ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Математика»

«Элементы комбинаторики и теории вероятностей»

Авторы

Рябых Г.Ю.,

Фролова Н.В.

Ростов-на-Дону, 2017

Аннотация

Пособие включает краткое описание основных понятий комбинаторики и теории вероятностей. Данные указания предназначены для самостоятельной работы студентов по ознакомлению и приобретению минимальных навыков практического использования одного из разделов математики - теории вероятностей. Указания могут быть использованы на практических и лабораторных занятиях.

Предназначено для студентов всех направлений и специальностей.

Авторы

проф. Рябых Г.Ю.

ст. преподаватель Фролова Н.В.

Оглавление

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Люди постоянно интересовались задачами, в которых требовалось найти количество способов расположения множества объектов. Заведующему учебной частью нужно знать сколькими способами можно составить расписание уроков. Мастеру – сколькими способами можно распределить несколько работ за имеющимися станками. Таким образом, представителям самых различных специальностей приходится решать задачи, в которых рассматриваются те или иные комбинации.

Раздел математики, изучающий сколько различных комбинаций, подчинённых различным условиям можно составить из элементов, принадлежащих данному множеству, называется комбинаторикой. Комбинаторика используется для решения транспортных задач, для составления планов производства, в теории вероятностей, математической статистике и во многих других разделах наук.

ПЕРЕСТАНОВКИ

Основным понятием современной математики является понятие множества. Понятие множества относится к первоначальным, простейшим понятиям и формально не определяется. Множество характеризуется объединением некоторых объектов в одно целое. Объекты, образующие множество, называются элементами множества.

Множества будем записывать, располагая его элементы в фигурных скобках:

$\{a; b; c; ... ;e; f\}$

В множестве порядок элементов роли не играет, так

$\{a; b\} = \{b; a\}$

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым множеством и обозначают символом $\emptyset$.

На практике часто возникают задачи, связанные с установлением порядка во множестве.

В общем виде эти задачи можно сформулировать так: дано **n**-элементное множество, сколько порядков в нём можно установить?

Определение. Каждый порядок, установленный в конечном множестве, называется <u>перестановкой</u> его элементов.

Число перестановок из **n**элементов обозначают $\mathbf{P_n}$. Возьмём одноэлементное множество $\mathbf{\{a\}}$. Ясно, что один элемент можно упорядочить единственным образом: единственный элемент приходится считать пер- вым. Следовательно, $\mathbf{P_1} = 1$.

Возьмём двухэлементное множество **{a; b}**. В нём можно установить два порядка

ab или **ba,**

следовательно, число перестановок из двух элементов равно 2, т.е. $P_2 = 2$.

Рассмотрим трёхэлементное множество **{a; b; c}**. У этого множества имеется 3 места и надо по ним распределить 3 элемента: на первое можно поставить любой из трёх элементов, это можно сделать 3 способами. Далее каждый раз остаётся 2 элемента и их надо распределить по двум оставшимся местам. Мы знаем, что это можно сделать $P_2 = 2$ способами. Следовательно, общее число способов упорядочения трёхэлементного множества

$$P_3 = 3*P_2 = 3*2 = 6$$

Таким образом, число способов упорядочения **n**-элементного множества равно **n!**, т.е. число перестановок в **n**-элементном множестве равно **n!.**

$$P_n = n!$$

Для дальнейшего удобно считать, что пустое множество можно упорядочит только одним способом, т.е.

$$P_0 = 1$$

По определению полагаем $0! = 1$.

Пример 1. Сколькими способами могут стать 3 человека в очередь к театральной кассе?

Каждая очередь фиксирует определённый порядок в трёхэлементном множестве. Следовательно, для ответа на вопрос надо найти число порядков в трёхэлементном множестве, т.е. P_3

$$P_3 = 3! = 1*2*3 = 6$$

УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА. РАЗМЕЩЕНИЕ

Определение. Множество вместе с заданным порядком расположения его элементов называют упорядоченным множеством. Упорядоченные множества будем записывать, располагая в круглых скобках его элементы в заданном порядке

$$(x_1; x_2; \dots ;x_n)$$

Например, упорядочивая трёхэлементное множество **{a; b; c}**, мы получаем 6 упорядоченных множеств:

(a; b; c)	**(b; a; c)**	**(c; a; b)**
(a; c; b)	**(b; c; a)**	**(c; b; a)**

Обращаем внимание, что **(a; b; c) ≠ (a; c; b)**

{a; b; c} = {a; c; b}

В комбинаторике конечные упорядоченные множества называются размещениями.

Определение. Размещением из **n** элементов по **m (0 ≤ m ≤ n)** называют каждое упорядоченное **m**-элементное подмножество данного **n**-элементного множества.

Число размещений из **n**элементов по **m**обозначим A_n^m.Найдём размещения из 4-х элементов по 2. Возьмём четырёхэлементное множество **{a; b; c; d}.** Будем составлять упорядоченные двухэлементные множества из данных четырёх элементов **a, b, c, d.** Два места можно заполнить так: на первое место можно поставить любой из 4-х элементов, это можно сделать 4-мя способами. На второе место – любой из 3-х оставшихся элементов, т.е. 3 способами. Всего получаем **4*3** способов.

Получим размещение из 4 элементов по 2

(a; b)	**(b; a)**	**(c; a)**	**(d; a)**
(a; c)	**(b; c)**	**(c; b)**	**(d; b)**
(a; d)	**(b; d)**	**(c; d)**	**(d; c)**

Замечание. Разные размещения из **n**элементов по **m** отличаются друг от друга либо порядком элементов, либо их составом.

Выведем формулу числа размещений из **n**элементов по **m.** Видно, что

$$A_n^1 = n$$

Методом полной математической индукции можно получить формулу для расчета размещений из **n**элементов по **m:**

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 2. Учащиеся 10 класса изучают 9 учебных предметов. В расписании учебных занятий на один день можно поставить 5 различных предметов. Сколько существует различных способов составления расписания на один день?

Решение. Имеем 9-ти элементное множество, элементы которого учебные предметы. При составлении расписания мы будем выбирать 5-ти элементное подмножество и устанавливать в нём порядок, следовательно, это размещение из 9-ти элементов по 5. Нам надо найти A_9^5.

$$A_9^5 = 9*8*7*6*5 = 15120$$

СОЧЕТАНИЯ

В комбинаторике конечные множества называют сочетаниями. Сочетанием из **n**элементов по **m**(**0 ≤m ≤ n)** называют каждое **m-**элементное подмножество данного**n**-элементного множества.

Два различных сочетания из **n**элементов по **m** отличаются по крайней мере одним элементом, т.к. по определению это подмножества, каждое из которых содержит по **m** элементов, взятых из данных **n** элементов, если бы у них все элементы совпадали, то это было бы одно и тоже подмножество, а не разные. Число сочетаний из **n** элементов по **m**обозначимC_n^m.На практике целый ряд различных задач естественным образом приводит к необходимости определения числа сочетаний. Например, при определении числа возможных партий в 10 деталей, взятых из партии в 100 деталей (C_{100}^{10}), при подсчёте числа партий, сыгранных 6 шахматистами, которые сыграли друг с другом по одной партии (C_6^2). Число сочетаний, перестановок и размещений связаны формулой

$$A_n^m = C_n^m * P_m$$

Отсюда получается формула для сочетаний из **n**элементов по **m**

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! * m!}$$

Данная формула даёт число сочетаний из **n**элементов по **m**. Очевидно, что $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$.

Пример 3. В классе 30 учащихся. Двух из них следует назначить дежурными. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Из 30 учащихся будем составлять всевозможные группы по 2 человека, причём порядок в группах не играет роли, следовательно, применяем сочетания.

$$C_{30}^2 = \frac{30 * 29}{1 * 2} = 435$$

При решении задач по комбинаторике следует обращать внимание учитывается порядок в группе или нет. Если порядок учитывается, т.е. составляются упорядоченные множества, то это размещения. Если порядок не учитывается, т.е. составляются множества, то это сочетания.

Например, если мы расставляем три книги А, В, Сна полке, естественно, рассматривать АВС иАСВ как различные комбинации и учитывать порядок книг при подсчёте. Здесь мы применяем размещения. Но если мы отбираем три книги для чтения, то выбор книг АВС иАСВ следует считать одним и тем же: порядок книг не учитывается и поэтому мы применяем сочетания.

Задача 4. Сколько различных экзаменационных комиссий по 3 человека можно составить, если на кафедре 20 преподавателей.

Решение. Из 20 преподавателей будем составлять всевозможные группы по 3 человека в каждой, комиссии должны отличаться хотя бы одним членом и порядком не учитывается, следовательно, применяем сочетания.

Ответ: $C_{20}^{3} = \frac{20*19*18}{3!} = 1140.$

Задача 5. В кружке математики 25 членов. Необходимо избрать председателя кружка, его заместителя, редактора стенгазеты и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Из 25 членов будем составлять группы по 4 человека, порядок в группах учитывается, так как комбинации Иванов – председатель, Петров – заместитель, Сидоров – редактор, Соловьёв – секретарь и Петров – председатель, Иванов – заместитель и т.д. различные, т.е. порядок учитывается, поэтому применяем формулу размещений.

Ответ:

$$C_{25}^{4} = 25 * 24 * 23 * 22 = 303\ 600.$$

Задача 6. Сколькими способами можно расставить 5 книг на книжной полке?

Решение. Каждая расстановка книг фиксирует определённый порядок, надо найти число порядков, каждые можно установить в пятиэлементном множестве, т.е. перестановки из 5-ти элементов.

Ответ:

$$P_5 = 5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120.$$

Задача 7. Сколькими способами можно окрасить трёхкомнатную квартиру (каждая комната окрашивается одной краской, все комнаты окрашиваются в разный цвет), если имеется 10 различных красок

Ответ: $A_{10}^{3}.$

Задача 8. Сколькими способами можно выбрать 6 различных пирожных в кондитерской, где имеется 11 сортов пирожных?

Ответ: $C_{11}^{6}.$

Задача 9. В нашем распоряжении есть 5 разноцветных флагов. Сколько различных сигналов, состоящих из 3 флагов можно поднять на флагштоке?

Ответ: A_5^3.

Задача 10. Имеется 7 путёвок в различные дома отдыха и 7 кандидатов. Сколькими способами можно распределить эти путёвки?

Ответ: $P_7 = 7!$.

Задача 11. Сколько девятизначных чисел можно написать девятью разными значащими цифрами?

Решение. Значащие цифры 1, 2, 3, … , 8, 9. Каждое девятизначное число фиксирует определённый порядок в девятиэлементном множестве.

Ответ: $P_9 = 9!$.

Задача 12. Сколько можно образовать целых чисел, из которых каждое изобреталось бы тремя различными значащими цифрами?

Решение. Из девяти значащих цифр будем составлять группы по три разных цифры в каждой, группы отличаются либо составом цифр, либо порядком, следовательно, применяем формулу размещения.

Ответ: A_9^3.

Задача 13. Сколько можно образовать целых чисел, из которых каждое изображалось бы тремя различными цифрами?

Решение. Из десяти цифр 0, 1, 2, … , 8, 9 можно составить размещений по три:

$A_{10}^3 = 10 * 9 * 8 = 720$, но из этого числа надо исключить те размещения по три, которые начинаются с цифры нуль; их будет столько, сколько можно составить размещений из 9 по 2 значащих цифры, т.е. $A_9^2 = 9 * 8 = 72$. Следовательно, искомое число 720 – 72 = 648.

Ответ: 648.

Задача 14. На собрании должны выступить 5 человек: А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что А должен выступать непосредственно перед Б?

Решение. Возможные варианты: **(А, Б), В, Г, Д**
В, (А, Б), Г, Д

Ответ: $P_4 = 4!$.

Задача 15. В колоде 32 карты. Раздаются 3 карты. Сколько может быть случаев появления одного туза среди розданных карт?

Решение.Раздаются три карты: Одного туза из 4 тузов, имеющихся в колоде можно вытащить C_4^1способами. Две другие карты из оставшихся 28 карт колоды можно вытащить C_{28}^2 способами. Следовательно, искомое решение:

$$C_4^1 * C_{28}^2$$

Ответ: $C_4^1 * C_{28}^2$.

Задача 16. В цехе работает 5 мужчин и 4 женщины. Сколько бригад по 7 человек в каждой из них можно составить при условии, что в бригаде должно быть 4 мужчины?

Решение. В бригаде 7 человек: четверых мужчин из шести можно выбрать C_6^4 способами, трёх женщин из четырёх можно выбрать C_4^3 способами. Следовательно, искомое количество бригад $C_6^4 * C_4^3$.

Ответ: $C_6^4 * C_4^3$.

Задача 17. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 5 бракованных. Сборщик наудачу берёт 3 детали. Сколько будет случаев, когда среди извлечённых 3 деталей будет

а) все стандартные,
б) две стандартные,
в) все бракованные.

Ответ: а) C_{10}^3 б) $C_{10}^2 * C_6^1$ в) C_5^3.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В жизни часто приходиться иметь дело с явлениями, носящими случайный характер. При изучении физических явлений производят наблюдения или опыты, их результаты случайны. Бросьте одну монету, и никто не сможет предсказать какой стороной кверху она упадёт: гербом или цифрой, но бросьте две тонны монет и каждый скажет, что одна тонна упадёт кверху гербом, другая – цифрой. Таким образом и в мире случайностей обнаруживаются определённые закономерности. Математический аппарат для изучения закономерностей массовых однородных явлений даёт теория вероятностей.

В теории вероятностей явления обычно называются событиями, а создание условий, при которых возникает случайное событие – испытанием. События будем обозначать заглавными буквами.

Пример. Пусть имеется ящик со стандартными и нестандартными деталями. Сборщик наудачу вынимает деталь, вынимание детали – испытание. Появление стандартной детали – событие **A**, вынимание нестандартной детали – событие **B**.

События, которые нам приходится наблюдать, можно разбить на три категории:

1) достоверным называется событие, которое в данном опыте обязательно должно произойти

Например, кипение воды при температуре 100°С и нормальном атмосферном давлении – достоверное событие. При однократном бросании игральной кости (т.е. кубика, на гранях которого написаны цифры 1, 2, …, 6) число выпавших очков не может быть больше 6. Это – достоверноесобытие.

2) невозможным называется событие, которое в результате опыта не может произойти

Например, замерзание воды при температуре 100°С и нормальном атмосферном давлении – невозможное событие.

3) случайным называется событие, которое в результате опыта может произойти или не произойти

Например: а) выпадение герба при бросании монеты;
б) попадание при стрельбе по мишени;
в) выигрыш в лотерее.

Случайные события, как и всякие другие, подчиняются определённым законам. Однако, случайное событие зависит от такого большого количества факторов, что их все невозможно учесть. Предугадать исход отдельного случайного события мы не можем, но ежедневный опыт говорит нам о том, что в массе случайных событий имеются определённые закономерности. Ещё не владея понятием вероятности, а исходя лишь из повседневного опыта, каждый из нас согласится с тем, что различные события можно сравнивать по степени их возможности. Так попадание в цель с близкого расстояния более возможно, чем с дальнего. Возможность получения "счастливого билета" на экзамене больше, если лучше подготовлен. Если в лотерее разыгрывается 10 автомобилей и 10000 шариковых ручек, то выигрыш ручки более возможен, чем автомобиля. Нельзя ли ввести числовую характеристику, которая служила бы мерой степени объективной возможности события? Оказывается, такая числовая характеристика существует, это и есть вероятность события.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

События называются равновозможными, если объективно по условиям симметрии ни одно из них не является более возможным, чем другие.

Примеры: 1) появление цифры или герба при бросании монеты – события равновозможные. Действительно, предполагают, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не оказывает влияние на выпадение той или иной стороны монеты.

2) появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости – события равновозможные. Действительно, предполагается, что кость изготовлена из однородного материала, имеет форму правильного многогранника и наличие очков не влияет на выпадение той или иной грани.

События называются несовместимыми, если появление одного из тех исключает возможность появления других событий в одном и том же испытании.

Примеры: 1) из ящика с деталями наудачу извлечена одна деталь. Появление стандартной детали исключает появления нестандартной детали. События появление стандартной детали и появление нестандартной детали – несовместимые события.

2) брошена монета. Появление герба исключает появление цифры. Эти события – несовместимые.

3) попадание в цель и промах при одном выстреле – несовместимые события.

Говорят, что несколько событий образуют в данном опыте полную группу, если в результате опыта обязательно появится хотя бы одно из этих событий.

Пример. Урна с чёрными, белыми и синими шарами. Появление чёрного шара – событие **A**, синего – событие **B**, белого – событие **C**.

Если полная группа состоит из равновозможных и попарно несовместимых событий, то события этой группы называются случаем и говорят, что эти события образуют "классическую схему случаев" (или просто схему случаев).

Примеры. 1) при бросании монеты выпадение герба и выпадение цифры – это два равновозможные и несовместные события, образующие полную группу. Таким образом, имеем схему случаев: выпадение герба и выпадении цифры.

2) при бросании игральной кости имеем 6 случаев: выпадение очка 1, выпадение очка 2, …, выпадение очка 6.

Случай называется благоприятствующим событию **A**, если появление этого случая влечёт за собой появление события **A**.

Пример. Пусть событие **A** – это появление нечётного числа очков при бросании игральной кости. Очевидно, благоприятствующими этому случаю будут три случая (из шести): выпадение очка 1, выпадение очка 3 и выпадение очка 5.

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Определение. Вероятностью события А называют отношение числа случаев, благоприятствующих событию **A**, к общему числу случаев. Вероятность события **A** обозначается символом **P(A)**. Пусть**m** – числоблагоприятствующихслучаев,**n** – общеечислослучаев, тогда

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Очевидно, справедливы следующие свойства вероятности:

1) для любого события **A, D ≤ P(A) ≤ 1** (так как $0 \le m \le n$);

2) вероятность достоверного события равна единице (для достоверного события **m = n)**;

3) вероятность невозможного события равна нулю (в этом случае **m = 0**).

Практическое применение формулы непосредственного подсчёта вероятности требует прежде всего правильного построения схемы испытания. Мы должны прежде всего проверить являются ли события равновозможными, несовместимыми и составляют ли они полную группу, то есть образуют ли они схему случаев.

При подсчёте числа случаев большую помощь могут оказать формулы комбинаторики.

Число размещений из **n** элементов по **m**:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Число перестановок из **n** элементов: $P_n = n!$

Число сочетаний из **n** элементов по **m**: $C_n^m = \frac{n!}{m! * (n-m)!}$

Нередко приходится применять <u>принцип произведения</u> (правило выборки): если объект **A** может быть выбран **m** способами и после каждого из этих выборов объект **B** может быть выбран**n**способами, то выбор **A** и**B**может быть определён**m·n**способами.

НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПОДСЧЁТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Задача 1. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлечённая деталь окажется стандартной.

Решение. Ожидаемое событие (извлечение стандартной детали) обозначим через **A**. Извлечение одной детали из 10 – его исход, является событием. Таких событий возможно 10, может быть извлечена любая деталь, все они попарно несовместны (так как извлекается одна деталь и появление одной детали исключает появление остальных), равновозможны (извлечение производится наугад и ни у одной из детали нет объективных преимуществ быть взятой), составляют полную группу (одна из деталей будет обязательно извлечена). Таким образом имеем схему случаев. Событию **A** благоприятствуют 7 из 10 возможных случаев, то есть **m** = 7,**n** = 10, поэтому

$$P(A) = \frac{7}{10} = 0,7$$

Ответ: 0,7.

Задача 2. Бросаются одновременно две монеты. Какова вероятность выпадения двух гербов (событие **A**)?

Решение. Подсчитаем все возможные случаи. Очевидно, это будут: герб-герб, герб-цифра, цифра-герб, цифра-цифра. Это равновозможные, несовместные события, составляющие полную группу. Общее число возможных случаев **n**= 4. Благоприятствует событию **A** только случай герб-герб, то есть **m** = 1. Тогда

$$P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Ответ: 0,25.

Задача 3. Карточки, на которых написаны буквы **А, Е, К, Р,** перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность, что получится слово "река" (событие **А**)?

Решение. Один вариант расположения карточек от другого отличается лишь порядком, поэтому число всех возможных случаев равно числу перестановок в четырёхэлементном множестве, то есть **n** = P_4 = **41**. Лишь один вариант благоприятствует событию **А** – появлению слова "река", значит**m** = 1. Тогда

$$P(A) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

Ответ: $\frac{1}{24}$.

Задача 4. Набирая номер телефона абонент забыл последние три цифры и, помня лишь то, что эти цифры различные, набрал их наудачу. Найтивероятностьтого, чтонабранынужныецифры (событие**А**).

Решение. Абонент из 10-ти элементного множества 0, 1, 2,…, 9 должен набрать упорядоченные трёхэлементные подмножества, то есть применяем размещения, **n =** A_{10}^{3}. Благоприятствующих случаев 1 – забытая комбинация, **m =** 1. Тогда

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^{3}} = \frac{1}{720}$$

Ответ: $\frac{1}{720}$.

Задача 5. Ученик знает 40 из 50 вопросов программы. Найти вероятность того, что ученик знает оба вопроса, содержащиеся в его экзаменационном билете (событие **А**).

Решение. Подсчитаем общее число билетов по 2 вопроса в каждом из 50 вопросов программы. При составлении билетов мы будем из 50-элементного множества всех вопросов составлять 2-элементное подмножество, причём порядок вопросов не учитывается, следовательно, имеем сочетания: $n = C_{50}^{2}$.

Число благоприятствующих случаев $n = C_{40}^{2}$.

Ответ: 0,6639.

Задача 6. Из участников танцевального кружка, состоящего из 6 мальчиков и 4 девочек, выбирается пара (1 мальчик и 1 девочка) для исполнения танца. Найти вероятность того, что наудачу составленная пара исполнит танец (событие **А**).

Решение. Всего из 10 участников кружка можно составить C_{10}^{2} пар (применяем сочетания, так как порядок в паре роли не играет). Благоприятствующими являются пары, состоящими из мальчика и девочки. Каждый из 6 мальчиков может станцевать с каждой из 4 девочек, следовательно, по принципу произведения, исполнить танец могут 6 * 4 пар, т.е. m = 6 * 4 = 24.

$$P(A) = \frac{6 * 4}{C_{10}^{2}} = \frac{6 * 4 * 2 * 1}{10 * 9} = \frac{8}{15}$$

Ответ: $\frac{8}{15}$.

Задача 7. В урне находится $\mathbf{К_1}$ – белых, $\mathbf{К_2}$ – чёрных и $\mathbf{К_3}$ – красных шаров. Из урны наудачу вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара разного цвета (событие **А**)?

Ответ: $P(A) = \frac{К_1 * К_2 * К_3}{C_{К_1 + К_2 + К_3}^{3}}$.

Задача 8. В ящике 10 деталей, из которых 3 бракованных. Сборщик наудачу взял 4 детали. Найти вероятность того, что из них 2 бракованных.

Решение. Число способов, которыми сборщик может выбрать 4 детали из 10, посчитаем, применяя сочетания (порядок не учитывается), $n = C_{10}^{4}$.

Подсчитаем благоприятствующие случаи: из 4 деталей должно быть две стандартные и 2 бракованные. Две стандартные детали из имеющихся 7 можно выбрать C_{4}^{2} способами, 2 бракованные детали из имеющихся 3-х – C_{3}^{2} способами, по принципу произведения

$$m = C_{4}^{3} * C_{3}^{2}$$

$$P(A) = \frac{C_4^2 * C_3^2}{C_{10}^4} = \frac{\frac{7!}{2! * 5!} * \frac{3!}{2! * 1!}}{\frac{10!}{4! * 6!}} = 0,3$$

Ответ: 0,3.

Задача 9. В группе 12 студентов, из которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных 9 студентов 5 отличников (событие **А**).

Решение. $n = C_{12}^9 m = 4 * C_8^5$

$$P(A) = \frac{4 * C_8^5}{C_{12}^9} = \frac{14}{55}$$

Ответ: $\frac{14}{55}$.

Задача 10. Десять человек случайным образом садятся на десятиместную скамейку. Найти вероятность того, что два определённых лица окажутся рядом (событие **А**).

Решение. Общее число способов рассадить 10 человек на десятиместной скамейке равно $\mathbf{P_{10}} =$ 10, то есть **n** = 10.

Подсчитаем число благоприятствующих случаев. Два выбранных лица могут сесть рядом 18 способами.

Оставшиеся 8 мест могут быть распределены среди оставшихся 8! Лиц числом способов равным 8!. Согласно принципу произведения **m** = 18 * 8!

$$P(A) = \frac{18 * 8!}{10!} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Ответ: 0,2.

Задача 11. Группа студентов из 8 человек садится в поезд, насчитывающий 10 вагонов. Каждый из студентов выбирает вагон случайно. Какова вероятность того, что все они попадут в разные вагоны (событие **А**)?

Решение. Подсчитаем общее число способов, которыми 8 человек могут сесть в 10 вагонов. Первый студент может сесть в любой из 10 вагонов, т.е. $\mathbf{m_1}$ = 10 способами, второй также $\mathbf{m_2}$ = 10 способами, … 8-ой также $\mathbf{m_8}$ = 10 способами, всего число способов $\mathbf{n = m_1 * m_2 * \ldots * m_8 = 10^8}$

Благоприятствующими событию А будут размещения из 10 по 8, их число $\mathbf{A_{10}^8}$, то есть $\mathbf{m = A_{10}^8}$

$$\mathbf{P(A) = \frac{A_{10}^8}{10^8} \approx 0{,}0187}$$

Ответ: 0,0187.

Задача 12. На книжной полке случайным образом расставлены 4 книги по алгебре и 3 – по геометрии. Какова вероятность, что все книги по одному предмету окажутся рядом (событие **А**)?

Решение. Общее число случаев, которыми можно расставить 7 книг на полке равно числу перестановок в 7-элементном множестве, то есть $\mathbf{n = P_7 = 7!}$. Подсчитаем благоприятствующие случаи. 4 книги по алгебре, расположенные рядом можно переставить **4!** Способами и после каждой такой перестановки 3 книги по геометрии можно переставить **3!** Способами. По принципу произведения число таких способов **4!*3!**. Кроме того, сами комплекты книг могут быть переставлены 2 способами. Следовательно, **m = 2 * 4! *3!**.

Ответ: $\mathbf{P(A) = \frac{2 * 4! * 3!}{7!} = 0{,}057}$.

Упражнения.

1. Составляется команда космического корабля: 1 командир, 1 врач и 1 инженер (событие **А**). На место командира имеется 4 кандидата, на место врача – 3 и на место инженера – 3. Изгруппыкандидатоввыбираюттроих. Каковавероятностьсобытия**А**?

Ответ: $$\mathbf{P(A) = \frac{4 * 3 * 3}{C_{10}^3} = 0{,}3}.$$

2. Какова вероятность того, что наудачу выбранное шестизначное число составлено из чётных цифр (событие **А**)?

Ответ: $\mathbf{P(A) = \frac{4^6}{9 * 10^5}}$.

3. Некоторый алфавит состоит из 10 различных букв. Пользуясь данным алфавитом, наудачу пишут слово, состоящее из четырёх букв. Найти вероятность того, что случайно написан-

ное слово состоит из различных букв (событие **A**).

Ответ: $$P(A) = \frac{A_{10}^4}{10^4}.$$

4. На складе имеется 15 приборов, причём 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди 5 взятых наудачу приборов окажутся 3 Львовского завода (событие **A**).

Ответ: $$P(A) = \frac{C_{10}^3 C_5^2}{C_{15}^5} \approx 0,4.$$

5. В лотерее 100 билетов, из них 40 выигрышных. Какова вероятность того, что ровно 1 из 3 взятых билетов окажется выигрышным (событие **A**)?

Ответ: $$P(A) = \frac{C_{40} * C_{30}}{C_{100}^3} \approx \frac{236}{539}.$$

6. Наудачу выбирается телефонный номер, состоящий из 5 цифр. Найти вероятность того, что все цифры номера различные (событие **A**).

Ответ: $$P(A) = \frac{A_{10}^3}{10^5} = 0,3024.$$

7. Какова вероятность угадывания задуманного двухзначного числа, образованного из нечётных цифр?

Ответ: $$P(A) = \frac{1}{5 * 5} = 0,04.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. ГМУРМАН В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М: Наука. 2006.
2. ГМУРМАН В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М: Наука. 2006.