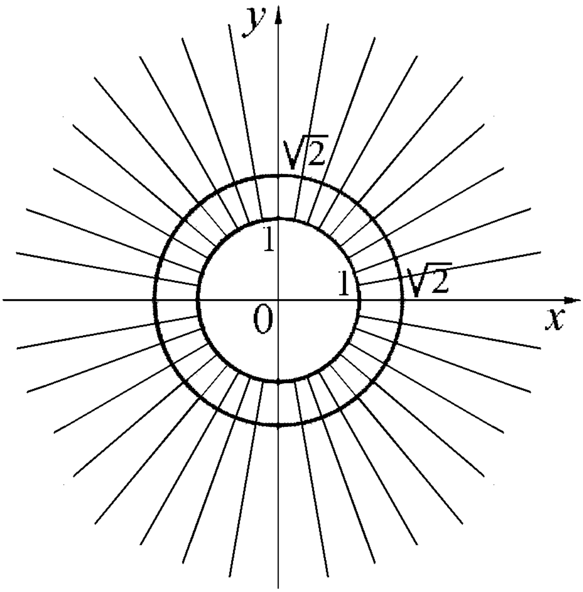


Рис. 5. Область определения функции

Область непрерывности функции совпадает с областью определения. Точки окружности $x^2+y^2=2$ являются точками разрыва функции, также точками разрыва являются точки окружности $x^2+y^2=1,$ ограничивающей область определения функции.

4.2. Линии уровня функции двух переменных

Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек плоскости из области определения функции таких, что во всех точках этого множества значение функции одно и то же: $f(x,y)=C$, $C=\mathrm{const}.$ Число C называется *уровнем функции*.

Уравнение совокупности линий уровня функции $f(x,y)$ имеет вид

$$f(x,y)=C,$$

где C – постоянная.

Если нужно выделить определенную линию уровня, проходящую через данную точку $M_0(x_0,y_0)$, то значение постоянной C определяем из условия: точка M_0 лежит на линии и, следовательно, её координаты удовлетворяют уравнению линии: $f(x,y)=C.$ Таким образом, уравнение такой линии уровня имеет вид

$$f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

Пример 4.2. Записать уравнение семейства линий уровня функции $z=x^2/4+y^2$. Выделить линию уровня, проходящую через точку $M_0(2, -1)$ и изобразить ее графически.

Решение. Данная функция определена на всей плоскости, т. е. $D(z)=\mathbb{R}^2.$ Уравнение семейства линий уровня имеет вид

$$\frac{x^2}{4}+y^2=C. \tag{42}$$

При $C < 0$ множество решений уравнений пусто, при $C = 0$ уравнение определяет точку $(0, 0)$ и при $C > 0$ уравнение определяет эллипс. Выделим линию уровня, проходящую через точку $M_0(2, -1)$. Для этого в уравнение (42) подставим координаты точки M_0:

$$\frac{2^2}{4}+(-1)^2=C \;\Rightarrow\; C=2.$$

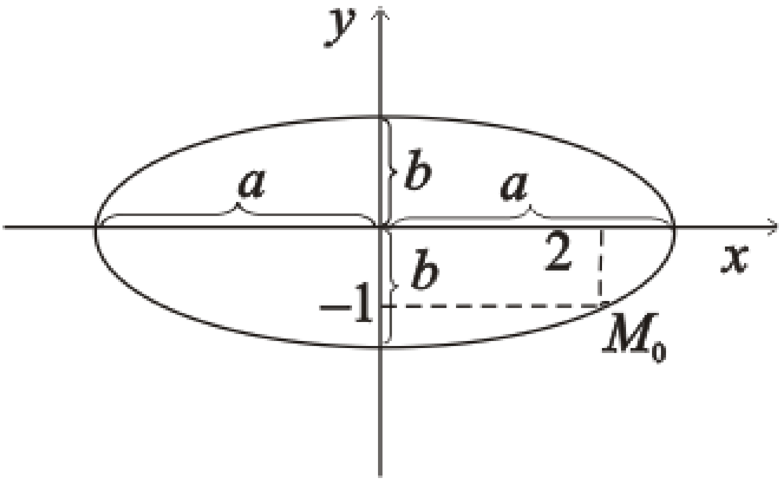
Следовательно, при $C = 2$ линия уровня проходит через данную точку и её уравнение

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=2.$$

Запишем уравнение эллипса в каноническом виде и построим его (прил. 1):

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1.$$

Центр эллипса в начале координат, полуось по оси Ox $a=\sqrt{8}=2\sqrt{2},$ полуось по оси Oy $b=\sqrt{2}$:



4.3. Частные производные функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в области $D\subset\mathbb{R}^2$ и $M_0(x_0,y_0) \in D$. Дадим аргументу x произвольное приращение Δx и аргументу y — приращение Δy так, чтобы точка $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D$.

Полным приращением функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется разность $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$.

Частные приращения функции $f(x, y)$ по переменным x и y равны соответственно:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \quad y = y_0 = \mathrm{const};$$
$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0), \quad x = x_0 = \mathrm{const}.$$

Частными производными функции $z(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по x и по y называются пределы вида:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y},$$

если они существуют и конечны.

Другие обозначения частных производных функции $z = f(x, y)$:

$z'_x,\ z'_y$ или $f'_x,\ f'_y$, или $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Если необходимо, в скобках указывается точка (x_0, y_0), в которой вычислены частные производные:

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$ или $z'_x(x_0, y_0)$ и т. д.

Из определения частных производных следует правило их нахождения: частная производная по x есть обыкновенная производная по x функции $f(x, y)$, вычисленная при условии, что y = const. При этом используются обычные правила и формулы дифференцирования функции одной переменной (прил. 2).

Аналогично, если $u = u(x,y,z)$, то u'_x вычисляют при y,z = const, u'_y – при x,z = const, u'_z при x,y = const.

Пример 4.3. Найти частные производные первого порядка от функции по каждому ее аргументу:

$$\grave{a})\ z = x^4 \cdot \sqrt{xy} - \frac{x}{y^2};$$

$$\acute{a})\ z = \sin^2 x \cdot e^{x-y};$$

$$\hat{a})\ u = \frac{\sqrt{y^2 - 2x}}{\cos 3z}.$$

Решение:

а) $$z = x^4 \cdot \sqrt{xy} - \frac{x}{y^2}, \quad z'_x = ? \quad z'_y = ?$$

Функцию *z* запишем в виде, удобном для дифференцирования:

$$z = x^4 x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2} = x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2}.$$

Используя правила I, III и формулу 3 (прил. 2), дифференцируем по *x*, считая *y* =const:

$$z'_x = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2})'_x = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}})'_x - (xy^{-2})'_x = y^{\frac{1}{2}} (x^{\frac{9}{2}})'_x - y^{-2} (x)'_x =$$

$$= y^{\frac{1}{2}} \frac{9}{2} x^{\frac{7}{2}} - y^{-2} = \frac{9}{2} \sqrt{x^7 y} - \frac{1}{y^2}.$$

Дифференцируем по *y* (*x*=const):

$$z'_y = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2})'_y = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}})'_y - (xy^{-2})'_y = x^{\frac{9}{2}} (y^{\frac{1}{2}})'_y - x(y^{-2})'_y =$$

$$= x^{\frac{9}{2}} \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} - x(-2) y^{-3} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^9}{y}} + \frac{2x}{y^3}.$$

б) $z = \sin^2 x \cdot e^{x-y}$.

Используем правило II и формулы 3, 5, 8 (прил. 2), считая $y = \text{const}$:

$$z'_x = (\sin^2 x \cdot e^{x-y})'_x = (\sin^2 x)'_x e^{x-y} + \sin^2 x (e^{x-y})'_x = 2\sin x \cos x e^{x-y} +$$

$$+ \sin^2 x e^{x-y} (x-y)'_x = 2\sin x \cos x \cdot e^{x-y} + \sin^2 x e^{x-y} \cdot 1 = \sin 2x e^{x-y} + \sin^2 x \cdot e^{x-y}.$$

При вычислении z'_y можно использовать правило $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, так как множитель $\sin^2 x$ — постоянная величина при *x*= const:

$$z'_y=(\sin^2 x\cdot e^{x-y})'_y=\sin^2 x(e^{x-y})'_y=\sin^2 x\cdot e^{x-y}(x-y)'_y=$$
$$=\sin^2 x\cdot e^{x-y}(-1)=-\sin^2 x\cdot e^{x-y}.$$

в) $$u=\frac{\sqrt{y^2-2x}}{\cos 3z},\quad u'_x=?\quad u'_y=?\quad u'_z=?$$

При дифференцировании по *x* считаем *y*, *z* = const, следовательно, у дроби знаменатель постоянный, и используем правило $\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c}$:

$$u'_x=\left(\frac{(y^2-2x)^{\frac{1}{2}}}{\cos 3z}\right)'_x=\frac{\left((y^2-2x)^{\frac{1}{2}}\right)'_x}{\cos 3z}=\frac{\frac{1}{2}(y^2-2x)^{-\frac{1}{2}}(y^2-2x)'_x}{\cos 3z}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(y^2-2x)^{-\frac{1}{2}}(-2)}{\cos 3z}=-\frac{1}{\cos 3z\sqrt{y^2-2x}}.$$

Аналогично при дифференцировании по *y* считаем *x*,*z*=const:

$$u'_y=\left(\frac{\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos 3z}\right)'_y=\frac{\left(\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}\right)'_y}{\cos 3z}=\frac{\frac{1}{2}\left(y^2-2x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(y^2-2x\right)'_y}{\cos 3z}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(y^2-2x\right)^{-\frac{1}{2}}2y}{\cos 3z}=\frac{y}{\cos 3z\sqrt{y^2-2x}}.$$

Дифференцируя функцию по z, считаем x,y=const, следовательно, числитель дроби постоянный и можно использовать правило V:

$$\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{cv'}{v^2}.$$

Имеем:

$$u'_z=\left(\frac{\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos 3z}\right)'_z=-\frac{\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos 3z\right)'_z}{\left(\cos 3z\right)^2}=$$

$$=-\frac{\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\sin 3z\right)\cdot 3}{\left(\cos 3z\right)^2}=\frac{3\sqrt{y^2-2x}\sin 3z}{\left(\cos 3z\right)^2}.$$

4.4. Полный дифференциал функции двух переменных

Функция $z = f(x,y)$ называется *дифференцируемой* в точке M_0, если её полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y,$$

где A,B – постоянные, а α_1, $\alpha_2 \to 0$ при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Главная, линейная относительно Δx и Δy *часть полного приращения* функции Δz в точке M_0 называется *полным дифференциалом* функции в этой точке и обозначается

$$dz(M_0) = z'_x(M_0)\Delta x + z'_y(M_0)\Delta y.$$

Поскольку $\Delta x = dx,\ \ \Delta y = dy,$ то

$$dz(M_0) = z'_x(M_0)dx + z'_y(M_0)dy.$$

Пример 4.4. Вычислить полный дифференциал dz и полное приращение Δz функции $z = x/y + y/x$ в точке $M_0(-1,2)$ при $\Delta x = 0,2$ и $\Delta y = -0,1$. Оценить абсолютную и относительную погрешности приближенного равенства $\Delta z \approx dz$.

Решение. Запишем данную функцию z в виде, удобном для дифференцирования: $z = xy^{-1} + yx^{-1}$;

$$\Delta z = z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - z(x_0, y_0); \qquad (43)$$

$$dz = z'_x(M_0)\Delta x + z'_y(M_0)\Delta y; \qquad (44)$$

$$z(x_0,y_0) = z(-1,2) = (-1)2^{-1} + 2(-1)^{-1} = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2} = -2,5;$$

$$z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = z(-1+0,2;\ \ 2-0,1) = (-1+0,2)(2-0,1)^{-1} +$$
$$+(2-0,1)(-1+0,2)^{-1} = -0,8(1,9)^{-1} + 1,9(-0,8)^{-1} \approx -0,421 - 2,375 = -2,796\,.$$

Подставим полученные значения в формулу (43):

$$\Delta z = -2,796 - (-2,5) = -0,296.$$

Чтобы вычислить полный дифференциал функции, найдем частные производные функции z'_x и z'_y и определим их значения в точке M_0:

при $y = \text{const}$

$$z'_x(x,y) = \left(xy^{-1} + yx^{-1}\right)'_x = \left(xy^{-1}\right)'_x + \left(yx^{-1}\right)'_x = y^{-1} + y\left(-x^{-2}\right);$$

при $x = \text{const}$

$$z'_y = (x,y) = \left(xy^{-1} + yx^{-1}\right)^1_y = \left(xy^{-1}\right)'_y + \left(yx^{-1}\right)'_y = x\left(-y^{-2}\right) + x^{-1};$$

$$z'_x(M_0) = (y^{-1} - yx^{-2})\,|_{(-1,\ 2)} = 2^{-1} - 2(-1)^{-2} = \frac{1}{2} - 2 = -1{,}5$$

;

$$z'_y(M_0) = (-xy^{-2} + x^{-1})\,|_{(-1,\ 2)} = -(-1)\ 2^{-2} + (-1)^{-1} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$

.

По формуле (44) получаем $dz\left(M_0\right) = -1{,}5\Delta x + 0{,}75\Delta y.$

Так как по условию $\Delta x = 0{,}2$ и $\Delta y = -0{,}1$, то:

$$dz(M_0) = -1{,}5 \cdot 0{,}2 - 0{,}75(-0{,}1) = -0{,}3 + 0{,}075 = -0{,}225.$$

Абсолютная величина погрешности приближенного равенства $\Delta z \approx dz$ равна

$$|\,\Delta z - dz\,| = |-0{,}296 - (-0{,}225)\,| = |-0{,}296 + 0{,}225\,| = |-0{,}071| = 0{,}071.$$

Относительная погрешность:

$$\left|\frac{\Delta z - dz}{\Delta z}\right| = \frac{0{,}071}{0{,}296} \approx 0{,}24\ (\approx 24\%).$$

4.5. Частные производные от функции $f(x,\ y)$, заданной неявно

Пусть $F(x,y,z)$ – функция, определенная на некотором множестве *M* точек пространства $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим уравнение:

$F(x,y,z)=0.$ (45)

Если каждой точке (x, y) множества $D\subset\mathbb{R}^2$ соответствует единственное значение z такое, что $(x,y,z)\in M$ и выполнено равенство $F(x,y,z) = 0$, то говорят, что на множестве D уравнение (45) неявно определяет функцию $z = z(x, y)$. При этом, если функция $F(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам и $F'_z(x,y,z)\neq 0$, то частные производные неявной функции $z = z(x, y)$ также существуют и их можно вычислить по формулам:

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

(46)

Пример 4.5. Найти частные производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно уравнением $\cos 2z=y^2-xe^{y/z}$.

Решение. Данное уравнение запишем в виде $F(x, y, z) = 0$:

$$\cos 2z-y^2+xe^{y/z}=0.$$

Функция $F(x,y,z)$ определена для любых x и y и $z\neq 0$.

Найдем частные производные функции $F(x,y,z)$:

при y, z = const

$$F'_x=(\cos 2z-y^2+xe^{y/z})'_x=(\cos 2z)'_x-(y^2)'_x+(xe^{y/z})'_x=e^{y/z}$$

;

при x, z = const

$$F'_y=(\cos 2z-y^2+xe^{y/z})'_y=(\cos 2z)'_y-(y^2)'_y+(xe^{y/z})'_y=$$

$$=-2y+xe^{y/z}\cdot\frac{1}{z}=\frac{-2yz+xe^{y/z}}{z};$$

при x, y=const

$$F'_z = (\cos 2z - y^2 + xe^{y/z})'_z = (\cos 2z)'_z - (y^2)'_z + (xe^{y/z})'_z = -\sin 2z \cdot 2 +$$

$$+xe^{y/z}(-\frac{y}{z^2}) = \frac{-2z^2 \sin 2z - xye^{y/z}}{z^2}.$$

Применяя формулы (46), получаем:

$$z'_x = -\frac{e^{y/z} \cdot z^2}{-2z^2 \sin 2z - xye^{y/z}} = \frac{z^2 e^{y/z}}{2z^2 \sin 2z + xye^{y/z}};$$

$$z'_y = -\frac{(-2yz + xe^{y/z}) \cdot z^2}{z(-2z^2 \sin 2z - xye^{y/z})} = \frac{(-2yz + xe^{y/z}) \cdot z}{2z^2 \sin 2z + xye^{y/z}}.$$

4.6. Частные производные второго порядка функции $f(x, y)$

Частными производными второго порядка называются частные производные от частных производных первого порядка. Обозначается:

$z''_{xx} = (z'_x)'_x$ или $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$; $z''_{xy} = (z'_x)'_y$ или $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$;

$z''_{yx} = (z'_y)'_x$ или $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$; $z''_{yy} = (z'_y)'_y$ или $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Частные производные z''_{xy} и z''_{yx}, отличающиеся порядком дифференцирования, называются *смешанными частными производными* второго порядка. В области непрерывности смешанных производных, отличающихся только порядком дифференцирования, их значения равны друг другу, т.е. $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Пример 4.6. Найти частные производные $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}$ функции $z=\left(x^2+y^2\right)\ln 2x.$

Решение. Найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x=((x^2+y^2)\ln 2x)'_x=(x^2+y^2)'_x\ln 2+(x^2+y^2)(\ln 2x)'_x=$$

$$=2x\ln 2x+(x^2+y^2)\frac{2}{2x}=2x\ln 2x+x+\frac{y^2}{x}=2x\ln 2x+x+y^2x^{-1};$$

$$z'_y=((x^2+y^2)\ln 2x)'_x=\ln 2x(x^2+y^2)'_y=\ln 2x2y=2y\ln 2x.$$

Частные производные второго порядка:

$$z''_{xx}=(z'_x)'_x=(2x\ln 2x+x+y^2x^{-1})'_x=(2x)'_x\ln 2x+2x(\ln 2x)'_x+\left(x\right)'_x+$$

$$+(y^2x^{-1})'_x=2\ln 2x+2x\frac{2}{2x}+1+y^2(-1x^{-2})=2\ln 2x+3-\frac{y^2}{x^2};$$

$$z''_{xy}=(z'_x)'_y=(2x\ln 2x+x+y^2x^{-1})'_y=(2x\ln 2x)'_y+(x)'_y+(y^2x^{-1})'_y=2yx^{-1}=\frac{2y}{x};$$

$$z''_{yx}=(z'_y)'_x=(2y\ln 2x)'_x=2y(\ln 2x)'_x=2y\frac{2}{2x}=\frac{2y}{x};$$

$$z''_{yy}=(z'_y)'_y=(2y\ln 2x)'_y=2\ln 2x(y)'_y=2\ln 2x.$$

Действительно, смешанные частные производные z''_{xy} и z''_{yx} оказались равными друг другу при $x\neq 0$.

4.7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет функцию $z=z(x,y)$, заданную неявно на некотором множестве точек $(x,y)\in D$. Совокупность точек $M(x,y,z(x,y))$, где $(x,y)\in D$, в пространстве $\mathbb{R}^3$ образует некоторую поверхность Σ, которая называется графиком функции $z=z(x,y)$.

Пусть $M_0\left(x_0, y_0, z\left(x_0, y_0\right)\right)$ — точка поверхности Σ. Проведем две произвольные линии L и L_1, целиком лежащие на поверхности Σ и проходящие через точку M_0. Касательные прямые к линиям L и L_1 в точке M_0 определяют плоскость, которая называется *касательной* плоскостью к поверхности Σ в точке M_0. Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно к касательной плоскости, называется *нормалью* к поверхности.

Уравнение касательной плоскости к поверхности Σ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$F'_x\left(M_0\right)\left(x-x_0\right)+F'_y\left(M_0\right)\left(y-y_0\right)+F'_z\left(M_0\right)\left(z-z_0\right)=0. \quad (47)$$

Уравнение нормали к поверхности Σ в точке M_0:

$$\frac{x-x_0}{F'_x\left(M_0\right)}=\frac{y-y_0}{F'_y\left(M_0\right)}=\frac{z-z_0}{F'_z\left(M_0\right)}. \quad (48)$$

Если поверхность задана явно уравнением $z=f(x, y)$, то уравнения касательной плоскости и нормали будут иметь вид

$$f'_x\left(M_0\right)\left(x-x_0\right)+f'_y\left(M_0\right)\left(y-y_0\right)-\left(z-z_0\right)=0, \quad (49)$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x\left(M_0\right)}=\frac{y-y_0}{f'_y\left(M_0\right)}=\frac{z-z_0}{-1}. \quad (50)$$

Пример 4.7. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^2+2y^2+z^2=1$ в точке $M_0\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Решение. Поверхность задана неявно уравнением вида $F\left(x, y, z\right)=0$ с функцией $F\left(x, y, z\right)=3x^2+2y^2+z^2-1.$

Найдем частные производные функции $F(x, y, z)$ и вычислим их значения в точке M_0:

$$F'_x=\left(3x^2+2y^2+z^2-1\right)'_x=6x,\qquad F'_x(M_0)=6\frac{1}{\sqrt{6}}=\sqrt{6};$$

$$F'_y=\left(3x^2+2y^2+z^2-1\right)'_y=4y,\qquad F'_y(M_0)=4\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3};$$

$$F'_z=\left(3x^2+2y^2+z^2-1\right)'_z=2z,\qquad F'_z(M_0)=2\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Используя (47), получаем уравнение касательной плоскости в виде

$$\sqrt{6}\left(x-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\frac{2\sqrt{6}}{3}\left(y-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\frac{\sqrt{6}}{3}\left(z-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=0,$$

что после упрощения дает:

$$3x+2y+z-\sqrt{6}=0.$$

Уравнение нормали к поверхности, согласно (48), имеет вид

$$\frac{x-\frac{1}{\sqrt{6}}}{\sqrt{6}}=\frac{y-\frac{1}{\sqrt{6}}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}}=\frac{z-\frac{1}{\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}.$$

4.8. Производная по направлению

Пусть функция *u= u*(*M*)определена и дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0\in D\subset\mathbb{R}^3$ и $\bar{S}$ – какой-либо фиксированный вектор в $\mathbb{R}^3$.

Производной функции u=u(*M*) в точке M_0 в *направлении вектора* $\bar{S}$ называется предел отношения приращения функции u в точке M_0 в направлении вектора $\bar{S}$ $\left(\Delta_{\bar{S}}u=u(M)-u(M_0)\right)$ к расстоянию между точками M и M_0 $\left(\rho(M,M_0)\right)$, когда точка $M\to M_0$ так, что вектор

$\overline{M_0M}$ остается сонаправленным данному вектору $\overline{S}$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)=\lim_{M\to M_0}\frac{u(M)-u(M_0)}{\rho(M,M_0)},$$

если этот предел существует и конечен.

Если вектор $\overline{S}$ задан координатами, т. е. $\overline{S}=(S_x,S_y,S_z)$ и функция $u=u(M)$ дифференцируема в точке M_0, то производная по направлению вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)=u'_x(M_0)\cos\alpha+u'_y(M_0)\cos\beta+u'_z(M_0)\cos\gamma, \qquad (51)$$

где $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\overline{S}$.

Они равны

$$\cos\alpha=\frac{S_x}{\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}},\ \cos\beta=\frac{S_y}{\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}},\ \cos\gamma=\frac{S_z}{\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}}. \qquad (52)$$

Производная $\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)$ характеризует скорость изменения функции $u(M)$ в точке M_0 в направлении данного вектора $\overline{S}$. Если $\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)>0$, то функция возрастает в направлении $\overline{S}$ со скоростью $\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)$; при $\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)<0$ функция убывает со скоростью $\left|\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)\right|$.

Пример 4.8. Вычислить производную функции $u=y^x-z^3$ в точке $M_0(0,\ e,\ -1)$ в направлении вектора

$\bar{S} = (1, 2, -2)$.

Решение. Найдем частные производные функции $u = y^x - z^3$:

$$u'_x = \left(y^x - z^3\right)'_x = \left(y^x\right)'_x - \left(z^3\right)'_x = y^x \ln y \cdot x' = y^x \ln y,$$

так как $y = \text{const}$ и функция y^x – показательная относительно *x*;

$$u'_y = \left(y^x - z^3\right)'_y = \left(y^x\right)'_y - \left(z^3\right)'_y = xy^{x-1},$$

$x,\ z = \text{const}$ и y^x – степенная функция относительно *y*;

$$u'_z = \left(y^x - z^3\right)'_z = \left(y^x\right)'_z - \left(z^3\right)'_z = -3z^2.$$

Вычислим значения частных производных u'_x, u'_y, u'_z в точке $M_0(0, e, -1)$:

$$u'_x(M_0) = e^0 \ln e = 1,\ u'_y(M_0) = 0 \cdot e^{-1} = 0,$$

$u'_z(M_0) = -3(-1)^2 = -3$.

Определим модуль и направляющие косинусы вектора $\bar{S} = (1, 2, -2)$ по формулам (52):

$$\left|\bar{S}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \cos\beta = \frac{2}{3}, \qquad \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Применяя формулу (51), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial s}(M_0) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} + (-3)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{6}{3} = \frac{7}{3}.$$

Следовательно, функция в точке M_0 в направлении вектора

$\bar{S}$ возрастает со скоростью $\dfrac{7}{3}$ единиц скорости.

4.9. Градиент скалярного поля

Пусть D некоторая область в пространстве $\mathbb{R}^3$. Если в ней задана функция $u=u(x, y, z)$, то говорят, что в области D задано *скалярное поле*, а функция $u=u(x, y, z)$ называется функцией скалярного поля. Например, u – температура в точках $M \in D$ (поле температур), или u – давление жидкости или газа в точках сосуда D (поле давлений). При изучении скалярного поля важно иметь информацию о скорости изменения величины поля в том или ином направлении. Такую информацию дает производная по направлению. Наряду с ней рассматривают в каждой точке $M_0 \in D$ вектор с координатами $\left(u'_x\left(M_0\right), u'_y\left(M_0\right), u'_z\left(M_0\right)\right)$, называемый *градиентом* функции $u=u\left(M\right)$ в точке M_0. Вектор градиента обозначается $\operatorname{grad} u\left(M_0\right)$:

$$\operatorname{grad} u\left(M_0\right)=u'_x\left(M_0\right)\bar{i}+u'_y\left(M_0\right)\bar{j}+u'_z\left(M_0\right)\bar{k}, \tag{53}$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные векторы декартова прямоугольного базиса.

Вектор grad $u\,(M_0)$ указывает направление, в котором функция $u(M)$ в точке M_0 возрастает с максимальной скоростью. Максимальная величина скорости равна

$$\left|\operatorname{grad} u\left(M_0\right)\right|=\sqrt{\left(u'_x\left(M_0\right)\right)^2+\left(u'_y\left(M_0\right)\right)^2+\left(u'_z\left(M_0\right)^2\right)}. \tag{54}$$

Вектор $\operatorname{grad} u\left(M_0\right)$ (если он ненулевой) направлен по нормали к поверхности уровня функции $u=u\left(M\right)$, определяемой уравнением $u\left(x,y,z\right)=u\left(M_0\right)$ и проходящей через точку

$M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пример 4.9. Найти градиент скалярного поля $u = y^2z + 3z^2 - 4xyz$ в точке $M_0(3, 1, 1)$, модуль градиента и объяснить результат с физической точки зрения.

Решение. Найдем частные производные от функции $u(x, y, z)$ и вычислим их в точке M_0:

$$u'_x = \left(y^2z + 3z^2 - 4xyz\right)'_x = -4yz; \qquad u'_x(M_0) = (-4yz)\big|_{(3,1,1)} = -4;$$

$$u'_y = \left(y^2z + 3z^2 - 4xyz\right)'_y = 2yz - 4xz; \qquad u'_y(M_0) = (2yz - 4xz)\big|_{(3,1,1)} = -10;$$

$$u'_z = \left(y^2z + 3z^2 - 4xyz\right)'_z = y^2 + 6z - 4xy; \quad u'_z(M_0) = \left(y^2 + 6z - 4xy\right)\Big|_{(3,1,1)} = -5.$$

Применяя формулы (53), (54), получаем:

$$\operatorname{grad} u(M_0) = -4\bar{i} - 10\bar{j} - 5\bar{k},$$

$$\left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-10)^2 + (-5)^2} = \sqrt{141}.$$

Вывод. Заданная функция $u(M)$ в точке M_0 возрастает с максимальной скоростью, равной $\sqrt{141}$, в направлении вектора $\operatorname{grad} u(M_0) = (-4, -10, -5)$.

4.10. Экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z = Z(x, y)$ определена в некоторой области D и $M_0(x_0, y_0)$ – внутренняя точка области.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции $z = Z(x, y)$, если существует окрестность точки M_0 такая, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство:

$$Z(x_0,y_0)\geq Z(x,y), \quad (Z(x_0,y_0)\leq Z(x,y)).$$

Точки (локального) максимума и минимума функции называются точками *экстремума*.

Необходимое условие экстремума дает следующая теорема.

<u>Теорема</u>. Пусть (x_0,y_0) – точка экстремума дифференцируемой функции $z=Z(x,y)$. Тогда частные производные

$$Z'_x(x_0,y_0)=0 \quad \text{и} \quad Z'_y(x_0,y_0)=0. \qquad (55)$$

Другими словами, $\operatorname{grad} Z(M_0)=\overline{0}$.

Точку M_0, в которой выполнены условия (55), называют *стационарной* точкой функции.

Экстремум функции возможен не только в её стационарных точках, но и в таких точках, в которых $\operatorname{grad} Z$ не существует, т. е. не существует хотя бы одна из частных производных Z'_x или Z'_y. Такие точки вместе со стационарными называются *критическими* точками функции.

Не любая критическая точка функции является точкой экстремума. Следующая теорема устанавливает достаточные условия экстремума функции в стационарной точке.

<u>Теорема</u>. Пусть $M_0(x_0,y_0)$ – стационарная точка функции $Z(x,y)$, т. е. $Z'_x(M_0)=0$ и $Z'_y(M_0)=0$, и в некоторой окрестности этой точки все частные производные второго порядка функции $Z(x,y)$ непрерывны.

Обозначим:

$$A=Z''_{xx}(M_0),\ B=Z''_{xy}(M_0),\ C=Z''_{yy}(M_0),\ \Delta(M_0)=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2. \qquad (56)$$

Тогда:

1) если $\Delta(M_0)>0,$ то в точке M_0 функция имеет экстремум: минимум, если $A>0$, и максимум, если $A<0$;

2) если $\Delta(M_0)<0,$ то в точке M_0 функция не имеет экстремума;

3) если $\Delta(M_0)=0,$ то вопрос о наличии экстремума требует дополнительного исследования (назовем случай $\Delta=0$ неопределенным).

Алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум:

1) найти область определения функции;

2) определить критические точки функции в ее области определения, т. е. точки, в которых частные производные Z'_x и Z'_y равны нулю или не существуют;

3) определить частные производные второго порядка;

4) проверить выполнение достаточных условий экстремума (56) для каждой стационарной точки;

5) вычислить значения функции в точках экстремума.

Пример 4.10. Исследовать на экстремум функцию $z=2xy-x^2y-xy^2.$

Решение. Исследование функции $Z(x,y)$ на экстремум проводим согласно вышеуказанному алгоритму.

1. Область определения функции $z=2xy-x^2y-xy^2$ — вся плоскость *OXY*.

$$2.\ z'_x=\left(2xy-x^2y-xy^2\right)'_x=2y-2xy-y^2;$$

$$z'_y=\left(2xy-x^2y-xy^2\right)'_y=2x-x^2-2xy.$$

Обе частные производные определены для любых (x,y).Следовательно, точками, подозрительными на экстремум, могут быть только стационарные точки. Определим их из условий

$$\begin{cases} z'_x=0, \\ z'_y=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'_x = 2y - 2xy - y^2 = 0, \\ z'_y = 2x - x^2 - 2xy = 0. \end{cases} \begin{cases} y(2-2x-y) = 0, \\ x(2-x-2y) = 0. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим координаты стационарных точек:

$M_0(0,0)$; $M_1(0,2)$; $M_2(2,0)$; $M_3\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

1. $$z''_{xx} = (2y - 2xy - y^2)'_x = -2y,$$
$$z''_{xy} = (2y - 2xy - y^2)'_y = 2 - 2x - 2y,$$

$$z''_{yx} = (2x - x^2 - 2xy)'_x = 2 - 2x - 2y,$$
$$z''_{yy} = (2x - x^2 - 2xy)'_y = -2x.$$

4. Точка $M_0(0, 0)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_0} = 0,\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_0} = 2,\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_0} = 0,$$

$$\Delta(M_0) = AC - B^2 = 0 - 2^2 = -4 < 0.$$

Следовательно, в точке $M_0(0, 0)$ данная функция экстремума не имеет.

Точка $M_1(0, 2)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_1} = -4,\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_1} = -2,\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_1} = 0,$$

$$\Delta(M_1) = AC - B^2 = -4 \cdot 0 - (-2)^2 = -4 < 0.$$

В точке $M_1(0, 2)$ функция экстремума не имеет.

Точка $M_2(2, 0)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_2} = 0,\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_2} = -2,\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_2} = -4,$$

$$\Delta(M_2) = AC - B^2 = 0 \cdot (-4) - (-2)^2 = -4 < 0.$$

В точке $M_2(2, 0)$ экстремума нет.

Точка $M_3\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_3} = -\frac{4}{3},\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_3} = -\frac{2}{3},\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_3} = -\frac{4}{3},$$

$$\Delta(M_3) = AC - B^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} > 0.$$

В точке M_3 функция имеет экстремум. Поскольку $A=-\frac{4}{3}<0$, то $M_3\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ – точка максимума функции.

5.

$$z_{\max}=z\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}.$$

4.11. Условный экстремум функции двух переменных

Условным экстремумом функции $z=f(x,y)$ называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x,y)=0,$ которое называется уравнением связи.

Отыскание условного экстремума можно свести к исследованию на обычный экстремум функции Лагранжа, имеющей вид

$$\Phi(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y), \tag{57}$$

где λ – неопределённый постоянный множитель.

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\\[2mm] \varphi(x,y)=0.\end{cases} \tag{58}$$

Из системы трёх уравнений (58) находят неизвестные x, y и λ. О характере экстремума в полученных точках судят исходя из смысла задачи.

Пример 4.11. Найти экстремум функции $z=xy$ при условии, что x и y связаны соотношением $3x+2y-8=0$, и определить, является ли экстремум максимумом или минимумом функции.

Решение. Построим согласно (57) функцию Лагранжа $\Phi = xy + \lambda(3x + 2y - 8)$ и запишем необходимые условия экстремума этой функции:

$$\begin{cases} \Phi'_x = 0, \\ \Phi'_y = 0, \\ 3x + 2y - 8 = 0. \end{cases}$$

Найдём частные производные функции Лагранжа $\Phi'_x = y + 3\lambda,\ \ \Phi'_y = x + 2\lambda$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y + 3\lambda = 0, \\ x + 2\lambda = 0, \\ 3x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

, решая которую, находим $\lambda = -\frac{2}{3},\quad x = \frac{4}{3},\quad y = 2.$ Определим является ли экстремум максимумом или минимумом функции, для этого вычислим значения функции в точке экстремума $\grave{I}_0\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ и в какой-либо другой точке *M,* координаты которой удовлетворяют уравнению связи, например в точке $\grave{I}\ (2,1)$:

$$z(M_0) = \frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3} > z(M) = 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow \grave{I}_0\left(\frac{4}{3}, 2\right)$$

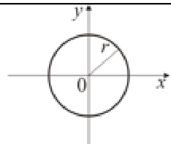
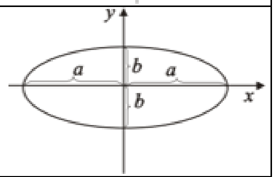
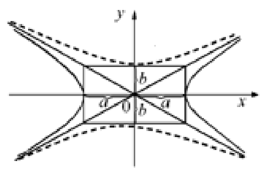
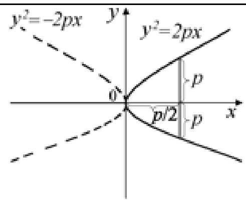
– точка условного максимума и $z_{\max} = \frac{8}{3}.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2005. – Т. 1, 2.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2009.
3. Соболь Б.В. Практикум по высшей математике / Б.В. Соболь, Н.Т. Мишняков, В.М. Поркшеян. – Ростов н/Д: Феникс, 2008.
4. Нурутдинова И.Н. Сборник образцов решения заданий базового уровня по дисциплине «Математика» / И.Н. Нурутдинова, В.В. Соболев, А.В. Моржаков. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2013.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Кривые второго порядка

№ п/п	Кривая	Каноническое уравнение	График
1	Окружность	$x^2+y^2=r^2$	
2	Эллипс	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	
3	Гипербола	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ Сопряженная гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ (график пунктиром)	
4	Парабола	$y^2=2px,\ p>0$ Ось симметрииOX $y^2=-2px$ (график пунктиром)	

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Правила и формулы дифференцирования основных элементарных функций

Правила дифференцирования			
№ п/п	$u=u(x),\quad v=v(x)$ — дифференцируемые функции	№ п/п	$u=u(x),\quad v=v(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u\pm v)'=u'\pm v'$	VI	Производная сложной функции $y=f(u(x)),\ \ y'=f'_u u'_x$
II	$(uv)'=u'v+uv'$		
III	$(c\cdot u)'=c\cdot u',\ c=\text{const}$	VII	Функция задана парамет-рически уравнениями $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\ y'_x=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t},\ (x'_t\neq 0)$
IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\quad (v(x)\neq 0)$		
V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)'=-\dfrac{cv'}{v^2},\ c=\text{const},\ (v(x)\neq 0)$	VIII	Если $y=f(x)$ и $x=f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y=\dfrac{1}{y'_x},\ \ (y'_x\neq 0)$

Формулы дифференцирования основных элементарных функций			
№ п/п	$C=\text{const}$, x – независимая переменная, $u(x)$ – дифференцируемая функция		
1	$C'=0$	9	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
2	$x'=1$	10	$(\operatorname{tg} u)=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^{\alpha})'=\alpha u^{\alpha-1}u'$	11	$(\operatorname{ctg} u)=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$	12	$(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}},\quad \lvert u\rvert<1$
5	$(e^u)'=e^u\cdot u'$	13	$(\arccos u)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}},\quad \lvert u\rvert<1$
6	$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}\quad (u>0)$	14	$(\operatorname{arctg} u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}\quad (u>0)$	15	$(\operatorname{arcctg} u)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$		

Примечание. Формулы записаны с учетом правила дифференцирования сложной функции.