ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Элементы линейной алгебры. Евклидовы пространства»

Авторы
Стукопин В.А.,
Баранов И.В.,
Гусева И.А.

Ростов-на-Дону, 2017

Аннотация

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов дневного и заочного отделений ДГТУ, изучающих курс алгебры и курс алгебры и геометрии. Написано в соответствии с государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования. Пособие может быть использовано для самостоятельного изучения упомянутых выше дисциплин.

Авторы

Д.ф.-м.н., доцент,
Профессор кафедры «Математика»
Стукопин В.А.

К.ф.-м.н., доцент,
Доцент кафедры «Математика»
Баранов И.В.

К.ф-м.н., доцент
Доцент кафедры «Математика»
Гусева И.А.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.

Предлагаемое пособие посвящено теории евклидовых пространств и является продолжением учебного пособия [1], в котором изложены основы теории векторных пространств. Предполагаем, что читатель ознакомился с основными фактами теории векторных пространств, изложенными в пособии [1]. Чтобы избежать дублирования, мы используем соглашения и обозначения из пособия [1], специально не оговаривая их.

1. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ.

При изучении курса аналитической геометрии в пространстве геометрических векторов вводится понятие скалярного произведения. Напомним, что скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число $(\overline{a},\overline{b})$ равное произведению длин векторов на косинус угла между ними, то есть

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \qquad (1.1)$$

Из определения следует, что скалярное произведение вектора $\overline{a}$ на себя (скалярный квадрат вектора) равен квадрату длины этого вектора:

$$(\overline{a},\overline{a})=|\overline{a}|\cdot|\overline{a}|\cdot\cos 0=|\overline{a}|^2$$

Для вычисления скалярного произведения векторов необходимо знать угол между векторами и длины этих векторов. С другой стороны, если известны скалярные квадраты векторов, а также их скалярное произведение, то этого достаточно, чтобы определить длины этих векторов и угол между ними:

$$|\overline{a}|=\sqrt{(\overline{a},\overline{a})} \qquad (1.2)$$

$$\varphi=\arccos\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}=\arccos\frac{(\overline{a},\overline{b})}{\sqrt{(\overline{a},\overline{a})}\cdot\sqrt{(\overline{b},\overline{b})}} \qquad (1.3)$$

Таким образом, если на множестве всех векторов задано скалярное произведение, то тем самым заданы длины всех векторов, и углы между ними.

Отметим, что в обычном векторном пространстве не определены понятия длины вектора и угла между векторами, поскольку эти понятия не вытекают из аксиом векторного пространства. Действительно, что такое длина многочлена (как элемента пространства $P_n[t]$) или угол между матрицами (как элементами векторного (линейного) пространства матриц $M_{m\times n}$)?

Введение таких понятий как "длина" и "угол" для абстрактного векторного (линейного) пространства требует независимых построений.

Ввиду формул (1.2), (1.3) это проще всего сделать, используя в качестве основного понятие скалярного произведения. А само понятие скалярного произведения удобно ввести аксиоматически.

Пусть V – векторное пространство над полем вещественных чисел R.

Определение 1.1. Скалярным произведением называется отображение, которое сопоставляет упорядоченной паре векторов $\overline{v},\overline{w}\in V$ вещественное число $(\overline{v},\overline{w})$ и удовлетворяющее следующим условиям:

1) симметричности: $(\overline{v},\overline{w})=(\overline{w},\overline{v}), \quad \forall\overline{v},\overline{w}\in V$
2) билинейности: $(\lambda\overline{v},\overline{w})=\lambda(\overline{v},\overline{w}), \quad \forall\lambda\in R, \quad \forall\overline{v},\overline{w}\in V$ и $(\overline{v}_1+\overline{v}_2,\overline{w})=(\overline{v}_1,\overline{w})+(\overline{v}_2,\overline{w}), \quad \forall\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{w}\in V$
3) положительности: $(\overline{v},\overline{v})\geq 0, \quad \forall\overline{v}\in V$
4) невырожденности: $(\overline{v},\overline{v})=0 \Leftrightarrow \overline{v}=\overline{0}$.

Отметим, что из 1) и 2) следует, что
$(\overline{v},\lambda\overline{w})=\lambda(\overline{v},\overline{w}), \quad (\overline{v},\overline{w}_1+\overline{w}_2)=(\overline{v},\overline{w}_1)+(\overline{v},\overline{w}_2)$.

Векторное пространство V вместе со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, то есть пара $(V,(\cdot,\cdot))$ называется евклидовым пространством. Для краткости будем обозначать евклидово пространство буквой E.

Пример 1.1.

Рассмотрим пространство R^n арифметических векторов и определим скалярное произведение на нем формулой:

$$(\overline{x},\overline{y})=\sum_{i=1}^{n}x^i y^i \qquad (1.4)$$

где $\overline{x}=(x^1,\ldots,x^n), \quad \overline{y}=(y^1,\ldots,y^n), \quad \overline{x},\overline{y}\in R^n$.

Проверим справедливость аксиом 1)-4):

1) $\left(\bar{x},\bar{y}\right)=\sum_{i=1}^{n}x^{i}y^{i}=\sum_{i=1}^{n}y^{i}x^{i}=\left(\bar{y},\bar{x}\right)$;

2) $(\bar{x}+\bar{y},\bar{z})=\sum_{i=1}^{n}(x+y)^{i}z^{i}=\sum_{i=1}^{n}(x^{i}+y^{i})z^{i}=\sum_{i=1}^{n}(x^{i}z^{i}+y^{i}z^{i})=$

$=\sum_{i=1}^{n}x^{i}z^{i}+\sum_{i=1}^{n}y^{i}z^{i}=(\bar{x},\bar{z})+(\bar{y},\bar{z})$;

$$\left(\lambda\bar{x},\bar{y}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda x^{i}\right)y^{i}=\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(x^{i}y^{i}\right)=\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(x^{i}y^{i}\right)=\lambda\left(\bar{x},\bar{y}\right);$$

3) $\left(\bar{x},\bar{x}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x^{i}x^{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x^{i}\right)^{2}\geq 0$;

4) $\left(\bar{x},\bar{x}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x^{i}\right)^{2}=0\Leftrightarrow x^{1}=\ldots=x^{n}=0.$

Далее в тексте там, где это не вызывает недоразумений, мы для краткости будем опускать значок вектора над символом, обозначающим элемент векторного пространства.

Пример 1.2.

Рассмотрим пример, чуть более общий, чем пример 1.1. Пусть векторное пространство V, как и в предыдущем примере, совпадает с R^{n}. Зададимся некоторой матрицей $A=\left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}$, и определим скалярное произведение на V формулой:

$$\left(x,y\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x^{i}y^{j} \qquad (1.5)$$

Отметим, что в случае, когда матрица А совпадает с единичной матрицей, формула (1.5) переходит в (1.4). С другой стороны, если матрица А является нулевой, то формула (1.5) не определяет скалярное произведение так как не выполняется аксиома 4.

Посмотрим, какие условия следует наложить на матрицу $A=\left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}$, чтобы (1.5) удовлетворяло всем аксиомам скалярного произведениям.

Так же как и в предыдущем примере убеждаемся, что аксиома билинейности справедлива для любой матрицы А. Для того, чтобы выполнялась аксиома 1), то есть, чтобы $(x,y)=(y,x)$, необходимо и достаточно, чтобы матрица А была симметричной, то есть, чтобы $a_{ij}=a_{ji}$.

Действительно, пусть $a_{ij}=a_{ji}$, тогда

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^i y^j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x^i y^j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}y^j x^i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y^j x^i=(y,x)$$

Пусть наоборот $(x,y)=(y,x)$, то есть

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^i y^j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y^j x^i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x^i y^j$$

.

Выбирая $x=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, где 1 стоит на i-том месте и y=(0,...0,1,0,...0), где 1 стоит на j-том месте, получаем, что $a_{ij}=a_{ji}$.

Аксиомы 3) и 4) требуют, чтобы выражение

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^i y^j. \qquad (1.6)$$

было неотрицательным, для любых $x^1,\ldots,x^n$ и обращалось в 0 лишь при $x^1=x^2=\ldots=x^n$.

Выражение (1.6) называется квадратичной формой. Квадратичная форма (1.6) называется положительно определенной, если она принимает лишь неотрицательные значения. И обращается в 0, лишь, когда все x^i равны 0. Аксиомы 3), 4) требуют, чтобы квадратичная форма (1.6) была положительно определенной.

Итак, произвольная матрица определяет скалярное произведение, определяемое формулой (1.5) если она симметрична и соответствующая квадратичная форма положительно определена. Условие положительной определенности квадратичной формы (1.6) в терминах матрицы А мы получим позднее.

Пример 1.3.

Пусть $V=C[a,b]$ – векторное пространство функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a,b]$. Определим скалярное произведение формулой:

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx \qquad (1.7)$$

Аксиома 1) очевидна, аксиома 2) вытекает из свойств линейности интеграла, аксиома 3) следует из того, что интеграл от неотрицательной функции неотрицателен. Проверим аксиому 4).

Если $f(x)\equiv 0$ на отрезке $[a,b]$, то тогда $(f,f)=\int_a^b f^2(x)dx=0$.

Покажем, что если $(f,f)=\int_a^b f^2(x)dx=0$, то $f(x)\equiv 0$ на отрезке $[a,b]$.

Предположим противное. Пусть на отрезке $[a,b]$ имеется точка x_0, такая что $f(x_0)\neq 0$. Пусть для определённости $f(x_0)>0$. Поскольку по условию $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует δ-окрестность этой точки x_0, такая, что для всех $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ будет выполняться неравенство $f(x)>f(x_0)/2$. Действительно, согласно определению непрерывности функции в точке x_0: $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ выполняется $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Положим $\varepsilon=\dfrac{f(x_0)}{2}$, тогда $\exists\delta>0$: $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ выполняется

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}.$$

Или

$$-\frac{f(x_0)}{2}<f(x)-f(x_0)<\frac{f(x_0)}{2},$$

то есть

$$\frac{f(x_0)}{2}<f(x)<\frac{3}{2}f(x_0).$$

Тогда

$$(f,f)=\int_a^b f^2(x)dx=$$

$$=\int_a^{a-\delta} f^2(x)dx+\int_{a-\delta}^{a+\delta} f^2(x)dx+\int_{a+\delta}^{b} f^2(x)dx\ge\int_{a-\delta}^{a+\delta} f^2(x)dx\ge$$

$$\ge\int_{a-\delta}^{a+\delta}\frac{f^2(x_0)}{4}dx=2\delta\frac{f^2(x_0)}{4}=\frac{1}{2}\delta\cdot f^2(x_0)>0$$

Полученное противоречие завершает доказательство, а вместе с ним и проверку аксиомы 4).

С помощью введенного понятия скалярного произведения определим длину вектора, формулой (1.2) и угол между векторами формулой (1.3). Отметим, что, вообще говоря, корректность введенных определений нуждается в проверке. Во-первых, согласно аксиоме 3), скалярный квадрат $(v,v)\ge 0,\ \forall v\in V$, поэтому в формуле (1.2) арифметический квадратный корень извлекается из неотрицательной величины и, следовательно, можно корректно находить длину вектора. Для того, чтобы проверить, что угол также определён корректно, нужно убедиться, что $-1\le\dfrac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}\le 1$.

Последнее неравенство можно переписать в виде $\dfrac{(x,y)^2}{|x|^2\cdot|y|^2}\le 1$ или в форме

$$(x,y)^2\le(x,x)\cdot(y,y)$$

Лемма 1.0 (неравенство Коши – Буняковского – Шварца).

Для любых двух векторов x и y евклидового пространства выполняется неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ) :

$$(x,y)^2\le(x,x)\cdot(y,y)\qquad(1.8)$$

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательный вектор $x-ty$, где t – произвольное вещественное число ($t\in R$). Согласно аксиоме 3) скалярного произведения имеем $(x-ty,x-ty)\ge 0$.

Раскрывая левую часть неравенства и пользуясь аксиомами билинейности и симметричности, получаем

$$t^2(y,y)-2t(x,y)+(x,x)\geq 0.$$

Стоящий слева квадратный трехчлен относительно t принимает лишь неотрицательные значения. Следовательно, дискриминант квадратного трёхчлена $t^2(y,y)-2t(x,y)+(x,x)$ не положителен, то есть $4(x,y)^2-4(y,y)(x,x)\leq 0$, или $(x,y)^2\leq(y,y)(x,x)$ что и требовалось доказать.

Итак, определим теперь в евклидовом пространстве E длину вектора x и угол между векторами x и y аксиоматически:

Определение 1.2.

1) Длиной $|x|$ вектора $x\in E$ называется число

$$|x|=\sqrt{(x,x)} \qquad (1.9)$$

2) Углом $\varphi\in[0,\pi]$ между векторами $x,y\in E$ называется число

$$\varphi=\arccos\frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}=\arccos\frac{(x,y)}{\sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}} \qquad (1.10)$$

Угол определён для ненулевых векторов.

Неравенство Коши – Буняковского – Шварца ввиду (1.9) можно записать в форме

$$|(x,y)|\leq|x|\cdot|y| \quad (1.11)$$

Из неравенства Коши – Буняковского – Шварца вытекает

Лемма 1.1 (неравенство треугольника). Для любых векторов x,y в евклидовом пространстве E имеет место неравенство

$$|x+y|\leq|x|+|y| \quad (1.12)$$

Доказательство.

$|x+y|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)$ $=$ $(x,x)+2(x,y)+(y,y)\leq(x,x)+2|(x,y)|+(y,y)\leq$ $|x|^2+2|x|\cdot|y|+|y|^2=(|x|+|y|)^2$. То есть $|x+y|\leq|x|+|y|$.

Понятие угла, введённое формулой (1.10) позволяет дать определение ортогональных векторов.

Определение 1.3. Векторы x, y называют ортогональными, если их скалярное произведение $(x, y) = 0$.

В случае ненулевых векторов x, y это означает, что угол между ними прямой. Из определения следует, что нулевой вектор ортогонален любому вектору (в том числе и сам себе).

2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ.

В евклидовом пространстве существуют наиболее удобные базисы, а именно – ортогональные базисы. Они играют в линейной алгебре ту же роль, что и прямоугольные системы координат в аналитической геометрии.

Лемма 2.1. Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ – система ненулевых попарно ортогональных векторов. Тогда эта система линейно независима.

Доказательство.

Рассмотрим их линейную комбинацию

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \ldots + \lambda_k \bar{a}_k = \bar{0}. \qquad (2.1)$$

Умножим скалярно обе части равенства (2.1) на вектор $\bar{a}_i \, (i = 1, \ldots, k)$:

$$(\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \ldots + \lambda_i \bar{a}_i + \ldots + \lambda_k \bar{a}_k, \bar{a}_i) = (\bar{0}, \bar{a}_i)$$

$$\lambda_1 (\bar{a}_1, \bar{a}_i) + \lambda_2 (\bar{a}_2, \bar{a}_i) + \ldots + \lambda_i (\bar{a}_i, \bar{a}_i) + \ldots + \lambda_k (\bar{a}_k, \bar{a}_i) = 0$$

Поскольку $(\bar{a}_j, \bar{a}_i) = 0$ при $i \neq j$ то окончательно получаем

$$\lambda_i (\bar{a}_i, \bar{a}_i) = 0$$

Так как по условию $\bar{a}_i$ – ненулевой вектор, то $(\bar{a}_i, \bar{a}_i) \neq 0$, следовательно, $\lambda_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, k$. А это означает, что система $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ линейно независима.

Напомним, что в n – мерном векторном пространстве система из n линейно независимых векторов образует базис [1]. Следовательно, в силу леммы 2.1, n ненулевых, попарно ортогональных векторов в n – мерном евклидовом пространстве образуют базис.

Определение 2.1. Базис в евклидовом пространстве называют ортогональным, если образующие его векторы попарно ортогональны.

Определение 2.2. Векторы $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n$ образуют ортогональный нормированный базис (ортонормированный базис) в n – мерном евклидовом пространстве E, если они образуют ортогональный базис и длина каждого равна 1, т.е., если

$$(\bar{e}_i,\bar{e}_k)=\delta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k.\end{cases}$$

Если в евклидовом пространстве имеется какая-нибудь линейно независимая система векторов $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_k$, то из них можно построить систему попарно-ортогональных векторов $\bar{b}_1,\bar{b}_2,\ldots,\bar{b}_k$. Опишем этот процесс.

Процесс ортогонализации.

Пусть даны m линейно независимых векторов $a_1,\ldots,a_m$. Будем по индукции строить m попарно ортогональных векторов $e_1,e_2,\ldots,e_m$ следующим образом:

Шаг 1. Положим $e_1=a_1$.

Шаг 2. Вектор e_2, будем искать в виде: $e_2=a_2-\beta_{2,1}e_1$. Потребуем подбором коэффициента $\beta_{2,1}$, чтобы вектор e_2 был ортогонален к вектору e_1, то есть $(e_1,e_2)=0$, или $(e_1,a_2-\beta_{2,1}e_1)=0$. Отсюда: $\beta_{2,1}=\dfrac{(a_2,e_1)}{(e_1,e_1)}$.

Шаг k.

Предположим, что попарно ортогональные и отличные от 0 векторы $e_1,e_2,\ldots,e_{k-1}$ уже построены на предыдущих шагах. Тогда вектор e_k ищем в виде:

$$e_k=a_k-\beta_{k,1}e_1-\beta_{k,2}e_2-\ldots-\beta_{k,k-1}e_{k-1} \qquad (2.2)$$

Коэффициенты $\beta_{k,1},\beta_{k,2},\ldots,\beta_{k,k-1}$ этой линейной комбинации найдём из условия, чтобы вектор e_k был ортогонален ко всем уже построенным векторам $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$:

$$\begin{cases} \left(e_1, (a_k - \beta_{k,1}e_1 - \ldots - \beta_{k,k-1}e_{k-1})\right) = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \left(e_{k-1}, (a_k - \beta_{k,1}e_1 - \ldots - \beta_{k,k-1}e_{k-1})\right) = 0 \end{cases}$$

Так как векторы $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ попарно ортогональны, получаем равенства:

$$\begin{cases} (e_1, a_k) - \beta_{k,1}(e_1, e_1) = 0; \\ (e_2, a_k) - \beta_{k,2}(e_2, e_2) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (e_{k-1}, a_k) - \beta_{k,k-1}(e_{k-1}, e_{k-1}) = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем следующие значения коэффициентов

$$\beta_{k,1} = \frac{(e_1, a_k)}{(e_1, e_1)}, \quad \cdots \quad , \beta_{k,k-1} = \frac{(e_{k-1}, a_k)}{(e_{k-1}, e_{k-1})} \qquad (2.3)$$

До сих пор не использовалась линейная независимость векторов $a_1, \ldots, a_m$. Это обстоятельство будет использовано сейчас при доказательстве того, что в процессе ортогонализации мы не получим нулевых векторов.

Заметим предварительно, что вектор e_k есть линейная комбинация векторов $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, a_k$ согласно (2.2). Но вектор e_{k-1} можно заменить линейной комбинацией вектора a_{k-1} и векторов $e_1, e_2, \ldots, e_{k-2}$ и т.д. Окончательно получаем, что e_k может быть представлен в виде следующей линейной комбинации:

$$e_k = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{k-1}a_{k-1} + a_k. \quad (2.4)$$

Теперь ясно, что $e_k \neq 0$. Действительно, в противном случае правая часть (2.4) равнялись бы 0, что противоречит линейной независимости векторов $a_1, \ldots, a_k$.

Мы построили по векторам $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ и a_k вектор e_k. Таким же образом строим следующий вектор e_{k+1} и так далее до вектора e_n. Из вышеприведённого построения вытекает

Теорема 2.1.

Во всяком n – мерном евклидовом пространстве E существует ортонормированный базис.

Доказательство.

Рассмотрим произвольный базис $a_1,\ldots,a_n$ в E. Применив к нему процесс ортогонализации, получаем ортогональную линейно независимую систему векторов $e_1,e_2,\ldots,e_n$. Из (2.2) следует, что каждый вектор a_k выражается через векторы $e_1,e_2,\ldots,e_k$. Но система $a_1,\ldots,a_n$ является полной по условию, то есть каждый вектор пространства линейно выражается через $a_1,\ldots,a_n$. Поэтому каждый вектор пространства линейно выражается через $e_1,e_2,\ldots,e_n$, что означает полноту этой системы. Учитывая линейную независимость векторов $e_1,e_2,\ldots,e_n$, получаем, что эта система является базисом в E. Далее, нормируя векторы $e_1,e_2,\ldots,e_n$, получаем ортонормированный базис $\frac{e_1}{|e_1|},\ldots,\frac{e_n}{|e_n|}$ в E.

Замечание 2.1. Процесс ортогонализации можно применять к произвольной, не обязательно линейно независимой системе векторов, но в этом случае будут появляться нулевые векторы.

Замечание 2.2. Процесс ортогонализации можно применить к системе векторов $a_1,\ldots,a_k$ $(k>n)$, где n – это размерность евклидового пространства, при этом будет получено, по крайней мере, $n-k$ нулевых векторов.

Пример 2.1.

Рассмотрим векторное пространство $E=P_2[t]$ многочленов переменной t степени не выше 2, с коэффициентами из поля P.

Пусть скалярное произведение в $P_2[t]$ задано формулой

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

Рассмотрим базис 1,t,t^2 Применим к нему процесс ортогонализации:

1) $e_1 = 1$

2) $e_2 = t + \alpha_{21} \cdot 1$

$$0 = (t + \alpha_{21}, 1) = \int_{-1}^{1} (t + \alpha_{21}) dt = \left(\frac{t^2}{2} + \alpha_{21} t\right)\Big|_{-1}^{1} = 2\alpha_{21},$$

отсюда $\alpha_{21} = 0$, $e_2 = t$

$$0 = (t^2 - \alpha_{32} t - \alpha_{31}, 1) = \int_{-1}^{1} (t^2 - \alpha_{32} t - \alpha_{31}) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{\alpha_{32} t^2}{2} - \alpha_{31} t\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - 2\alpha_{31}$$

3) $e_3 = t^2 - \alpha_{32} t - \alpha_{31} 1$

$$\Rightarrow \alpha_{31} = \frac{1}{3};$$

$$0 = (t^2 - \alpha_{32} t - \alpha_{31}, t) = \int_{-1}^{1} (t^3 - \alpha_{32} t^2 - \alpha_{31} t) dt = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{\alpha_{32} t^3}{3} - \frac{\alpha_{31} t^2}{2}\right.$$

$\Rightarrow \alpha_{32} = 0$, поэтому $e_3 = t^2 - \dfrac{1}{3}$.

Окончательно получаем: 1, t, $t^2 - \dfrac{1}{3}$ – ортогональный базис в $P_2[t]$.

Пример 2.2. Рассмотрим пространство арифметических векторов R^3 со стандартным скалярным произведением (1.4). Пусть

$a_1 = (2,0,-1)$, $a_2 = (5,-1,0)$, $a_3 = (1,7,-3)$.

1) $e_1 = a_1 = (2,0,-1)$.

2) $e_2 = a_2 - \alpha e_1$,

$$0=(e_2,e_1)=(a_2,e_1)-\alpha(e_1,e_1) \quad\Rightarrow\quad \alpha=\frac{(a_2,e_1)}{(e_1,e_1)} \quad\Rightarrow$$

$$\alpha=\frac{5\cdot 2-1\cdot 0+0\cdot(-1)}{4+0+1}=2.$$

Тогда $e_2=(5,-1,0)-2\cdot(2,0,-1)=(1,-1,2)$

3) $e_3=a_3-\beta e_2-\gamma e_1$,

$$0=(e_3,e_1)=(a_3,e_1)-\gamma(e_1,e_1) \quad\Rightarrow\quad \gamma=\frac{(a_3,e_1)}{(e_1,e_1)} \quad\Rightarrow$$

$$\gamma=\frac{1\cdot 2+7\cdot 0-3\cdot(-1)}{5}=1.$$

$$0=(e_3,e_2)=(a_3,e_2)-\beta(e_2,e_2) \quad\Rightarrow\quad \beta=\frac{(a_3,e_2)}{(e_2,e_2)} \quad\Rightarrow$$

$$\beta=\frac{1\cdot 1+7\cdot(-1)-3\cdot 2}{1+1+4}=-2.$$

Тогда

$$e_3=(1,7,-3)+2(1,-1,2)-(2,0,-1)=(1,5,2)$$

Получили ортогональный базис

$e_1=(2,0,-1)$

$e_2=(1,-1,2)$

$e_3=(1,5,2)$

Построим ортонормированный базис:

$$|e_1|=\sqrt{4+0+1}=\sqrt{5}, \quad e_1^o=\frac{1}{|e_1|}e_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$|e_2|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}, \quad e_2^o=\frac{1}{|e_2|}e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$|e_3|=\sqrt{1+25+4}=\sqrt{30}, \quad e_3^o=\frac{1}{|e_3|}e_3=\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$

Получили ортонормированный базис:

$$e_1^o=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right),\ e_2^o=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\ e_3^o=\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$

3. МАТРИЦА ГРАМА.

Свойство билинейности позволяет вычислить скалярное произведение между любыми векторами, если известны скалярные произведения между базисными векторами. При этом скалярные произведения между базисными векторами удобно организовать в матрицу $G_e=\left((e_i,e_j)\right)$, называемую матрицей Грама скалярного произведения в базисе e, если $x=\sum x^k e_k$, $y=\sum y^j e_j$, то

$$(x,y)=\sum_{kj} x^k\left(e_k,e_j\right)y^j=\left(x_e\right)^T G_e y_e \qquad (3.1)$$

здесь Т – символ транспонирования.

Пусть $e=(e_1,\ldots,e_n)$ и $a=(a_1,\ldots,a_n)$ – два базиса, связанных соотношением

$$(e_1,\ldots,e_n)P_{e\to a}=(a_1,\ldots,a_n) \qquad (3.2)$$

где $P_{e\to a}=\left(p_i^j\right)_{i,j=1}^n$ – матрица, которую называют матрицей перехода от базиса e к базису a.

$$a_k=\sum_{j=1}^n p_k^j e_j\ ,\quad k=1,\ldots,n$$

Равенство (3.2) можно переписать в следующей краткой форме:

$$eP_{e\to a}=a \qquad (3.3)$$

Пусть $x=\sum_{k=1}^n x^k e_k$, обозначим вектор столбец его координат в базисе e через x_e:

$x_e=(x^1,\ldots,x^n)^T$. Тогда

$$x=(e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}=ex_e \qquad (3.4)$$

Заметим, что поскольку $x=ex_e$, а базис может быть любым, то $x=ax_a$.

Тогда в силу равенств (3.3) и (3.4) получим, что
$x=ex_e=ax_a=(eP_{e\to a})x_a=e(P_{e\to a}x_a)$

В силу линейной независимости векторов базиса e из равенства векторов $ex_e=e(P_{e\to a}x_a)$ вытекает равенство их координат:

$$x_e=P_{e\to a}x_a \qquad (3.5)$$

Подставив выражение (3.5) в формулу (3.1), получаем
$(x,y)=x_a^T P_{e\to a}^T G_e P_{e\to a} y_a$

Отсюда получаем

$$G_a=P_{e\to a}^T G_e P_{e\to a} \qquad (3.6)$$

Формула (3.6) показывает как меняется матрица Грама при переходе к новому базису.

4. ИЗОМОРФИЗМ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ.

Определение 4.1. Два векторных пространства V_1 и V_2 над полем F называются изоморфными, если существует такое отображение φ, что

1) φ – биекция,
2) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$,
3) $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$

для любых $x,y\in V_1$ и для любого $\lambda\in F$.

Отметим, что пункты 2) и 3) в определении можно заменить на одно эквивалентное им условие: $\varphi(\lambda x+y)=\lambda\varphi(x)+\varphi(y)$, которое называется условием линейности отображения φ.

Если отображение удовлетворяет условиям 2), 3) то его называют линейным.

Теорема 4.1. Пусть V – векторное пространство размерности n над полем F. Тогда V изоморфно арифметическому векторному пространству F^n, причём изоморфизм определяется координатным отображением

$$\varphi_e : V \to F^n.$$

Доказательство.

Предварительно отметим, что при доказательстве теоремы, мы будем записывать элементы арифметического векторного пространства F^n, как вектор-строки без значка транспонирования, чтобы не загромождать запись. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ некоторый базис в векторном пространстве V. Тогда отображение φ_e сопоставляет вектору $x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$ набор его координат $(x^1, \dots, x^n) \in F^n$:

$$\varphi_e : x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n (\in V) \mapsto (x^1, \dots, x^n)(\in F^n).$$

Покажем, что отображение φ_e – изоморфизм. Нам надо показать, что φ_e линейное биективное отображение. Покажем сначала, что φ_e линейное отображение, то есть, что

$$\varphi_e(\lambda x + y) = \lambda \varphi_e(x) + \varphi_e(y)$$

для произвольных $x, y \in V$ и произвольного $\lambda \in F$. Действительно,

$$\varphi_e(\lambda x + y) = \varphi\left((\lambda x^1 + y^1)e_1 + \dots + (\lambda x^n + y^n)e_n\right) = (\lambda x^1 + y^1, \dots, \lambda x^n + y^n) =$$

$$= \lambda(x^1, \dots, x^n) + (y^1, \dots, y^n) = \lambda \varphi_e(x) + \varphi_e(y).$$

Докажем теперь, что отображение φ_e биективно. Покажем сначала его иньективность. Нам надо показать, что из того, что $x \neq y$ вытекает, что $\varphi_e(x) \neq \varphi_e(y)$. Предположим противное $\varphi_e(x) = \varphi_e(y)$, отсюда вытекает, что $\varphi_e(x) - \varphi_e(y) = \overline{0}$. Здесь $\overline{0} = (0, 0, \dots, 0)$ нулевой вектор, все n компонент которого равны 0. Теперь воспользуемся линейностью отображения φ:

$$\varphi_e(x - y) = (x^1 - y^1, \dots, x^n - y^n) = (0, \dots, 0).$$

Отсюда следует, что $x^1 - y^1 = 0$, …, $x^n - y^n = 0$. Таким образом имеем, что $x^1 = y^1$, $x^2 = y^2$, …, $x^n = y^n$, то есть $x = y$. Противоречие. Иньективность доказана.

Покажем сюрьективность отображения φ_e. Рассмотрим произвольный набор $(x^1, \ldots, x^n) \in F^n$. Тогда вектор $x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n$, очевидно, переводится отображением φ_e в заданный набор $(x^1, \ldots, x^n)$. Сюръективность φ_e, а вместе с ней и теорема доказаны.

5. ИЗОМОРФИЗМ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ.

Пусть теперь E_1 и E_2 – евклидовы пространства со скалярными произведениями $(*,*)_1$, $(*,*)_2$.

Определение 5.1. Отображение $\varphi : E_1 \to E_2$ называется изоморфизмом евклидовых пространств, если

1) φ – изоморфизм векторных пространств E_1 и E_2

2) $(x, y)_1 = (\varphi(x), \varphi(y))_2$ для произвольных векторов $x, y \in E_1$.

Теорема 5.1. Все евклидовы пространства данной конечной размерности изоморфны между собой.

Доказательство.

Докажем, что все n– мерные евклидовые пространства изоморфны пространству R^n со скалярным произведением, определенным формулой (1.4), из примера 1.

Пусть E – произвольное евклидово пространство размерности n. Выберем в нем ортонормированный базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Используя процесс ортогонализации, мы доказали, что такой базис всегда существует (см. теорему 2.1). Пусть x – произвольный вектор из E. Разложим его по базису $e = (e_1, \ldots, e_n)$: $x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n$. Поставим в соответствие вектору x набор чисел $x_e = (x^1, \ldots, x^n)^T$. Это соответствие

$\varphi : x \mapsto x_e$ определяет искомый изоморфизм евклидовых пространств: $\varphi_e : E \to R^n$.

Действительно, φ_e изоморфизм векторных пространств (в силу теоремы 4.1), и, достаточно доказать равенство скалярных произведений.

$$(x,y)_E = \left(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i, \sum_{j=1}^{n} y^j e_j\right)_E = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^i y^j (e_i, e_j)_E = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^i y^j \delta_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x^i y^i = (\varphi_e(x), \varphi_e(y))_{R^n}$$

Здесь $(x,y)_E$ – скалярное произведение в E, а $(a,b)_{R^n}$, скалярное произведение в R^n. Таким образом, равенство скалярных произведений доказано, чем и завершается доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов И.В., Стукопин В.А. Линейная алгебра. Векторные пространства. Учебное пособие. – ДГТУ, 2012, 52 с.